

# RETÍCULOS EN ESPACIOS EUCLÍDEOS

JUAN PABLO ROSSETTI

RESUMEN. Un *retículo* (o *lattice*) en un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de combinaciones lineales enteras de  $n$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ .

Intentaremos ver un panorama general de los lattices en  $\mathbb{R}^n$  y de algunos de los problemas más importantes relacionados con ellos, a saber: *packing problem* (empaquetamiento de esferas); *covering problem* (cubrimiento con esferas); *kissing number* (número de contacto); *lattice quantizer problem* (retículos cuantizadores). Para esto, comenzaremos con definiciones básicas, y con la construcción de algunos lattices especiales.

Como disponemos de tres clases, veremos en profundidad tres tópicos:

1. mejor *lattice packing* en dimensiones muy bajas ( $\leq 4$ ). En particular, la desigualdad de Mordell, y su aplicación al caso  $n = 4$ .
2. Clasificación de los llamados *lattices de raíces*, mediante el *método de pegado* de Kneser.
3. Isospectralidad de lattices. Ejemplos de Milnor, Kneser, Conway & Sloane, etc.

## ÍNDICE

1. Introducción	52
2. Algunas nociones básicas	58
Apéndice: dos teoremas algebraicos.	61
Ejercicios	62
3. Lattice Packings	63
3.1. Secciones	65
3.2. Desigualdad de Mordell	67
3.3. Digresión: definición de densidad para empaquetamientos.	68
Ejercicios	71
4. Root lattices	72
4.1. El método de pegado de Kneser	72
4.2. Los lattices $A_n$ , $D_n$ y $E_n$ .	73
Ejercicios	79
5. Isospectralidad de lattices	80
5.1. Ejemplo de Milnor en dimensión 16.	80
5.2. Unas palabras de historia.	83
5.3. Ejemplos de Conway-Sloane en dim 6 (y 5)	83
Ejercicios	86
Referencias	87

## 1. INTRODUCCIÓN

**Definición 1.1.** Un *retículo* (o *lattice*)<sup>1</sup>  $\Lambda$  en un espacio uclideo  $R^n$  es el conjunto de combinaciones lineales enteras de  $n$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ . En símbolos,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i, \quad \text{donde } m_i \in \mathbb{Z}.$$

**Ejemplo 1.2.** Un ejemplo muy sencillo de lattice es  $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ , es decir los puntos del espacio  $\mathbb{R}^n$  cuyas coordenadas son todas enteras. Este lattice será llamado *cúbico*, o también el lattice *canónico* o *standard*.

A modo de motivación, introduciremos algunos de los problemas más importantes relacionados con lattices

1. Empaquetamiento de esferas	<i>packing problem</i>
2. Número de contacto	<i>kissing number</i>
3. Cubrimiento con esferas	<i>covering problem</i>
4. Retículos cuantizadores	<i>lattice quantizers</i>
5. Formas cuadráticas	<i>quadratic forms</i>
6. Isospectralidad	<i>isospectrality</i>
7. Relación con Códigos	<i>lattices and codes</i>
8. Poliedros y embaldosamientos	<i>polyhedra and tilings</i>

CUADRO 1. Lista de problemas importantes relacionados con lattices (en la columna de la derecha figura el nombre en Inglés).

En este ‘minicurso’, sólo abordaremos algunos de estos puntos. Además, hay otros problemas muy importantes relacionados con lattices que no incluimos. Por ejemplo, el famoso Teorema de Minkowski —luego generalizado por Blichfeldt [Bl1]— que dice que un conjunto convexo, simétrico respecto al origen, de volumen  $\geq 2^n$ , contiene en su interior o en su frontera un punto con todas sus coordenadas enteras (además del origen). A partir de este resultado, Minkowski obtuvo muchos otros, dando origen a la llamada *Geometría de Números*, considerada parte de la Teoría de Números.

También dejaremos de lado los problemas de contar cuántos puntos de un lattice están dentro de una cierta región, ya estudiado por Gauss, y aún en gran desarrollo.

Por último, mencionamos los problemas *locales*, como son los de hallar, dentro del espacio de lattices, los que localmente maximizan la densidad —llamados *extremos*—; o poniendo condiciones menos restrictivas, los lattices *perfectos* (ver por ejemplo [Ma]).

A continuación explicamos brevemente cada uno de los temas de la lista.

**1. Packing problem.** Éste es el problema de *empaquetamiento de esferas* en espacios euclídeos de dimensiones 1, 2, 3, 4, 5, . . . . Dado un número grande de esferas iguales, ¿cuál es el modo más eficiente (es decir, más denso) de empaquetarlas?

Como se puede intuir, esto tiene aplicaciones importantes. En dimensión 3, el problema tiene una historia extremadamente rica. Se lo conoce como *conjetura de Kepler*, puesto que fue el mismo Johannes Kepler quien en el año 1610 planteó el problema, intuyendo una respuesta, la de “las naranjas en la verdulería”.

<sup>1</sup>lo pronunciaremos *látiz*.

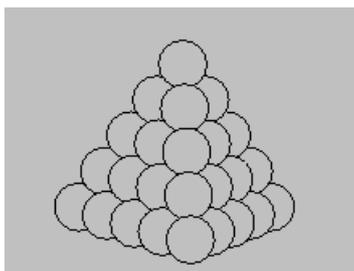


FIGURA 1. Forma en que se apilan las naranjas en una verdulería.

Notablemente, siendo ésta la respuesta correcta, le ha llevado a la matemática unos 400 años poder demostrarlo. En el camino, quedaron muchas ‘pruebas’ fallidas. Recientemente, Thomas C. Hales ha completado una prueba [Hal], que llevará muchos años hasta ser verificada en todos sus detalles. A pesar de esto, los expertos en el tema opinan que la prueba de Hales es correcta, por lo que ahora se considera probada la Conjetura de Kepler.

Al mejor ‘packing’ se lo puede obtener también colocando esferas del mismo radio centradas en los puntos de un lattice llamado face-centered cubic lattice (fcc lattice). Ver Figuras 1 y 2.

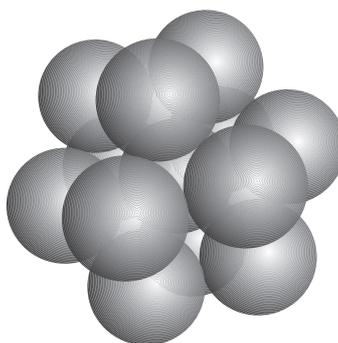


FIGURA 2. Bolas dispuestas con sus centros en el fcc lattice.

El nombre ‘fcc’ lattice se debe a que se obtiene a partir del lattice cúbico, adjuntando puntos en los centros de las caras (faces). Este lattice pertenece a una familia muy importante de lattices, la familia  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\dim A_n = n$ , que a su vez forman parte de los llamados *root lattices* o *retículos de raíces*, que veremos mejor más adelante (en la Sección 4).

Hay diferencia al hablar del mejor *sphere packing* en general y el mejor *sphere lattice packing*. En el primer caso, ya en dimensión 4 el problema no está resuelto. En el segundo caso, se conoce la respuesta hasta dimensión 8 inclusive. Sin embargo, vale la pena remarcar que esto se conoce desde 1935, y desde entonces el caso en dimensión 9 no se ha podido resolver aún. Ampliaremos estos comentarios en la Sección 3.

**2. Kissing number.** Este problema consiste en determinar, para cada dimensión  $n$ , cuántas esferas se pueden colocar alrededor de una fija (todas del mismo radio) de modo que todas toquen o ‘besen’ a la esfera fija.

En dimensión 2 la solución es sencilla, siendo el kissing number igual a 6.

En dimensión 3 el problema —conocido como el *problema de las 13 esferas*— tiene una historia muy interesante, incluyendo una famosa controversia en 1694 entre David Gregory y Sir Isaac Newton. No es muy difícil reducir las posibilidades a que puede haber a lo sumo 13

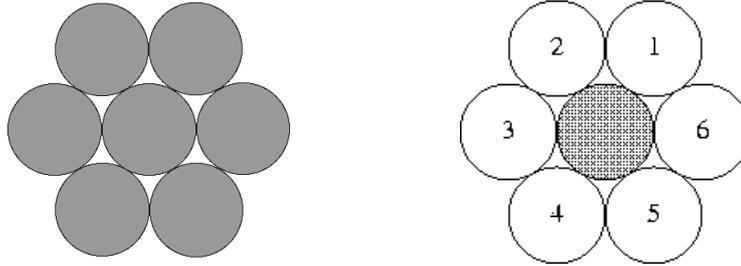
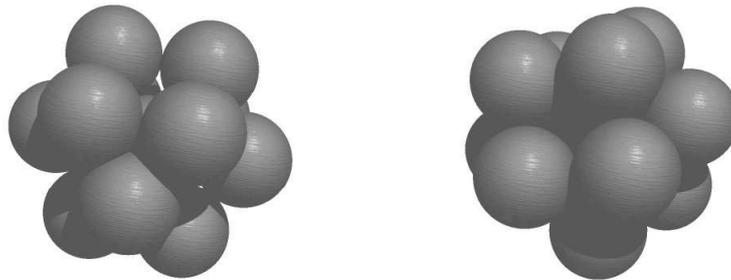


FIGURA 3. Kissing number en dimensión 2

esferas alrededor de una fija. Por otra parte, si se colocan 13 esferas del mismo radio, una en el centro, y las otras 12 en lo que serían los vértices de un icosaedro, se observa que estas 12 tocan a la central, y sin embargo no se tocan entre ellas, dejando suficiente espacio inclusive como para moverse cualquiera de ellas de un lugar a otro, como si ‘orbitaran’ alrededor de la central.

FIGURA 4. Dos arreglos distintos que muestran que el kissing number en dimensión 3 es  $\geq 12$ . El segundo, corresponde al icosaedro.

Dicho esto, ¿habrá o no suficiente espacio como para poner otra esfera orbitando alrededor de la central?

Si bien hay muchas pruebas sobre el número correcto, ninguna de ellas es verdaderamente elemental, como a uno le gustaría ver para un problema de este tipo, finito y de naturaleza tan concreta (ver [CS], [Mu1]).

El estudio en dimensiones mayores es muy interesante, y se lleva a cabo con métodos muy diversos, destacándose la optimización no lineal (ver [Mu2], [Mu3]).

**3. Covering problem.** De algún modo, esto es un *problema dual* del packing problem. Pregunta por la forma más económica de cubrir el espacio euclídeo  $n$ -dimensional con esferas (que se superponen) del mismo radio.

Este problema es tanto o más interesante que los anteriores, y aún más difícil de resolver. Tiene aplicaciones importantes, como por ejemplo, a radares, comunicaciones, etc. Para lattices está resuelto hasta dimensión 5 solamente, mientras que en general, sólo hasta dim 2!

La demostración en dimensión 5 fue lograda después de mucho trabajo por Ryškov y Baranovskii (resumida en [RB]). Consiste en clasificar todos los lattices en dicha dimensión, de acuerdo a su celda de Voronoi.

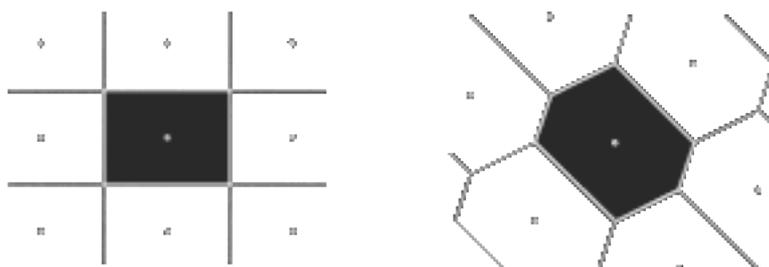


FIGURA 5. Celdas de Voronoi para lattices en dimensión 2

**4. Lattice Quantizers.** Un *cuantizador* (o *quantizer*) puede ser pensado como un *conversor analógico-digital*. Son extensamente usados en el mundo real, por ejemplo en sistemas de comunicaciones digitales, en redes de telefonía de larga distancia, en instrumentos de medida digitales, etc.

Cuando un mensaje es enviado a través de un canal ruidoso, es de interés eliminar ese ruido agregado al mensaje original. Esto es similar a problemas en teoría de códigos, con los cuales hay una íntima relación.

Bajo ciertas condiciones generales, un lattice puede ser considerado como un quantizer vectorial. Alrededor de cada punto del lattice se encuentra su celda de Voronoi, la cual se usa para convertir cada punto dentro de ella en un punto del lattice. De este modo se obtiene el conversor analógico-digital.

Interesa medir cuánto ha sido el error promedio cometido, lo cual se hace usualmente mediante la integral de las distancias al cuadrado en la celda de Voronoi. Ésta es la cantidad que se quiere minimizar, al variar los lattices. El problema para lattices se ha resuelto sólo hasta dimensión 3 [BS].

**5. Formas cuadráticas.** Hay una relación directa entre lattices y formas cuadráticas definidas positivas. En verdad, podríamos hablar de una identificación, donde a lattices ‘equivalentes’ le corresponden formas cuadráticas ‘equivalentes’. Entre los problemas más importantes para éstas, se encuentran:

- clasificación en cada dimensión;
- determinar los enteros  $n$  representados por las mismas (al valuarlas en enteros);
- hallar el menor entero representado por una forma cuadrática dada.

Finalmente, mencionamos el famoso teorema de Lagrange, que dice que todo entero se puede representar como la suma de cuatro cuadrados.

**6. Isospectralidad.** Diremos que dos lattices son *isospectrales* si los multiconjuntos de las longitudes de sus vectores (i.e. contados con multiplicidad) coinciden. Esta definición está bien justificada porque dos toros planos  $\Lambda_1 \setminus \mathbb{R}^n$  y  $\Lambda_2 \setminus \mathbb{R}^n$  son *isospectrales* si y sólo si los lattices  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  lo son.

Un problema de mucho interés es el de buscar pares de variedades Riemannianas distintas (es decir, no isométricas) que sean isospectrales. A través de lattices se obtuvo el primer ejemplo de este tipo, dando respuesta así a un problema general de Geometría Espectral, cuyos orígenes se remontan a fines del siglo XIX.

Veremos varios ejemplos de lattices isospectrales: Milnor en dimensión 16, Kneser en dim. 12, Conway & Sloane en dims. 6 y 5; y plantaremos algunos problemas y preguntas abiertas en el tema.

**7. Relación entre Códigos y Lattices.** Hay una relación estrecha entre lattices y códigos, en especial con los autocorrectores, que les permite a ambos temas enriquecerse el uno del otro (ver el libro [Eb], totalmente dedicado a esta relación).

Es sencillo construir un lattice  $\Lambda$  a partir de un código lineal binario  $\mathcal{C}$ , como la preimagen de  $\mathcal{C}$  de la proyección  $\phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ ; i.e.,  $\Lambda = \phi^{-1}(\mathcal{C})$ .

En este curso, este tema sólo aparecerá cuando estudiemos el asombroso ejemplo de lattices isospectrales de Conway & Sloane en dimensión 6.

**8. Poliedros, embaldosamientos, paralelohedra.** Éste es un tema muy amplio, del cual sólo daremos ahora una idea de la *Conjetura de Voronoi* sobre paralelohedra.

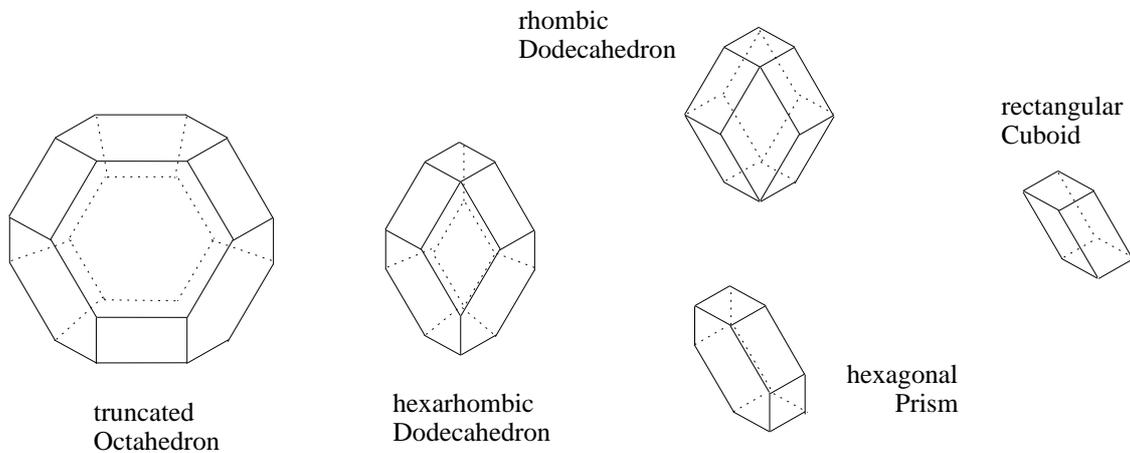


FIGURA 6. Los cinco paralelohedra de Fedorov, son a su vez las cinco celdas de Voronoi de lattices en dimensión 3. Sólo el octaedro truncado es *primitivo*.

Un *tiling* o *embaldosamiento* del espacio es una partición del mismo en *tiles* o *baldosas*. A veces se pide que todas las baldosas sean congruentes entre sí, a veces se pide además que todas estén igualmente orientadas, i.e., que todas sean las trasladadas de una fija. En este caso, estamos muy cerca de los *paralelohedra*, que se definen como *polytopes*<sup>2</sup> convexos que embaldosan el espacio.

Este tema ha sido estudiado intensamente, entre otros por Voronoi, quien en 1909 formuló la siguiente conjetura:

*todo paralelohedron es un "Voronoi polytope" con respecto a algún lattice,*

es decir, es la imagen por una transformación afín de la celda de Voronoi de un lattice. El mismo Voronoi probó esto para las dimensiones más bajas y para el caso de paralelohedra primitivos, es decir, aquellos  $P$  donde  $d+1$  copias de  $P$  se encuentran en cada vértice. Además, la conjetura ha sido probada para algunos casos especiales, como el de los *zonotopes*.

Notas: éstas son las notas de un curso de 3 clases en el Congreso 'elENA 3', Vaquerías, Córdoba, Agosto de 2006. No pretenden tener ninguna originalidad pues muchas partes, así como varias figuras, han sido tomadas de libros y artículos citados en las referencias.

<sup>2</sup>análogos de poliedros, en dimensiones mayores.

Disculpas: he preferido usar algunos términos en Inglés, como 'lattice', 'kissing number', etc, porque así es como se los encuentra usualmente. Les pido disculpas a quienes les pueda molestar esto.

## 2. ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS

De acuerdo a su definición, a un lattice  $\Lambda$  se lo puede ver como un conjunto de puntos en el espacio. Sin embargo, hay otras formas de ver a  $\Lambda$  que resultan más interesantes. En lugar de pensar el vector  $\mathbf{v} \in \Lambda$  como un punto de  $\mathbb{R}^n$ , lo identificamos con la traslación en  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbf{v}$ . Es decir, la transformación rígida del espacio  $L_{\mathbf{v}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{x}$ . Así, identificamos

$$\begin{aligned}\Lambda &\longleftrightarrow L_{\Lambda} \\ \mathbf{v} &\longleftrightarrow L_{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

En este caso, hablaremos de *retículo* o *lattice de traslaciones*.

Esto da origen a una *acción* del lattice  $\Lambda$  en  $\mathbb{R}^n$ , que resulta ser *propriadamente discontinua*. En particular, no hay puntos fijos en esta acción —excepto cuando el vector  $\mathbf{v}$  es el vector nulo— por lo que el *espacio de órbitas*, o *cociente*  $T := \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$ , no tiene singularidades. Por consiguiente  $T$  resulta ser una variedad diferenciable, compacta y sin borde. Si a  $T$  le proveemos las distancias (o la *métrica*) de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $T$  será una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , llamada *toro plano*. De este modo, queda clara la relación de lattices con *Geometría Riemanniana*. Si bien en cada dimensión todos los toros planos son todos topológicamente iguales, no lo son geoméricamente, como veremos mejor en la Sección 5.

$\Lambda$  con la suma es un grupo abeliano, que lo podemos pensar como un subgrupo de  $(\mathbb{R}^n, +)$ . Desde este punto de vista, los lattices en una dimensión fija son todos isomorfos entre sí.

Un lattice  $\Lambda$  en  $\mathbb{R}^n$  tiene muchas **bases**, es decir, subconjuntos  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \Lambda$  de vectores linealmente independientes, que *generan*  $\Lambda$ , es decir, cuyas combinaciones lineales enteras dan todo  $\Lambda$ . En símbolos,  $\Lambda = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$

Consideramos ahora el **parallelotope**

$$P := \sum_{i=1}^n t_i v_i \quad \text{para } 0 \leq t_i \leq 1.$$

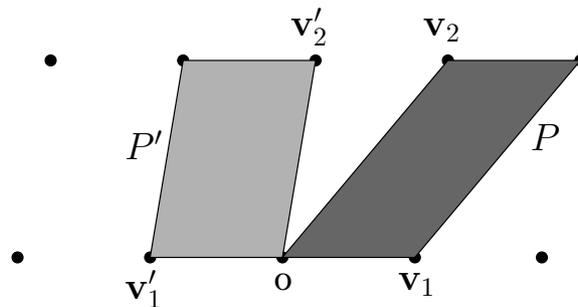


FIGURA 7. Los parallelotopes  $P$  y  $P'$  correspondientes a bases distintas de un mismo lattice tienen el mismo volumen.

Claramente,  $P$  es un **dominio fundamental** para la acción arriba mencionada, aunque por supuesto, no es el único, ni el mejor. Definimos el **volumen** del lattice,  $\text{vol}(\Lambda)$ , como el volumen de  $P$ . En el Ejercicio 1, pedimos que pruebe que el volumen de un lattice no depende de la base elegida.

Dado  $\mathbf{p} \in \Lambda$ , la **celda** o **región de Voronoi** de  $\mathbf{p}$  se define como el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$  que están más cerca (o igual) de  $\mathbf{p}$  que de cualquier otro punto de  $\Lambda$ . Este concepto fue introducido por Dirichlet en dimensión 2, por lo que se llama *dominio*, *región* o *celda de Dirichlet-Voronoi*.

La celda de Voronoi es también un dominio fundamental, y provee un *embaldosamiento* o *tiling* del espacio. En dimensión 2, hay esencialmente dos **tipos** o **formas** de celdas de Voronoi asociadas a lattices (ver Figura 5). Una es hexagonal y la otra rectangular. Genéricamente, un lattice en dimensión 2 tiene celda de Voronoi hexagonal.

Un lattice rectangular tiene celda de Voronoi rectangular. En dimensión 2, la forma hexagonal es llamada **primitiva** porque corresponde al caso genérico. Puede ser caracterizada también por la propiedad que en el tiling correspondiente, el mínimo número posible de polígonos se encuentran en cada vértice —tres en este caso.

En dimensión 3 hay cinco tipos de celdas de Voronoi (ver Figura 6), siendo sólo uno de ellos primitivo (E.S. Fedorov [Fed]).

En dimensión 4 el problema fue resuelto por Delone [Del], (ligeramente corregido por Stogrin [Sto]) con una enumeración de 52 tipos de lattices. El número de formas primitivas ahora no es más uno, sino tres.

El ejemplo standard de una no-base de un lattice es tomar en  $\mathbb{R}^2$  el lattice cuadrado  $I_2 := \mathbb{Z}^2$  y los vectores  $\mathbf{v}_1 := e_1 + e_2$  y  $\mathbf{v}_2 := e_1 - e_2$ . Entonces, si bien  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ , no lo es de  $I_2$ , pues no lo genera.

En cambio,  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  es un *sublattice* de  $I_2$ , de *índice* 2. En general, decimos que un subconjunto  $\Lambda'$  de  $\Lambda$  es un **sublattice** de  $\Lambda$  si a su vez es un lattice en el mismo espacio que  $\Lambda$ .

Notemos que si  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  es un sublattice, entonces el cociente  $\Lambda/\Lambda'$  es un grupo finito. El **índice** de  $\Lambda'$  en  $\Lambda$  es el cardinal de este grupo.

Para  $t \in \mathbb{R}$  se define  $t\Lambda := \{t\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \Lambda\}$ . Llamaremos *homotecia* a esta operación.

Un sublattice especial es  $2\Lambda = \{2\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \Lambda\}$ . En este caso el grupo cociente  $\Lambda/2\Lambda$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^n$ , y por lo tanto tiene cardinal  $2^n$ .

Las transformaciones rígidas del espacio  $R^n$  están dadas por el grupo  $O(n)$ . Podemos pensar que  $O(n)$  actúa en el conjunto de lattices de  $R^n$ . Diremos que dos lattices en la misma órbita por esta acción son **congruentes** (o *iguales*), y se denotan con el símbolo  $\equiv$ .

Por otra parte, si dos lattices están relacionados por una homotecia, se llamarán **semejantes** (o **equivalentes**), y los denotaremos con  $\cong$ . Para todos los problemas sobre lattices mencionados en la Introducción, no hace ninguna diferencia considerar lattices semejantes, por lo que se justifica el nombre de equivalentes para esta noción.

Definimos el **determinante** de un lattice  $\Lambda$  por  $\det(\Lambda) = \text{vol}(\Lambda)^2$ .

Hay una fórmula simple para calcularlo. Supongamos que las coordenadas de los vectores de una base de  $\Lambda$  son

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1m})$$

$$\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m})$$

...

$$\mathbf{v}_n = (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nm}), \text{ donde } m \geq n.$$

La matriz  $M := \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix}$  se llama *matriz generadora* del lattice.

La matriz  $A := MM^{\text{tr}}$  se llama **matriz de Gram** del lattice.

Notemos que la entrada  $(i, j)$  de  $A$  es el producto interno  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ .

Entonces, se cumple que  $\det(\Lambda) = \det(A)$ .

Si  $M$  es cuadrada, entonces  $\det(\Lambda) = \det(M)^2$ .

**Ejemplo 2.1.** Veamos un par de ejemplos muy simples para ilustrar las definiciones anteriores.

Consideramos en dimensión 2 los dos siguientes lattices:

$H$ , el **lattice hexagonal**, generado por los vectores  $(1, 0)$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , y

$A_2 := \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ .

Vale la pena remarcar que si bien usamos tres coordenadas para describirlo,  $A_2$  está contenido en el espacio euclídeo 2-dimensional  $\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ .

Una base para  $A_2$  es  $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ . Entonces tenemos como matrices generadoras para  $H$  y  $A_2$  respectivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego, las matrices de Gram son respectivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Así, calculamos fácilmente  $\det(H) = \frac{3}{4}$  y  $\det(A_2) = 3$ .

No es difícil ver que estos dos lattices son equivalentes. Por ejemplo, se puede multiplicar  $H$  por  $\sqrt{2}$ , obteniendo así la matriz de Gram  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , que también se obtiene al tomar en  $A_2$  la base  $\{(1, -1, 0), (0, -1, 1)\}$ . Y la matriz de Gram determina el lattice salvo congruencia.

Como se puede ver, una ventaja de usar  $A_2$  en lugar de  $H$  es que uno tiene coordenadas enteras, en lugar de la molesta  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Además, en  $A_2$  se aprecia inmediatamente la simetría entre las tres coordenadas.

**Ejemplo 2.2.** Definimos los lattices *face-centered cubic* y *body-centered cubic* (abreviados fcc y bcc) como aquellos donde se agregan a un lattice cúbico los puntos en los centros de las caras de los cubos para el fcc y los centros mismos de los cubos para el bcc. (ver Figura 8).

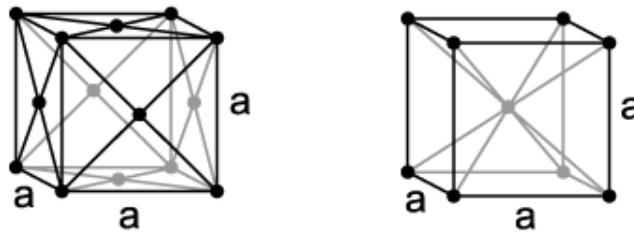


FIGURA 8. Los lattices fcc y bcc, basados en un lattice cúbico de lado  $a$ .

En varios ejercicios se pide que trabaje con estos dos importantes lattices.

**Definición 2.3.** Dado un lattice  $\Lambda$  en  $\mathbb{R}^n$ , sea  $\Lambda^* := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z}\}$ , el *lattice dual* de  $\Lambda$  (esta noción es la correspondiente a la de dual en general).

**Definición 2.4.** Un lattice  $L$  se dice **entero** si los productos internos de sus vectores son enteros, i.e.,  $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ , para todo  $x, y \in L$ .<sup>3</sup>

Notar que si  $L$  es entero, entonces  $L \subseteq L^*$ , o lo mismo, él es un sublattice de su dual.

<sup>3</sup>Algunos autores definen ‘entero’ cuando las normas de los vectores son enteras.

Un lattice entero  $L$  se dice **par** si las normas de todos sus vectores son pares, i.e.  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \in 2\mathbb{Z}$ , para todo  $\mathbf{x} \in L$ .

Un lattice entero se dice **unimodular** si su volumen es 1, o equivalentemente, si es igual a su dual.

*Observación 2.5.* Si  $L$  ( $\neq 0$ ) es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$  y el cardinal de su intersección con un intervalo  $(t, s)$  es finita, entonces  $L$  es un lattice en  $\mathbb{R}$ .

Lo anterior vale con más generalidad, pasando a  $\mathbb{R}^n$ :  
*si  $L$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}^n$  y el cardinal de su intersección con una bola centrada en el origen es finita, entonces  $L$  es un lattice de dimensión  $k \leq n$ , en algún subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Apéndice: dos teoremas algebraicos.** Haremos aquí unos comentarios de Álgebra, que pueden ser útiles para resolver los ejercicios 9 y 10 de esta sección.

Primero, recordamos un teorema general sobre módulos libres, y luego lo aplicaremos a nuestro caso.

**Teorema 2.6.** (ver [Hu] *Thm. 6.1*) Sea  $F$  un módulo libre sobre un D.I.P.<sup>4</sup>  $R$ , y  $G$  un submódulo de  $F$ . Entonces  $G$  es un  $R$ -módulo libre y  $\text{rango}(G) \leq \text{rango}(F)$ .

A nosotros nos servirá tomar  $F$  en el teorema como  $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ , que es un módulo libre sobre el DIP  $\mathbb{Z}$ . Si  $\Lambda'$  es un subgrupo aditivo de  $\Lambda$ , entonces  $\Lambda'$  juega el rol de  $G$  en el teorema, luego resulta que  $\Lambda'$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre de rango menor o igual que el rango de  $\Lambda$ . En particular,  $\Lambda'$  tiene un base.

**Teorema 2.7.** Si  $M$  y  $N$  son grupos abelianos y  $M'$  y  $N'$  son subgrupos de  $M$  y  $N$  respectivamente, entonces

$$\frac{M \oplus N}{M' \oplus N'} \cong \frac{M}{M'} \oplus \frac{N}{N'}.$$

Si  $\Lambda' \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ ,  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  subgrupos, entonces existe una base de  $\Lambda$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  y números  $m_1, \dots, m_k$ , con  $k \leq n$ , tales que  $\{m_1\mathbf{v}_1, \dots, m_k\mathbf{v}_k\}$  es una base de  $\Lambda'$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\Lambda'} &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle m_1\mathbf{v}_1, \dots, m_k\mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{Z}}} \\ &= \frac{\langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle m_1\mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \langle m_k\mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{Z}}} \\ &\cong \frac{\langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle m_1\mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{Z}}} \oplus \dots \oplus \frac{\langle \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle m_k\mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{Z}}} \oplus \langle \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}} \\ &\cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{n-k}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>D.I.P. significa *dominio de ideales principales*, que aquí siempre lo pensaremos como el anillo de enteros  $\mathbb{Z}$ .

**Ejercicios.**

1. Probar que el volumen de un lattice no depende de la base elegida para calcularlo.  
[Posible ayuda: recordar de Algebra Lineal que una matriz  $n \times n$  con coeficientes en el anillo  $\mathbb{Z}$  es inversible en  $\mathbb{Z}$  si y sólo si su determinante tiene inverso en  $\mathbb{Z}$ .]
2. Probar que  $\text{vol}(t\Lambda) = t^n \text{vol}(\Lambda)$  cuando  $\Lambda$  es un lattice en dimensión  $n$ .
3. Probar que el kissing number en dimensión 2 es 6.
4. Probar que el face-centered cubic lattice (fcc lattice) y el body-centered cubic lattice (bcc lattice) no son equivalentes.
5. Hallar la matriz generadora y la de Gram, el volumen, el determinante, los vectores mínimos, las primeras 5 cáscaras<sup>5</sup> y la celda de Voronoi de los siguientes lattices:
  - 1) en **dimensión 1**:  $I_1 = \mathbb{Z}$ ;  $A_1$ ;
  - 2) en **dimensión 2**:  $I_2 = \mathbb{Z}^2$ ; el lattice hexagonal;  $A_2$ ;  $D_2$ ;
  - 3) en **dimensión 3**:  $I_3 = \mathbb{Z}_3$ ;  $A_3$ ;  $A_3^*$ ; el fcc lattice y el bcc lattice.
6. Dado un lattice  $\Lambda$  en  $\mathbb{R}^n$ ,
  - a) Probar que  $\Lambda^*$  es realmente un lattice en  $\mathbb{R}^n$ .
  - b) Probar que  $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ .
  - c) Probar que
 
$$\text{vol}(\Lambda)\text{vol}(\Lambda^*) = 1.$$
7. Probar que el dual del fcc lattice es el bcc lattice (y viceversa).
8. Probar que  $A_3$  y  $D_3$  son semejantes, i.e.  $A_3 \cong D_3$ .
9. Sea  $\Lambda$  un lattice en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  un subgrupo aditivo que contiene  $n$  vectores linealmente independientes. Probar que  $\Lambda'$  es un sublattice de  $\Lambda$  (de índice finito).  
[Ayuda: usar teoremas sobre módulos de estructuras algebraicas.]
10. Sea  $\Lambda = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$  y  $\Lambda' = \langle (1, 1), (2, 4) \rangle$ . Calcular el índice de  $\Lambda'$  en  $\Lambda$  y el grupo cociente  $\Lambda/\Lambda'$ .

Hallar el cociente  $\Lambda/\Lambda'$  de  $\Lambda = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$  y  $\Lambda' = \langle (1, 3, 5), (5, 10, 0) \rangle$ .  
[Ayuda: hallar una base de  $\Lambda$  y una de  $\Lambda'$  de modo que cada vector de la segunda sea un múltiplo (entero positivo) de algún vector de la primera.]

---

<sup>5</sup>subconjuntos con todos sus elementos de la misma norma.

## 3. LATTICE PACKINGS

Dado un lattice  $L$ , hay una distancia mínima entre sus puntos, que coincide con la longitud de los vectores mínimos de  $L$ . La mitad de esta longitud es el *packing radius* o **radio** del empaquetamiento asociado a  $L$ , que tiene sus bolas centradas en puntos de  $L$ .

Si en cambio pensamos en cubrir el espacio con bolas centradas en los puntos de  $L$ , entonces el menor radio con el que se logra esto se llama *radio de cubrimiento*.

La idea de densidad de un empaquetamiento es el cociente entre el espacio ocupado y el espacio total. En el caso de empaquetamientos que no provienen de lattices, no es muy sencillo dar una buena definición de densidad. En la Digresión 3.3 se introduce este tema.

Para lattices no hay ningún problema en definir densidad ni espesor, este último es el concepto análogo para cubrimientos.

La **densidad** de un lattice  $L$  es

$$\Delta(L) = \frac{\text{volumen de una bola}}{\text{volumen del lattice}}$$

El **espesor** de un lattice  $L$  se define exactamente igual, sólo que es siempre mayor o igual que 1.

Conviene también definir la *densidad centrada* de un lattice  $\delta(L) = \frac{\Delta(L)}{V_n}$ , donde  $V_n$  es el volumen de bola de radio 1 en  $\mathbb{R}^n$ . Apenas uno supera la dimensión 3, conviene trabajar con  $\delta$  en lugar de  $\Delta$ .

No es difícil probar que el mejor lattice packing en dimensión 2 es el hexagonal.

*Demostración.* Supongamos que  $\Lambda$  es óptimo. Si en  $\Lambda$  no hubiera dos esferas que se tocan, entonces no sería óptimo, puesto que existiría un escalar  $t$ ,  $0 < t < 1$  tal que  $t\Lambda$  tendría mayor densidad que  $\Lambda$ . Entonces, hay dos esferas que se tocan. Luego, tenemos una hilera de esferas, una atrás de la otra. Más aún,  $\Lambda$  consiste de uniones de estas hileras de esferas, todas paralelas entre sí. Ahora, si estas hileras paralelas no se tocaran, entonces nuevamente  $\Lambda$  no sería óptimo. Por lo tanto, deben tocarse. Al tocarse, vemos que hay infinitas posiciones posibles, pero claramente la mejor es la correspondiente al lattice hexagonal.  $\square$

Es notable que Gauss probó en el review de un artículo, que el óptimo lattice packing en dimensión 3 es el del fcc lattice. Veremos esta demostración en clase, porque es más lindo “mover las manos” en este caso. Es una demostración sencilla y hermosa, que contrasta con otras demostraciones en el tema, que suelen ser complicadísimas y tediosas. Ver [Ha2].

Para empaquetamientos que no vienen de lattices, el problema es muchísimo más difícil. Por ejemplo, en dimensión 2 tenemos

**Teorema 3.1** (Thue, 1890). *La mayor densidad posible de un empaquetamiento de esferas en dimensión 2 está dada por el empaquetamiento hexagonal, con  $\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \cong 0,907$ .*

Aunque parezca muy fácil, este Teorema no lo es. Ver por ejemplo una prueba en [Ha2], que consiste en tomar un empaquetamiento arbitrario del plano con las esferas de radio 1 y luego particionar el plano en tres tipos de regiones, cada una con densidad menor o igual que  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ .

Ya dijimos que en dimensión 3 este problema es el famoso problema de Kepler.

Calculemos ahora densidades de algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.2.**  $D_4$ , el *checkerboard* lattice.

Este lattice provee el empaquetamiento de esferas más denso conocido hasta el momento. Korkine y Zolotareff, ya en 1872, probaron que es el óptimo entre los lattice packings [KZ1], [KZ2].

Calculemos su densidad.

Recordemos que  $D_4 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \in \mathbb{Z}^4 : u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \text{ es par.}$ . Así,  $(1, 1, 0, 0) \in D_4$ , pero  $(1, 0, 0, 0) \notin D_4$ . De hecho, notemos que todo vector en  $D_4$  debe tener norma mayor o igual que 2, pues si sólo uno de sus coordenadas es no nula, ésta debe ser par, luego su norma será al menos 4; y si tiene dos coordenadas no nulas, entonces su norma es la menos 2.

Esto nos dice que el packing radius de  $D_4$  es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Además, la esfera centrada en  $(0, 0, 0, 0)$  de radio  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  tiene 24 esferas que la rodean: son las centradas en los puntos  $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$ , de los que hay  $\binom{4}{2} \times 2^2 = 24$ .

Nos falta calcular el determinante de  $D_4$ . Para ello, notemos que los vectores de la forma  $(2, 0, 0, 0)$  están en  $D_4$  y que una matriz generadora del mismo es

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,  $\det(D_4) = (\det(M))^2 = 4$ . Luego,  $\text{vol}(D_4) = 2$ .

[Observemos que en general,  $\det(D_n) = 4$ ]

Ahora bien, como denotamos el volumen de una esfera de radio 1 en  $\mathbb{R}^n$  por  $V_n$ , el volumen de una esfera de radio  $r$  en  $\mathbb{R}^n$  es  $r^n V_n$ .

En el caso  $n = 4$ ,  $V_4 = \frac{\pi^2}{2}$ . De modo que

$$\Delta(D_4) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \frac{\pi^2}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{16} \cong 0,617.$$

**Ejemplo 3.3.**  $A_n$  está generado por  $n$  vectores de la forma  $(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$  (y los vectores tienen  $n + 1$  coordenadas, pero  $A_n$  tiene dimensión  $n$ ).

Así, la matriz  $n \times (n + 1)$ ,  $M$ , generadora de  $A_n$  es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de Gram de  $A_n$ , es cuadrada  $n \times n$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculemos su determinante. Teniendo en cuenta que es el determinante del lattice  $A_n$ , si desarrollamos el determinante por la primera fila de la matriz obtenemos la siguiente recursión:  $\det(A_n) = 2 \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ . De donde sale que

$$\det(A_n) = n + 1.$$

Por otra parte, es claro que los vectores de norma mínima en  $A_n$  son los de la forma  $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0, \mp 1, 0, \dots, 0)$ , lo que implica que el packing radius de  $A_n$  es  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Por lo tanto

$$\Delta(A_3) = \frac{\text{volumen de una esfera}}{\text{vol}(A_3)} = \frac{\frac{4\pi\rho^3}{3}}{\sqrt{\det(A_3)}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \cong 0,74$$

Hay otras formas posibles de calcular la densidad de  $A_3$ , más geométricas, pero no las veremos aquí.

Calculemos la densidad centrada para todo  $n$ :

$$\delta(A_n) = \frac{\Delta(A_n)}{V_n} = \frac{\rho^n}{\sqrt{\det(A_n)}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 2^{-n/2}(n+1)^{-1/2}.$$

### 3.1. Secciones.

**Definición 3.4.** Una *sección* ( $k$ -dimensional) de un lattice  $L$  en  $E$  es la intersección  $S \cap L$ , donde  $S$  es un subespacio  $k$ -dimensional de  $E$  y dicha intersección es un lattice de rango  $k$  en  $S$ .

**Lema 3.5.** Sea  $L$  un lattice en  $\mathbb{R}^n$  y  $S \cap L$  una sección  $k$ -dimensional de  $L$ . Denotemos con  $P_k$  la proyección ortogonal sobre  $S^\perp$ . Entonces  $P_k(L)$  es un lattice (en  $S^\perp$ ). En particular,  $P_k(L)$  tiene elementos de norma mínima.

*Demostración.* Es claro que  $P_k(L)$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces por la Observación 2.5, basta ver que los puntos de  $P_k(L)$  no se acumulan en el origen, o equivalentemente, que sus normas no se acumulan en el cero. Probaremos esto por el absurdo. Supongamos que existe una sucesión  $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  que tiende a cero, con  $h_m > 0$  para todo  $m$  (inclusive, podemos pensar que los  $h_m$  son todos distintos), donde  $h_m = N(P_k(\mathbf{w}_m))$ , con  $\mathbf{w}_m \in L$ . Tomamos cualquier base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  de  $L \cap S$  y completamos a una base de  $\mathbb{R}^n$  con vectores  $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in S^\perp$  (notar que para  $j > k$ , los  $\mathbf{v}_j$  no tienen por qué estar en  $L$ ). Escribimos  $\mathbf{w}_m = \sum_{i=1}^n c_{i,m} \mathbf{v}_i$ . Sumando y restando adecuadamente múltiplos enteros de los  $\mathbf{v}_i$ 's, para  $1 \leq i \leq k$ , obtenemos vectores  $\tilde{\mathbf{w}}_m$  en  $L$  de la forma

$$\tilde{\mathbf{w}}_m = \sum_{i=1}^k \tilde{c}_{i,m} \mathbf{v}_i + \sum_{j=k+1}^n c_{j,m} \mathbf{v}_j$$

con  $0 \leq \tilde{c}_{i,m} < 1$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Ahora

$$\begin{aligned} N(\tilde{\mathbf{w}}_m) &= N\left(\sum_{i=1}^k \tilde{c}_{i,m} \mathbf{v}_i\right) + N\left(\sum_{j=k+1}^n c_{j,m} \mathbf{v}_j\right) \\ &\leq M + h_m < M + 1, \end{aligned}$$

donde  $M$  es una cota superior de las normas de los elementos en el paralelepípedo de dimensión  $k$  determinado por  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  y consideramos que  $m$  es suficientemente grande. Luego, tendríamos infinitos vectores  $\tilde{\mathbf{w}}_m \in L$  dentro de una bola de radio  $M + 1$ , lo que es un absurdo, porque contradice la Observación 2.5. Por lo tanto,  $P_k(L)$  tiene vectores de norma mínima, como queríamos probar  $\square$

Notemos que si  $\dim(S) = n - 1$  entonces  $\mathbb{N}P_k(L) = c\mathbb{Z}$  para algún  $c$ .

**Teorema 3.6.** *Sea  $L$  un lattice de dimensión  $n$  y  $L \cap S$  una sección  $k$ -dimensional de  $L$ . Sea  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  una base de  $L \cap S$ . Entonces*

- (i) *Existen  $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in L$  tal que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es base de  $L$ . (En otras palabras, siempre una base de una sección se puede completar a una base del lattice.)*
- (ii)  *$L^* \cap S^\perp$  es una sección  $(n - k)$ -dimensional de  $L^*$ .*
- (iii)

$$\det(L^* \cap S^\perp) = \frac{\det(L \cap S)}{\det L}.$$

*Demostración.* Parte (i) Tomamos  $\mathbf{v}_{k+1} \in L \setminus (L \cap S)$  de modo tal que  $N(P_k(\mathbf{v}_{k+1}))$  es mínima (donde  $P_k$  denota la proyección ortogonal sobre  $S^\perp$ ). Luego tomamos  $\mathbf{v}_{k+2} \in L \setminus (L \cap S \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_{k+1})$  tal que  $N(P_{k+1}(\mathbf{v}_{k+2}))$  es mínima. Y así sucesivamente, hasta tomar  $\mathbf{v}_n$ . Es claro que los  $\mathbf{v}_i$  forman una base de  $\mathbb{R}^n$ , y están en  $L$ , por lo tanto sólo debemos probar que generan todo  $L$ . Para ver esto, probemos primero que

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}} = L \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

La inclusión ' $\subseteq$ ' es obvia. Veamos ' $\supseteq$ '. Sea  $\mathbf{w} \in L \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{R}}$ . Entonces  $P_k(\mathbf{w}) \in S^\perp$ . Podemos pensar todo en el espacio vectorial  $(k + 1)$ -dimensional  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{R}}$ . De este modo,  $S^\perp$  tiene dimensión uno.<sup>6</sup> Luego,  $P_k(\mathbf{w}) = mP_k(\mathbf{v}_{k+1})$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ . Ahora tomamos  $\mathbf{w} - m\mathbf{v}_{k+1} \in L$ , y se cumple  $P_k(\mathbf{w} - m\mathbf{v}_{k+1}) = P_k(\mathbf{w}) - mP_k(\mathbf{v}_{k+1}) = 0$ , por lo tanto  $\mathbf{w} - m\mathbf{v}_{k+1} \in S$ . Entonces  $\mathbf{w} - m\mathbf{v}_{k+1} = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{v}_i$ , con  $m_i \in \mathbb{Z}$ . Luego,  $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Así, hemos probado que  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{Z}} = L \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Procediendo del mismo modo, obtenemos que  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+2} \rangle_{\mathbb{Z}} = L \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+2} \rangle_{\mathbb{R}}$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}} = L \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}} = L$ . Por lo tanto,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $L$ .

Parte (ii). Sea  $\{\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^*\}$  la base dual de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Es fácil ver que ésta es una base de  $L^*$  (Ejercicio). Notemos que si  $j \geq k + 1$ , se cumple que  $\mathbf{v}_j^* \cdot \mathbf{v}_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Luego  $\mathbf{v}_j^* \in S^\perp$  para todo  $j = k + 1, \dots, n$ . Por lo tanto  $L^* \cap S^\perp = \langle \mathbf{v}_{k+1}^*, \dots, \mathbf{v}_n^* \rangle_{\mathbb{Z}}$ .

Parte (iii). Tomamos ahora en  $\mathbb{R}^n$  una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  con  $e_i \in S$  para  $1 \leq i \leq k$  y  $e_j \in S^\perp$  para  $k + 1 \leq j \leq n$ . Entonces, una matriz  $M$  generadora de  $L$  es<sup>7</sup>

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline B & 0 \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$$

Recordemos que la matriz generadora de  $L^*$  era la transpuesta de la inversa de  $M$ , es decir, la

matriz  $\begin{array}{|c|c|} \hline (B^{-1})^t & * \\ \hline 0 & (D^{-1})^t \\ \hline \end{array}$ . Como  $\det X = \det X^t$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \det(L \cap S) &= (\det B)^2 \\ \det(L^* \cap S^\perp) &= (\det D^{-1})^2 \\ \det(L) &= (\det B)^2 (\det D)^2, \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Quizás haya que justificar más cuidadosamente este hecho.

<sup>7</sup>Aquí estamos usando que al tomar una base ortonormal, todo se puede hacer igual que si usamos la base canónica, que es con respecto a la cual se definieron matriz generadora, etc. Esto se puede entender sin dificultad pensando por ejemplo que estamos cambiando el lattice por uno isométrico de acuerdo al cambio de bases que hicimos, o de lo contrario, se pueden usar matrices (ortogonales) de cambio de base y probar las cosas con toda formalidad.

de donde resulta la igualdad enunciada en (iii).  $\square$

**Corolario 3.7.** *Sea  $L_n$  un lattice entero unimodular, o un lattice cuyo dual le es equivalente (y a  $L_n$  se lo ha normalizado poniendo  $\det L_n = 1$ ). Entonces, el menor determinante de una sección  $k$ -dimensional de  $L_n$  es igual a el menor determinante de una sección  $(n - k)$ -dimensional de  $L_n$ , para  $0 < k < n$ .*

En general, en un lattice, las secciones de menor determinante son las más interesantes. Por ejemplo, la sección unidimensional de menor determinante contiene un vector de norma mínima del lattice. Además, en algunos casos, las secciones son de gran interés. Por ejemplo, en el Leech lattice, de dimensión 24, se encuentran todos los lattices laminados de dimensiones menores como secciones del mismo.

**3.2. Desigualdad de Mordell.** Recordemos que la densidad centrada de un lattice  $L$  de dimensión  $n$  es  $\delta(L) = \frac{\Delta(L)}{V_n}$ , donde  $V_n$  es el volumen de la bola de radio uno en  $\mathbb{R}^n$ . Si denotamos con  $\mu(L)$  la norma mínima de vectores en  $L$ , entonces tenemos

$$(3.1) \quad \delta(L) = \left( \frac{\mu(L)}{4} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(\det L)^{\frac{1}{2}}}.$$

Denotaremos con  $\delta_n$  la máxima densidad centrada de lattices de  $\mathbb{R}^n$ , es decir:

$$\delta_n := \max\{\delta(L) : L \text{ es lattice de } \mathbb{R}^n\}.$$

Ahora estamos en condiciones de probar la desigualdad de Mordell, que relaciona la máxima densidad centrada en dimensión  $n$ ,  $\delta_n$ , con la de dimensión  $n - 1$ ,  $\delta_{n-1}$ . Con ella, es posible probar en forma casi inmediata cuál es el mejor lattice packing en dimensión 4 (respectivamente 8) sabiendo sólo cuál es la densidad máxima en dimensión 3 (respectivamente 7).

**Desigualdad de Mordell.**

$$(3.2) \quad 2\delta_{n-1} \geq \delta_n^{\frac{n-2}{n}}$$

*Demostración.* Consideramos un lattice  $L_n$  de densidad máxima en  $\mathbb{R}^n$ , y le modificamos su escala de modo que  $\det(L_n) = 1$ . Entonces el dual  $L^*$  cumple que  $\det L^* = 1$  y  $\delta(L^*) \leq \delta(L)$ . Entonces  $\mu(L^*) \leq \mu(L)$ .

Sea  $F$  una sección 1-dimensional de  $L_n^*$ , y sea  $E$  la sección correspondiente en  $L_n$  (de dimensión  $(n - 1)$ ). Se cumple que  $\det E = \det F = \mu(L^*)$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta_n = \delta(L_n) &= \left( \frac{\mu(L_n)}{4} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \left( \frac{\mu(L_n)}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu(E)}{4} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\det E)^{\frac{1}{2}}}{(\det E)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu(L_n)^{\frac{1}{2}}}{2} \delta(E) (\det E)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\mu(L_n)^{\frac{1}{2}}}{2} \delta_{n-1} (\det E)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \delta_{n-1} \frac{1}{2} \mu(L_n)^{\frac{1}{2}} (\det E)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta_{n-1} \frac{1}{2} \mu(L_n)^{\frac{1}{2}} \mu(L_n)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta_{n-1} \frac{1}{2} 4 \delta_n^{\frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la desigualdad anunciada.  $\square$

Veamos ahora la aplicación de esta desigualdad geométrica para obtener la densidad máxima  $\delta_4$ .

Sabemos que  $\delta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  y que  $\delta_3 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ . La Desigualdad de Mordell para el caso  $n = 4$  nos dice que  $2\delta_3 \geq \delta_4^{\frac{1}{2}}$ . Por lo tanto, debe ser  $\delta_4 \leq \frac{1}{8}$ .

Por otra parte, ya hemos calculado que  $\delta(D_4) = \frac{1}{8}$ . Por consiguiente,  $\delta_4 = \frac{1}{8}$  y el lattice  $D_4$  tiene densidad máxima.

En (3.2) se dá la igualdad en los casos  $n = 2, 4$  y  $8$ . Y si los lattices  $K_{12}$ ,  $\Lambda_{16}$ ,  $\Lambda_{24}$  y  $P_{48p}$  son los más densos, en sus respectivas dimensiones, entonces también se dará para  $n = 12, 16, 24$  y  $48$  respectivamente.

*Observación 3.8. Lattices laminados.* Es muy interesante la historia de cómo se van descubriendo los mejores empaquetamientos de lattices y los mejores conocidos hasta el momento (ver [CS]). En particular, hay una familia de lattices de construcción muy sencilla, que resultan excelentes para empaquetamientos.

Una forma simple de entender esta construcción es pensar primero en el empaquetamiento hexagonal en dimensión 2 (respectivamente, en un lattice laminado  $\Lambda_n$  en dimensión  $n$ ), al que transformamos en bolas de dimensión 3 (resp.  $n$ ) puestas como si estuvieran en una mesa de billar (resp. en un hiperplano  $n$ -dim. en el espacio  $(n+1)$ -dimensional), siguiendo el esquema hexagonal (resp. de  $\Lambda_n$ ). Ahora hay que colocar una bola ‘arriba’ de estas, para producir el lattice 3-dimensional (resp.  $(n+1)$ -dimensional) más denso posible. Habrá que poner la bola sobre las otras, pero conviene hacerlo en algún ‘valle’ que haya, que corresponderá a los llamados agujeros del lattice hexagonal (resp. de  $\Lambda_n$ ). Entre todas las construcciones posibles, se eligen las más densas, y éstos son los lattices laminados en dimensión  $n+1$ .

En las primeras 8 dimensiones son los óptimos! Y en la mayoría de las dimensiones menores que 25 los mejores conocidos. Además, para  $n \leq 24$  casi siempre hay un único lattice laminado en cada dimensión (ver [CS]).

**3.3. Digresión: definición de densidad para empaquetamientos.** (seguimos el Apéndice A de [CE].) En caso que haya interés en saber mejor cómo es realmente la definición de densidad de un empaquetamiento de esferas y algunas cuestiones relacionadas, daremos enunciados precisos sobre lo que significa para un empaquetamiento tener densidad, cómo se define esa densidad y abordaremos el tema de si hay o no un empaquetamiento de densidad máxima.

También veremos un resultado que nos asegura que los empaquetamientos periódicos tienen densidades tan cercanas como uno quiera al empaquetamiento más denso. Esto permitiría restringirse a este tipo de empaquetamientos, sin sentir que se está perdiendo generalidad.

Sea  $\mathcal{P}$  un empaquetamiento de esferas en  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que  $\mathcal{P}$  tiene *densidad*  $\Delta$  si  $\forall p \in \mathbb{R}^n$ , se cumple:

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B(p, r) \cap \mathcal{P})}{\text{vol } B(p, r)},$$

donde  $B(p, r)$  es la bola de centro  $p$  y radio  $r$ .

• Se prueba en [Gr] que: *si este límite existe para un  $p$ , entonces existe para todo  $p$ , y es el mismo para todo  $p$ .*

Decimos que el empaquetamiento *tiene densidad uniforme*, o lo mismo, que es *uniformemente denso*, si el límite existe uniformemente para todo  $p$ .

**Ejemplo 3.9.** Es bastante claro que todo empaquetamiento proveniente de un lattice tiene densidad uniforme.

Por otra parte, imaginemos que a uno de estos lattice packing le quitamos todas las bolas contenidas en un cierto semiespacio. El resultante es un empaquetamiento que tiene densidad (la mitad de la densidad que el original), pero no tiene densidad uniforme.

- En este caso, en [Gr] se prueba que: “para todo conjunto compacto  $R$  que es la clausura de su interior y  $\forall p$  se cumple

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}((rR + p) \cap \mathcal{P})}{\text{vol } rR},$$

donde  $rR + p$  significa  $R$  aumentado a escala por el factor  $r$  y trasladado por  $p$ .”

A pesar de que no todo empaquetamiento tiene densidad, todos tienen una *densidad superior* (‘upper density’), definida por:

$$\Delta = \limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{\text{vol}(B(p, r) \cap \mathcal{P})}{\text{vol } B(p, r)}.$$

- Nuevamente, en [Gr] se prueba que *el supremo de todas las densidades superiores se alcanza por un empaquetamiento uniformemente denso*.

En nuestro caso, estamos interesados en los empaquetamientos provenientes de retículos (lattice packings), y por añadidura en los empaquetamientos periódicos.

Usando los resultados mencionados, no es difícil ver que

**Teorema 3.10.** *Los empaquetamientos periódicos tienen densidades que se acercan arbitrariamente a la densidad máxima posible.*

*Demostración.* Supongamos que  $\Delta$  es la densidad máxima de empaquetamientos en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\mathcal{P}$  un empaquetamiento uniformemente denso de densidad  $\Delta$ . Sea  $R$  el paralelepípedo fundamental de cualquier lattice  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ . Sabemos que

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(rR \cap \mathcal{P})}{\text{vol}(rR)}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Si elegimos  $r$  suficientemente grande, entonces el volumen total de las esferas en  $\mathcal{P}$  que están completamente adentro de  $rR$  dista menos que  $\varepsilon \text{vol}(rR)$  de  $\Delta \text{vol}(rR)$ , puesto que sólo una fracción despreciable de las esferas interseca los lados de  $rR$ .<sup>8</sup>

Ahora definimos un empaquetamiento periódico  $\mathcal{P}'$  tomando todas las esferas de  $\mathcal{P}$  que están enteramente en  $rR$ , y también incluyendo todas las traslaciones de ellas por vectores en el lattice  $r\Lambda$ . Así, este empaquetamiento periódico tiene densidad al menos  $\Delta - \varepsilon$ .  $\square$

*Observación 3.11.* (a) Notemos que la construcción hecha arriba de un empaquetamiento periódico, es válida en general. Es decir, a partir de un empaquetamiento cualquiera de densidad uniforme  $\Delta$ , se pueden construir empaquetamientos periódicos con densidades tan cercanas a  $\Delta$  como uno quiera. [Ejercicio: ver si se puede quitar la hipótesis de que el empaquetamiento original sea uniformemente denso.]

<sup>8</sup>Aquí ‘despreciable’ se refiere a que el número de esferas que cortan el borde de una región de este tipo es despreciable con respecto al número de esferas que están totalmente contenidas en dicha región. En  $\mathbb{R}^n$  el número de las que intersecan el borde crece proporcionalmente a  $r^{n-1}$  mientras que el número de las que están totalmente adentro crece proporcionalmente a  $r^n$ .

(b) Lo anterior vale en  $\mathbb{R}^n$ , pero no vale en otros casos, como por ejemplo en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , puesto que en dicho espacio el número de esferas que cortan el borde de una región no es despreciable con respecto al número de esferas que están totalmente contenidas en dicha región, aún cuando esta región se agranda con  $r$  que tiende a infinito.

**Ejercicios.**

1. Probar que la densidad  $\Delta$  de un lattice no depende de su escala, i.e., si  $\Lambda \cong \Lambda'$  entonces  $\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda')$ .
2. Idem que en ejercicio anterior pero con ‘espesor’ en lugar de ‘densidad’.
3. Hallar el packing radius, el covering radius, la densidad del empaquetamiento, el espesor del cubrimiento, el conjunto de longitudes y de normas de los vectores (sin multiplicidades) de los lattices del Ejercicio 5 de la Sección 2
4. Para cada  $k$  posible, obtener las secciones  $k$ -dimensionales de menor determinante de los lattices  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_3^*$  y  $D_4$ .
5. Calcular el kissing number de  $A_n$ ,  $D_n$  y  $E_k$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $5 \leq k \leq 8$ .
6. Calcular la densidad centrada  $\delta$  de  $I_n$ , de  $D_n$  y de  $A_n$ .
7. Verificar que la densidad del *hexagonal close packing* es  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ .
8. Calcular  $\delta_8$  teniendo en cuenta que  $\delta_7 = \frac{1}{16}$  y que  $E_8$  es un lattice muy bueno.
9. Sea  $\Lambda_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : \text{exactamente 1 ó 3 coordenadas son pares}\}$ . Verificar que:
  - a)  $\Lambda_3$  es un lattice en dimensión 3.
  - b) Se pueden empaquetar esferas de radio  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
  - c) Calcular la densidad de  $\Lambda_3$ .
  - d) el kissing number de  $\Lambda_3$  es 12. Notar que la configuración no es de la forma del icosaedro. ¿Cuál es?
  - e) Notar que  $\Lambda_3$  es el fcc lattice.
10. Calcular la densidad de  $\Lambda_4$ , el lattice *laminado* en dimensión 4.

## 4. ROOT LATTICES

Hay ciertos lattices que aparecen con mucha frecuencia al estudiar los distintos problemas planteados. Por ejemplo, ya nos hemos encontrado con el fcc lattice, con  $E_8$ ,  $A_n$  y  $D_n$ . Éstos son ejemplos de *root lattices* (o *retículos de raíces*). En esta sección intentaremos obtener su clasificación. Usualmente esto se hace siguiendo un camino parecido al de la clasificación de las álgebras de Lie semisimples, usando sistemas de raíces y diagramas de Dynkin (ver por ejemplo [Eb], Cap. 1). Aquí seguiremos un camino muy distinto, aplicando el *método de pegado de Kneser* para probar el Teorema de Witt.

Recordemos que  $L$  es *entero* si  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ . En este caso, se cumple que  $L \subseteq L^*$ . Es importante el grupo finito  $L^*/L$ , llamado *grupo cociente dual* del lattice. Su cardinal coincide con el determinante de  $L$ , es decir  $|L^*/L| = \det L$ .

**Definición 4.1.** Una *raíz*<sup>9</sup> en un lattice entero  $L$  es un vector de norma 2. Un *root lattice* (o *lattice de raíces*) es un lattice entero que está generado por raíces.

Notemos que la reflexión según una raíz  $\mathbf{r}$  preserva  $L$ , pues dicha reflexión está dada por el mapeo

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r},$$

el cual tiene su imagen dentro de  $L$  justamente porque  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$  es par.

**4.1. El método de pegado de Kneser.** (Seguimos [Co]) Kneser obtiene muchos lattices enteros de determinante chico ‘pegando’ lattices de raíces, ya sea cada uno a sí mismo, o entre ellos. Esto es interesante porque los lattices enteros no están (ni estarán) clasificados.

El ejemplo de isospectralidad en dimensión 16 de la Sección 5 consiste de dos lattices pares unimodulares. Este tipo de lattices sólo aparecen en dimensiones múltiplos de 8 y son importantes en Teoría de Números. De hecho, su clasificación en dimensión 24 está considerada un gran logro matemático, y ha sido quizás la máxima aplicación de este método de pegado.

Para comprender el método, conviene que veamos dos ejemplos de ‘pegado’ de lattices.

**Ejemplo 4.2.** Sean  $R$  y  $S$  dos lattices enteros ortogonales de dimensión 1 en el plano, generados por vectores ortogonales  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  respectivamente, para los cuales se cumple

$$N(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2 \quad N(\mathbf{s}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 2 \quad \text{y} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 0.$$

Ahora, busquemos un lattice entero  $L$  en dimensión 2 que contenga propiamente a  $R$  y a  $S$ . Sea  $\mathbf{y} \in L \setminus (R \oplus S)$ , entonces  $\mathbf{y}$  es de la forma  $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{s}$ .

Ahora bien, la condición de ser entero para  $L$  implica que

$$\mathbb{Z} \ni \mathbf{y} \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2\lambda$$

$$\mathbb{Z} \ni \mathbf{y} \cdot \mathbf{s} = \mu \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 2\mu$$

De donde tenemos que  $\lambda, \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Además, tenemos

$$\mathbb{Z} \ni \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 2\lambda^2 + 2\mu^2.$$

Hay una única solución módulo  $R \oplus S$  de estas ecuaciones, que es

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s}.$$

Decimos que el lattice  $L$  generado por  $\mathbf{y}$  y  $R \oplus S$  se obtiene ‘pegando’ los lattices  $R$  y  $S$  por el vector de pegado  $\mathbf{y}$  (glue vector). Gráficamente, la Figura 9 nos muestra los vectores de pegado indicados con cruces.

<sup>9</sup>Otra definición usual de raíz incluye también los vectores de norma 1.

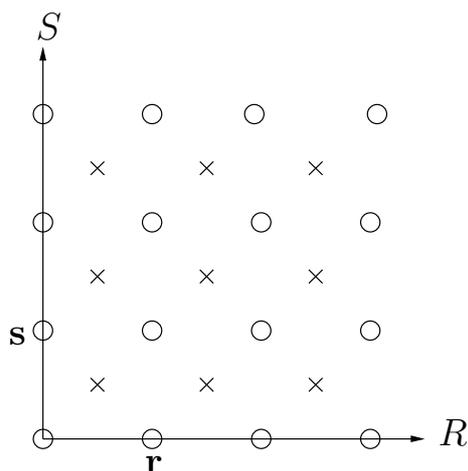


FIGURA 9. Los círculos indican puntos de  $R \oplus S$  y las cruces los restantes puntos de  $L$ .

**Ejemplo 4.3.** El mismo método se puede usar para pegar cualquier número de lattices enteros, digamos  $L_1, L_2, \dots, L_k$  entre sí, para formar un lattice entero  $L$  que contenga a  $L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$ .

Así,  $L$  será generado por  $L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$  junto con ciertos vectores  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \dots + \mathbf{y}_k$ , donde  $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}L_j = L_j \otimes \mathbb{R} = \langle L_j \rangle_{\mathbb{R}}$  (el espacio real generado por  $L_j$ ). El vector  $\mathbf{y}$  tiene producto interno entero con los vectores de  $L_j$ , por lo tanto  $\mathbf{y}_j \in L_j^*$ . Por supuesto, nos interesa conocer  $\mathbf{y}_j$  módulo  $L_j$ .

Los posibles  $\mathbf{y}_j$  son llamados vectores de pegado (o glue vectors) para  $L_j$ , y corresponden a elementos del grupo cociente dual  $L_j^*/L_j$ . Esta observación permite buscar y encontrar los glue vectors en los distintos casos.

#### 4.2. Los lattices $A_n, D_n$ y $E_n$ . Recordemos las definiciones de $A_n, D_n, E_n$ :

$$\begin{aligned} (n \geq 1) \quad A_n &:= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum x_i = 0\} \\ (n \geq 2) \quad D_n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\} \\ (1 \leq n \leq 8) \quad E_{9-n} &:= \{(x_1, \dots, x_8) : x_1 = x_2 = \dots = x_n \text{ y: } (x_i \in \mathbb{Z} \forall i \text{ y } \sum x_i \in 2\mathbb{Z}) \text{ ó} \\ &\quad (x_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \forall i \text{ y } \sum x_i \in 2\mathbb{Z} + 1)\} \quad (\text{definición } \textit{impar}) \end{aligned}$$

Hay distintas definiciones equivalentes de estos lattices; por ejemplo, la definición *par* de  $E_{9-n}$  es poniendo siempre la condición  $\sum x_i \in 2\mathbb{Z}$ .

Algunas matrices de Gram de estos lattices son:

lattice	matriz de Gram	correspondiente a la base	determinante
$A_n (n \geq 1)$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$(1, -1, 0, 0, \dots, 0)$ $(1, 0, -1, 0, \dots, 0)$ $\dots$ $(1, 0, 0, 0, \dots, -1)$	$n + 1$
$D_n (n \geq 2)$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ $(1, -1, 0, 0, \dots, 0)$ $(1, 0, -1, 0, \dots, 0)$ $\dots$ $(1, 0, 0, 0, \dots, -1)$	4
$E_n (n \geq 3)$	igual que para $D_n$ excepto que las entradas $(1, 3)$ y $(3, 1)$ son 0 en lugar de 1	ver abajo	$9 - n$

Usando la notación  $(1^4) := (1, 1, 1, 1)$ ;  $(1^3, (\frac{1}{2})^2) = (1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , etc., definimos los siguientes vectores, con la intención de mostrar bases de  $E_n$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1)^8 & \mathbf{v}_2 &= ((\frac{1}{2})^7, -\frac{1}{2}) & \mathbf{v}_3 &= ((\frac{1}{2})^6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \mathbf{v}_4 &= ((\frac{1}{2})^5, -\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2) & \dots & & \mathbf{v}_8 &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^6) & \mathbf{v}_9 &= (-\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^7). \end{aligned}$$

Hacemos las siguientes observaciones:

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es una base de  $E_k$ , para  $1 \leq k \leq 8$ .
- El vector  $\mathbf{v}_9$  pertenece a  $E_8$ . Así que sería  $E_9 = E_8$ , por lo que al llegar a 8 paramos con los lattices  $E_n$ .
- La base de  $E_8$  recién mostrada produce la matriz de Gram

$$\left[ \begin{array}{c|cccc} 8 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 3 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{array} \right]$$

- Como  $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (1^6, 0, 0)$ , definimos  $\mathbf{v}'_1 := \mathbf{v}_1 - (1^6, 0^2) = (0^6, 1, 1)$ , y para  $n \geq 3$  podemos reemplazar  $\mathbf{v}_1$  de la base anterior por  $\mathbf{v}'_1$  obteniendo así una nueva base, con matriz de Gram como la indicada en el cuadro anterior.
- Con estas matrices de Gram, se ve claramente que  $A_n$ ,  $D_n (n \geq 2)$  y  $E_n (n \geq 3)$  **son root lattices**, pues los vectores de norma 2 los generan.

*Observación 4.4.* A partir de las matrices de Gram se ve claramente que

$$\begin{aligned} A_n &\subseteq A_{n+1}; & A_n &\subseteq D_{n+1} & A_n &\subseteq E_{n+1} \\ D_n &\subseteq D_{n+1} & D_n &\subseteq E_{n+1} & E_n &\subseteq E_{n+1} \end{aligned}$$

Este hecho será importante al final de la demostración del Teorema de Witt.

*Observación 4.5.* ■  $D_1$  no es lattice de raíces, pues  $D_1 = \langle \mathbf{2} \rangle_{\mathbb{Z}}$ , luego la matriz de Gram es [4], que no corresponde a un lattice de raíces.

■  $D_2 = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle_{\mathbb{Z}} \implies$  la matriz de Gram de  $D_2$  es  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , luego  $D_2 \equiv A_1 \oplus A_1$ .

Por lo tanto  $D_2$  no es indescomponible.

- $E_1$  y  $E_2$  no son de raíces.
- $E_3 \equiv A_1 \oplus A_2$ , por lo tanto no es indescomponible.
- Los demás, es decir

$$A_n \quad D_n \quad \text{y} \quad E_n \quad \text{son lattices de raíces indescomponibles.} \\ n \geq 1 \quad n \geq 3 \quad 4 \leq n \leq 8$$

- $E_4 \cong A_4$  y  $E_5 \cong D_5$  (ver los Ejercicios), por lo que realmente los lattices ‘nuevos’ son  $E_6, E_7$  y  $E_8$ .

Estudiemos ahora los glue vectors de cada uno de estos lattices. Es decir, para cada  $\Lambda$ , buscamos una raíz  $\mathbf{r}$  tal que  $\mathbf{r} \notin \Lambda$ , y luego consideramos  $\langle \Lambda, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}}$ .

Expresamos  $\mathbf{r}$  como  $\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}\Lambda$  es *horizontal* y  $\mathbf{v} \perp \mathbb{R}\Lambda$  es *vertical*.

Se cumple que  $2 = N(\mathbf{r}) = N(\mathbf{h}) + N(\mathbf{v})$ , por lo que estas últimas normas deben ser  $\leq 2$ .

Hay dos casos especiales:

$$\begin{cases} N(\mathbf{h}) = 2, & \text{o lo mismo } \mathbf{v} = \mathbf{0}, & \text{entonces } \mathbf{r} \in \mathbb{R}\Lambda; \\ N(\mathbf{v}) = 2, & \text{o lo mismo } \mathbf{h} = \mathbf{0}, & \text{entonces } \mathbf{r} \perp \mathbb{R}\Lambda \text{ y } \langle \Lambda, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \Lambda \oplus A_1. \end{cases}$$

En general sucede que  $N(\mathbf{h}) < 2$  y  $N(\mathbf{v}) < 2$ . Recordemos que para todo  $\mathbf{x} \in \Lambda$  se cumple  $\mathbb{Z} \ni \mathbf{r} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}$ , luego  $\mathbf{h} \in \Lambda^*$ .

Veamos ahora cómo son los grupos cocientes duales  $\Lambda^*/\Lambda$  para  $A_n, D_n$  y  $E_n$ . Como estamos interesados en vectores en  $\Lambda^*$  módulo  $\Lambda$ , lo que debemos considerar son las coclases en estos cocientes. Uno puede buscar ‘a mano’ estas coclases, y si encuentra tantas como  $\det \Lambda$ , entonces sabe que terminó. A continuación listamos todas las coclases.

caso  $A_n$

$$\begin{aligned} [0] & (= \Lambda) \\ [1] & = \left( \frac{n}{n+1}, \left( \frac{-1}{n+1} \right)^n \right) \\ \dots & \dots \\ [i] & = \left( \left( \frac{j}{n+1} \right)^i, \left( \frac{-i}{n+1} \right)^j \right)_{\text{con } i+j=n+1} \quad \text{de norma } \frac{ij}{n+1} \end{aligned}$$

Éstos forman el grupo cíclico de orden  $n + 1$ ,  $C_{n+1} = \mathbb{Z}_{n+1}$ .

caso  $D_n$

$$\begin{aligned} [0] & = (0^n) (= \Lambda) & \text{de norma } 0 \\ [1] & = \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) & \text{de norma } \frac{n}{4} \\ [2] & = (0^{n-1}, 1) & \text{de norma } 1 \\ [3] & = \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}, -\frac{1}{2} \right) & \text{de norma } \frac{n}{4} \end{aligned}$$

Forman un grupo de 4 elementos,  $C_4$  si  $n$  es impar y  $C_2 \oplus C_2$  si  $n$  es par.



arriba. De este modo,  $\mathbf{h}$  debe ser un vector de pegado de  $X_n$ , lattice que estamos pegando al lattice generado por  $\mathbf{v}$  (o a sí mismo en el caso que  $\mathbf{v} = 0$ ).

La idea de la demostración es analizar todos los casos posibles, mostrando que siempre el lattice que se obtiene al pegar  $\mathbf{r}$  a  $X_n$  es nuevamente alguno de  $A_k$ ,  $D_k$  o  $E_k$ , contradiciendo la maximalidad de  $X_n$ .

Hagamos en detalle el caso en que  $X_n = A_n$ . Observemos el Cuadro 4.2. Nos interesan sólo los vectores de pegado que tienen su norma menor o igual que dos.

En la primera diagonal (desde arriba hacia abajo-izquierda) vemos las normas  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ , etc, es decir de la forma  $\frac{n}{n+1}$ . Ellas corresponden a los glue vectors denotados [1] (o equivalentemente [n]) para  $A_n$ . Notemos que hay una simetría total entre tomar esta diagonal, y la diagonal que va hacia abajo-derecha, por lo que bastará con analizar un solo caso.

En la segunda diagonal (hacia abajo-izquierda), vemos que las normas son  $\frac{2}{3}$ ,  $1 = \frac{4}{4}$ ,  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ ,  $\frac{10}{7}$ , ..., es decir de la forma  $\frac{2(n-1)}{n+1}$ , correspondientes a los glue vectors denotados [2] (o equivalentemente [n-1]).

Si miramos bien, nos damos cuenta que las otras normas en el cuadro se agrandan rápidamente, y sólo estas dos diagonales junto con 5 entradas más —salvo simetría— tienen normas menores o iguales que 2. Más precisamente, fuera de las dos diagonales hay sólo tres normas menores que 2 y otras dos iguales a 2.

Para  $n > 8$  sólo las dos entradas de las dos primeras diagonales son  $\leq 2$ . Por la Observación 4.4, sabemos que  $A_n$  está contenido en  $A_{n+1}$ , en  $D_{n+1}$  y en  $E_{n+1}$ .

Si tenemos en cuenta los determinantes, vemos que  $\det \langle X_n, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} = \det X_n N(\mathbf{v})$  cuando  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .

Si  $\mathbf{h} = [1]$  entonces  $N(\mathbf{v}) = 2 - N(\mathbf{h}) = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ . Además, como  $\det(A_n) = n + 1$ , tenemos que

$$\det \langle X_n, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} = (n + 1) \frac{n + 2}{n + 1} = n + 2 = \det(A_{n+1}).$$

Análogamente, si  $\mathbf{h} = [2]$  entonces  $N(\mathbf{v}) = 2 - N(\mathbf{h}) = 2 - \frac{2(n-1)}{n+1} = \frac{4}{n+1}$ . Entonces tenemos que

$$\det \langle X_n, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} = (n + 1) \frac{4}{n + 1} = 4 = \det(D_{n+1}).$$

Como sólo tenemos estas dos posibilidades de pegado, y sabemos que ambas *deben* ocurrir para obtener  $A_{n+1}$  y  $D_{n+1}$ , entonces se concluye que el pegado de  $X_n$  por  $\mathbf{r}$  para  $n > 8$  da siempre:

$A_{n+1}$ , si el vector era de tipo [1] o [n] (en el triángulo de normas, esto corresponde a la primera diagonal), o bien,

$D_{n+1}$ , si el vector era de tipo [2] o [n-1] (en el triángulo de normas, esto corresponde a la segunda diagonal).

Esto concluye la demostración para el caso  $n > 8$  (y  $X_n = A_n$ ).

Si  $n \leq 8$ , tenemos tres normas menores que 2, correspondientes a vectores de tipo [3] o [n-2]:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{3 \cdot 3}{6} && \text{si } n = 5 \\ \frac{12}{7} &= \frac{3 \cdot 4}{7} && \text{si } n = 6 \\ \frac{15}{8} &= \frac{3 \cdot 5}{8} && \text{si } n = 7 \end{aligned}$$

La primera,  $\frac{3}{2}$  con  $n = 5$ , corresponde a  $\mathbf{h} = [3]$ . Entonces  $N(\mathbf{v}) = 2 - N(\mathbf{h}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ . Como  $\det(A_5) = 6$ , tenemos que

$$\det \langle X_n, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} = 6 \frac{1}{2} = 3 = \det(E_6).$$

Como sabemos también que  $A_5 \subseteq E_6$ , resulta que  $\langle X_n, [3] \rangle_{\mathbb{Z}} \equiv E_6$ .

Análogamente se prueba que los casos correspondientes a las otras dos normas menores que 2 generan  $E_7$  y  $E_8$  respectivamente. Y con mayor generalidad, se prueba que las normas en la tercera diagonal, generan  $E_{n+1}$  partiendo de  $X_n = A_n$ .

Finalmente, analizaremos los casos donde  $N(\mathbf{h}) = 2$ , que son esencialmente distintos, puesto que el lattice  $\langle X_n, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}}$  será ahora  $n$ -dimensional en lugar de tener dimensión  $n + 1$ .

Primero conviene hacer una lista de los casos donde sabemos cómo se pegan los lattices  $A_n$ ,  $D_n$  y  $E_n$  a sí mismos, es decir, cuándo es posible agregarles vectores en el mismo espacio (sin aumentar la dimensión) de modo de obtener un nuevo lattice entero, que por supuesto será mas denso que el original.

La lista es corta:

- si se pega el vector de tipo [4] a  $A_7$  se obtiene  $E_7$ ;
  - si se pega el vector de tipo [3] ó [6] a  $A_8$  se obtiene  $E_8$ ;
  - si se pega el vector de tipo [1] ó [3] a  $D_8$  se obtiene  $E_8$
- (para esto, a veces conviene usar la definición par de  $E_n$ ).

Ahora consideramos la norma 2 en el cuadro de normas, correspondiente al vector  $\mathbf{h}$  de tipo [4] para  $A_7$ . En este caso,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  y el cálculo de los determinantes es distinto. Un representante de [4] es  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^4\right)$ . Este vector sumado a sí mismo da  $(1^4, (-1)^4) \in A_7$ , por lo que el índice de  $A_7$  en  $\langle A_7, [4] \rangle_{\mathbb{Z}}$  es 2. Por lo tanto, el determinante del lattice extendido es cuatro veces más chico que el de  $A_7$ , es decir  $\frac{8}{4} = 2$ , el cual es exactamente el determinante de  $E_7$ . Por el mismo argumento de siempre, obtenemos que la extensión de  $X_n$  por [4] en este caso debe ser  $E_7$ .

El otro caso de norma 2 es análogo y da  $E_8$ .

Repetimos el razonamiento de la demostración: teníamos la lista completa de vectores de pegado para  $A_n$ . Calculamos lo que genera cada uno de estos pegados, y vimos que era nuevamente uno de estos lattices. Así, incorporando la idea del sublattice propio indescomponible maximal  $X_n$  se llegó a un absurdo.

Con esto, concluye la demostración para  $X_n = A_n$ . Dejamos los otros dos casos como ejercicios, largos, pero no difíciles puesto que la idea es exactamente la misma.  $\square$

**Ejercicios.**

1. Demostrar las siguientes afirmaciones que relacionan lattices con sus duales:
  - a)  $(cL)^* = c^{-1}L^*$   $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ;
  - b)  $L \supseteq K \implies L^* \subseteq K^*$ ;
  - c)  $L = J \oplus K \implies L^* = J^* \cap K^*$ .
  
2. Probar que el lattice cúbico  $I_n := \mathbb{Z}^n$  no es de raíces (con la definición que elegimos en estas Notas). Pero si lo multiplicamos por  $\sqrt{2}$ , entonces  $\sqrt{2}I_n$  sí es de raíces para todo  $n$ .  
 ¿Porqué  $\sqrt{2}I_n$  no aparece en la clasificación de esta sección?
  
3. Probar que la ‘definición par’ y la ‘definición impar’ de  $E_n$  son equivalentes.
  
4. Probar que  $E_4 \cong A_4$ .  
 [Ayuda: cambiar en la base elegida para  $A_4$  el último vector  $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 0, -1)$  por  $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, -1, 0) - (1, 0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, -1, 1)$ , calcular la nueva matriz de Gram y comparar con la de  $E_4$ .]
  
5. Probar que  $E_5 \cong D_5$ .  
 [Ayuda: como en el ejercicio anterior, cambiar ahora en la base elegida para  $D_5$  el segundo vector  $(1, -1, 0, 0, 0)$  por el quinto menos el segundo  $(1, 0, 0, 0, -1) - (1, -1, 0, 0, 0)$ .]
  
6. Hacer los cuadros de normas de vectores de pegado para  $D_n$  y  $E_n$  en forma análoga al Cuadro 4.2.
  
7. Completar la demostración del Teorema de Witt sobre lattices de raíces indescomponibles en los casos en que el sublattice maximal  $X_n$  es  $D_n$  y  $E_n$ .
  
8. Recordemos que  $A_n = \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$ , y denotemos con  $V$  el subespacio vectorial real de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$ .  
 Sea  $\Lambda' := \left\{ f \in V^* : \frac{2f(\mathbf{v})}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \in \mathbb{Z}, \quad \forall \mathbf{v} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1} \right\}$ .  
 Probar que  $\Lambda'$  es un lattice y que tiene una base de la forma  

$$\{\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \dots, \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n\},$$
 donde  $\epsilon_i$  es la funcional lineal definida por  $\epsilon_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) := x_i$ .

## 5. ISOSPECTRALIDAD DE LATTICES

**5.1. Ejemplo de Milnor en dimensión 16.** Aquí veremos una demostración del hecho que los lattices  $D_{16}^+$  y  $E_8 \oplus E_8$  son isospectrales y no isométricos. Éstos son los únicos lattices pares unimodulares en dicha dimensión. Esto dió origen al primer ejemplo de dos variedades Riemannianas isospectrales y no isométricas, contestando así una importante pregunta de Geometría Riemanniana y Espectral.

Este ejemplo es casi simultáneo con el famoso artículo de Mark Kac [Ka] “Can one hear the shape of a drum”, que motivó notablemente a matemáticos y físicos a estudiar el problema de isospectralidad. La igualdad de las normas de vectores de  $D_{16}^+$  y  $E_8 \oplus E_8$  había sido probada por Witt en 1941 [Wi], pero fue Milnor quien se dió cuenta de la aplicación y la importancia de este hecho [Mi].

Recordemos que  $D_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n x_i \text{ es par.}\}$  es un lattice de raíces. Para  $n$  natural, se define

$$(5.1) \quad D_n^+ := \langle D_n, (\tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}) \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Cuando  $n > 2$  es par,  $D_n^+$  es un lattice entero. Cuando  $n = 8$ ,  $D_8^+$  es muy especial. También es de raíces y es equivalente a  $E_8$ .

**Definición 5.1.** La *serie theta de Jacobi* (o la  $\theta$ -serie) de un lattice  $L$  es la serie

$$\theta_L = \theta_L(q) := \sum_{\mathbf{v} \in L} q^{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Notemos que  $\theta_L$  es igual a  $\sum_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} a_r q^r$ , donde  $a_r := \#\{\mathbf{v} \in L : \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = r\}$ . Por ejemplo, el lattice cuadrado  $I_2$  tiene un vector de norma 0, cuatro vectores de norma 1, cuatro de norma 2, cuatro de norma 4, ocho de norma 5, etc., por lo que su  $\theta$ -serie es

$$\theta_{I_2} = 1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + 8q^5 + \dots$$

Usualmente se toma  $q = e^{(2)\pi iz}$ , pensando en  $z \in \mathbb{C}$ , y se la llama  $\theta_L(z)$ . Una razón para esto es porque a veces —como en el caso de los lattices pares unimodulares—  $\theta_L(z)$  es una *forma modular* en  $z$ , es decir,

$$\begin{aligned} \theta_L(z+1) &= \theta_L(z) \\ \theta_L\left(-\frac{1}{z}\right) &= z^{\frac{n}{2}} \theta_L(z) \end{aligned}$$

o equivalentemente,  $\theta_L\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\frac{n}{2}} \theta_L(z)$  para  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , el grupo modular.

Estas formas modulares son muy importantes en Teoría de Números. De hecho la demostración original de la ‘isospectralidad’ de  $D_{16}^+$  y  $E_8^2$  viene del hecho que en dimensión 16 el espacio de formas modulares es unidimensional. Luego, dos de ellas pueden diferir sólo por un múltiplo escalar. Como los lattices siempre tienen un sólo vector de norma cero, resulta que sus series  $\theta$  tienen el mismo  $a_0$  (el escalar sería uno). Por lo tanto las  $\theta$ -series de estos dos lattices en dimensión 16 deben ser iguales.

En cambio, la demostración que veremos es elemental. Será el resultado de manipulaciones de tres series  $\theta$  básicas.

*Observación 5.2.* (1)  $\theta_{L_1 \oplus L_2} = \theta_{L_1} \theta_{L_2}$ .<sup>10</sup> En particular,  $\theta_{L^k} = \theta_L^k$ .

Esto es consecuencia directa de la definición de norma y del hecho que los vectores de norma  $\nu$  en  $L_1 \oplus L_2$  son aquellos cuyas componentes en  $L_1$  y en  $L_2$  tienen respectivas normas  $\nu_1$  y  $\nu_2$  tales que  $\nu_1 + \nu_2 = \nu$ .

<sup>10</sup>Aclaración: la suma directa de lattices se considera suma directa orthogonal.

(2) Notemos que  $L$  y  $L'$  son isospectrales si y sólo si  $\theta_L = \theta_{L'}$ .

Hay tres Jacobi  $\theta$ -series básicas asociadas a lattices (o ‘shifted’ lattices) que tienen una notación determinada (por razones históricas). Son las correspondientes respectivamente al lattice  $\mathbb{Z}$ , al shifted lattice  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , y a  $\mathbb{Z}$  multiplicado por un carácter no trivial  $\chi$  (ver Figura 10).

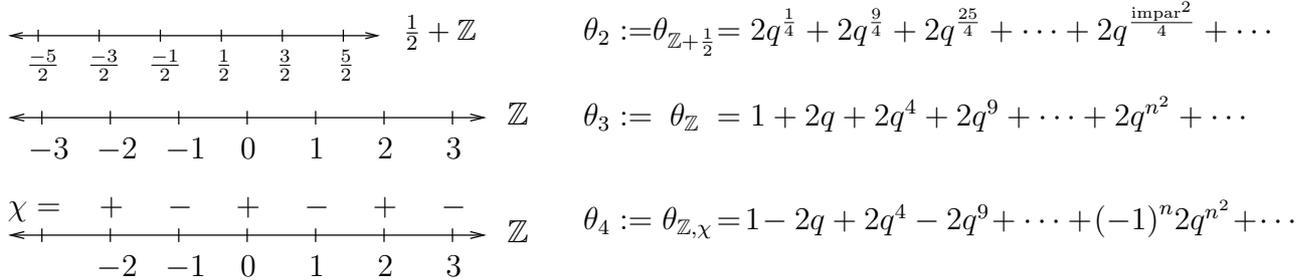


FIGURA 10. Tres Jacobi  $\theta$ -series clásicas.

**Lema 5.3.**  $\theta_{D_n} = \frac{1}{2}(\theta_3^n + \theta_4^n)$

*Demostración.* Probemos primero el caso  $n = 2$ , mediante esquemas, donde los signos menos representan los puntos del lattice donde el carácter  $\chi$  vale  $-1$  y los signos más donde vale  $+1$  o donde directamente no hay ningún carácter:

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & + & + & + & + & & + & - & + & - & + & & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
 + & + & + & + & + & & + & - & + & - & + & - & = & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\
 + & + & + & + & + & + & + & - & + & - & + & + & & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
 + & + & + & + & + & & + & - & + & - & + & - & & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\
 & & & & \theta_3^2 & & + & & & & \theta_4^2 & & = & & & & 2\theta_{D_2} & 
 \end{array}$$

Podemos pensar que el origen de  $\mathbb{R}^2$  está en el extremo superior izquierdo de cada uno de los tres esquemas, que por supuesto son infinitos y periódicos. De este modo, tenemos una demostración visual para el caso  $n = 2$ .

El caso general, se demuestra de la misma manera, puesto que es evidente que al ser  $\theta_3^n$  la theta serie del lattice cúbico  $I_n$  y  $\theta_4^n$  la del mismo lattice pero con signos opuestos para los puntos con suma de sus coordenadas impar, al hacer  $\frac{1}{2}(\theta_3^n + \theta_4^n)$  se obtienen sólo los puntos con suma de sus coordenadas par, representados por  $\theta_{D_n}$ .  $\square$

**Lema 5.4.**  $D_4^+ \equiv I_4$ .

*Demostración.* Como a  $D_4^+$  pertenece el vector  $\mathbf{v}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , entonces también le pertenecen  $\mathbf{v}_0 - (e_3 + e_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) =: \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2 := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , y  $\mathbf{v}_3 := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Además, vemos que  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  generan  $D_4^+$ , todos tienen norma 1 y son ortogonales, por lo tanto  $D_4^+$  es equivalente a  $I_4$ .  $\square$

Una forma explícita de ver esto es vía  $a\mathbf{v}_0 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_3 \longleftrightarrow (a, b, c, d)$ .

En consecuencia,

$$(5.2) \quad \theta_{D_4^+} = \theta_3^4.$$

Por otra parte, para  $n$  par,

$$D_n^+ = D_n \cup D_n + \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{unión disjunta}).$$

Sean  $X := D_n + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $Y := D_n + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

Se verifica que  $X$  e  $Y$  son congruentes, luego  $\theta_X = \theta_Y$ .

Y también que  $I_n + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) = X \cup Y$ . (Para probar esta igualdad, vemos que “ $\supseteq$ ” es consecuencia de la definición de  $X$  e  $Y$ , pues  $D_n \subseteq I_n$ . Para “ $\subseteq$ ”, sea  $\mathbf{w} = (\frac{1}{2} + m_1, \dots, \frac{1}{2} + m_n) \in I_n + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ . Si  $\sum m_i$  es par, entonces  $\mathbf{w} \in X$ . Si  $\sum m_i$  es impar, entonces  $\mathbf{w} \in Y$ , cosa que se ve claramente tomando  $m_n + 1$  como última coordenada de la ‘parte entera’ de  $\mathbf{w}$ .)

Luego

$$\theta_X = \theta_Y = \frac{1}{2} \theta_{I_n + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \theta_2^n$$

Por lo tanto

$$(5.3) \quad \theta_{D_n^+} = \frac{1}{2} (\theta_2^n + \theta_3^n + \theta_4^n)$$

De (5.2) y (5.3) resulta

$$\theta_3^4 = \frac{1}{2} (\theta_2^4 + \theta_3^4 + \theta_4^4),$$

o lo mismo

$$\theta_3^4 = \theta_2^4 + \theta_4^4 \quad (\text{Identidad de Jacobi})$$

De aquí, vamos a deducir que

$$(5.4) \quad \theta_{E_8^2} = \theta_{D_{16}^+}.$$

Escribimos  $\gamma = \alpha + \beta$ , donde  $\gamma = \theta_3^4$ ,  $\alpha = \theta_2^4$  y  $\beta = \theta_4^4$

$$\theta_{E_8} = \theta_{D_8^+} = \frac{1}{2} (\theta_3^8 + \theta_4^8 + \theta_2^8) = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \implies$$

$$\theta_{E_8^2} = \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2)^2 = \frac{1}{4} (2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)^2.$$

$$\text{Luego } \boxed{\theta_{E_8^2} = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4.}$$

Ahora

$$\theta_{D_{16}^+} = \frac{1}{2} (\theta_2^{16} + \theta_3^{16} + \theta_4^{16}) = \frac{1}{2} (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) \stackrel{\text{por Jacobi}}{=} \frac{1}{2} (\alpha^4 + \beta^4 + (\alpha + \beta)^4) = \frac{1}{2} (2\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 2\beta^4) = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + 3\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 + \beta^4.$$

Por lo tanto, se probó 5.4, y así la isospectralidad anunciada.

**Afirmación 5.5.** *Los lattices  $D_{16}^+$  y  $E_8^2$  no son isométricos.*

*Demostración.* Daremos dos ideas de demostraciones de esta “no isometría”. La primera es que en  $D_{16}^+$  los vectores mínimos son  $(1, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, -1, 0, \dots, 0)$ , etc. Hay exactamente  $4 \binom{16}{2}$  de éstos. Sin embargo, se puede ir de uno a otro ‘pasando’ por vectores de este tipo, siempre teniendo productos internos no nulos. En cambio, esto no es posible en  $E_8^2$ .

La segunda idea, casi una prueba completa, es que  $E_8^2$  está generado por vectores de norma mínima, pero  $D_{16}^+$  no. Esto es así porque entre los vectores generadores de  $D_{16}^+$  se necesita poner algunos con  $\frac{1}{2}$ ’s en sus coordenadas —que no son mínimos— o de lo contrario nunca lo generaremos.  $\square$

*Observación 5.6.* En realidad,  $E_8^2$  y  $D_{16}^+$  tienen no sólo los mismos “sublattices 1-dimensionales” sino también todos sus sublattices de  $\dim \leq 4$ .

A partir de esta observación, Kneser [Kn] se dió cuenta que tomando lattices ortogonales a copias de  $D_4$  contenidas en  $E_8^2$  y en  $D_{16}^+$  se lograban lattices isospectrales de dimensión 12, a saber:  $D_{12}$  y  $E_8 \oplus D_4$ .

En los ejercicios, pedimos que realice la demostración de este hecho, en forma análoga a la hecha en esta sección.

**5.2. Unas palabras de historia.** Luego del descubrimiento de las isospectralidades vistas en la subsección anterior, hubo mucho interés por encontrar ejemplos de isospectralidad en dimensiones menores. ¿Hasta qué dimensión se podría bajar? Ya se sabía que en dimensión 2 no podía haber ejemplos no triviales de lattices isospectrales (ver Ejercicio 2). Pero las dimensiones entre 3 y 11 estaban ‘abiertas’. Unos diez años más tarde, Kitaoka [Ki] halló un ejemplo en dimensión 8, usando herramientas complicadas, que no fueron utilizadas para continuar progresando en el problema.

Nuevos avances en isospectralidad de lattices fueron logrados por Alexander Schiemann, quien realizó una extensa búsqueda computacional hallando ejemplos en dimensión 4 [Sch1]. Simultáneamente (aunque publicado un par de años más tarde), Conway y Sloane [CSi] encontraron ejemplos en dimensiones 6 y 5. Estos últimos son tan asombrosos como elementales. Es un hecho notable su simpleza, la facilidad con la que se construyen y se prueba su isospectralidad. Además, en el mismo trabajo, Conway y Sloane simplificaron y generalizaron varios de los ejemplos aislados de Schiemann en dimensión 4, iluminando algo que hasta el momento no se comprendía.

Luego la única dimensión donde no se conocía la respuesta al problema era 3. Hubo muchos intentos por resolverlo, quedando varios de ellos ‘cerca’ de lograrlo, y otros que pretendían haber dado la respuesta contenían errores. Finalmente fue nuevamente Schiemann [Sch2] (dirigido por Fritz Grunewald) quién dió una demostración de que no hay lattices isospectrales en dimensión 3. Esta prueba depende de algoritmos computacionales para resolver cientos de casos. Sin dudas que sería muy lindo ver una nueva prueba, geométrica, de este importante teorema, aunque sea difícil lograrla.

**5.3. Ejemplos de Conway-Sloane en dim 6 (y 5).** Tomamos los dos siguientes códigos binarios. Son muy sencillos puesto que cada uno tiene sólo 8 palabras (filas, en el arreglo). Además, son lineales, porque la suma de dos palabras da otra palabra.

$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$																																																																																																
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0																																																																																												
1	1	0	0	0	0																																																																																												
0	0	1	1	0	0																																																																																												
0	0	0	0	1	1																																																																																												
1	1	1	1	1	1																																																																																												
0	0	1	1	1	1																																																																																												
1	1	0	0	1	1																																																																																												
1	1	1	1	0	0																																																																																												
0	0	0	0	0	0																																																																																												
1	0	1	0	0	0																																																																																												
0	0	1	0	1	0																																																																																												
1	0	0	0	1	0																																																																																												
1	1	1	1	1	1																																																																																												
0	1	0	1	1	1																																																																																												
1	1	0	1	0	1																																																																																												
0	1	1	1	0	1																																																																																												

Notemos que la palabras en las filas segunda, tercera y cuarta tienen dos unos y cuatro ceros, por lo tanto *peso* 2. En general, los *pesos* son 0, 2, 2, 2, 6, 4, 4, 4 en ambos códigos, que en notación de multiconjuntos sería  $\{\{0^1, 2^3, 4^3, 6\}\}$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son “isospectrales”. Sin embargo, no son isomorfos —más precisamente, no hay un isomorfismo que preserve longitudes— pues la suma de dos palabras de longitud 2 en  $\mathcal{C}_1$  siempre da una palabra de longitud 4, mientras que en  $\mathcal{C}_2$  no.

Para  $i = 1, 2$ , definimos en  $\mathbb{R}^6$

$$L_i := \{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_6) \in \mathbb{Z}^6 : \text{al reducir } \mathbf{v} \text{ (módulo 2), da una palabra en } \mathcal{C}_i \}.$$

Equivalentemente,  $L_i = f^{-1}(C_i)$  donde

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{array} \text{ es la proyección canónica, es decir } \bar{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{si } x_j \text{ es par} \\ 1, & \text{si } x_j \text{ es impar} \end{cases}$$

Claramente,  $f$  es un epimorfismo de grupos y los  $L_i$ 's son lattices.

**Afirmación 5.7.**  $L_1$  y  $L_2$  son lattices isospectrales.

*Demostración.* Hay una correspondencia biunívoca entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  que preserva pesos: si una palabra de  $\mathcal{C}_1$  tiene exactamente dos coordenadas de una cierta paridad, entonces hay que intercambiar la segunda de estas coordenadas con la coordenada que le sigue, en orden cíclico. Por ejemplo,  $(1, 1, 0, 0, 0, 0) \mapsto (1, 0, 1, 0, 0, 0)$ . La misma regla da una correspondencia biunívoca entre los vectores de  $L_1$  y  $L_2$  que preserva longitudes. Por ejemplo  $(3, 5, 0, 2, 4, 6) \mapsto (3, 0, 5, 2, 4, 6)$ . Los vectores donde todas las coordenadas tienen la misma paridad no se cambian. Esta biyección prueba la isospectralidad de  $L_1$  y  $L_2$ .

*2da Prueba.* (parecida a la anterior) La isometría de  $\mathbb{R}^6$  dada por el intercambio de las coordenadas segunda y tercera,  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, x_6)$ , lleva  $f^{-1}((1, 1, 0, 0, 0, 0))$  en  $f^{-1}((1, 0, 1, 0, 0, 0))$ . Por lo tanto las preimágenes de las primeras palabras no nulas de cada código (es decir, aquellas en la segunda fila) son isométricas.

Como lo mismo ocurre al tomar preimágenes de cada una de las otras 7 filas, por el Ejercicio 4 resulta la isospectralidad de  $L_1$  y  $L_2$ .  $\square$

**Afirmación 5.8.**  $L_1$  y  $L_2$  no son isométricos.

*Demostración.* Una forma de verlo es que los vectores mínimos en  $L_1$  son  $\pm(1, \pm 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\pm(0, 0, 1, \pm 1, 0, 0)$  y  $\pm(0, 0, 0, 0, 1, \pm 1)$ , que generan  $L_1$ ; mientras que en  $L_2$  los vectores mínimos son  $(1, 0, \pm 1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, \pm 1, 0)$ ,  $(\pm 1, 0, 0, 0, 1, 0)$  y sus opuestos, que no lo generan.

Otra demostración sería observando que en  $L_1$  la suma de dos vectores mínimos nunca da otro mínimo, pero en  $L_2$  sí.  $\square$

*Observación 5.9.*  $L_1$  es una versión a escala del lattice cúbico  $I_6$ , pues está generado por  $(1, \pm 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, \pm 1, 0, 0)$  y  $(0, 0, 0, 0, 1, \pm 1)$ , que son 6 vectores de norma 2 mutuamente ortogonales. Esto es muy sorprendente, puesto que intuitivamente uno tendería a pensar que al menos los lattices cúbicos ( $I_n = \mathbb{Z}_n$ ) no son isospectrales a otros no cúbicos. Al lattice  $L_2$  se lo llama *isocúbico*.

*Observación 5.10.* De modo que en dimensiones  $\geq 6$  no es ni siquiera posible oír si un lattice es cúbico o no.

En cambio, para dimensiones  $\leq 5$ , ser cúbico es una “propiedad audible”, i.e., si dos lattices son isospectrales y uno es cúbico entonces el otro también lo es (ver [Co]. pag. 60).

**Ejemplo 5.11.** A partir del ejemplo de isospectralidad visto en dimensión 6, se puede obtener el siguiente ejemplo [CSi]:

Sean  $L'_1$  y  $L'_2$  los respectivos sublattices de  $L_1$  y  $L_2$  perpendiculares al vector  $\mathbf{z} := (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Es decir,  $L'_i := \{\mathbf{x} \in L_i : \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0\}$ .

No es difícil ver que  $L'_1$  y  $L'_2$  son lattices en dimensión 5. Y dejamos como ejercicio (ver Ejercicio 6) las demostraciones de la isospectralidad y la no isometría.

A continuación, enunciaremos algunos problemas no resueltos en el tema:

1. Dar una nueva prueba (geométrica en lo posible) del Teorema de Schiemann en dimensión 3.
2. Los ejemplos de familias con 4 parámetros de Conway y Sloane en dimensión 4 no han sido totalmente estudiados aún. Por ejemplo, la no isometría no ha sido probada.

3. También, uno puede preguntarse ¿cuáles son *todos* los ejemplos de lattices isospectrales en dimensión 4?
4. ¿Cuál es la menor dimensión donde se puede hallar una familia de (al menos tres) lattices mutuamente isospectrales. (Hay una cota superior para el número posible de lattices mutuamente isospectrales en cada dimensión [Pe].)
5. Las conjeturas de *conmesurabilidad* y *jigsaw*.

La primera afirma que si dos lattices son isospectrales entonces son ‘conmensurables’ (dicho brevemente, que los lattices están relacionados por números racionales).

La segunda —extremadamente ambiciosa— dice que dos lattices isospectrales son como dos jigsaws, o rompecabezas, compuestos por las mismas piezas (un número finito de ellas), pero acomodadas en forma distinta.

En el ejemplo en dimensión 6 que vimos, el jigsaw tendría 8 piezas (correspondientes a las ocho preimágenes de las palabras de los códigos), aunque se podría arreglar de modo de tener sólo 3 ó 4 piezas.

**Ejercicios.**

1. Demostrar que si dos lattices son isospectrales, entonces tienen el mismo volumen.
2. Demostrar que si dos lattices en dimensión 2 son isospectrales, entonces son isométricos.  
[Ayuda: usar alguna parametrización de los lattices en dimensión dos y el ejercicio anterior.]
3. Probar que  $D_{12}$  y  $E_8 \oplus D_4$  son isospectrales.  
[Ayuda: Usar las series theta y la Identidad de Jacobi.]
4. Sean  $L$  y  $L'$  lattices tales que  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$  (unión disjunta) y  $L' = L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_k$  (unión disjunta) y existen isometrías  $\phi_j$  de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\phi_j(L_j) = L'_j$  para  $1 \leq j \leq k$ . Entonces  $L$  y  $L'$  son isospectrales.  
Dar un ejemplo donde bajo las condiciones anteriores  $L$  y  $L'$  no son isométricos.
5. Para la proyección  $f$  definida en (5.3), probar que  $f^{-1}((0, 0, 0, 0, 0, 0)) = 2I_6$  y que  $L_1$  y  $L_2$  son lattices en  $\mathbb{R}^6$ .  
[Ayuda:  $L_i = f^{-1}(C_i) \supseteq f^{-1}(\bar{0}) = (2\mathbb{Z})^6$ , y como  $f$  es homomorfismo y  $C_i$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}_2^6$ ,  $L_i$  es subgrupo (aditivo) de  $\mathbb{R}^6$  y de  $\mathbb{Z}^6$ .]
6. Probar que los lattices  $L'_1$  y  $L'_2$  obtenidos en dimensión 5 son isospectrales.  
[Ayuda. Usar los mismos argumentos que para dimensión 6: la misma biyección que antes, pero restringida a  $\mathbb{R}\mathbf{z}^\perp$  muestra la isospectralidad, y por ejemplo estudiar los vectores mínimos muestra la no isometría.]
7. Probar que si  $L$  y  $L'$  son isospectrales, entonces  $L \oplus \langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{Z}}$  y  $L' \oplus \langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{Z}}$  también lo son.
8. Probar que si  $L_1 \oplus \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$  y  $L_2 \oplus \langle \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  son isospectrales y  $\text{vol}(L_1) = \text{vol}(L_2)$ , entonces  $L_1$  y  $L_2$  son isospectrales y  $N(\mathbf{v}_1) = N(\mathbf{v}_2)$ .

## REFERENCIAS

- [BS] BARNES, E. S.; SLOANE, N. J. A. The optimal lattice quantizer in three dimensions. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **4** (1983), no. 1, 30–41.
- [Bl1] BLICHFELDT, H. F. A new principle in the geometry of numbers, with some applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* **15** (1914), no. 3, 227–235.
- [Bl2\*] ——— The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres. *Math. Ann.* **101** (1929), no. 1, 605–608.
- [Bl3\*] ——— The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.* **39** (1935), no. 1, 1–15.
- [CE] COHN, H; ELKIES, N, *New upper bounds on sphere packings I. Annals of Math.* **157** (2003), 689-714. math.MG/0110009.
- [CS] CONWAY, J.H.; SLOANE, N., Sphere Packing, Lattices and Groups. *Springer-Verlag 3rd Edition* (1999).
- [CSi] CONWAY J.H.; SLOANE N.J.A., Four-dimensional lattices with the same theta series, *International Math. Research Notices* **4** (1992), 93–96.
- [Co] CONWAY, J.H., (with the assistance of F.Y.C. FUNG), The sensual (quadratic) form, *Carus Mathematical Monographs*, **26** Math. Assoc. of America, Washington, DC (1997).
- [Del] DELONE, B.N. Sur la partition régulière de l'espace à 4-dimensions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* **7** (1929), 79–110 y 145–164
- [Eb] EBELING, WOLFGANG. Lattices and codes. A course partially based on lectures by F. Hirzebruch. *Second edition. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2002.*
- [Fed] FEDOROV, E.S. Elements of the study of figures. *Zap. Mineralog. Obsc. (2)* **21**, 1–279. Reprinted by Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1953.
- [Fe\*] FERGUSON, S., Sphere Packings V. *Ph.D. thesis, Univ. of Michigan* (1997), math.MG/9811077.
- [Gr] GROEMER, H. Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum, *Math. Z.* **81** (1963), 260–278.
- [Ha\*] HALES, THOMAS C., The Kepler conjecture. [arXiv:math.MG/9811078](https://arxiv.org/abs/math/9811078).
- [Ha1] ——— A proof of the Kepler conjecture. *Ann. of Math. (2)* **162** (2005), no. 3, 1065–1185.
- [Ha2] ——— Cannonballs and Honeycombs. *Notices A.M.S.* **47** (2000) no. 4 (April), 440–449.
- [HM\*] HALES, T; MCLAUGHLIN, S, A proof of the dodecahedral conjecture. [math.MG/9811079](https://arxiv.org/abs/math/9811079).
- [Hu] HUNGERFORD, THOMAS W. Algebra. *Graduate Texts in Mathematics*, 73. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
- [Ka] KAC, MARK. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* **73** (1966) no. 4, part II, 1–23.
- [Ki] KITAOKA, Y. Positive definite quadratic forms with the same representation numbers. *Arch. Math. (Basel)* **28** (1977), no. 5, 495–497.
- [Kn] KNESER, M., Lineare Relationen zwischen Darstellungsanzahlen quadratischer Formen. *Math. Ann.* **168** (1967), 31–39.
- [KZ1] KORKINE, A.; ZOLOTAREFF, G.. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. *Math. Ann.* **5** (1872), no. 4, 581–583.
- [KZ2] KORKINE, A.; ZOLOTAREFF, G.. Sur les formes quadratiques. *Math. Ann.* **6** (1873), no. 3, 366–389.
- [Ku\*] KUPERBERG, G. Notions of denseness, *Geom. & Topol.* **4** (2000) 277–292, [arXiv:math.MG/9908003](https://arxiv.org/abs/math/9908003).
- [Ma] MARTINET, JACQUES. Perfect lattices in Euclidean spaces. *Fundamental Principles of Mathematical Sciences*, 327. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Mi] MILNOR, J., Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **51** (1964), 542.
- [Mu1] MUSIN, OLEG R. The kissing problem in three dimensions. *Discrete Comput. Geom.* **35** (2006), no. 3, 375–384.
- [Mu2] ——— The problem of the twenty-five spheres. *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2003), no. 4(352), 153–154; Russian Math. Surveys 794–795.
- [Mu3] ——— The kissing number in four dimensions. [math.MG/0309430](https://arxiv.org/abs/math/0309430) (27 pages).
- [OLD] OLDS, C. D.; LAX, ANNELI; DAVIDOFF, GIULIANA P. The geometry of numbers. (Appendix I by Peter D. Lax.) *Anneli Lax New Mathematical Library*, **41**. MAA, Washington, DC, 2000.
- [Pe] PESCE, HUBERT. Borne explicite du nombre de tores plats isospectraux à un tore donné. *Manuscripta Math.* **75** (1992), no. 2, 211–223.
- [Ro\*] ROGERS, C. A. The packing of equal spheres, *Proc. London Math. Soc.* **8** (1958), 609–620.

- [RB] RYŠKOV, S. S.; BARANOVSKIĀ, E. P.  $C$ -types of  $n$ -dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelehedra (with application to the theory of coverings). *Proc. Steklov Inst. Math.* 1978, no. 4, 140 pp.
- [Sch1] SCHIEMANN, A., Ein Beispiel positiv definiten quadratischer Formen der Dimension 4 mit gleichen Darstellungszahlen. *Arch. Math. (Basel)* **54** (1990), no. 4, 372–375.
- [Sch2] SCHIEMANN, A., Ternary positive definite quadratic forms are determined by their theta series. *Math. Ann.* **308** (1997), no. 3, 507–517.
- [Sto] STOGRIN, M.I. Regular Dirichlet-Voronoi partitions for the second triclinic group. *Proc. Stekl. Inst. Math.* **123** (1973).
- [Th\*] THOMPSON, THOMAS M. From error-correcting codes through sphere packings to simple groups. *Carus Mathematical Monographs*, 21. MAA, Washington, DC, 1983.
- [Vor\*] VORONOI, G.F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *J. Reine Angew. Math.* **133**, 97–178; **134**, 198–287; **136**, 67–181
- [Wi] WITT, ERNST. Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* **14** (1941), 323–337.

FAMAF-CIEM. UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA.  
*E-mail address:* `rossetti@mate.uncor.edu`