UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 52/08

Álgebras de von Neumann y Representaciones de Grupos

Esther Galina

Editores: Jorge R. Lauret–Elvio A. Pilotta

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Álgebras de von Neumann y Representaciones de Grupos

Esther Galina

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
2007

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

¿Qué nos motiva a estudiar álgebras de von Neumann?

Nuestro interés en estudiar representaciones de grupos localmente compactos y más precisamente representaciones de grupos discretos infinitos. Esto nos condujo a profundizar en representaciones de este tipo de álgebras.

En efecto, sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación del grupo topológico G sobre el espacio de Hilbert separable complejo $\mathcal{H}$. Esta da lugar a $\pi(G) = \{\pi(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x \in G\}$, un subgrupo del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de endomorfismos continuos de $\mathcal{H}$. La teoría de álgebras de von Neumann asegura que existe un álgebra de von Neumann minimal A_π en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contiene a $\pi(G)$. Más aún, si la representación es unitaria, es decir los operadores $\pi(x)\pi(x)^* = \pi(x)^*\pi(x) = I$ para todo $x \in G$, A_π es igual al doble conmutador $\pi(G)''$ de $\pi(G)$. Aquí denotamos por $M' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS = ST \quad \forall S \in M\}$ al conmutador de un subconjunto M y por $M'' = (M')' \supset M$.

En particular, esto nos dice que $(\pi, \mathcal{H})$ da lugar a una representación del álgebra de von Neumann A_π. Por lo tanto, la teoría de representaciones de estas álgebras nos da información sobre las representaciones del grupo G.

A lo largo de las notas especificaremos con mayor detalle lo arriba expuesto.

Quiero agradecer a mi alumna de doctorado Claudia Egea, ya que su tema de tesis, el estudio de familias especiales de representaciones de grupos de trenzas, nos indujo a profundizar en estos temas. Estas notas son las notas de clase del curso de postgrado "Álgebras de von Neumann y representaciones de grupos"que dicté en el segundo semestre de 2007 en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. También quiero agradecer a César Galindo, otro estudiante de este curso, por sus ganas de aprender y sus importantes aportes en el desarrollo del mismo.

1.2. Contenidos de las notas

Quiero aclarar que no soy especialista en álgebras de von Neumann y me dió mucho gusto profundizar en el tema. De la bibliografía que tuve a mi alcance me pareció que las notas de V. F. R. Jones "Álgebras de von Neumann" [J] era lo más adecuado para brindar un buen panorama del área en el tiempo que disponíamos.

Es por ello que en general he seguido la misma disposición y presentación de los temas. No es una traducción textual del texto en inglés porque he agregado varios argumentos para hacer más comprensible algunas afirmaciones a quienes sólo cuentan con una formación general básica en álgebra, funciones reales, topología y teoría de representaciones de grupos finitos. También cuenta con una demostración del Teorema Espectral para operadores autoadjuntos y normales y algunos ejercicios extras.

En el Capítulo 2 comenzamos con aspectos básicos de la teoría de operadores y presentamos el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos y normales. La demostración que presentamos de este teorema está inspirada en la que dió von Neumann alrededor de 1950. Consultamos para ello el texto de Lang [L] y las notas del curso de Análisis Funcional I de la Licenciatura en Matemática de FAMAF que dictó el Prof. Amblard [A] cuando yo era estudiante de cuarto año.

En el Capítulo 3 se introducen las álgebras de von Neumann con los Teoremas de Densidad y del Doble Conmutador de von Neumann y se dan algunos ejemplos, especialemente el del álgebra de von Neumann generada por la representación regular de un grupo discreto.

En el Capítulo 4 se dan las propiedades esenciales de las álgebras de von Neumann que luego serán usadas para obtener los resultados posteriores.

En el Capítulo 5 las proyecciones comienzan a jugar un papel importante para el estudio de estas álgebras. Se define cuándo un álgebra de von Neumann es un factor, se clasifican los factores de tipo I y se caracterizan las álgebras de von Neumann de dimensión finita.

En el Capítulo 6 se presenta el Teorema de Densidad de Kaplansky.

En el Capítulo 7 se define un orden en el conjunto de proyecciones y se distinguen los distintos tipos de factores. Se estudian los factores de tipo II_1 y se presenta una manera de construir factores de tipo II_1 dada por Gelfand, Naumark y Segal llamada construcción GNS.

En el Capítulo 8 se da la forma estándar de los factores de tipo II_1 y se definen los de tipo II_∞.

En el Capítulo 9 se clasifican los módulos separables de factores de tipo II_1 y se define su dimensión.

Finalmente en el Capítulo 10 se construyen nuevas álgebras de von Neumann, llamadas productos cruzados, a partir de otras donde actúa un grupo. Además se dan ejemplos de productos cruzados de distintos tipos, se definen los factores de tipo III y se dan condiciones suficientes para que un producto cruzado sea de tipo III.

Capítulo 2

Cuestiones básicas

Aquí repasaremos algunos conceptos y resultados básicos para iniciarnos en el tema de nuestro interés.

2.1. Espacios de Hilbert

Definición 2.1.1. Un *espacio de Hilbert* complejo es un par $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ con $\mathcal{H}$ un espacio vectorial complejo y

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

un producto interno hermitiano, es decir que satisface para todo $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{H}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$

1. $\langle \xi + \lambda\eta, \zeta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle + \lambda < \eta, \zeta \rangle$,
2. $\overline{\langle \xi, \eta \rangle} = \langle \eta, \xi \rangle$,
3. $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ for $\xi \neq 0$,

y $\mathcal{H}$ es completo respecto de la norma definida por $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$.

Ejercicio 2.1.1. Probar la identidad del paralelogramo

$$\|\xi - \eta\|^2 + \|\xi + \eta\|^2 = 2(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|$$

Proposición 2.1.2. *Si C es un subconjunto convexo de $\mathcal{H}$ y ξ es cualquier vector en $\mathcal{H}$, entonces existe un único $\eta \in C$ que minimiza la distancia de ξ a C, es decir*

$$\|\xi - \eta\| \leq \|\xi - \eta'\| \qquad \forall \eta' \in C$$

Demostración. Este resultado es esencialemente un resultado de la geometía del plano.

Probemos la unicidad. Supongamos que η y η' son dos vectores distintos en C que minimizan la distancia. Sea $\zeta = t\eta + (1-t)\eta'$ en el segmento que une η y η'. Por ser C convexo, $\zeta \in C$. Usando la propiedad de la norma respecto de la suma,

$$\|\xi - \zeta\| \leq t\|\xi - \eta\| + (1-t)\|\xi - \eta'\| = \|\xi - \eta\|$$

Pero la igualdad se da únicamente cuando $\xi - \eta$ y $\xi - \eta'$ son múltiplos positivos uno del otro, o equivalentemente ξ, η, η' están alineados y ξ no está al medio de los otros dos. Por lo tanto la desigualdad anterior es estricta para vectores genéricos. En el caso particular mencionado la única posibilidad es que $\eta = \eta'$. Obteniendo así una contradicción en ambas situaciones.

Para probar la existencia, sea d la distancia entre C y ξ y sea η_n una sucesión en C tal que $\|\xi - \eta_n\| < d + 1/2^n$. Para cada n, los vectores ξ, η_n, η_{n+1} definen un plano. Geométricamente, si los dos últimos no están muy próximos, algún punto en el segmento que los une tendría una distancia a ξ menor que d. Formalmente, lo podemos ver así

$$\begin{aligned}\left\|\xi - \frac{\eta_n + \eta_{n+1}}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\eta_n - \eta_{n+1}}{2}\right\|^2 &= \left\|\frac{\xi - \eta_n}{2} + \frac{\xi - \eta_{n+1}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{\xi - \eta_n}{2} - \frac{\xi - \eta_{n+1}}{2}\right\|^2 \\ &= 2\left(\left\|\frac{\xi - \eta_n}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{\xi - \eta_{n+1}}{2}\right\|^2\right) \\ &\leq \left(d + \frac{1}{2^n}\right)^2 \leq d^2 + K\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

para alguna constante K.Esto dice que

$$d^2 < \left\|\xi - \frac{\eta_n + \eta_{n+1}}{2}\right\|^2 \leq d^2 + K\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}\|\eta_n - \eta_{n+1}\|^2$$

Por lo tanto, la sucesión η_n es una sucesión de Cauchy, converge y su límite está en C por ser este cerrado. □

Ejercicio 2.1.2. (Teorema de Riesz, 1906) Si ϕ está en $\mathcal{H}^*$, el espacio de Banach dual a $\mathcal{H}$ que consiste en todas las funcionales lineales continuas de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{C}$, el $\operatorname{Nu}\phi$ es un subconjunto convexo cerrado de $\mathcal{H}$. Mostrar que se puede elegir un vector ξ_ϕ ortogonal al $\operatorname{Nu}\phi$ tal que $\phi(\eta) = \langle \eta, \xi_\phi \rangle$ y tal que la aplicación $\phi \to \xi_\phi$ sea un isomorfismo conjugado-lineal de $\mathcal{H}^*$ en $\mathcal{H}$.

Trabajaremos especialemente con espacios de Hilbert *separables*, es decir que tienen una base ortonormal numerable.

Ejercicio 2.1.3. Si $\{\xi_i\}$ es una base ortonormal numerable de $\mathcal{H}$, mostrar que la expansión lineal de $\{\xi_i\}$ es densa en $\mathcal{H}$.

2.2. Operadores autoadjuntos

Definición 2.2.1. Un operador lineal $a : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ se dice *acotado* si existe una constante K tal que $\|a\xi\| \leq K\|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. El ínfimo de todos esos K se denomina la *norma* de a y se denota $\|a\|$.

Sea $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ en sí mismo.

Ejercicio 2.2.1. Probar que es equivalente para un operador el ser acotado que el ser continuo.

Dado operador lineal acotado $a : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, el ejercicio 2.1.2, permite definir otro operador $a^* : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ llamado el *adjunto* de a y está dado por la fórmula

$$\langle a\xi, \eta\rangle = \langle \xi, a^*\eta\rangle$$

Un operador $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *autoadjunto* si $a = a^*$.

Ejercicio 2.2.2. Probar que $\|a\| = \underset{\|\xi\|\leq 1, \|\eta\|\leq 1}{sup} |\langle a\xi, \eta\rangle| = \|a^*\| = \|a^*a|^{1/2}$.

Lema 2.2.2. *Si existe una constante K tal que $|\langle a\xi, \xi\rangle| \leq K\|\xi\|^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, entonces*

$$|\langle a\xi, \eta\rangle| + |\langle \xi, a\eta\rangle| \leq 2K\|\xi\|\|\eta\|$$

para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Demostración. Analicemos las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned} 2|\langle a\xi, \eta\rangle + \langle a\eta, \xi\rangle| &= |\langle a(\xi+\eta), \xi+\eta\rangle - \langle a(\xi-\eta), \xi-\eta\rangle| \\ &\leq |\langle a(\xi+\eta), \xi+\eta\rangle| + |\langle a(\xi-\eta), \xi-\eta\rangle| \\ &\leq K\|\xi+\eta\|^2 + K\|\xi-\eta\|^2 = 2K(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) \end{aligned}$$

Resultando

$$|\langle a\xi, \eta\rangle + \langle a\eta, \xi\rangle| \leq K(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)$$

Multiplicando η por un apropiado número complejo $e^{i\theta}$ de modo el lado izquierdo satisfaga la siguiente igualdad, observemos que a su vez el derecho no varía,

$$|e^{-i\theta}\langle a\xi, \eta\rangle + e^{i\theta}\langle a\eta, \xi\rangle| = |\langle a\xi, \eta\rangle| + |\langle a\eta, \xi\rangle| \leq K(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)$$

Ahora reemplacemos en la desigualdad anterior ξ por $t\xi$ y η por $t^{-1}\eta$ con $t > 0$. El lado izquierdo permanece igual y el derecho es

$$g(t) = K(t^2\|\xi\|^2 + t^{-2}\|\eta\|^2)$$

Sea t_o tal que $g'(t_o) = 0$, allí $g(t)$ alcanza su único mínimo para $t > 0$. Resulta así que $t_o = (\|\eta\|/\|\xi\|)^{1/2}$ y por lo tanto $g(t_o) = 2K\|\eta\|\|\xi\|$, dando la desigualdad buscada. $\square$

Proposición 2.2.3. *Sea $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto, entonces*
(i) $\|a\|$ es igual al ínfimo de los K tales que $|\langle a\xi, \xi\rangle| \leq K\|\xi\|^2$;
(ii) $\|a\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle a\xi, \xi\rangle|$.

Demostración. En general tenemos que

$$|\langle a\xi, \eta\rangle| \leq \|a\xi\|\|\eta\| \leq \|a\|\|\xi\|\|\eta\|$$

En particular, si $\eta = \xi$ tenemos que $\|a\|$ satisface la desigualdad de (i).

Por otro lado, de acuerdo al lema anterior, por ser $a = a^*$,

$$2|\langle a\xi, \eta\rangle| = |\langle a\xi, \eta\rangle + \langle \xi, a\eta\rangle| \leq 2K\|\eta\|\|\xi\|$$

para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Es decir que

$$\|a\| = \sup_{\|\xi\|=1, \|\eta\|=1} |\langle a\xi, \eta\rangle| \leq K$$

para todo K que satisface la desigualdad de (i). Entonces, $\|a\|$ es igual al ínfimo de los K que satisfacen la desigualdad de (i).

La afirmación (ii) se deduce inmediatamente de (i). □

Definición 2.2.4. La aplicación identidad en $\mathcal{H}$ es un operador acotado denotado por 1.

Un operador $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *proyección* si $p = p^2 = p^*$.

Un operador $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *positivo* si $\langle a\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Decimos además que $a \geq b$ si $a - b$ es positivo.

Un operador $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *isometría* si $u^*u = 1$.

Un operador $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *unitario* si $uu^* = u^*u = 1$.

Un operador $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *isometría parcial* si u^*u es una proyección.

Las últimas tres definiciones se extienden a operadores lineales acotados entre diferentes espacios de Hilbert.

Ejercicio 2.2.3. Probar que todo operador $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una combinación lineal de dos operadores autoadjuntos.

Ejercicio 2.2.4. Probar que todo operador positivo es autoadjunto.

Sea a un operador autoadjunto, consideremos $m = \inf_{\|\xi\|=1} \langle a\xi, \xi\rangle$ y $M = \sup_{\|\xi\|=1} \langle a\xi, \xi\rangle$, esto dice que

$$mI \leq a \leq MI$$

Entonces, como consecuencia de la Proposición 2.2.3,

$$\|a\| = \text{máx}(|m|, |M|)$$

Sea p un polinomio a coeficientes reales y sea a un operador autoadjunto. Si

$$p(t) = \alpha_n t^n + \cdots + \alpha_o$$

Definimos

$$p(a) = \alpha_n a^n + \cdots + \alpha_o I$$

Sea $\mathbb{R}[a]$ el álgebra generada por $\mathbb{R}$ y a. Nuestro interés será analizar la clausura de $\mathbb{R}[a]$ en el espacio de Banach real de todos los operadores lineales. Obtendremos que dicha clausura es equivalente al anillo de funciones continuas sobre un subconjunto compacto de los reales. Primero observaremos que los operadores autoadjuntos forman un subespacio cerrado de $\mathcal{E}\mathrm{nd}(\mathcal{H})$ y que $\overline{\mathbb{R}[a]}$ es un subespacio cerrado del espacio de operadores autoadjuntos.

Ejercicio 2.2.5. Sea α real y a_n una sucesión de operadores autoadjuntos monótona y acotada por α, en particular $a_n \geq a_{n+1} \geq \alpha 1$ ó $a_n \leq a_{n+1} \leq \alpha 1$ para todo n. Entonces, dado $\xi \in \mathcal{H}$, la sucesión $a_n \xi$ converge en $\mathcal{H}$. Más aún, si denotamos dicho elemento $a\xi$, la aplicación $\xi \to a\xi$ es un operador autoadjunto y acotado.

Ejercicio 2.2.6. Sea a autoadjunto y f una función definida en $[m, M]$ que puede ser expresada como un límite de polinomios p_n. Probar que $\lim_{n\to\infty} p_n(a)$ es independiente de la sucesión p_n.

Teorema 2.2.5. *Todo operador positivo a tiene una única raíz cuadrada positiva $a^{1/2}$. Más aún, $a^{1/2} \in \overline{\mathbb{R}[a]}$ y pertenece al doble conmutador de a.*

Demostración. Considerando $\frac{a}{\|a\|}$ podemos suponer que $0 \leq a \leq 1$. Si $b = 1 - a$ y $d = 1 - c$, también tenemos que $0 \leq b \leq 1$. Encontrar un operador positivo cuyo cuadrado es a es equivalente a encontrar d tal que $(1-d)^2 = 1 - b$, o equivalentemente que $d = (b + d^2)/2$.

Sea $d_o = 0$, $d_1 = b/2$,..., $d_{n+1} = (b + d_n^2)/2$,... . Por inducción se ve que $\|d_n\| \leq 1$, por lo tanto $d_n \leq 1$. Más aún, se deduce que $d_n = p_n(b)$ con p_n un polinomio con coeficientes no negativos y que

$$p_{n+1}(b) - p_n(b) = d_{n+1} - d_n = \frac{1}{2}(d_n^2 - d_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(d_n + d_{n-1})(d_n - d_{n-1}) = q(b)q'(b) = qq'(b)$$

ya que los d_n conmutan entre sí. El polinomio q tiene coeficientes no negativos por ser suma de dos polinomios de coeficientes no negativos, y por hipótesis inductiva q' también. Esto dice que qq' tiene coeficientes no negativos, o sea que en $[m, M]$, $0 \leq p_n(t) \leq p_{n+1}(t) \leq qq'(t) \leq \|qq'\| = \sup_{t\in[m,M]} qq'(t)$. Esta sucesión es monótona y acotada con la norma del supremo. Por lo tanto, converge uniformemente en $[m, M]$. Entonces, sea $f = \lim p_n \in \overline{R[t]}$ y $d = f(a) = \lim p_n(a) = \lim d_n$. Pero d es acotado, pues

$$\|d\| = \lim \sup_{\|\xi\|=1} \langle d_n \xi, \xi \rangle \leq \sup_{\|\xi\|=1} \langle \xi, \xi \rangle \leq 1$$

También es fácil ver que es autoadjunto.

Esto implica que $d^2 = \lim d_n^2$, es decir que $d = (b + d^2)/2$, entonces $c^2 = a$ como queríamos probar.

La última afirmación es inmediata ya que $a^{1/2} = d \in \overline{\mathbb{R}[a]}$. $\square$

Corolario 2.2.6. *Si a y b son operadores positivos que conmutan, entonces ab es positivo.*

Demostración.
$$(ab\xi, \xi) = (a^{1/2}b\xi, a^{1/2}\xi) = (ba^{1/2}\xi, a^{1/2}\xi) \geq 0$$
$\square$

Proposición 2.2.7. *Sea a un operador autoadjunto y $p \in \mathbb{R}[t]$ tal que $p(t) \geq 0$ para todo $t \in [m, M]$. Entonces, $p(a) \geq 0$.*

Demostración. Sea $Z = \{z_j : j = 1, \ldots, n\}$ los ceros en $\mathbb{C}$ de p. Es decir,

$$p(t) = \alpha_n \prod_{j=1}^{n} (t - z_j)$$

Como los coeficientes de p son reales, $\overline{z_j} \in Z$. Por lo tanto, si $z_j = x_j + iy_j$, $(t - z_j)(t - \overline{z}_j) = (t - x_j)^2 + y_j^2$. Por otro lado, por ser $p(t) \geq 0$ en $[m, M]$, los $z_j \in (m, M)$ reales son de orden par.

Si v_k y w_l son los ceros en $(-\infty, m]$ y $[M, \infty)$ respectivamente, resulta que en $[m, M]$,

$$p(t) = K \prod_j ((t - x_j)^2 + y_j^2) \prod_k (t - v_k) \prod_l (w_l - t)$$

para algún $K \geq 0$.

Entonces,

$$p(a) = K \prod_j ((a - x_j 1)^2 + y_j^2 1) \prod_k (a - v_k 1) \prod_l (w_l 1 - a)$$

Por ser a autoadjunto,

$$\langle (a - x_j 1)^2 \xi, \xi \rangle = \langle (a - x_j 1)\xi, (a - x_j 1)\xi \rangle \geq 0$$

Entonces, $(a - x_j 1)^2$ es un operador positivo. Como $y_j^2 1$, $a - v_k 1$ y $w_l 1 - a$ también son operadores positivos, por Corolario 2.2.6, se tiene que $p(a) \geq 0$. $\square$

Ejercicio 2.2.7. Probar que si $p, q \in \mathbb{R}[t]$ son tales que $p \leq q$ en $[m, M]$, entonces $p(a) \leq q(a)$ y $\|p(a)\| \leq \|p\|$.

La aplicación $p \to p(A)$ del espacio de polinomios definidos en $[m, M]$ en $\mathbb{R}[a]$ es un morfismo de anillos. Considerando la topología dada por la norma del supremo, la aplicación resulta continua. Por el Teorema de Extensión Lineal, por continuidad podemos extender esta aplicación al espacio de Banach de funciones continuas en $[m, M]$ no negativas. Por lo tanto podemos definir $f(a)$ para cualquier función continua $f \geq 0$ en $[m, M]$, por el Teorema de Stone-Weistrass.

Sea $0 \leq p_n \in \mathbb{R}[t]$ una sucesión que converge uniformemente a $f \geq 0$ en $[m, M]$. Denotemos

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a) \in \overline{\mathbb{R}[a]}$$

Dadas dos sucesiones $p_n \to f$ y $q_n \to g$, como $p_n q_n \to fg$, tenemos que $(fg)(a) = f(a)g(a)$ para cualquier par de funciones continuas f, g. En otras palabras, nuestra aplicación es un morfismo de anillos continuo.

Por otro lado, tenemos que a cualquier funcion continua definida en $[m, M]$ la podemos escribir como diferencia de dos funciones no negativas. Esto nos dice que la aplicación

$$\begin{aligned} C([m, M]) &\to \overline{\mathbb{R}[a]} \\ f \quad\quad &\to f(a) \end{aligned}$$

también es un morfismo de anillos continuo.

Ejercicio 2.2.8. Hallar una isometría en un espacio de Hilbert que no sea unitaria.

Ejercicio 2.2.9. Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ mostrar que la aplicación $P_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ que asigna a cada punto de $\mathcal{H}$ el elemento de $\mathcal{K}$ más próximo, es lineal y es una proyección.

Ejercicio 2.2.10. Mostrar que la correspondencia $\mathcal{K} \to P_{\mathcal{K}}$ del ejercicio anterior es una biyección entre subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ y proyecciones de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Si S es un subconjunto de $\mathcal{H}$, definamos *el subespacio ortogonal a* S por $S^{\perp} = \{\xi \in \mathcal{H} : \langle \xi, \eta \rangle = 0 \quad \forall \eta \in S\}$. Notemos que $S^{\perp}$ siempre resulta cerrado.

Ejercicio 2.2.11. Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces $\mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{K}$ y $P_{\mathcal{K}^{\perp}} = 1 - P_{\mathcal{K}}$.

Es fácil ver que si u es una isometría parcial también lo es u^*. Por lo tanto, el subespacio $u^*\mathcal{H}$ resulta cerrado y se denomina *dominio inicial de* u. El subespacio $u\mathcal{H}$ también es cerrado y se llama *dominio final de* u.

Ejercicio 2.2.12. Probar que una isometría parcial es una composición de una proyección sobre su dominio inicial y un unitario entre el dominio inicial y el final.

Denominemos *conmutador* de $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ al operador $[a, b] = ab - ba$.

Ejercicio 2.2.13. Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado y a es autoadjunto, probar que

$$a\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \iff [a, P_{\mathcal{K}}] = 0$$

En general vale

$$a\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \text{ y } a^*\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \iff [a, P_{\mathcal{K}}] = 0$$

Para cualquier $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definamos $|a| = (a^*a)^{1/2}$.

Ejercicio 2.2.14. (*Descomposición polar*) Probar que existe una isometría parcial u tal que $a = u|a|$, y que u es única bajo la condición de que su dominio sea $\operatorname{Nu} a^{\perp}$. El dominio final de u es $\overline{\operatorname{Im} a} = (\operatorname{Nu} a^*)^{\perp}$.

2.3. Teorema Espectral

Jones en sus notas [J], dice que para acostumbrarse a usar el Teorema Espectral lleva algún tiempo y que su prueba no ayuda demasiado en este sentido. Agrega que si uno no puede "ver" la descomposición espectral de un operador será muy difícil obtenerla, salvo en dimensiones pequeñas donde es exactamente lo que conocemos por diagonalización. Continúa diciendo que afortunadamente no hay nada como un curso en álgebras de operadores, ya sea de C^*-álgebras como de álgebras von Neumann, para ayudar al uso de ese teorema que es el corazón del álgebra lineal en espacios de Hilbert.

Nosotros incluiremos en este curso una demostración del Teorema Espectral, inspirada en la demostración de von Newmann realizada alrededor de 1950. Los textos consultados han sido [L] y unas notas de un curso [A] dictado por Prof. Amblard en FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

Como hemos visto en la sección anterior, dado a un operador autoadjunto, existe una morfismo de anillos continuo de las funciones continuas definidas en $[m, M]$ en $\overline{R[a]}$. Sea N el núcleo de dicho morfismo que resulta ser un ideal cerrado en el conjunto de funciones continuas en $[m, M]$. Sea $\sigma(a)$ el conjunto de ceros de dicho ideal. Por su definicón $\sigma(a)$ resulta ser un conjunto cerrado.

Si f es una función continua en $\sigma(a)$, extendamos f a una función continua f_1 en $[m, M]$ con la misma norma. Definamos,

$$f(a) = f_1(a)$$

Dicha definición es independiente de la extensión elegida pues si f_2 es otra extensión de f en $[m, M]$, $f_2 - f_1$ se anula en $\sigma(a)$, entonces esa diferencia está en N, es decir que $f_2(a) = f_1(a)$ como queríamos ver. Denotaremos con $\| \ \|_a$ a la norma del supremo con respecto a $\sigma(a)$. Es decir que

$$\|f\|_a = \sup_{t \in \sigma(a)} |f(t)|$$

Por lo tanto,

$$\|f(a)\| \leq \|f\|_a$$

Como resultado obtenemos un morfismo de anillos continuo entre las funciones continuas en $\sigma(a)$ sobre $\overline{R[a]}$. El siguiente teorema profundiza aún más.

Teorema 2.3.1. *Dado a un operador autoadjunto en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, la función $f \to f(a)$ es un isomorfismo de álgebras de Banach del álgebra de funciones continuas en $\sigma(a)$ sobre $\overline{R[a]}$. Más aún, si f es una función continua, $f \geq 0$ en $\sigma(a)$ sí y solo sí $f(a) \geq 0$.*

Demostración. Probemos primero la segunda afirmación. Ya hemos probado la afirmación sobre la positividad en un sentido, ahora analicemos la dirección opuesta asumiendo que $f(a) \geq 0$. Supongamos que existe $\lambda \in \sigma(a)$ tal que $f(\lambda) < 0$. Sea n tal que $m < \lambda - 1/n < \lambda < \lambda + 1/n < M$, definamos

$$g(\alpha) = \begin{cases} (\lambda - 1/n - \alpha)f(\lambda) & \alpha \in [\lambda - 1/n, \lambda] \\ (\alpha - (\lambda + 1/n))f(\lambda) & \alpha \in [\lambda, \lambda + 1/n] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

g es una función cuyo soporte está contenido en $[m, M]$, $g \geq 0$ y tiene un pico positivo en λ. Elijamos n lo suficientemente grande de modo que $-fg \geq 0$, ya que $-f(\lambda)g(\lambda) > 0$. Por lo tanto, $-f(a)g(a) \geq 0$. Pero $f(a) \geq 0$ y $g(a) \geq 0$, entonces por Corolario 2.2.6, $f(a)g(a) \geq 0$. Esto implica que $f(a)g(a) = 0$, lo que resulta imposible porque fg no se anula en $\sigma(a)$. Con lo cual concluímos que $f \geq 0$.

Es fácil ver que la aplicación dada es un isomorfismo de anillos. Falta ver que es continuo y con inversa continua. Sea $\beta = \|f(a)\|$, observemos que $\beta 1 \pm f(a) \geq 0$. Por lo que acabamos de probar tenemos que $\beta 1 \pm f \geq 0$, es decir que $\beta 1 \geq |f|$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la desigualdad ya obtenida,

$$\|f\|_a = \|f(a)\|$$

Entonces, el isomorfismo de anillos es continuo. Esto concluye la demostración. □

Observación 2.3.2. Como consecuencia del teorema anterior, una suceción $f_n(a)$ converge sí y solo sí la sucesión de funciones continuas f_n converge uniformemente en $\sigma(a)$.

Ejercicio 2.3.1. Mostrar que todo operador autoadjunto a se descompone de una única manera como $a = a_+ - a_-$ para ciertos operadores positivos a_+, a_-. Estos operadores se denominan *parte positiva* y *parte negativa de a* respectivamente.

Definición 2.3.3. El *espectro* de $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el conjunto dado por

$$\mathrm{Sp}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ es no invertible}\}$$

Ejercicio 2.3.2. Si a es un operador autoadjunto, probar que $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}$.

Muchos autores denominan a $\sigma(a)$ como el espectro de a. La razón de ello la da el siguiente Corolario.

Corolario 2.3.4. *Si a es un operador autoadjunto, entonces $\sigma(a) = \mathrm{Sp}(a)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $a - \lambda 1$ es no invertible, por lo tanto λ es real. Sea λ real tal que $\lambda \notin \sigma(a)$. Entonces $t - \lambda$ es invertible en $\sigma(a)$, y por lo tanto $a - \lambda 1$ también lo es. Es decir, $\sigma(a) \supset \mathrm{Sp}(a)$.

Veamos la inclusión en el otro sentido. Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma(a)$. Sea

$$g(t) = \begin{cases} 1/|t-\lambda| & |t-\lambda| \geq 1/n \\ n & |t-\lambda| \leq 1/n \end{cases}$$

Si $a - \lambda 1$ es invertible, sea b su inversa. Como $|(t-\lambda)g(t)| \leq 1$ tenemos que $\|(a-\lambda)g(a)\| \leq 1$. Por lo tanto,

$$\|g(a)\| = \|b(a-\lambda)g(a)\| \leq \|b\|$$

Pero el supremo de $g(t)$ es n, entonces si $n > \|b\|$ da una contradicción. $\square$

Ejercicio 2.3.3. Si p es un polinomio y a es autoadjunto, probar que $\mathrm{Sp}(p(a)) = p(\mathrm{Sp}(a))$.

Ejercicio 2.3.4. De lo expresado anteriormente podemos conluir que si $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto, el espectro de a es un subconjunto cerrado de $[-\|a\|, \|a\|] \subset \mathbb{R}$ y $\|a\|$ o $-\|a\|$ pertenecen a $\mathrm{Sp}(a)$.

Lema 2.3.5. *Si $m1 \leq a \leq M1$, sean $P_\lambda = \chi_\lambda(a)$ con χ_λ la función característica del intervalo $(-\infty, \lambda]$, entonces*

(i) P_λ es proyección.

(ii) $P_\lambda = 0$ si $\lambda \leq m$ y $P_\lambda = 1$ si $\lambda \geq M$.

(ii) $P_\lambda \leq P_{\lambda'}$ si $\lambda \leq \lambda'$.

Ejercicio 2.3.5. Dar la demostración del lema anterior.

Definición 2.3.6. La familia $\{P_\lambda\}$ se denomina *familia espectral asociada* a a.

Proposición 2.3.7. *Sea P_λ la familia espectral asociada a a, si $\lambda' \leq \lambda$, entonces*

$$\lambda' 1 \leq a|_{\mathrm{Im}(P_\lambda - P_{\lambda'})} \leq \lambda 1$$

Demostración. Sean f_λ y g_λ funciones continuas no negativas con soporte $[\lambda, \infty)$ y $(-\infty, \lambda]$ respectivamente, tales que $f_\lambda + g_\lambda = |t - \lambda|$. Por lo tanto,

$$(t-\lambda)(1-\chi_\lambda(t)) = f_\lambda(t)$$

Evaluando en a, obtenemos

$$(a-\lambda 1)(1-P_\lambda) = f_\lambda(a)$$

$$a - \lambda 1 = f_\lambda(a) - g_\lambda(a)$$

Lo cual implica que

$$(a-\lambda 1)P_\lambda = -g_\lambda(a)P_\lambda = -g_\lambda(a)$$

Sea $\lambda' \leq \lambda$. Tenemos que $a - \lambda' 1 = f_{\lambda'}(a)$ en el complemento ortogonal de $\operatorname{Im} P_{\lambda'}$. Es decir que en ese complemento vale la desigualdad $\lambda' 1 \leq a$ por ser $f_{\lambda'} \geq 0$.

Por otro lado, $a - \lambda 1 = -g_\lambda(a)$ en $\operatorname{Im} P_\lambda$, y como $-g_\lambda \leq 0$, tenemos que $a \leq \lambda 1$ en esa imagen. Lo que prueba el teorema. □

Proposición 2.3.8. *La familia espectral $\{P_\lambda\}$ es fuertemente continua por la derecha, es decir*

$$P_{\lambda+\varepsilon}\xi \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} P_\lambda \xi$$

para cada $\xi \in \mathcal{H}$.

Demostración. Sea $h_\varepsilon(t)$ una función continua tal que $0 \leq h_\varepsilon(t) \leq 1$, $h_\varepsilon(t) = 1 + 1/\varepsilon$ en $(-\infty, \lambda + 1/\varepsilon]$, $h_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ en $(\lambda + 2\varepsilon, \infty)$ con $\varepsilon \geq 0$, y afín en $(\lambda + \varepsilon, \lambda + 2\varepsilon]$. Por lo tanto, para cada t,

$$\chi_\lambda(t) \leq \chi_{\lambda+\varepsilon}(t) \leq h_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \chi_\lambda(t)$$

Esto implica que

$$P_\lambda \leq P_{\lambda+\varepsilon} \leq h_\varepsilon(a)$$

Como la familia $\{h_\varepsilon(a)\}_{\varepsilon>0}$ es monótona y acotada. Entonces, de acuerdo al Ejercicio 2.2.5, para cada $\xi \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$h_\varepsilon(a)\xi \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} P_\lambda \xi$$

De esto conluímos que

$$P_{\lambda+\varepsilon}\xi \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} P_\lambda \xi$$

□

Teorema 2.3.9. *(Primer versión del Teorema Espectral) Si a es un operador autoadjunto o normal ($[a, a^*] = 0$) en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces existe una medida de Borel de* $\mathrm{Sp}(a)$ *a valores en el conjunto de proyecciones de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda \to E_\lambda$, tal que*

$$a = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum \lambda_k E_{\lambda_k} \overset{\text{def.}}{=} \int \lambda \, dE_\lambda$$

A dicha medida la llamaremos *medida a valores en proyecciones.* Las proyecciones E_λ se denominan *proyecciones espectrales de a* y sus imágenes *subespacios espectrales de a.*

Demostración. Haremos la demostración para $a = a^*$. Sea $\pi = \{\lambda_o < m \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n = M\}$ una partición, definamos para $t \in [m, M]$

$$\chi_\pi(t) = t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\chi_{\lambda_k}(t) - \chi_{\lambda_{k-1}}(t))$$

Observemos que si $t \in (\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, $\chi_\pi(t) = t - \lambda_k$ y que $\chi_\pi \in \overline{\mathbb{R}[t]}$. Además, si denotamos $\|\pi\| = \max_{1\leq k\leq n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})$

$$0 \leq \frac{-\chi_\pi(t)}{\|\pi\|} \leq 1$$

Por lo tanto, por $\| - \chi_\pi(a)\| \leq \|\pi\|$. Entonces,

$$\|a - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(P_{\lambda_k} - P_{\lambda_{k-1}})\| \leq \|\pi\|$$

Si hacemos tender $\|\pi\|$ a 0, tenemos

$$a = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(P_{\lambda_k} - P_{\lambda_{k-1}})$$

Si llamamos E_{λ_k} a la proyección $P_{\lambda_k} - P_{\lambda_{k-1}}$, tenemos el resultado del teorema. □

Ejercicio 2.3.6. Si n es normal probar las siguientes afirmaciones.

(i) Existen a, b operadores autoadjuntos tales que $n = a + ib$.

(ii) Existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m1 \leq a, b \leq M1$.

(iii) Los operadores

$$E_{\lambda_{kj}} = (P_{\lambda_k} - P_{\lambda_{k-1}})(P_{\lambda_j} - P_{\lambda_{k-1}})$$

son proyecciones y $E_{\lambda_{kj}} E_{\lambda_{k'j'}} = 0$ si $(\lambda_{k-1}, \lambda_k] \times (\lambda_{j-1}, \lambda_j] \cap (\lambda_{k'-1}, \lambda'_k] \times (\lambda_{j'-1}, \lambda'_j] = \emptyset$.

(iv) Demostrar el Teorema Espectral para operadores normales donde $\lambda_{kj} = \lambda_k + i\lambda_j$ y

$$a = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum \lambda_{kj} E_{\lambda_{kj}} \overset{\text{def.}}{=} \int \lambda \, dE_\lambda$$

Como consecuencia del Teorema Espectral, ya que la convergencia en norma implica la convergencia fuerte, para cada $\xi \in \mathcal{H}$,

$$a\xi = \int \lambda \, dE_\lambda \xi$$

Así también en términos de funciones medibles

$$\langle a\eta, \xi \rangle = \int \lambda \, \langle dE_\lambda \eta, \xi \rangle$$

A su vez, dada una función f de Borel acotada a valores complejos en $Sp(a)$, tiene sentido definir

$$f(a) = \int f(\lambda) \, dE_\lambda$$

Ejercicio 2.3.7. Si a es un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$ tal que $\dim \mathcal{H} < \infty$, obtener el espectro y la medida a valores en proyecciones de a.

Ejercicio 2.3.8. Si μ es una medida sigma-finita en X y $f \in L^\infty(X, \mu)$, el operador $M_f : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ multiplicación por f, dado por $M_f g(x) = f(x)g(x)$, es un operador acotado y $\|M_f\| = \text{ess-sup}_{x \in X}(|f(x)|)$. Si f es a valores reales entonces M_f es autoadjunto. Hallar $\mathrm{Sp}(M_f)$ y la medida a valores en proyecciones E_λ.

El ejemplo del ejercicio anterior es genérico ya que la siguiente es una versión equivalente del Teorema Espectral.

Teorema 2.3.10. *(Segunda versión del Teorema Espectral) Si a es un operador autoadjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{R}[a]\xi}$, entonces a define un operador autoadjunto en $\mathcal{K}$ y existe una medida finita en $\mathrm{Sp}(a)$ tal que $\mathcal{K}$ y $L^2(\mathrm{Sp}(a), \mu)$ son isomorfos como espacios de Hilbert y el operador a se corresponde con el operador "multiplicación por la función identidad".*

Esta versión es análoga al Teorema 2.3.1, en vez de considerar funciones continuas en $\mathrm{Sp}(a)$ consideramos $L^2(\mathrm{Sp}(a), \mu)$.

2.4. Producto tensorial de espacios de Hilbert

Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son dos espacios de Hilbert, se puede definir el producto tensorial algebraico $\mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$ en la categoría de espacios vectoriales. Sobre ese espacio vectorial

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle = \langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$$

determina un producto interno hermitiano. El espacio de Hilbert producto tensorial $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ es la completación de $\mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$. Es fácil ver que si $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, existe un operador acotado $a \otimes b$ en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ definido por $a \otimes b(\xi \otimes \eta) = a\xi \otimes b\eta$.

Ejercicio 2.4.1. Sea $L^2(X, \mathcal{H}, \mu)$ el espacio de Hilbert de funciones $f : X \to \mathcal{H}$ de cuadrado integrable, con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Para cada $\xi \in \mathcal{H}$ y $f \in L^2(X, \mu)$ sea $f_\xi \in L^2(X, \mathcal{H}, \mu)$ definida por $f_\xi(x) = f(x)\xi$. Probar que la aplicación $\xi \otimes f \to f_\xi$ define un operador unitario suryectivo de $\mathcal{H} \otimes L^2(X, \mu)$ sobre $L^2(X, \mathcal{H}, \mu)$.

Capítulo 3

Álgebras de von Neumann

En este capítulo daremos la definición de álgebras de von Neumann y ejemplos básicos para su estudio.

3.1. Topologías en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

En $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se pueden considerar varias topologías que a continuación definiremos.

Definición 3.1.1. La *topología de la norma o uniforme* en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la dada por la norma $\| \ \|$ de operadores acotados definida en el capítulo anterior.

Definición 3.1.2. La *topología fuerte de operadores* en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la dada por la convergencia puntual en $\mathcal{H}$, es decir $a_n \to_f a$ si $a_n\xi \to a\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Una base de entornos de a de la topología fuerte en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ está dada por

$$N(a; \xi_1, \ldots, \xi_n; \varepsilon) = \{b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|(b-a)\xi_i\| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Definición 3.1.3. La *topología débil de operadores* en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la dada por la convergencia débil en $\mathcal{H}$, es decir $a_n \to_d a$ si $\langle a_n\xi, \eta\rangle \to \langle a\xi, \eta\rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Una base de entornos de a de la topología débil en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ está dada por

$$N(a; \xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_n; \varepsilon) = \{b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle (b-a)\xi_i, \eta_i\rangle| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Ejercicio 3.1.1. Mostrar que las topologías tienen el siguiente orden donde $<$ significa "tiene menos abiertos".
topología débil de operadores $<$ topología fuerte de operadores
topología fuerte de operadores $<$ topología de la norma

Ejercicio 3.1.2. Probar que la bola unidad en $\mathcal{H}$ es compacta con la topología débil de $\mathcal{H}$ y la bola unidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacta con la topología débil de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

3.2. Definiciones

Definición 3.2.1. Un *álgebra normada compleja* $(\mathcal{B}, \|\ \|)$ es un álgebra con unidad $1_{\mathcal{B}}$ y a la vez es un espacio normado que satisface

$$\|1_{\mathcal{B}}\| = 1, \qquad \|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \forall a, b \in \mathcal{B}$$

Si $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach respecto de esa norma, se dice que es un *álgebra de Banach*.

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach compleja, una *involución* en $\mathcal{B}$ es una aplicación

$$\mathcal{B} \to \mathcal{B}$$
$$a \to a^*$$

que satisface para todo $a, b \in \mathcal{B}$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(i) $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$,

(ii) $(ab)^* = b^* a^*$,

(iii) $(a^*)^* = a$.

En este caso $(\mathcal{B}, *)$ se dice que es una $*$-*álgebra*.

Definición 3.2.3. Una C^*-*álgebra* $(\mathcal{B}, *)$ es un álgebra de Banach compleja con una involución que satisface

(iv) $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Observación 3.2.4. La condición (iv) asegura que la involución es continua y preserva normas.

Definición 3.2.5. Un $*$-*morfismo* $\phi : \mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}$ es un morfismo de álgebras de Banach, es decir que es lineal, multiplicativo y $\phi(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\tilde{\mathcal{B}}}$, y que además satisface $\phi(a^*) = (\phi(a))^*$ para todo $a \in \mathcal{B}$.

Un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ se dice *autoadjunto* o $*$-*subconjunto* si es cerrado para la involución.

Teorema 3.2.6. *Sea M una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $1 \in M$. Si $n = \dim \mathcal{H} < \infty$, entonces $M = M''$.*

Demostración. La inclusión $M \subset M''$ es evidente.

Probemos la otra inclusión. Dada $\{\nu_i\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ podemos identificar $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}$ como espacio de Hilbert.

Si $x \in M$ podemos pensar que x actá en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ por $x(\eta \otimes \nu) = x\eta \otimes \nu$. Bajo el isomorfismo anterior, eso se traduce en $x\xi = x(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ para todo $\xi \in \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}$. Es decir, podemos pensar $M \subset M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ con la inclusión natural $x \to xI$.

Observemos que $\tilde{M} = \{xI : x \in M\}$ es una subálgebra autoadjunta de $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Observemos también que $\tilde{M}' = M_n(M')$, entonces

$$\tilde{M}'' = \{yI : y \in M'\}$$

Sea $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}$, entonces el conjunto $\mathcal{K} = \tilde{M}.\xi$ es invariante por la acción de $\tilde{M}$ por ser M un álgebra. Como M es autoadjunta, $P_{\mathcal{K}}$ conmuta con $\tilde{M}$ por Ejercicio 2.2.13.

Si $yI \in \tilde{M}''$, $[y, P_{\mathcal{K}}] = 0$, entonces $y\tilde{M}\xi \subset \tilde{M}\xi$. En particular, $y(I\xi) = y\xi = x\xi$ para algun $xI \in \tilde{M}$, entonces $y\xi_i = x\xi_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Es decir que $y = x \in M$. □

Teorema 3.2.7. *(Teorema de Densidad de von Neumann, 1929) Sea M una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $1 \in M$. Entonces, $\overline{M} = M''$ (clausura en topología fuerte o débil).*

Demostración. Como los conmutadores son siempre cerrados con ambas topologías, $\overline{M}^f \subset \overline{M}^d \subset M''$.

Sea $a \in M''$, para probar la otra inclusión basta con encontrar un $x \in M$ en cada entorno fuerte $N(a; \xi_1, \ldots, \xi_n; \varepsilon)$ de a.

Consideremos $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Sea $\tilde{M}$ como en la demostración del teorema anterior. Observemos que $\tilde{M}$ conmuta con $P_{\overline{\tilde{M}\xi}}$. Por lo tanto, $P_{\overline{\tilde{M}\xi}} \in \tilde{M}'$, entonces aI conmuta con $P_{\overline{\tilde{M}\xi}}$. Es decir que $a\overline{\tilde{M}\xi} \subset \overline{\tilde{M}\xi}$.

Como $1 \in M$, $a\xi = (a\xi_1, \ldots, a\xi_n) \in \overline{\tilde{M}\xi}$. Es decir, existe $x \in M$ tal que $\|x\xi_i - a\xi_i\| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Corolario 3.2.8. *(Teorema del Doble Conmutador de von Neumann) Si M es un álgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $1 \in M$, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(i) $M = M''$,

(ii) M es fuertemente cerrada,

(iii) M es débilmente cerrada.

Definición 3.2.9. Una subálgebra que satisface las condiciones del corolario es un *álgebra de von Neumann.*

Corolario 3.2.10. *Una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contiene al 1, es cerrada con la topología de la norma sí y solo sí es una C^*-álgebra.*

Definición 3.2.11. Dado un subconjunto S de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el *álgebra de von Neumann generado S* es $(S \cup S^*)''$, es decir la clausura fuerte (o débil) del álgebra autoadjunta generada por 1 y S.

La propiedades del subconjunto S no siempre se preservan en el álgebra de von Neumann generada por S. No se puede tener mucho control sobre los operadores que se le agregan a S. Si las propiedades se pueden expresar en término de los coeficientes matriciales $\langle a\xi, \eta\rangle$ con $a \in S$ y $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, esas propiedades se van a preservar para límites débiles, entonces valen para todos los elementos de la clausura del álgebra autoadjunta generada por S.

Veremos en la sección siguiente algunos ejemplos de se esta situación.

3.3. Ejemplos básicos

3.3.1. Los obvios

Los ejemplos obvios son $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y cualquier subálgebra autoadjunta de dimensión finita de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

3.3.2. $L^\infty(X, \mu)$

Sea (X, μ) un espacio de medida finita, sea $L^\infty(X, \mu)$ vista como la subálgebra autodajunta de $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ dada por

$$A = \{M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu)) : f \in L^\infty(X, \mu)\}$$

Si vemos que $A = A'$, i.e. A es abeliano maximal, se obtiene inmediatamente que A es un álgebra de von Neumann.

Por ser A abeliana tenemos que $A \subset A'$.

Veamos la inclusión en el otro sentido. Sea $x \in A' \subset \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ y consideremos f la imagen por x de la función idénticamente 1. Es fácil ver que $f \in L^\infty(X, \mu)$. Veamos que $x = M_f$. En efecto, para cada $g \in L^\infty(X, \mu) \subset L^2(X, \mu)$ (recordar que $\mu(X) < \infty$)

$$xg = xM_g 1 = M_g x 1 = M_g f = gf = fg = M_f g$$

Como $L^\infty(X, \mu)$ es denso en $L^2(X, \mu)$, tenemos que $x = M_f \in A$.

3.3.3. Álgebras de von Neumann de grupos discretos

Si Γ es un grupo topológico y

$$\pi : \Gamma \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

es una representación de Γ, podemos considerar el álgebra de von Neumann generada por $\pi(\Gamma)$.

En particular podemos considerar Γ un grupo discreto. Sea

$$l^2(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{C} : \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^2 < \infty\}$$

el espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\overline{g(\gamma)}$$

Una base ortonormal de $l^2(\Gamma)$ es $\{\varepsilon_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ donde $\varepsilon_\gamma(\gamma') = \delta_{\gamma\gamma'}$. Entonces,

$$f = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\varepsilon_\gamma$$

Para cada γ definamos el operador unitario de $l^2(\Gamma)$

$$u_\gamma f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$$

Observemos que

$$u_\gamma u_\rho = u_{\gamma\rho} \qquad\qquad u_\gamma(\varepsilon_\rho) = \varepsilon_{\gamma\rho}$$

Por lo tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} L : \Gamma &\to \mathcal{B}(l^2(\Gamma)) \\ \gamma &\to u_\gamma \end{aligned}$$

es una representación unitaria de Γ llamada la *representación regular a izquierda* de Γ.

Como los u_γ son linealmente independientes, generan el álgebra de grupo $\mathbb{C}\Gamma$. Denotaremos el álgebra generada por los u_γ por $vN(\Gamma)$ (otras notaciones que se utilizan son $L(\Gamma)$, $U(\Gamma)$, $\lambda(\Gamma)$). A de álgebra de von Neumann de este tipo la llamaremo *álgebra de von Neumann de grupo*.

Caso $\Gamma = \mathbb{Z}_n$.

Una base de $vN(\Gamma)$ es $\{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ con

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $u_i = (u_1)^i$.

Observemos que combinaciones lineales de esta base dan matrices con constantes en las diagonales

$$u_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Estas matrices se dicen *matrices circulantes* pues provienen de un grupo cíclico. Observemos que el lugar (i,j) sólo depende del valor $j-i \mod (n)$.

Si Γ es discreto infinito sigue valiendo que el coeficiente matricial del lugar (γ,ρ) sólo depende del valor $\gamma^{-1}\rho \in \Gamma$.

El *coeficiente matricial* del lugar (ν,ρ) de u_γ es

$$\langle u_\gamma \varepsilon_\nu, \varepsilon_\rho\rangle = \sum_{\gamma'\in\Gamma} u_\gamma\varepsilon_\nu(\gamma')\overline{\varepsilon_\rho(\gamma')} = u_\gamma\varepsilon_\nu(\rho) = \varepsilon_\nu(\gamma^{-1}\rho)$$

Por lo tanto, para que el coeficiente sea no nulo, $\rho\nu^{-1} = \gamma$.

Sea c_γ el valor de la diagonal correspondiente a γ. Entonces, si $x \in vN(\Gamma)$,

$$x = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma$$

No es claro en qué sentido converge esta suma, pero debe definir un operador acotado. Por lo tanto,

(i) la función $\gamma \to c_\gamma$ tiene que estar en $l^2(\Gamma)$, pues

$$x(\varepsilon_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma(\varepsilon_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma\varepsilon_\gamma$$

(ii) $\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma\right)\left(\sum_{\rho\in\Gamma} d_\rho u_\rho\right) = \sum_{\rho\in\Gamma}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma d_{\gamma^{-1}\rho}\right) u_\rho$

donde la suma del lado derecho que define el coeficiente de u_ρ converge ya que $\gamma \to c_\gamma$ y $\gamma \to d_{\gamma^{-1}\rho}$ están en $l^2(\Gamma)$.

Esto sólo dice que los coeficientes c_γ de un tal elemento de $vN(\Gamma)$ tienen que estar en $l^2(\Gamma)$, pero no dice exactamente cuales son. Para tratar de desarrollar un poco de intuición analicemos algunos ejemplos para tratar de imaginarnos cuales podrían ser las condiciones que los determinen.

Caso $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Es conocido que el operador lineal

$$\begin{array}{rccc} V: & l^2(\mathbb{Z}) & \to & L^2(S^1) \\ & \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varepsilon_n & \to & \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \end{array}$$

es unitario y que $vu_nv^{-1} = M_{e^{in\theta}}$ pues

$$vu_nv^{-1}(e^{ik\theta}) = vu_n(\varepsilon_k) = v\varepsilon_{n+k} = e^{i(n+k)\theta} = e^{in\theta}e^{ik\theta}$$

La teoría espectral clásica dice que $\{M_{e^{in\theta}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ genera $L^\infty(S^1)$ como álgebra de von Neumann. Si $M_f \in L^\infty(S^1)$, $v^{-1}M_fv = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varepsilon_n$ donde $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{in\theta}$ es la serie de

Fourier de f. Esto dice que las funciones $\gamma \to c_\gamma$ que definen $vN(\mathbb{Z})$ son exactamente las series de Fourier de las funciones L^∞.

Seguramente veremos después que vale en general que las funciones que definen $vN(\Gamma)$ son las funciones que definen operadores acotados de $l^2(\Gamma)$.

Ahora consideremos un grupo altamente no conmutativo, el grupo libre de n generadores para $n \geq 2$.

Caso $\Gamma = \mathbb{F}_n$.

Calculemos el centro $Z(vN(\mathbb{F}_n))$ de $vN(\mathbb{F}_n)$. Usando límites débiles, es equivalente que $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma$ esté en $Z(vN(\mathbb{F}_n))$, a que x conmute con cada u_γ. Esto es lo mismo que decir que $c_{\gamma\rho\gamma^{-1}} = c_\rho$ para todo γ, ρ. Es decir que la función c es constante en las clases de conjugación. Pero en $\mathbb{F}_n$ las clases de conjugación, salvo la de la identidad, son infinitas. Como habíamos dicho que $\gamma \to c_\gamma$ está en $l^2(\mathbb{F}_n)$, entonces $c_\gamma = 0$ para todo $\gamma \neq 1$. Es decir que $Z(vN(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{C}1$.

Observemos que la única propiedad que usamos del grupo $\mathbb{F}_n$ fue que las clases de conjugación no triviales son infinitas. Más aún, este argumento nos dice en general que $Z(vN(\Gamma))$ es el espacio generado por los u_γ tales que la clase de conjugación de γ es finita.

A los grupos cuyas clases de conjugación no triviales son infinitas les diremos *grupos de clases de conjugación infinitas (g.c.c.i.)*. Hay muchísimos ejemplos de este tipo de grupos como S_∞ (el grupo de permutaciones de soporte finito de un conjunto numerable infinito), $PSL(n, \mathbb{Z})$ y $\mathbb{Q} \rtimes \mathbb{Q}^*$.

Ejercicio 3.3.1. ¿Son los grupos de trenzas B_n g.c.c.i.? ¿Y el de infinitas trenzas B_∞?

Observación 3.3.1. *Problema no resuelto en álgebras de von Newmann:*

$$\text{¿Es } vN(\mathbb{F}_n) \cong vN(\mathbb{F}_m) \text{ para } n \neq m, \text{ ambos} \geq 2?$$

Es obvio que las álgebras de grupos $\mathbb{C}\mathbb{F}_n$ y $\mathbb{C}\mathbb{F}_m$ son no isomorfas, pero no se sabe si se extiende a sus álgebras de von Neumann.

Definición 3.3.2. Un *factor* es una álgebra de von Neumann cuyo centro es $\mathbb{C}1$.

Ejercicio 3.3.2. Mostrar que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un factor.

Ejercicio 3.3.3. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ y $M = \mathcal{B}(\mathcal{K}_1) \otimes 1$. Mostrar que $M' = 1 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}_2)$, por lo tanto M y M' son factores.

Este ejercicio explica el origen del término "factor" cuando M y M' provienen de una factorización de $\mathcal{H}$ como producto tensorial.

El factor $vN(\Gamma)$ que hemos analizado, proveniente de un grupo c.c.i., es de naturaleza totalmente diferente a la de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Para comprender eso consideremos la función

$$\mathrm{Tr} : vN(\Gamma) \to \mathbb{C}$$

definida por $\mathrm{Tr}(a) = \langle a\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle$ o $\mathrm{Tr}(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma) = c_1$. Esta función es claramente lineal, débilmente continua, y satisface

$$\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba), \qquad \mathrm{Tr}(x^*x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |c_\gamma|^2 \geq 0 \quad \text{cuando} \quad x = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma$$

Ejemplo 3.3.3. En el caso en que $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Tr}(M_f) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$ bajo el isomorfismo entre $vN(\mathbb{Z})$ y $L^\infty(S^1)$.

Ejercicio 3.3.4. (i) Si $\mathrm{Tr} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ es una aplicación lineal tal que $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ y $\dim \mathcal{H} < \infty$, entonces Tr es un múltiplo de la traza usual de matrices.

(ii) No existe ninguna aplicación lineal débilmente continua $\mathrm{Tr} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ cuando $\dim \mathcal{H} = \infty$.

(iii) No existe ninguna aplicación lineal $\mathrm{Tr} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ y $\mathrm{Tr}(x^*x) \geq 0$ cuando $\dim \mathcal{H} = \infty$.

(iv) (Más difícil) No existe ninguna aplicación lineal $\mathrm{Tr} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ cuando $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Esto nos dice que, a pesar que los factores $vN(\Gamma)$ con Γ c.c.i. son de dimensión infinita, la existencia de una traza los hace parecerse más a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuando $\dim \mathcal{H} < \infty$ que cuando $\dim \mathcal{H} = \infty$. Esta propiedad nos asegura que estos factores no provienen de una factorización de $\mathcal{H}$ como producto tensorial.

Proposición 3.3.4. *Los factores $vN(\Gamma)$, con Γ c.c.i., tienen las siguientes propiedades:*

1. *No contienen ningún operador no nulo de rango finito.*
2. $\mathrm{Tr}(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ *para todo* $a \geq 0$.
3. $uu^* = 1 \Rightarrow u^*u = 1$, *i.e no contiene isometrías no unitarias.*

Demostración. (1) Sea $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma$ un tal operador. De acuerdo a cómo definimos los c_γ, si es no nulo significa que $\langle x\varepsilon_\rho, \varepsilon_\nu\rangle = c_\gamma$ si y sólo si $\gamma = \rho\nu^{-1}$. Es decir que hay infinitos pares (ρ, ν) que lo satisfacen, contradiciendo el hecho que x tiene rango finito.

(2) Como a es positivo, $a = (a^{1/2})^2$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Tr}(a) = \langle a\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = \langle a^{1/2}\varepsilon_1, a^{1/2}\varepsilon_1\rangle = \|a^{1/2}\varepsilon_1\| \geq 0$$

Si $\mathrm{Tr}(a) = 0$, entonces $a^{1/2}\varepsilon_1 = 0$. Pero $0 = a^{1/2}\varepsilon_1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma u_\gamma(\varepsilon_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \varepsilon_\gamma$, lo que nos dice que $c_\gamma = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, es decir $a^{1/2} = 0$. Esto dice que $a = 0$.

(3) Si $u^*u = 1$, uu^* es una proyección pues $uu^*uu^* = uu^*$. Por lo tanto, $1 - uu^*$ también lo es. A su vez, $\mathrm{Tr}(1 - uu^*) = 1 - \mathrm{Tr}(u^*u) = 0$. Entonces, por (2), $1 - uu^* = 0$. □

Ejercicio 3.3.5. (Kaplansky) Mostrar que en $vN(\Gamma)$, $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$, y que si F es cualquier cuerpo de característica 0, $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$ en $F\Gamma$.

Esta parece ser una afirmación aún abierta para característica no nula.

La afirmación dice que si existe inverso a izquierda, lo es a derecha. Kaplansky en [K] también probó que las únicas álgebras de división (todo elemento no nulo tiene inverso, este inverso lo es a izquierda y a derecha) con unidad tal que $\|ab\| = \|a\|\|b\|$ son $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, tanto en dimensión finita como infinita. Sacando la restricción de tener unidad y que el inverso sea a ambos lados y sólo pidiendo que sea de división a izquierda en el siguiente sentido, para todo $v \neq 0$ existe v_L^{-1} tal que

$$v_L^{-1}(vw) = w \qquad \forall w$$

Por el ejercicio, en dimensión finita no cambia nada. Kaplansky conjeturó que considerar dimensión infinita no agregaría nada a la lista . Sin embargo, en esta situación abundan los ejemplos. Los primeros ejemplos de ello aparecieron en [C] y [RP] y son casos particulares de las grandes familias de ejemplos de [GKS].

Proposición 3.3.5. *Si* $\Gamma = \mathbb{F}_n$, $\{\mathrm{Tr}(p) : p^2 = p\} = [0, 1]$.

Demostración. Por ser $0 \leq p \leq 1$, es claro que $0 \leq \mathrm{Tr}(p) \leq 1$. Para ver que realmente se puede obtener una proyección para cada uno de los valores en el intervalo, consideremos el subgrupo $\langle\rho\rangle$ generado por $\rho \in \mathbb{F}_n$. Debido a la descomposición en coclases de $\mathbb{F}_n$, la representación de $\langle\rho\rangle$ en $l^2(\mathbb{F}_n)$ es la suma directa de una cantidad numerable de copias de la representación regular de $\langle\rho\rangle$. En efecto, como todo elemento de $f \in l^2(\mathbb{F}_n)$ se puede escribir

$$f = \sum_{\gamma\in J\subset\Gamma} \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{m\gamma}\varepsilon_{\rho^m\gamma} = \sum_{\gamma\in J\subset\Gamma} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{m\gamma} u_{\rho^m} \varepsilon_\gamma \right)$$

donde J es numerable. Pero cada γ el espacio de Hilbert generado por $\{u_{\rho^m}\varepsilon_\gamma : m \in \mathbb{Z}\}$ es isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$ como representación de $\mathbb{Z}$. Entonces, tenemos que

$$l^2(\mathbb{F}_n) \cong \bigoplus_{\gamma\in J} l^2(\mathbb{Z})$$

Por lo tanto, podemos pensar a u_ρ como una matriz infinita en bloques diagonales todos iguales. De esta manera el doble conmutador de u_ρ es $vN(\mathbb{Z})$ visto como matrices diagonales en bloques iguales. Así hemos identificado $vN(\mathbb{Z})$ con una subálgebra de $vN(\Gamma)$. Con esta identificación la traza de las dos álgebras coinciden. Pero como observamos antes, cualquier elemento de $f \in L^\infty(0, 2\pi)$ define un elemento de $vN(\mathbb{Z})$ cuya integral es su traza. En particular, como la función característica de un intervalo define una proyección, eligiendo intervalos de longitudes apropiadas podemos realizar proyecciones de cualquier traza en $[0, 1]$. $\square$

Observación 3.3.6. En la demostración anterior hemos usado el doble conmutador para identificar $vN(\mathbb{Z})$ con una subálgebra de $vN(\Gamma)$, valiendo esto no sólo para $\Gamma = \mathbb{F}_n$. Más aún, hemos descompuesto $l^2(\Gamma)$ como suma directa numerable de $l^2(\mathbb{Z})$.

3.4. Otras topologías en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Señalemos un problema que aparece cuando usamos la topología débil o fuerte. De acuerdo a la Observación 3.3.6, un vector en $l^2(\Gamma)$ es una sucesión de cuadrados sumables de vectores en $l^2(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, un entorno fuerte básico de $a \in \mathcal{B}(l^2(\Gamma))$ corresponderá a un entorno de la forma $\{b : \sum_{n=1}^{\infty} \|(a-b)\xi_n\|^2 < \varepsilon\}$ donde los $\xi_n \in l^2(\mathbb{Z})$, y satisfacen que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty$. Entonces podemos concluir que convergencia fuerte en $l^2(\mathbb{Z})$ no implica convergencia fuerte en $l^2(\Gamma)$. Esto nos conduce a definir otras dos topologías en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 3.4.1. La topología definida por los entornos básicos de a

$$\{b : \sum_{n=1}^{\infty} \|(a-b)\xi_n\|^2 < \varepsilon\}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier sucesión $\{\xi_n\}$ en $l^2(\mathbb{Z})$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty$, es llamada *topología ultrafuerte* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 3.4.2. La topología definida por los entornos básicos de a

$$\{b : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle (a-b)\xi_n, \eta_n\rangle| < \varepsilon\}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier par de sucesiones $\{\xi_n\}$ y $\{\eta_n\}$ en $l^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\|\xi_n\|^2 + \|\xi_n\|^2) < \infty$$

es llamada *topología ultradébil* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Notemos que estas topologías son precisamente las restricciones a $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes 1_{\mathcal{K}}$ de las topologías de $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ cuando $\dim \mathcal{K} = \infty$.

Ejercicio 3.4.1. Mostrar que la topología ultrafuerte y topología ultradébil son más fuertes que la topología fuerte y la topología débil respectivamente. Probar además que las topologías ultrafuerte y fuerte coinciden en un subconjunto acotado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y también para la ultradébil y la débil.

Ejercicio 3.4.2. Probar que el Teorema de Densidad de von Neumann 3.2.7 vale reemplazando la topología fuerte por la ultrafuerte.

3.5. Algunas preguntas

Luego del análisis de los ejemplos estudiados en las secciones anteriores surgen las siguientes preguntas que intentaremos responder en los capítulos siguientes.

1. Si un factor posee una traza débilmente continua, ¿es única salvo un múltiplo escalar?
2. Si un factor M posee una traza Tr, ¿es cierto que $\{\mathrm{Tr}(p) : p^2 = p\} = [0, 1]$?
3. ¿Cualquier factor no isomorfo a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ posee una traza?
4. ¿Son todos los factores de dimensión infinita con traza isomorfos?
5. Si M es un factor con traza, ¿M' también lo es? (observar que el conmutador de de un factor es factor).
6. ¿Es $vN(\Gamma)'$ el álgebra de von Neumann generada por la representación regular a derecha?
7. Si $\phi : M \to N$ es isomorfismo de *-álgebras entre álgebras de von Neumann en espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente, ¿existe un operador unitario $u : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que $\phi(a) = uau^*$ para $a \in M$?

Ejercicio 3.5.1. Si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de un grupo localmente compacto G. Probar que

$$(\pi, \mathcal{H}) \text{ es irreducible} \iff vN(\pi(G)) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Si quitamos la condición de ser unitaria, ¿siguen valiendo ambas implicaciones?

Capítulo 4

Propiedades elementales de álgebras de von Neumann

4.1. Propiedades

En este capítulo M denotará un álgebra de von Neumann sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

PE1. *Si $a = a^* \in M$, todas las proyecciones espectrales y todas las funciones boreleanas acotadas de a están en M. Por lo tanto, M está generada por todas sus proyecciones.*

Demostración. En la demostración del Teorema Espectral 2.3.9 construímos las proyecciones espectrales E_λ de a como límites fuertes de polinomios en a, por lo tanto dichas proyecciones están en M. Por otro lado, como cualquier función de Borel acotada f a valores complejos en $\mathrm{Sp}(a)$ también es límite fuerte de polinomios, $f(a) \in M$.

Como todo operador de M es combinación lineal de dos operadores autoadjuntosde M (ver Ejercicio 2.2.3), tenemos que la clausura fuerte del subespacio generado por las proyecciones de M contiene a M, por lo tanto son iguales. $\square$

PE2. *Todo elemento de M es combinación lineal de cuatro operadores unitarios de M.*

Demostración. Ya sabemos que todo operador de M es combinación lineal de dos operadores autoadjuntos. Sea $a = a^* \in M$ tal que $\|a\| \leq 1$. Sea $u = a + i\sqrt{1-a^2}^*$ y $u^* = a - i\sqrt{1-a^2}$. Como $uu^* = u^*u = a^2 + (1-a^2) = 1$, u resulta unitario y $a = (u+u^*)/2$. $\square$

PE3. M es el conmutador del grupo unitario de M'.

Demostración. Sea $U(M')$ el grupo unitario de M'. Observemos que M' está generada como espacio vectorial por $U(M')$, porlo tanto M'' es el conmutador de $U(M')$. Entonces, $U(M')' = M'' = M$. □

Observación 4.1.1. Por lo tanto, una defición alternativa de álgebra de von Neumann es: un *álgebra de von Neumann* es el conmutador de una representación de un grupo unitario.

Ejercicio 4.1.1. Mostrar que multiplicación por operadores es fuertemente continua en subconjuntos acotados, pero no en todo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Mostrar además, que $* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es débilmente continua pero no fuertemente continua, incluso en subconjuntos acotados.

Teorema 4.1.2. *Si $\{a_\alpha\}$ es una red de operadores autoadjuntos con $a_\alpha \leq a_\beta$ si $\alpha \leq \beta$ y $\|a_\alpha\| \leq K$ para algún $K \in \mathbb{R}$, entonces existe un operador autoadjunto $a = \lim_\alpha \mathrm{f}\ a_\alpha$ (convergencia en topología fuerte).*

Más aún, a es la menor cota superior de $\{a_\alpha\}$ para el conjunto parcialmente ordenado de operadores autoadjuntos.

Demostración. Un cadidato a ser el límite fuerte de la red es el límite débil ya que la bola unidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacta con la topología débil.

La red $\langle a_\alpha \xi, \xi\rangle$ es creciente y acotada y su límite es $\langle a\xi, \xi\rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Esto dice que $a_\alpha < a$ para todo α. Por la existencia de la raíz cuadrada de operadores positivos que pertenece al doble conmutador del operador, tenemos que $\lim_\alpha \mathrm{f}\ \sqrt{a - a_\alpha} = 0$. Como multiplicación de operadores es fuertemente continua en subconjuntos acotados, $\lim_\alpha \mathrm{f}\ a - a_\alpha = \left(\lim_\alpha \mathrm{f}\ \sqrt{a - a_\alpha}\right)^2 = 0$. Por lo tanto, $a = \lim_\alpha \mathrm{f}\ a_\alpha$. □

Si $\{a_\alpha\}$ está en las condiciones del teorema diremos que es *monótona convergente.*

PE4. M es cerrada bajo convergencia monótona de operadores autoadjuntos.

Demostración. Es inmediato a partir del teorema. □

Las proyecciones en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ forman un reticulado ortogonal en el siguiente sentido,
(i) $p \leq q \iff \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$,
(ii) $p \wedge q$ es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$,
(iii) $p^\perp = 1 - p$,
(iv) $p \vee q = (p^\perp \wedge q^\perp)^\perp$ es la proyección ortogonal sobre la clausura fuerte de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Ejercicio 4.1.2. Mostrar que $p \wedge q = \lim_{n\to\infty} \mathrm{f}\ (pq)^n$.

Observemos que $p \wedge q \leq p, q$ y que $p \vee q \geq p, q$. Por lo tanto, el reticulado de las proyecciones de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es completo, en el sentido que es cerrado bajo supremos e ínfimos arbitrarios, pues la intersección de subespacios cerrados es cerrado.

PE5. Las proyecciones en M generan M como álgebra de von Neumann y forman un subreticulado completo del reticulado de proyecciones de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demostración. Si S es un conjunto de proyecciones de M, el conjunto de subconjuntos finitos de S es un conjunto dirigido (si $F_1, F_2 \subset S$, existe $F \subset S$ tal que $F_1, F_2 \subset F$). Como

$$F \to \vee_{p \in F} p$$

es una red en M que safisface el teorema, existe $\lim_F\text{f}\ \ (\vee_{p \in F} p)$ y está en M. A este límite lo denotamos $\vee_{p \in S} p$. □

PE6. Sea A una $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y sean $\mathcal{W} = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Nu} a$ y $\mathcal{K} = \mathcal{W}^{\perp}$. Entonces, $\mathcal{K}$ es A-invariante, y si $B = \{a\,|_{\mathcal{K}} : a \in A\}$, entonces $1_{\mathcal{K}}$ está en la clausura fuerte de B. De este modo B resulta ser un álgebra de von Neumann.

Demostración. Dado $\xi \in \mathcal{K}$ y $\eta \in \mathcal{W}$ tenemos que

$$\langle a\xi, \eta \rangle = \langle \xi, a^* \eta \rangle = 0$$

Esto dice que $\mathcal{K}$ es A-invariante.

Consideremos p, q proyecciones, entonces $p \vee q$ está en el álgebra generada por p y q. Si $a = a^*$, la imagen de $P_{\operatorname{Nu} a^{\perp}} = 1 - P_{\operatorname{Nu} a}$ está en la clausura fuerte del álgebra generada por a pues $P_{\operatorname{Nu} a} = \chi_{\{0\}}(a)$. Entonces, por PE5, $\vee_{a \in A} P_{\operatorname{Nu} a^{\perp}}$ está en la clausura fuerte de B, y no es más que la proyección ortogonal sobre la clausura fuerte de la suma sobre todos los $a \in A$ de las imágenes de $P_{\operatorname{Nu} a^{\perp}}$. Es decir, es la identidad en $\mathcal{K}$. □

Si hubiéramos definido un álgebra de von Neumann como una subálgebra cerrada con la topología débil o fuerte de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, una tal álgebra como álgebra abstracta tendría unidad pero ésta podía no ser la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sin embargo, en el complemento ortogonal de los vectores distintos de esta identidad sería un álgebra de von Neumann en el sentido usual.

PE7. *Si M es un álgebra de von Neumann y $p \in M$ es una proyección, $pMp = (M'p)'$ y $(pMp)' = M'p$ como álgebra de operadores en $p\mathcal{H}$. Es decir que pMp y $M'p$ son álgebras de von Neumann.*

Demostración. Es evidente que pMp y $M'p$ conmutan entre sí al restringirlas a $p\mathcal{H}$ pues si $a \in M$ y $b \in M'$,

$$(pap)(bp) = papbp = pabp^2 = pbap = bp^2ap = (bp)(pap)$$

Entonces, $(M'p)' \supset pMp$.

Ahora supongamos que $x \in (M'p)' \subset \mathcal{B}(p\mathcal{H})$ y definamos $\tilde{x} = xp = pxp \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto, si $b \in M'$, $b\tilde{x} = bxp = bpxp = (bp)(xp) = (xp)(bp) = xp^2b = \tilde{x}b$. Es decir que $\tilde{x} \in M$. Entonces, $(M'p)' \subset pMp$.

Si supiéramos que $M'p$ es un álgebra de von Neumann en $p\mathcal{H}$, ya estaría porque $(pMp)' = (M'p)'' = M'p$. Pero un intento directo de probar que es fuerte o débilmente cerrado falla al querer tratar de extender el límite de una red en $M'p$ sobre $p\mathcal{H}$ a M'.

Por lo tanto, probaremos directamente que $(pMp)' \subset M'p$ usando una extensión de sus elementos a $\mathcal{H}$.

Por PE2 es suficiente tomar $u \in (pMp)'$ unitario. Sea $\mathcal{K} = \overline{Mp\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$. El subespacio $\mathcal{K}$ es claramente invariante por M, luego $\mathcal{K}^\perp$ también lo es. Entonces, $P_\mathcal{K}$ conmuta con M. En efecto, si $a \in M$ y $f \in \mathcal{H}$,

$$P_\mathcal{K} af = P_\mathcal{K} a(P_\mathcal{K} f + (1 - P_\mathcal{K})f) = P_\mathcal{K} aP_\mathcal{K} f + P_\mathcal{K} a(1 - P_\mathcal{K})f = P_\mathcal{K} aP_\mathcal{K} f = aP_\mathcal{K} f$$

Por otro lado, $\mathcal{K}$ también es invariante por M' pues $bMp\mathcal{H} = Mpb\mathcal{H} = Mp\mathcal{H}$ para todo $b \in M'$. Entonces, $P_\mathcal{K}$ conmuta con M', o sea que $P_\mathcal{K} \in M$. Por lo tanto, $P_\mathcal{K} \in Z(M)$.

Extendamos u a $\mathcal{K}$ por

$$\tilde{u} \sum_i x_i \xi_i = \sum_i x_i u \xi_i$$

para $x_i \in M$ y $\xi_i \in p\mathcal{H}$. Veamos que $\tilde{u}$ es una isometría.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u} \sum_i x_i \xi_i\|^2 &= \sum_{i,j} \langle x_i u \xi_i, x_j u \xi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle p x_j^* x_i p u \xi_i, u \xi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle u p x_j^* x_i p \xi_i, u \xi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle p x_j^* x_i p \xi_i, \xi_j \rangle \\
&= \|x_i \xi_i\|^2
\end{aligned}$$

Este cálculo prueba que $\tilde{u}$ está bien definido y que se extiende a una isometría en $\mathcal{K}$. Por construcción $\tilde{u}$ conmuta con M en $Mp\mathcal{H}$, por lo tanto en $\mathcal{K}$. Consecuentemente, $\tilde{u}P_\mathcal{K} \in M'$ y $u = \tilde{u}P_\mathcal{K} p$; o sea, $(pMp)' = M'p$. $\square$

Corolario 4.1.3. *Si M es un factor, pMp y pM' son factores en $p\mathcal{H}$. Más aún, la aplicación*

$$M' \to M'p$$
$$x \to xp$$

es un isomorfismo de $*$-álgebras débilmente continuo.

Demostración. Por PE7, $Z(pMp) = pMp \cap pM' = Z(M'p)$. Pero por ser M un factor, $pMp \cap pM' = p(M \cap M')p = pZ(M)p = \mathbb{C}1_{p\mathcal{H}}$.

Es fácil ver que es débilmente continua y que es un morfismo suryectivo de $*$-álgebras. Veamos que es inyectivo. Si $x \in M'$ y $xp = 0$, entonces $x = 0$ en $Mp\mathcal{H}$. Pero la proyección sonbre $\overline{Mp\mathcal{H}}$ está en $Z(M)$, de acuerdo a la demostración de PE7. Como M es un factor, esa proyección es exactamente 1. Entonces, $x = 0$ pues $0 = xP_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}}x = x$. □

Corolario 4.1.4. *Si M es un factor, $a \in M$ y $b \in M'$, entonces $ab = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$.*

Demostración. Supongamos que $a \neq 0$. Sea p la proyección sobre la imagen de a. Observemos que $p \in M$, eso sale para operadores autoadjuntos y por lo tanto para operadores en general. Ahora, como $ba = 0$ tenemos que $bp = 0$, entonces aplicando el corolario anterior otenemos que $b = 0$. □

Ejercicio 4.1.3. Probar que si M es un álgebra de von Neumann generada por el subconjunto S autoadjunto y cerrado bajo multiplicación, entonces pSp genera pMp (si p es una proyección en M o M'). Mostrar además que el resultado es falso si S no es cerrado por el producto.

Ejercicio 4.1.4. Probar que si M es un factor y V y W son subespacios de dimensión finita de M y M' respectivamente, entonces la aplicación $a \otimes b \to ab$ define un isomorfismo lineal entre $V \otimes W$ y el espacio VW generado por todos los vw con $v \in V$ y $w \in W$.

PE8. *Si $a \in M$ y $a = u|a|$ es la descomposición polar de a, entonces $u \in M$.*

Demostración. Sabemos que $|a|$ conmuta con cualquier elemento de M'. Sea u' unitario de M', entonces $u'u|a| = u'a = au' = u|a|u' = uu'|a|$. Por lo tanto, la unicidad de la descomposición polar asegura que $u'u = uu'$ para todo unitario $u' \in M'$. Ahora por PE2, $u \in M'' = M$. □

Ejercicio 4.1.5. Mostrar que si V es un subconjunto convexo y balanceado de $\mathcal{H}$ tal que 0 es un punto interior, entonces

$$|b|_V = \text{ínf}\{\alpha : \alpha > 0,\ b \in \alpha V\}$$

define una seminorma. Más aún, si V es un entorno básico de 0 definido por ε de alguna de las topologías de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dadas

$$V = \{b \in \mathcal{H} : |b|_V < \varepsilon\}$$

PE9. *Ninguna de las topologías, excepto la de la norma, es metrizable en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pero todas lo son en la bola unidad (cuando $\mathcal{H}$ es separable) y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es separable para todas salvo para la de la norma.*

Demostración. Primero observemos que una sucesión de operadores débilmente convergente es acotada pues en particular, si $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, tenemos que

$$|\langle a_n\xi, \eta\rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\langle a\xi, \eta\rangle| \leq \|a\|$$

Por lo tanto, $\|a_n\| = \sup\limits_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} |\langle a_n\xi, \eta\rangle| \leq \|a\|$ para n suficientemente grande.

Sea $\{\eta_i : i = 1, \ldots, \infty\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y para cada i sea e_i la proyección sobre $\mathbb{C}\eta_i$. Consideremos la familia

$$\{e_m + me_n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Sea V un entorno básico ultrafuerte de 0 definido por ε y $J = \{\xi_i : \sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty\}$. Sea $|\ |_V$ la correspondiente seminorma.

Si escribimos a cada $\xi_i = \sum_j \xi_i^j \eta_j$ tenemos que $\sum_{i,j} |\xi_i^j|^2 < \infty$. Elijamos m y n de modo que

$$\sum_i |\xi_i^m|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}\ , \qquad \sum_i |\xi_i^n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4m^2}$$

Observando que $\|e_n(\xi_i)\|^2 = |\xi_i^n|^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}|e_m + me_n|_V &\leq |e_m|_V + m|e_n|_V \\ &= \sqrt{\sum_i \|e_m\xi_i\|^2} + m\sqrt{\sum_i \|e_n\xi_i\|^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $e_m + me_n \in V$.

Por otro lado, ninguna subsucesión de $\{e_m + me_n : m, n \in \mathbb{N}\}$ puede tender a 0, ni siquiera débilmente, pues de lo contrario debería ser acotada en norma, lo que causaría que algún m fijo ocurra infinitas veces en la sucesión, entonces tendría una subsucesión del tipo $\{e_m + me_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y esta no converge a 0. La libertad de elegir m y n tales que $e_m + me_n \in V$ podría dar una cantidad no numerable de bases de cero para cualquier topología, exceptuando la de la norma, con sólo variar el conjunto J que determina a V una cantidad numerable de veces.

Si consideramos la bola unidad, podemos elegir una sucesión densa de vectores unitarios ξ_i y definir

$$d(a, b) = \left(\sum_i 2^{-i}\|(a - b)\xi_i\|^2\right)^{1/2}$$

que resulta ser una distancia en la bola unidad que define la topología fuerte. Análogamente, podemos obtener el resultado para la topología débil. $\square$

Ejercicio 4.1.6. Demostrar que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ no es separable para la topología de la norma.

PE10. *Un álgebra de von Neumann abeliana sobre un espacio de Hilbert separable está generada por un sólo operador autoadjunto.*

Demostración. Sea $\{e_o, e_1, e_2, \dots\}$ una sucesión de proyecciones fuertemente densa en en el conjunto de todas las proyecciones del álgebra de von Neumann M. Esta sucesión existe por EP9.

Sea

$$a = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} e_n$$

La suma converge en la topología de la norma, por lo tanto $a \in M$. La norma del operador autoadjunto

$$a_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n} e_n$$

es a lo sumo $1/2$, por lo tanto la proyección espectral para el intervalo $[3/4, 2]$ para a es e_0. Continuando de esta manera se puede ver que $e_n \in \{a\}''$ para todo n. Entonces, $M \subset \{a\}''$. La otra inclusión es obvia pues $a \in M$. $\square$

Esta última propiedad resume el estudio de las álgebras de von Neumann abelianas al Teorema Espectral. Se puede probar que cualquier álgebra de von Neumann abeliana en un espacio de Hilbert separable es isomorfa a $l^\infty(\{0, 1, \dots, n\})$ (incluyendo $n = \infty$ también) o a $L^\infty([0, 1], dx)$ o a la suma directa de ambos. Esto es salvo isomorfismos de álgebras abstractas.

Para entender la acción en un espacio de Hilbert, tendremos en cuenta la multiplicidad.

Capítulo 5

Álgebras de von Neumann de dimensión finita y factores de tipo I

5.1. Definición de factores de tipo I

El resultado crucial sobre factores (recordemos que un factor es un álgebra de von Neumann con centro trivial) es la siguiente propiedad *ergódica*.

Teorema 5.1.1. *Si M es un factor y p y q son dos proyecciones no nulas de M, existe $x \in M$ tal que $pxq \neq 0$. Más aún, x puede ser elegido unitario.*

Demostración. Supongamos que para cualquier operador unitario $u \in M$, $puq = 0$. Entonces, $u^*puq = 0$ y $\left(\bigvee_{u\in M} u^*pu\right) q = 0$. Pero $\bigvee_{u\in M} u^*pu$ conmuta con todos los operadores unitarios de M pues para todo unitario $\tilde{u} \in M$,

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{u\in M} u^*pu\right)\tilde{u} &= \bigvee_{u\in M} u^*pu\tilde{u} = \bigvee_{u\in M} \tilde{u}\tilde{u}^*u^*pu\tilde{u} \\ &= \tilde{u}\left(\bigvee_{u\in M} (u\tilde{u})^*p(u\tilde{u})\right) \\ &= \tilde{u}\left(\bigvee_{u\in M} \tilde{u}^*pu\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigvee_{u\in M} u^*pu$ es la identidad ya que es una proyección en $Z(M)$, conduciendo así a una contradicción. □

La razón por la cual hemos llamado a esta propiedad ergódica es por ser análoga a una propiedad de la teoría ergódica de sistemas dinámicos. Más aún, resulta ser más que una analogía.

Definición 5.1.2. Dado (X,μ) un espacio de medida, una transformación $T:(X,\mu)\to(X,\mu)$ que preserva la medida μ se dice *ergódica* si $T^{-1}(A)\subset A$ implica que $\mu(A)=0$ o $\mu(X\setminus A)=0$ para cualquier conjunto medible $A\subset X$.

Ejercicio 5.1.1. Si T es ergódica e invertible se puede probar que, para cualquier par de subconjuntos no vacíos $A,B\subset X$, existe una potencia T^n de T tal que $\mu(T^n(A)\cap B)\neq 0$. O, como operadores en $L^2(X,\mu)$, $AT^mB\neq 0$ cuando identificamos A y B con los operadores multiplicación por sus funciones características (*Ayuda:* Considerar el subconjunto $\cup_n T^n(A)$ invariante por T).

Corolario 5.1.3. *Sean p y q proyecciones en un factor M, entonces, existe una isometría parcial no nula u en M tal que $uu^*\leq p$ y $u^*u\leq q$.*

Demostración. Sea u la isometría parcial de la descomposición polar de pxq para x tal que $pxq\neq 0$. Como $\operatorname{Im}u=\overline{\operatorname{Im}pxq}\subset\overline{\operatorname{Im}p}$, resulta que $uu^*\leq p$. Usando el mismo razonamiento para u^* obtenemos la otra desigualdad. □

Definición 5.1.4. Si M es un álgebra de von Neumann, una proyección $p\in M$ no nula se dice *minimal* o *átomo* si

$$q\leq p\Rightarrow q=0 \text{ o } q=p$$

Ejercicio 5.1.2. Mostrar que p es minimal en M sí y solo sí $pMp=\mathbb{C}p$.

Definición 5.1.5. Un *factor de tipo I* es un factor con una proyección minimal.

5.2. Clasificación de los factores de tipo I

En esta sección clasificaremos todos los factores de tipo I. Comensaremos con el ejemplo que ya hemos visto.

Consideremos $\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes 1$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$. Se puede identificar con el conjunto de matrices diagonales en $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}=\bigoplus_i\mathcal{H}$. Su conmutador es $1\otimes\mathcal{B}(\mathcal{K})$, es el álgebra de todas las matrices que definen operadores acotados con todas sus entradas matriciales un múltiplo escalar de la matriz identidad en $\mathcal{H}$.

Una matriz con un sólo 1 en la diagonal y ceros en el resto de los coeficientes de las entradas es evidentemente una proyección minimal.

Teorema 5.2.1. *Si M es un factor de tipo I sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{L}$, existen espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ y un operador unitario $u:\mathcal{L}\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ tal que $uMu^*=\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes 1$.*

Más aún, si $\mathcal{L}$ es separable $\mathcal{H}=l^2(X)$ donde $X=\{1,2,\ldots,n\}$ para algún n ($n\leq\infty$) y $\mathcal{K}=p\mathcal{L}$ para alguna proyección minimal p.

Demostración. Asumiremos en la demostración que $\mathcal{L}$ es separable.

Sea $\{p_1, p_2, \dots\}$ una familia maximal de proyecciones minimales de M tales que $p_i p_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Veamos que $\bigvee_i p_i = 1$, es decir que $\mathcal{L} = \oplus_i \; p_i\mathcal{L}$. Si $1 - \bigvee_i p_i$ fuera no nulo, por el Corolario 5.1.3, existiría una isometría parcial $u \neq 0$ tal que

$$uu^* \leq p_1, \qquad u^*u \leq 1 - \bigvee_i p_i$$

Por minimalidad $uu^* = p_1$, o sea que es minimal. Pero eso dice que u^*u también lo es. En efecto, si $q \leq u^*u$ tenemos que $uq \leq uu^*u \leq uu^*$, entonces $uq = 0$ o $uq = uu^*$. Si $uq = 0$, como $\operatorname{Im} q$ está contenido en el dominio inicial de u y $\operatorname{Nu} u \cap \operatorname{Im} u^* = 0$ por Ejercicio 2.2.12, resulta $q = 0$. Si $uq = uu^*$, como $u = wP_{\operatorname{Im} u^*}$ con w unitario, $P_{\operatorname{Im} u^*} q = u^*$, pero $P_{\operatorname{Im} u^*} q = q$.

Por lo tanto, se contradice la maximalidad del conjunto de los p_i pues $u^*u \leq 1 - \bigvee_i p_i$ es una proyección minimal distinta a todos los p_i.

Ahora, para cada i elijamos una isometría parcial e_{1i} tal que $e_{1i}e_{1i}^* \leq p_1$ y $e_{1i}^*e_{1i} \leq p_i$. Por minimalidad

$$e_{1i}e_{1i}^* = p_1, \qquad e_{1i}^*e_{1i} = p_i$$

Por lo tanto M está generada por los e_{1i}. Si $a \in M$ tenemos que $a = \sum_{i,j} p_i a p_j$ donde la suma converge fuertemente y

$$p_i a p_j = e_{1i}^* e_{1i} a e_{1j}^* e_{1j} = e_{1i}^* e_{1i} e_{1i}^* e_{1i} a e_{1j}^* e_{1j} e_{1j}^* e_{1j}$$

Como $e_{1i}^* e_{1i} e_{1i}^* a e_{1j}^* e_{1j} e_{1j}^* \in p_1 M p_1 = \mathbb{C}p_1$, hay escalares λ_{ij} tales que $a = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_{1i}^* p_1 e_{1j}$ (los detalles de la convergencia de la suma son irrelevantes, sólo necesitamos que a esté en la clausura fuerte de sumas finitas).

Si n es la cardinalidad de $\{p_i\}$ y $X = \{1, 2, \dots, n\}$, definamos la aplicación u por

$$\begin{aligned} u : l^2(X, p_1\mathcal{L}) &\to \quad \mathcal{L} \\ f \quad &\to uf = \sum_i e_{1i}^* f(i) \end{aligned}$$

Observemos que u es unitario y $u^* e_{1i} u$ es una matriz en $l^2(X, p_1\mathcal{L})$ con el operador identidad en el lugar $(1, i)$ y ceros en el resto. El álgebra generada por estas matrices es $\mathcal{B}(l^2(X)) \otimes 1$ en $l^2(X) \otimes p_1\mathcal{L}$. Así, obtenemos el resultado buscado. $\square$

Observación 5.2.2. Hemos evitado todo tipo de problemas en el teorema anterior construyendo el isomorfismo usando operadores unitarios entre los espacios de Hilbert subyacentes. En general, dadas álgebras de von Neumann M y N generadas por S y T respectivamente, para construir un isomorfismo entre ellas es suficiente construir (si es posible) un operador unitario u entre sus respectivos espacios de Hilbert tal que T esté contenido en uSu^*. Resulta mucho más complicado construir un isomorfismo directamente desde S.

5.3. Producto tensorial de álgebras de von Neumann

Si M y N son dos álgebras de von Neumann sobre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente, definimos el *álgebra de von Neumann* $M \otimes N$ al álgebra de von Neumann sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ generada por $\{x \otimes y : x \in M, y \in N\}$.

Ejercicio 5.3.1. Probar que el producto tensorial algebraico $M \otimes_{alg} N$ resulta una $*$-subálgebra densa de $M \otimes N$.

Definición 5.3.1. Sea M un álgebra de von Neumann. Un *sistema de unidades matriciales (s.u.m.) de tamaño* n es una familia $\{e_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ $(n \leq \infty)$ tal que
(*i*) $e_{ij}^* = e_{ji}$,
(*ii*) $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$,
(*iii*) $\sum_i e_{ii} = 1$.

Observación 5.3.2. Tanto los e_{ii} como los operadores $e_{ij}e_{ij}^*$ y $e_{ij}^*e_{ij}$ son proyecciones.

Ejercicio 5.3.2. Mostrar que si $\{e_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ es un s.u.m. en un álgebra de von Neumann M, entonces los e_{ij} generan un factor de tipo I isomorfo a $\mathcal{B}(l^2(\{1, 2, \ldots, n\}))$ y M es unitariamente equivalente al álgebra de von Neumann $\mathcal{B}(l^2(\{1, 2, \ldots, n\})) \otimes e_{11}Me_{11}$.

Ejercicio 5.3.3. Dado M un factor de tipo I, probar que existe un sistema de unidades matriciales $\{e_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ en M que generan M.

5.4. Multiplicidad y álgebras de von Neumann de dimensión finita

El Teorema 5.2.1 muestra que los factores de tipo I sobre un espacio de Hilbert están completamente clasificados por dos parámetros (n_1, n_2) dados por:
n_1 = rango de una proyección minimal de M $(= \dim \mathcal{K})$, y
n_2 = rango de una proyección minimal de M' $(= \dim \mathcal{H})$.

El problema del isomorfismo se descompone en dos aspectos:

(*i*) el *isomorfismo espacial*: la equivalencia unitaria $\mathcal{L} \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \bigoplus_{i=1}^{n_1} \mathcal{H}$, y
(*ii*) el *isomorfismo abstracto*: $M \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$, determinado sólo por n_2.

Definición 5.4.1. Un *factor de tipo* I_n es un factor de tipo I para el cual $n_2 = n$.

Definición 5.4.2. La *multiplicidad* del factor de tipo I es el valor n_1.

Ahora determinaremos la estructura de todas las álgebras de von Neumann de dimensión finita. Denotemos por $M_n(\mathbb{C})$ al álgebra de von Neumann de todas las matrices $n \times n$ en un espacio de Hilbert de dimensión n.

Teorema 5.4.3. *Sea M un álgebra de von Neumann de dimensión finita sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, M es abstractamente equivalente a $\bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$ para ciertos enteros positivos $k, n_1, \dots, n_k$.*

Más aún, existen espacios de Hilbert $\mathcal{K}_i$ y un operador unitario

$$u^* : \bigoplus_{i=1}^k l^2(X_i, \mathcal{K}_i) \to \mathcal{H}$$

con $|X_i| = n_i$ tal que

$$uMu^* = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}(l^2(X_i)) \otimes 1$$

Demostración. El centro $Z(M)$ es un álgebra de von Neumann de dimensión finita. Por lo tanto tiene una proyección minimal. En efecto, por ser abeliana de dimensión finita está generada por una cantidad finita de proyecciones q_i. Como es conjunto $\{q_i\}$ es parcialmente ordenado y finito, tiene un elemento minimal.

Observemos también que cualquier par de proyecciones minimales p y q de $Z(M)$ satisfacen $pq = 0$ ya que $p \wedge q \in Z(M)$ por ser el conjunto de proyecciones en un álgebra de von Neumann un reticulado completo (PE5). Por lo tanto, $Z(M) = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}p_i$ donde p_i son las proyecciones minimales de $Z(M)$. Entonces, como $1 \in Z(M)$, $1 = p_1 + \cdots + p_k$, es decir que $\mathcal{H} = \bigoplus_i p_i\mathcal{H}$.

Por otro lado, por ser cada p_i una proyección minimal de $Z(M)$, el centro de p_iMp_i es $p_iZ(M)p_i = \mathbb{C}p_i$, esto dice que p_iMp_i es un factor en $p_i\mathcal{H}$. Es de tipo I pues M tiene una proyección minimal p por ser de dimensión finita. Entonces, p_ipp_i es minimal en p_iMp_i pues $q \leq p_ipp_i \leq p$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{H}$ es separable, por el Teorema 5.2.1, existen operadores unitarios u_i y conjuntos $X_i = \{1, 2, \dots, n_i\}$ tales que

$$u_ip_iMp_iu_i^* = \mathcal{B}(p_i\mathcal{H}) \otimes 1 = \mathcal{B}(l^2(X_i)) \otimes 1 \cong M_{n_i}(\mathbb{C})$$

Como cada p_iMp_i es de dimensión finita, n_i es un entero positivo. Entonces, como

$$M = \left(\sum_{i=1}^k p_i\right) M \left(\sum_{j=1}^k p_j\right) = \sum_{i=1}^k p_iMp_i$$

pues $p_iMp_j = Mp_ip_j = 0$ cuando $i \neq j$, podemos construir un operador unitario $u = \sum_{i=1}^k u_i$ tal que

$$uMu^* = \bigoplus_{i=1}^k u_ip_iMp_iu_i^* \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$$

□

Observación 5.4.4. Notemos que en el teorema anterior no se requiere que la dimensión de $\mathcal{H}$ sea finita.

El estudio de las álgebras de von Neumann resulta de esta manera más sencillo. Se hace más interesante cuando si se consideran subálgebras $N \subset M$. Analicemos primero el caso de los factores y recordemos que la identidad de M es la misma que la de N. Si N es un factor diremos que N es un *subfactor* de M.

Teorema 5.4.5. *Si M es un factor de tipo I_n, todos sus subfactores de tipo I_m están determinados en forma única por una proyección minimal p del subfactor y por $0 < k \leq \infty$ tal que pMp es de tipo I_k y $mk = n$, salvo conjugación por operadores unitarios de M.*

Demostración. Sea N_1 un subfactor de tipo I_m con sistema de unidades matriciales generadora $\{e_{ij}\}$. Por el Ejercicio 5.3.2, $M \cong N_1 \otimes e_{11}Me_{11}$, es decir que existe k tal que $n = mk$ y $e_{11}Me_{11}$ es de tipo I_k. En efecto, podemos asegurar que $e_{11}Me_{11}$ es de tipo I pues $Z(e_{11}Me_{11}) = e_{11}Z(M)e_{11}$ y, como M tiene alguna proyección minimal p, $e_{11}pe_{11}$ es proyección minimal de $e_{11}Me_{11}$. Lo mismo vale para N_2 con $\{f_{ij}\}$ sistema de unidades matriciales.

Por Corolario 5.1.3, existen isometrías parciales u_i no nulas tales que $u_iu_i^* \leq e_{11}$ y $u_i^*u_i \leq f_{11}$. Tomemos una familia maximal de estas u_i tales que las proyecciones $u_iu_i^*$ sean mutuamente ortogonales y $u_i^*u_i$ también. En particular, eso dice que $\operatorname{Im} u_j \subset Nu(u_i^*)$ y $\operatorname{Im} u_j^* \subset Nu(u_i)$ para todo $i \neq j$. Por lo tanto, $u_iu_j^* = 0 = u_i^*u_j$ para todo $i \neq j$. Sea $u = \sum_i u_i$, veamos que esta isometría parcial satisface

$$uu^* = \sum_i u_iu_i^* = e_{11} \qquad u^*u = \sum_i u_i^*u_i = f_{11}$$

Es claro que satisfacen desigualdades. Como e_{11} y f_{11} son proyecciones minimales de N_1 y N_2 respectivamente, si fueran diferentes $p = 1 - uu^*$ es una proyección tal que $p \leq e_{11}$ y pp^* es ortogonal a $u_ju_j^*$ para cada j, lo que contradice el conjunto de proyecciones $\{u_ju_j^*\}$ sea maximal. Por lo tanto, $uu^* = e_{11}$. Lo mismo para f_{11}.

Luego, es fácil verificar que

$$w = \sum_j e_{j1}uf_{1j}$$

es unitaria y satisface que $wf_{lk}w^* = e_{kl}$. En efecto,

$$\begin{aligned} wf_{lk}w^* &= \left(\sum_j e_{j1}uf_{1j}\right) f_{kl} \left(\sum_i f_{i1}u^* e_{1i}\right) \\ &= \sum_{ji} e_{j1}uf_{1j}f_{kl}f_{i1}u^* e_{1i} = e_{k1}uf_{11}u^* e_{1l} \\ &= \sum_{ij} e_{k1}u_i f_{11} u_j^* e_{1l} = \sum_{ijm} e_{k1}u_i u_m^* u_m u_j^* e_{1l} \\ &= \sum_i e_{k1}u_i u_i^* u_i u_i^* e_{1l} = e_{k1}e_{11}e_{1l} = e_{kl} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $wN_2w^* = N_1$. □

Ahora podemos hacer el caso general donde las álgebras de von Neumann no son factores.

Sea N una subálgebra de von Neumann del álgebra de von Neumann de dimensión finita M. Por Teorema 5.4.3, tenemos que

$$N = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{k_i}(\mathbb{C}) \subset M = \bigoplus_{j=1}^{m} M_{r_j}(\mathbb{C})$$

Sean p_j las proyecciones minimales centrales en M y q_i las de N. Entonces, para cada par (i, j), $p_jq_iMq_ip_j$ es un factor y p_jq_iN es un subfactor, por lo tanto podemos formar la matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ donde λ_{ij} es el entero asociado a la inclusión $p_jq_iN \subset p_jq_iMq_ip_j$ por Teorema 5.4.5.

Ejercicio 5.4.1. Mostrar que el entero λ_{ij} definidos arriba es el siguiente: si e_i es una proyección minimal del factor q_iN, λ_{ij} es la traza de la matriz $p_je_i \in M_{r_j}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 5.4.6. Sea $M = M_5(\mathbb{C}) \oplus M = M_3(\mathbb{C})$ y sea N la subálgebra de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y X es una matriz 2×2. Entonces, N es isomorfo a $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ y $p_1 = 1 \oplus 0$, $q_1 = 1 \oplus 0$, $p_2 = 0 \oplus 1$ y $q_2 = 0 \oplus 2$. Por lo tanto, tenemos que

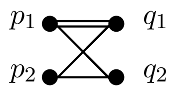
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto, calculemos por ejemplo $\lambda_{11} = \operatorname{Tr} p_1 e_1$. Como $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ es una proyección minimal de $q_1 N$,

$$p_1 e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{C})$$

resultando lo que esperábamos. Observemos que si hubiéramos calculado dicho número con otra proyección minimal de $q_1 N$, por ejemplo con $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, el resultado no hubiera variado.

La matriz Λ suele ser representada por un grafo entre dos subconjuntos de vértices, tantos como el tamaño de las álgebras de matrices correspondientes, y la cantidad de líneas con el número λ_{ij}. El diagrama correspondiente al ejemplo es



Este diagrama es llamado *diagrama de Bratteli* para $N \subset M$.

Ejercicio 5.4.2. Generalizar el ejemplo anterior para mostrar que hay una inclusión $N \subset M$ correspondiente a cualquier diagrama de Bratteli con cualquier conjunto de dimensiones para las componentes simples de N.

5.5. El índice

Si $N \subset M$ son factores de tipo I, hemos visto que existe un $k \leq \infty$ tal que $M = \bigoplus_{j=1}^{k} N$ como espacio vectorial. Por lo tanto, si vemos la acción por multiplicación a izquierda de M en sí mismo, tenemos que M es isomorfo al álgebra de matrices $k \times k$ sobre N. Si k es finito, M resulta un N-módulo libre a izquierda de rango k^2.

Si H es un subgrupo del grupo G, y $\mathbb{C}H \subset \mathbb{C}G$ son sus respectivas álgebras de grupos, la descomposición en coclases de de G dice que $\mathbb{C}G$ es un $\mathbb{C}H$-módulo libre de rango $[G : H]$. Entonces parece razonable dar la siguiente definición.

Definición 5.5.1. Si $N \subset M$ son factores de tipo I, el *índice* de N en M es $[M : N]$, el rango de M visto como N-módulo libre.

Capítulo 6

Teorema de Densidad de Kaplansky

6.1. Algunos resultados significativos sobre funcionales lineales

Comensaremos con algunos resultados sobre funcionales lineales de interés en sí mismos.

Teorema 6.1.1. *Sea V un subespacio de $\mathcal{B}(CH)$ y sea $\phi : V \to \mathbb{C}$ una funcional lineal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(i) Hay vectores en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_n$ en $\mathcal{H}$ tales que

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x\xi_i, \eta_i \rangle$$

(ii) ϕ es débilmente continua,

(iii) ϕ es fuertemente continua.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ es obvio.

Veamos $(iii) \Rightarrow (i)$. Como ϕ es fuertemente continua, existe un entorno $N(0; \nu_1, \ldots, \nu_n; 1)$ contenido en $\{x \in V : |\phi(x)| < 1\}$. Entonces, existe una constante $K > 0$ tal que $|\phi(x)| < K\sqrt{\sum_i \|x\nu_i\|^2}$. Para ello usar el hecho que $|\phi(x)| \leq \|\phi\|\|x\|$ y que existe una constante K' tal que $\|x\| \leq K'\sqrt{\sum_i \|x\nu_i\|^2}$.

Sea $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \bigoplus_i \mathcal{H}$ y sea $\mathcal{K} = \overline{(V \otimes 1)(\nu)}$. Definamos Φ en $(V \otimes 1)(\nu)$ por $\Phi(x\nu_1, \ldots, x\nu_n) = \phi(x)$. Observemos que Φ está bien definida y es continua. En efecto, si $(x\nu_1, \ldots, x\nu_n) = (y\nu_1, \ldots, y\nu_n)$, por linealidad de Φ, tenemos que ver que $\Phi(0) = 0$ para que esté bien definida. Pero eso es cierto por la desigualdad del párrafo anterior. La continuidad es evidente. Por lo tanto, Φ se extiende a $\mathcal{K}$, entonces existe un vector $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{K}$ tal que $\phi(x) = \Phi((x \otimes 1)(\nu)) = \langle (x \otimes 1)(\nu), \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x\nu_i, \eta_i \rangle$. $\square$

Ejercicio 6.1.1. En el teorema anterior reemplazar débil por ultradébil, fuerte por ultrafuerte y las sucesiones finitas de vectores por sucesiones l^2-convergentes y obtener un resultado análogo.

Corolario 6.1.2. *Si C es un subconjunto convexo de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, sus clausuras débiles y fuertes coinciden.*

Demostración. Una versión del Teorema de Hahn-Banach dice:

Sea V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$ y sean A, B subconjuntos convexos no vacíos de V tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces, si A es abierto, existe una funcional lineal continua $\phi : V \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\phi(a) < t \leq \operatorname{Re}\phi(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.

Si consideramos $V = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con la topología fuerte, $A = \{y\}$ para cualquier $y \in V \setminus B$ y B la clausura fuerte de C, tenemos que $B \subset \overline{C}^d$. Como $B \subset S = \{x \in V : \operatorname{Re}\phi(x) \geq t\}$ y S es débilmente cerrado, por ser ϕ continua con la topología débil, entonces $\overline{C}^d \subset B$. Es decir que la clausura débil y fuerte de C coinciden. □

Corolario 6.1.3. *Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, la topología fuerte y la ultrafuerte no coinciden en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Demostración. Por Ejercicio 6.1.1, existe una base ortonormal $\{\xi_i\}$ de $\mathcal{H}$ tal que $\omega(x) = \sum_i \frac{1}{i^2}\langle x\xi_i, \xi_i\rangle$. Por lo tanto, ω resulta ultradébilmente continua, pero no fuertemente continua. Si fuera fuertemente o débilmente continua, por el Teorema 6.1.1, sería de la forma $\sum_{i=1}^n \langle x\nu_i, \eta_i\rangle$. Por lo tanto, $\omega(p) = 0$ si p es la proyección sobre el complemento ortogonal del espacio generado por los ν_i. Pero la positividad, $0 = \omega(p) = \sum_i \frac{1}{i^2}\langle p\xi_i, \xi_i\rangle$ fuerza que $p(\xi_i) = 0$ para todo i. Es decir, $\mathcal{H}$ está generado por una cantidad finita de vectores, lo cual contradice la hipótesis sobre la dimensión. Esto indica que ambas topologías difieren. □

6.2. El teorema

Cuando analizamos $vN(\Gamma)$ ya nos topamos con el deseo tener un sucesión *acotada en norma* de operadores que convergen a un elemento en la clausura débil de una $*$-álgebra de operadores. Esto no está garantizado por el Teorema de Densidad de von Neumann. El Teorema de Densidad de Kaplansky salva esa dificultad.

Teorema 6.2.1. *Sea A una $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces, la bola unidad de A es fuertemente densa en la bola unidad de la clausura débil $\overline{A}^d$ of A, y la parte autoadjunta de la bola unidad de A es fuertemente densa en la parte autoadjunta de la bola unidad de $\overline{A}^d$.*

Demostración. Por PE6 podemos asumir que $1 \in \overline{A}^d$ a pesar de que no hemos asumido que $1 \in A$. Podemos suponer también que A es cerrada en norma, es decir que es una

C^*-álgebra. Denotemos por $A_{adj} = \{a \in A : a^* = a\}$, la parte autoadjunta de A. La operación $*$ es débilmente continua, por lo tanto si x_α es una red en A que converge a un elemento autoadjunto de $x \in \overline{A}^d$, $\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\alpha^*)$ converge también a x, por lo tanto la clausura débil de A_{adj} es igual a $(\overline{A}^d)_{adj}$.

Ahora probemos la segunda afirmación del teorema. Sea $x^* = x \in \overline{A}^d$ con $\|x\| < 1$ y $N(x; \xi_1, \ldots, \xi_n; \varepsilon)$ un entorno fuerte de x. Tenemos que encontrar un $y \in A_{adj}$ tal que $\|y\| < 1$ y $\|(y-x)\xi_i\| < \varepsilon$ para todo i. La función $t \to \frac{2t}{1+t^2}$ es un homeomorfismo del intervalo $[-1, 1]$ en si mismo. Por el Teorema Espectral podemos elegir un $X \in (\overline{A}^d)_{adj}$ tal que $\|X\| < 1$ y $\frac{2X}{1+X^2} = x$. Ahora, como A_{adj} es convexo en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y sus clausuras fuerte y débil coinciden, elijamos $Y \in A_{adj}$ tal que

$$\|Yx\xi_i - Xx\xi_i\| < \varepsilon, \qquad \left\| \frac{Y}{1+X^2}\xi_i - \frac{X}{1+X^2}\xi_i \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Sea $y = \frac{2Y}{1+Y^2}$, notemos que $\|y\| < 1$.

Ahora consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
y - x &= \frac{2Y}{1+Y^2} - \frac{2X}{1+X^2} \\
&= 2\left(\frac{1}{1+Y^2}\left(Y(1+X^2) - (1+Y^2)X\right)\frac{1}{1+X^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{1+Y^2}(Y-X)\frac{1}{1+X^2} + \frac{Y}{1+Y^2}(X-Y)\frac{X}{1+X^2}\right) \\
&= \frac{2}{1+Y^2}(Y-X)\frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{2}y(X-Y)x
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|(y-x)\xi_i\| \leq \|\frac{2}{1+Y^2}(Y-X)\frac{1}{1+X^2}\xi_i\| + \|\frac{1}{2}y(X-Y)x\xi_i\| \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Por la elección de Y, se puede ver que $\|(y-x)\xi_i\| < \varepsilon$ para todo i. Esto prueba la densidad para la parte autoadjunta de la bola unidad.

Ahora consideremos un $x \in \overline{A}^d$ tal que $\|x\| < 1$. El truco consiste en trabajar con $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix} \in \overline{A}^d \otimes M_2(\mathbb{C})$. La convergencia fuerte de una red

$$\begin{pmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es equivalente a la convergencia fuerte de las entradas matriciales, por lo tanto $A \otimes M_2(\mathbb{C})$ es fuertemente denso en $\overline{A}^d \otimes M_2(\mathbb{C})$. Más aún, si

$$\begin{pmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix}$$

fuertemente, entonces b_α tiende fuertemente a x. Que $\|b_\alpha\| \leq 1$ sale de

$$\left\| \begin{pmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{pmatrix} \right\| \leq 1, \qquad \langle b_\alpha \xi, \eta \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

pues $|\langle b_\alpha \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|$ da que $\|b_\alpha\| \leq 1$. □

Corolario 6.2.2. *Si M es una $*$-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contiene a 1, entonces M es un álgebra de von Neumann si y sólo si la bola unidad de M es débilmente compacta.*

Demostración. La bola unidad de M es débilmente cerrada pues es intersección de dos débilmente cerrados, M y la bola unidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como además, la bola unidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacta con la topología débil y por PE9 en la bola unidad la topología débil es metrizable, la bola unidad de M es un cerrado dentro de un compacto en un espacio topológico metrizable, por lo tanto es compacta.

Recíprocamente, si la bola unidad de M es débilmente compacta, es débilmente cerrada. Sea $x \in \overline{M}^d$. Por el Teorema de Densidad de Kaplansky hay una red x_α que converge débilmente a $\frac{x}{\|x\|}$ con $\|x_\alpha\| \leq 1$. Entonces, $\frac{x}{\|x\|}$ está en la bola unidad de M y $x \in M$. □

Capítulo 7

Comparación de proyecciones y factores de tipo II_1

7.1. El orden de las proyecciones

En esta sección vamos a establecer otro orden parcial en el conjunto de proyecciones que permitirá compararlas en otro sentido, la dimensión de sus imágenes.

Definición 7.1.1. Si p y q son proyecciones en un álgebra de von Neumann M diremos que $p \preceq q$ si hay una isometría parcial $u \in M$ tal que $uu^* = p$ y $u^*u \leq q$.
Diremos que p y q son *equivalentes*, $p \approx q$, si existe una isometría parcial $u \in M$ tal que $uu^* = p$ y $u^*u = q$.

De esta definición podemos observar varias cuestiones. Por un lado tenemos que si $p \leq q$ entonces $p \preceq q$. De alguna manera esto dice que la nueva relación definida contempla que la inclusión de la imagen de una proyecciónen la otra relaciona a las proyecciones, pero que podría no ser la única situación en que están relacionadas. Por otro lado, es claro que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 7.1.1. Si $p \preceq q$ entonces existe un aplicación inyectiva $\iota : \operatorname{Im} p \to \operatorname{Im} q$. Más aún, si $p \approx q$, ι es un operador unitario.

El siguiente teorema nos dice que $\preceq$ es un orden parcial. En este sentido y de acuerdo al ejercicio, podemos afirmar que este orden compara el "tamaño de las imágenes de las proyecciones".

Teorema 7.1.2. *La relación $\preceq$ es un orden parcial en la clase de equivalencia de proyecciones de un álgebra de von Neumann.*

Demostración. La transitividad proviene de componer isometrías parciales, ya que si $uu^* = p$, $u^*u \leq q$ y $ww^* = q$, $w^*w \leq r$, tenemos que

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} u, \qquad \operatorname{Im} u^* \subset \operatorname{Im} q = \operatorname{Im} w, \qquad \operatorname{Im} w^* \subset \operatorname{Im} r$$

por lo tanto

$$uw(uw)^* = uww^*u^* = uu^* = p, \qquad (uw)^*uw = w^*u^*uw \leq w^*w \leq r$$

Veamos que si $p \preceq q$ y $q \preceq p$, entoces $p \approx q$. Supongamos que $uu^* = p$ y $u^*u \leq q$ y $ww^* = q$ y $w^*w \leq p$. Definamos dos sucesiones decrecientes de proyecciones

$$p_0 = p, \quad p_{n+1} = w^*q_nw, \qquad q_0 = q, \quad q_{n+1} = u^*p_nu$$

Vamos a demostrar que son efectivamente decrecientes usando inducción. Observemos que la aplicación $p \to w^*pw$ que va del conjunto de proyecciones en M menores o iguales a q al conjunto de proyecciones en M menores o iguales a p, preserva el orden $\leq$. Lo mismo sucede cambiando los roles de p por los de q y de w por los de u.

Sea $p_\infty = \bigwedge_{i=0}^{\infty} p_i$ y $q_\infty = \bigwedge_{i=0}^{\infty} q_i$. Notemos que $w^*q_\infty w = p_\infty$ y $q_\infty ww^*q_\infty = q_\infty$, por lo tanto $p_\infty \approx q_\infty$ a través de la isometría parcial $q_\infty w$.

Por otro lado tenemos que

$$p = (p - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + p_\infty, \qquad q = (q - q_1) + (q_1 - q_2) + \cdots + q_\infty$$

son sumas de proyecciones mutuamente ortogonales. Pero por cada número par i,

$$u^*(p_i - p_{i+1})u = q_{i+1} - q_{i+2}, \qquad w^*(q_i - q_{i+1})w = p_{i+1} - p_{i+2}$$

por lo tanto $p_i - p_{i+1} \approx q_{i+1} - q_{i+2}$ a través de la isometría parcial $(p_i - p_{i+1})u$ y $p_i - p_{i+1} \approx q_{i-1} - q_i$ a través de la isometría parcial $(q_{i-1} - q_i)w$. La suma de todas las isometrías parciales consideradas converge en topología fuerte a una isometría parcial que da la equivalencia entre p y q. $\square$

Notemos que si $M = vN(\Gamma)$, o es un álgebra de von Neumann con traza, la última parte de la demostración del teorema hubiera sido innecesario. Efectivamente,

$$\operatorname{Tr}(w^*w) \leq \operatorname{Tr} p = \operatorname{Tr}(u^*u) \leq \operatorname{Tr} q = \operatorname{Tr}(ww^*) = \operatorname{Tr}(w^*w)$$

es decir que $\operatorname{Tr}(p - w^*w) = 0$, lo que implica que $p = w^*w$ por ser $p - w^*w \geq 0$.

Observación 7.1.3. Si p y q son dos proyecciones en $vN(\Gamma)$ tales que $p \leq q$ y $p \approx q$, entonces $p = q$.

Esto se deduce inmediatamente del cálculo anterior de la traza. Sin embargo, en general es posible obtener ejemplos en que una proyección es equivalente a una subproyección propia. Uno de ellos es tomar un corrimiento a un lado en $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ dando una equivalencia entre 1 y la proyección sobre el complemento ortogonal del primer vector de una base de $l^2(\mathbb{N})$. Esto es análogo a la noción de conjunto infinito, uno en que existe una biyección entre él mismo y un subconjunto propio.

Definición 7.1.4. Una proyección p de un álgebra de von Neumann M se dice *infinita* si $p \approx q$ para alguna proyección $q \in M$ tal que $q < p$ y $p \neq q$. De lo contrario p se dice *finita*.

Definición 7.1.5. Un álgebra de von Neumann se dice *finita* si su identidad es finita, y se dice *infinita pura* si no tiene proyecciones finitas distintas de la proyección nula.
Un factor se dice *infinito* si su identidad es infinita.

Mostraremos que las álgebras de von Neumann infinitas puras existen, aunque no será fácil probarlo.

Observación 7.1.6. Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es infinita.
En efecto, la identidad es equivalente a la proyección ortogonal sobre un subespacio de codimensión 1.

Observación 7.1.7. Un factor con traza como $vN(\Gamma)$ es finito.

Observación 7.1.8. Toda proyección en un álgebra de von Neumann finita es finita. Más aún, si $p \leq q$ y q es finita, entonces p es finita.
Efectivamente, supongamos que p es infinita, por lo tanto existe una proyección r tal que $p \approx r$ y $r < p$. Entonces, $q = p + (q - p) \approx r + (q - p) < q$, es decir que q también es infinita.

Observación 7.1.9. Si M es un álgebra de von Neumann y $\dim \mathcal{H} = \infty$, entonces 1 es una proyección infinita en $M \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Teorema 7.1.10. *Si M es un factor y p, q son proyecciones en M, entonces $p \preceq q$ ó $q \preceq p$. Es decir, el conjunto de clases de equivalencia de proyecciones en M es un conjunto totalmente ordenado.*

Demostración. Consideremos la familia de isometrías parciales u tales que

$$uu^* \leq p, \qquad u^*u \leq q$$

Este conjunto es parcialmente ordenado con el orden $u \leq v$ si $u^*u \leq v^*v$ y $v = u$ en el dominio inicial $u^*u\mathcal{H}$ de u. Este orden parcial satisface las hipótesis del Lema de Zorn. Por lo tanto, si w es un elemento maximal y $ww^* = p$ ó $w^*w = q$ tenemos que $p \preceq q$ ó $q \preceq p$ respectivamente, como buscábamos. Supongamos que $q - w^*w$ y $p - ww^*$ son ambas no nulas. Entonces, por Corolario 5.1.3, existe $v \neq 0$ tal que $vv^* \leq p - ww^*$ y $v^*v \leq q - w^*w$. Pero $w + v$ es mayor que w con el orden que definimos, lo cual contradice la maximalidad de w. □

Ejercicio 7.1.2. Mostrar que dos proyecciones equivalentes en un factor finito M son unitariamente equivalentes, es decir que existe un operador unitario $u \in M$ tal que $upu^* = q$.

Hemos visto que las clases de equivalencias de proyecciones en un factor forman un conjunto totalmente ordenado. Es conocido que en un espacio de Hilbert separable, ese conjunto puede ser, salvo isomorfismos, de diferentes tipos:

1. **Tipo I_n:** $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ donde $n = \infty$ está permitido,
2. **Tipo II_1:** $[0, 1]$,
3. **Tipo II_∞:** $[0, \infty]$,
4. **Tipo III:** $\{0, \infty\}$.

La diferencia entre los de tipo III y los de tipo I_1, ó los de tipo II_∞ y los de tipo II_1, la establece el que hecho que 1 sea infinito o no, pues como conjuntos ordenados son iguales.

Observemos también que los de tipo II_1 seguramente existe pues vimos que $vN(\mathbb{F}_2)$ tiene proyecciones de cualquier traza entre 0 y 1. El teorema anterior muestra claramente que la traza da un isomorfismo entre el conjunto ordenado de clases de equivalencias de proyecciones y el intervalo unidad. Probaremos un resultado que generaliza esto considerablemente.

Definición 7.1.11. Un *factor de tipo* II_1 es un factor de dimensión infinita M en $\mathcal{H}$ que admite una traza, es decir una funcional lineal $\mathrm{Tr} : M \to \mathbb{C}$ que, para todo $a, b \in M$, satisface:
(i) $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$,
(ii) $\mathrm{Tr}(a^*a) \geq 0$,
(iii) Tr es ultradébilmente continua.
La traza Tr se dice *normalizada* si $\mathrm{Tr}(1) = 1$.

Ejercicio 7.1.3. Probar que si M es un factor de tipo II_1 no trivial, no es un factor de tipo I.

Definición 7.1.12. Una funcional lineal ϕ en una $*$-álgebra A se dice *positiva* si $\phi(a^*a) \geq 0$ y $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ (la última igualdad es redundante si A es una C^*-álgebra).
Se dice *fiel* si $\phi(a^*a) = 0$ implica que $a = 0$.
Si ϕ es positiva se la llama *estado* cuando $1 \in A$ y $\phi(1) = 1$.
Una funcional lineal ϕ se dice *traza* si $\phi(ab) = \phi(ba)$ para todo $a, b \in A$.

Ahora nos dedicaremos a mostrar que un factor de tipo II_1 tiene un único estado traza ultradébilmente continuo. Para ello necesitamos primero algunos resultados sobre ideales.

Teorema 7.1.13. *Sea $\mathcal{M}$ un ideal a izquierda ultradébilmente cerrado de un álgebra de von Neumann M. Entonces, existe una única proyección $e \in M$ tal que $\mathcal{M} = Me$. Más aún, si $\mathcal{M}$ es ideal bilátero, $e \in Z(M)$.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*$ es una $*$-subálgebra ultradébilmente cerrada, por lo tanto tiene una proyección maximal e por ser un álgebra de von Neumann. Como $e \in \mathcal{M}$, $Me \subset \mathcal{M}$. Por otro lado, si $x \in \mathcal{M}$ y su descomposición polar es $x = u|x|$, $|x|^* = |x| = u^*x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*$. Entonces, $|x|e = |x|$ y $x = u|x|e \in Me$. Es decir que $\mathcal{M} = Me$.

La unicidad sale pues si f es otra proyección maximal de $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*$, $f = we$ para algún $w \in M$. Entonces, $f = f^*f = ew^*we \leq e$, pero por maximalidad son iguales.

Si consideramos que $\mathcal{M}$ es un ideal bilátero, para cualquier operador unitario $u \in M$, $u\mathcal{M} = \mathcal{M} = u\mathcal{M}u^*$. Como ueu^* también es maximal en $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}^*$, por unicidad, $ueu^* = e$. Entonces, por PE3, $e \in M \cap M' = Z(M)$. $\square$

Ejercicio 7.1.4. Mostrar que si Tr es no nula, entonces $\mathrm{Tr}(1) > 0$.

Corolario 7.1.14. *Toda traza no nula de un factor de tipo* II_1 *es fiel.*

Demostración. Sea Tr una traza no nula ultradébilmente continua de un factor M de tipo II_1 y sea $\mathcal{M} = \{x \in M : \mathrm{Tr}(x^*x) = 0\}$. Como $x^*a^*ax \leq \|a\|^2x^*x$, ya que

$$\langle x^*a^*ax\xi, \xi\rangle \leq \|a^*a\|\|x\xi\| = \langle \|a\|^2x^*x\xi, \xi\rangle,$$

$\mathcal{M}$ es un ideal a izquierda, pero $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ dice que también lo es a derecha. Más aún, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $\mathrm{Tr}(x^*x) = 0$ sí y solo sí $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ para todo $y \in M$. En efecto, si $\|\xi\| \leq 1$

$$|\langle yx\xi, \xi\rangle| \leq \|y\|\|x\xi\|\|\xi\| = \|y\|\langle x^*x\xi, \xi\rangle\|\xi\| \leq \langle \|y\|x^*x\xi, \xi\rangle$$

Esto dice que $yx \leq \|y\|x^*x$, por lo tanto $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ si $\mathrm{Tr}(x^*x) = 0$. La recíproca es inmediata tomando $y = x^*$.

Por lo tanto, $\mathcal{M}$ es ultradébilmente cerrado por ser la intersección de los núcleos de las funcionales lineales $x \to \mathrm{Tr}(xy)$ que son ultradébilmente continuas. Entonces, por el teorema anterior $\mathcal{M} = Me$ para alguna proyección central. Esa proyección no puede ser la identidad pues la traza es no nula, entonces tiene que ser cero ya que M es un factor. $\square$

Corolario 7.1.15. *Si* M *es un factor de tipo* II_1 *en* $\mathcal{H}$ *y* $p \in M$ *es una proyección no nula, entonces* pMp *es un factor de tipo* II_1 *en* $p\mathcal{H}$.

Demostración. La restricción de la traza de M a pMp es no nula por ser la traza fiel. Las otras propiedades de la traza resultan obvias.

Supongamos que pMp es de dimensión finita, entonces tiene una proyección minimal. Como toda proyección minimal en pMp es minimal en M, tenemos que M es de tipo I, lo que produce una contradicción. Por lo tanto, pMp es de dimensión infinita. $\square$

La unicidad de la traza saldrá fácilmente una vez que comprendamos algunos resultados sobre proyecciones en factores de tipo II_1.

Teorema 7.1.16. *Los factores de tipo* II_1 *tienen proyecciones no nulas de traza arbitrariamente pequeña.*

Demostración. Sea $d = \inf\{\mathrm{Tr}(p) : p \in M, p^2 = p \neq 0\}$. Supongamos que $d > 0$. Sea p una proyección tal que $\mathrm{Tr}(p) - d < d$. La proyección p no es minimal porque M no tiene proyecciones minimales. Por lo tanto existe una proyección $q < p$. Entonces, $\mathrm{Tr}(p-q) = \mathrm{Tr}(p) - \mathrm{Tr}(q) \leq \mathrm{Tr}(p) - d < d$. Esto da una contradicción, por lo tanto $d = 0$. □

Teorema 7.1.17. *Sea M un factor de tipo* II_1 *con* Tr *una traza positiva no nula ultradébilmente continua. Entonces,* $\{\mathrm{Tr}(p) : p \in M, p^2 = p \neq 0\} = [0, \mathrm{Tr}(1)]$.

Demostración. Observemos primero que si dos proyecciones en M satisfacen $q < p$, entonces $\mathrm{Tr}(q) < \mathrm{Tr}(p)$. En efecto, como $p - q > 0$ y la traza es fiel tenemos que $\mathrm{Tr}(p-q) > 0$, es decir que $\mathrm{Tr}(q) < \mathrm{Tr}(p)$.

Dado $r \in (0, \mathrm{Tr}(1)]$, veamos que existe una proyección cuya traza sea exactamente r. Consideremos $S = \{p : p \in M, p^2 = p \neq 0, \mathrm{Tr}(p) \leq r\}$. El conjunto S es parcialmente ordenado respecto del orden $\leq$. Si p_α es una cadena en S, $\bigvee_\alpha p_\alpha \in M$ y está en la clausura fuerte de la cadena p_α, por lo tanto pertenece a S. Aplicando el Lemma de Zorn, tenemos que S tiene un elemento maximal q y $\mathrm{Tr}(q) \leq r$.

Supongamos que $\mathrm{Tr}(q) < r$. Veamos que existe $p \in M$ tal que $\mathrm{Tr}(q) < \mathrm{Tr}(p)$, lo cual daría una contradicción ya que $\mathrm{Tr}(p-q) > 0$ implica que p no es equivalente a q y que existe una proyección p' equivalente a p tal que $q < p'$.

Como $\mathrm{Tr}(q) < r$, existe una proyección q' tal que $0 < \mathrm{Tr}(q') < r - \mathrm{Tr}(q)$ por Teorema 7.1.16. Es decir que $\mathrm{Tr}(q) < \mathrm{Tr}(q + q') < r$. Pero $q < q \vee q' \leq q + q'$, salvo que $q = 1$, lo cual no sucede pues $\mathrm{Tr}(q) < \mathrm{Tr}(1)$. Pero $\mathrm{Tr}(q) < \mathrm{Tr}(q \vee q')$ que era lo que queríamos probar. □

Como consecuencia de la demostración del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.1.18. *Sea M un factor de tipo* II_1. *La aplicación* Tr *da un isomorfismo de conjuntos totalmente ordenados entre el conjunto de clases de equivalencia de proyecciones de M y* $[0, \mathrm{Tr}(1)]$.

Demostración. Ya hemos visto que proyecciones equivalentes tienen igual traza, lo cual dice que la aplicación está bien definida. El teorema dice que Tr es sobre. La inyectividad sale por ser la traza fiel.

Sólo resta ver que la traza preserva el orden $\preceq$. Supongamos que $p \preceq q$, entonces existe $p' \approx p$ tal que $p' \leq q$. Como $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(p') \leq \mathrm{Tr}(q)$, tenemos lo buscado. □

Ejercicio 7.1.5. Sea M un factor de tipo II_1, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ exite un subfactor $N \subset M$ tal que $N \cong M_n(\mathbb{C})$.

Corolario 7.1.19. *Dos trazas normalizadas no nulas ultradébilmente continuas en un factor de tipo* II_1 *son iguales.*

Demostración. De acuerdo a las propiedades elementales sobre álgebras de von Neumann que hemos visto es suficiente probar que ambas trazas, Tr y tr, son iguales sobre proyecciones. Podemos asumir que una de ellas es positiva y fiel, digamos que Tr lo es.

Por el ejercicio anterior, el Corolario 7.1.18 y la unicidad de la traza normalizada en álgebras de matrices, Tr y tr coinciden en proyecciones de traza racional.

Dada una proyección p de Tr irracional construyamos una sucesión creciente de subproyecciones de traza racional y veamos que p coincide con el supremo de esa sucesión, por lo tanto ambas trazas coicidirán al valuarlas en p. Sea e_N una proyección tal que $\mathrm{Tr}(e_N) = \mathrm{tr}(e_N)$ y $\mathrm{Tr}(p) - \mathrm{Tr}(e_N) < \frac{1}{N}$.

Como $(p - e_i)M(p - e_i)$ es un factor de tipo II_1, ambas trazas coinciden en valores racionales muy próximos a $\mathrm{Tr}(p - e_N)$. Sea $e_{N,j}$ una proyección creciente entre e_N y p tal que $\mathrm{Tr}(p) - \mathrm{Tr}(e_{N,j}) < \frac{1}{N+j}$. Entonces, tenemos que

$$\mathrm{Tr}(p - e_N) - \mathrm{Tr}(e_{N,j} - e_N)) = \mathrm{Tr}(p) - \mathrm{Tr}(e_{N,j}) \leq \frac{1}{N + j}$$

O sea que

$$\mathrm{Tr}(p - e_{N,j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}(p - \bigvee_{j>0} e_{N,j}) = 0$$

Como Tr es fiel, eso nos dice que $p = \bigvee_j e_{N,j}$. Por otro lado, la continuidad ultradébil de las trazas asegura que

$$\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(\bigvee_{j>0} e_{N,j}) = \mathrm{tr}(\bigvee_{j>0} e_{N,j}) = \mathrm{tr}(p)$$

pues $\bigvee_j e_{N,j}$ está en la clausura fuerte de los $e_{N,j}$. Así obtuvimos el resultado esperado. $\square$

Hemos visto que una traza positiva en un factor de tipo II_1 es continua en norma y un operador autoadjunto es en realidad un límite en norma de combinaciones lineales de sus proyecciones espectrales, por lo tanto, una propiedad que aparentemente es más débil que la continuidad ultradébil, como que la traza del supremo de una sucesión creciente de una red de proyecciones es el supremo de las trazas, es todo lo que efectivamente hemos usado en el corolario anterior.

Corolario 7.1.20. *Sea* M *un álgebra de von Neumann de dimensión infinita con una traza* Tr *positiva ultradébilmente continua normalizada y fiel. Entonces,* M *es un factor de tipo* II_1 *si y sólo si* $\mathrm{Tr} = \mathrm{tr}$ *para toda traza* tr *ultradébilmente continua.*

Demostración. Sólo tenemos que probar que $Z(M)$ es trivial. Si no lo fuera, sea p una proyección central que no es múltiplo de la identidad tal que $0 < \mathrm{Tr}(p) < 1$. Definamos $\mathrm{tr}(x) = \frac{1}{\mathrm{Tr}(p)} \mathrm{Tr}(xp)$. Esta traza así definida es ultradébilmente continua y normalizada, pero sin embargo $\mathrm{tr}(1-p) \neq \mathrm{Tr}(1-p)$. □

Ejercicio 7.1.6. Sea a un operador no nulo positivo autoadjunto, mostrar que existe una función diferenciable a trozos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $af(a)$ es una proyección no nula.

Ejercicio 7.1.7. Los factores de tipo II_1 son algebraicamente simples (*Ayuda:* Usar el ejercicio anterior para mostrar que un ideal bilátero contiene una proyección, luego agregar proyecciones para obtener la identidad).

Como hemos visto en el Capítulo 3, $vN(\Gamma)$ es un factor de tipo II_1 para cualquier grupo discreto numerable Γ de clases de conjugación infinitas. McDuff (1968) obtuvo una familia no numerable de álgebras de von Neumann de grupos no isomofas, lo que muestra que hay una cantidad no numerable de factores de tipo II_1 separables diferentes (ver [McD]).

7.2. La construcción GNS

La unicidad de la traza sugiere de alguna manera otro modo interesante de construir factores de tipo II_1. Daremos un ejemplo de construcción de nuevos factores de tipo II_1 como caso particular de la construcción de Gelfand-Neumark-Segal.

Sea $A = M_2(\mathbb{C})$, A está inmersa en $A \otimes A$ en forma diagonal, es decir $a \to a \otimes 1$. Iterando este proceso podemos fabricar una sucesión creciente A_n de $*$-álgebras de modo que $A_1 = A$ y $A_{n+1} = A_n \otimes A$. Consideremos la $*$-álgebra $A_\infty = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, también denotada por $A_\infty = \bigotimes_{n\geq 1}^{alg} A_n$.

Si normalizamos la traza matricial en todas las álgebras de matrices tenemos que $\mathrm{Tr}(a \otimes 1) = \mathrm{Tr}(a)$. De esta manera Tr define una traza positiva fiel y normalizada en A_∞. Los elementos de A_∞ se pueden pensar como combinaciones lineales de elementos de la forma $a = a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$ para los cuales la traza es el producto de las trazas de sus factores, es decir $\mathrm{Tr}(a) = \prod_{n\geq 1} \mathrm{Tr}(a_n)$.

Ahora completaremos A_∞ para obtener un álgebra de von Neumann. Definamos el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}(y^* x)$$

De esta manera, A_∞ es un pre-Hilbert y denotemos por $\mathcal{H}$ al espacio de Hilbert asociado. Notemos que $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de von Neumann y su traza satisface que

$$\mathrm{Tr}(y^* x^* x y) \leq \|x\|^2 \, \mathrm{Tr}(y^* y)$$

Esto implica que el operador L_x en A_∞ definido por $L_x(y) = xy$ satisface que $\|L_x(\xi)\| \leq \|x\|\|\xi\|$ (donde $\|x\|$ es la norma del operador x y $\|\xi\|$ es la norma ξ como elemento del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$). Esto permite extender a L_x en forma única a un operador acotado sobre $\mathcal{H}$, que también denotaremos por L_x. Se puede comprobar que $(L_x)^* = L_{x^*}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} A_\infty &\to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ x &\to L_x \end{aligned}$$

define una representación fiel de la $*$-álgebra A_∞ en $\mathcal{H}$. Sea M el álgebra de von Neumann generada por los L_x e identifiquemos A_∞ con una $*$-subálgebra de M.

Si $\xi \in \mathcal{H}$ es el elemento unidad de A_∞, la traza queda definida por

$$\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(\xi^* a \xi) = \langle a\xi, \xi\rangle$$

Por lo tanto, Tr se extiende a una traza en M que es positiva, ultradébilmente continua y normalizada. Como A_∞ es ultradébilmente densa en M y Tr es única en A_∞, tenemos que Tr es única en M. Si podemos ver que Tr es fiel en M obtendremos que M es un factor de tipo II_1.

Como $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$, los mismos razonamientos usados para mostrar que L_x es acotado se pueden usar para ver que R_x, multiplicación a derecha por x, es acotado. De la asociatividad se deduce que L_x y R_y conmutan en A_∞, y por lo tanto en $\mathcal{H}$. Ahora, si $\mathrm{Tr}(x^*x) = 0$ para $x \in M$, entonces para cada $a \in A_\infty$ tenemos que

$$\|x(a)\|^2 = \|xR_a(\xi)\|^2 = \|R_a x(\xi)\|^2 \leq \|R_a\|^2 \|x(\xi)\|^2 = \|R_a\|^2 \,\mathrm{Tr}(x^*x) = 0$$

Es decir que $x(a) = 0$ para todo $a \in A_\infty$. Como A_∞ es densa, tenemos que $x = 0$. Por lo tanto Tr es fiel en M y M es un factor de tipo II_1.

Este ejemplo muestra varias propiedades importantes. Una de ellas es el rol que cumple el vector ξ. En las demostraciones usamos dos hechos destacados

$$\overline{M\xi} = \mathcal{H} \qquad \overline{M'\xi} = \mathcal{H}$$

teniendo en cuenta que M' es el álgebra de von Neumann generada por los operadores R_x.

Definición 7.2.1. Sea M un álgebra de von Neumann en $\mathcal{H}$. Un vector $\xi \in \mathcal{H}$ se dice *cíclico para* M si $\overline{M\xi} = \mathcal{H}$ y *separador para* M si

$$x\xi = 0 \Rightarrow x = 0$$

para todo $x \in M$.

Proposición 7.2.2. *Un vector ξ es cíclico para M si y sólo si ξ es separador para M'.*

Demostración. Si ξ es cíclico, para cada $x \in M$ e $y \in M'$,

$$\|y(x\xi)\|^2 = \|xy\xi\|^2 \leq \|x\|^2 \|y(\xi)\|^2 = 0$$

Entonces, $y(x\xi) = 0$, pero como $M\xi$ es denso en $\mathcal{H}$, $y = 0$.

Recíprocamente, sea p la proyección sobre la clausura de $M\xi$. Entonces, como $p \in M'$, $(1-p)\xi = 0$ por lo tanto $p = 1$. $\square$

La construcción de M a partir del álgebra A_∞ es un caso especial de lo que es conocido como la *construcción GNS* (Gelfand-Neumark-Segal). Esta construcción es central en la demostración del teorema de Gelfand-Neumark (1943) [GN] que establece lo siguiente.

Teorema 7.2.3. *(Teorema de Gelfand-Neumark, 1943) Toda C^*-álgebra es isométricamente $*$-isomorfa a una C^*-álgebra de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, es decir que tiene una representación fiel.*

Este resultado fue muy significante en el desarrollo de la teoría de C^*-álgebras en los comienzos de la década de 1940 porque establece la posibilidad de considerar las C^*-álgebras como objetos algebraicos abstractos independientemente de su realización particular como un álgebra de operadores.

La construcción GNS es la siguiente. Dada una funcional lineal positiva ϕ que satisface $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ en una $*$-álgebra A definimos

$$N_\phi = \{x \in A : \phi(x^*x) = 0\}$$

A su vez definimos una forma hermitiana en A por

$$\langle x, y \rangle_\phi = \phi(y^*x)$$

Esta forma es semidefinida positiva, lo cual es suficiente para que la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenga sentido, de modo que

$$N_\phi = \{x \in A : \langle x, y \rangle_\phi = 0 \ \forall y \in A\}$$

Como consecuencia, N_ϕ resulta ser un subespacio y el producto interno determina en A/N_ϕ una estructura de espacio pre-Hilbert. Veremos que bajo ciertas condiciones sobre C^*-álgebras, la multiplicación a izquierda L_x por x define un operador lineal acotado en dicho cociente y, suguiendo los pasos que hicimos en el ejemplo, también lo es sobre el espacio de Hilbert que completa a A/N_ϕ.

Ejercicio 7.2.1. Si ϕ es una funcional lineal en una C^*-álgebra A que para todo $a \in A$ satisface $\phi(a^*a) \geq 0$, entonces $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$. Más aún, si A tiene unidad mostrar que ϕ es continua en norma y $\|\phi\| = \phi(1)$.

Observación 7.2.4. Es un hecho estandar en la teoría de C^*-álgebras, que a toda C^*-álgebra se le puede adjuntar una identidad.

Proposición 7.2.5. *Si A es una C^*-álgebra con unidad y $\phi : A \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal positiva, entonces*

$$\phi(y^*x^*xy) \leq \|x\|^2 \phi(y^*y)$$

Demostración. Sea $\tilde{\phi}(a) = \phi(y^*ay)$, entonces $\tilde{\phi}$ es positiva y, por el ejercicio anterior, $\tilde{\phi}(x^*x) \leq \|\tilde{\phi}\| \|x^*x\| = \|x\|^2 \tilde{\phi}(1)$. □

Dada una funcional lineal positiva ϕ en una C^*-álgebra con unidad, siguiendo los pasos usados en el ejemplo y la proposición anterior, cada $x \in A$ determina un operador lineal acotado $\pi_\phi(x)$ definido por

$$\pi_\phi(x)(y) = xy$$

en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\phi$ dado por la construcción GNS. Más aún,

$$\|\pi_\phi(x)\| \leq \|x\| \qquad \pi_\phi(x^*) = \pi_\phi(x)^*$$

pues $\langle \pi_\phi(x)y, z\rangle = \phi(z^*xy) = \langle y, \pi_\phi(x^*)z\rangle$. Notemos además que $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)1, 1\rangle$.

Definición 7.2.6. Si A es una C^*-álgebra y ϕ es una funcional lineal positiva en A, el espacio de Hilbert de la construcción GNS se denota $\mathcal{H}_\phi$ y la representación π_ϕ de A multiplicación a izquierda se llama *representación GNS* de A.

Proposición 7.2.7. *Si A es una C^*-álgebra en $\mathcal{H}$, cada $\xi \in \mathcal{H}$ define una funcional lineal positiva*

$$\phi_\xi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$$

y un operador unitario

$$u : \mathcal{H}_{\phi_\xi} \to \overline{A\xi}$$

definido por $u(a) = a\xi$ en A tal que $u\pi_{\phi_\xi}(a)u^* = a$.

Su demostración es obvia.

En el caso en que A sea un álgebra de von Neumann, $\pi_\phi(A)$ no necesariamente lo es sobre $\mathcal{H}_\phi$. Vamos a ver que una condición suficiente para que $\pi_\phi(A)$ sea un álgebra de von Neumann es que ϕ sea ultradébilmente continua. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

Lema 7.2.8. *Sea A una C^*-álgebra en $\mathcal{H}$ con 1. Si ψ es una funcional lineal positiva en A y $\xi \in \mathcal{H}$ es un vector tal que $\psi \leq \phi_\xi$, entonces existe $t \in A'$ tal que $\psi = \phi_{t\xi}$.*

Demostración. Definamos la forma hermitiana $(a\xi, b\xi) = \psi(b^*a)$ en $A\xi$. La desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualad $\psi \leq \phi_\xi$ establecen que $|(a\xi, b\xi)| \leq \|a\xi\|\|b\xi\|$. Esto implica que $(\ ,\ )$ está bien definida y que existe un operador acotado positivo t en $\overline{A\xi}$ tal que $\langle a\xi, tb\xi\rangle = \psi(b^*a)$. Pero

$$\langle a\xi, tbc\xi\rangle = \psi(c^*b^*a) = \langle b^*a\xi, tc\xi\rangle = \langle a\xi, btc\xi\rangle$$

por lo tanto, $t \in A'$ en $\overline{A\xi}$. Ahora, si p es la proyección sobre $\overline{A\xi}$, tp es un operador positivo perteneciente a A'. Si $s = \sqrt{t}$, $\psi(a) = \langle a\xi, t\xi\rangle = \langle as\xi, ts\xi\rangle$. □

Corolario 7.2.9. *Sea A una C^*-álgebra en $\mathcal{H}$. Si $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ son vectores tales que la forma lineal $\omega(a) = \langle a\xi, \eta\rangle$ es positiva, entonces existe un vextor $\nu \in \mathcal{H}$ tal que $\omega = \phi_\nu$.*

Demostración. Para $a \geq 0$,

$$\langle a\xi, \eta \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle a(\xi + \eta), \xi + \eta \rangle - \langle a(\xi - \eta, \xi - \eta \rangle \right) \leq \frac{1}{4}\ \phi_{\xi+\eta}(a)$$

Por el lema anterior tenemos el resultado esperado. □

Teorema 7.2.10. *Si M es un álgebra de von Neumann sobre $\mathcal{H}$ y ϕ es una funcional lineal positiva ultradébilmente continua en M, entonces existen vectores $\nu_i \in M$ tales que $\sum_i \|\nu_i\|^2 < \infty$ y para todo $x \in M$*

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x\nu_i, \nu_i \rangle$$

Demostración. Sean ξ_i, η_i vectores dados por el Ejercicio 6.1.1. Si consideramos M actuando sobre $\mathcal{H} \otimes l^2(\mathbb{N})$, $\phi(x) = \langle x\xi, \eta \rangle$. Entonces, podemos aplicar el corolario anterior. □

Corolario 7.2.11. *Si ϕ es una funcional lineal positiva ultradébilmente continua en el álgebra de von Neumann M, entonces la representación GNS π_ϕ es ultradébilmente continua sobre un álgebra de von Neumann en $\mathcal{H}_\phi$.*

Demostración. Hemos visto en el último teorema que $\phi(x) = \langle x \otimes 1(\nu), \nu \rangle$ en $\underline{\mathcal{H} \otimes l^2(\mathbb{N})}$. La aplicación $x \to x \otimes 1$ es ultradébilmente continua pues la reducción a $\overline{M \otimes 1(\nu)}$ es ultradébilmente continua. Por lo tanto, el núcleo de π_ϕ es un ideal bilátero cerrado ultradébil, es decir de la forma Me para algún e en el centro de M. Esto implica que π_ϕ es inyectiva en $M(1-e)$ y como la norma de un operador x está determinada por el espectro de x^*x, la bola unidad de la imagen de M es la imagen de la bola unidad, la cual es compacta débil. Ahora, aplicando el Corolario 6.2.2 tenemos el resultado buscado. □

7.3. Ejercicios sobre un par de proyecciones

Sean p y q proyecciones sobre los subespacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{U}$, respectivamente, y sea $M = \{p, q\}''$.

Ejercicio 7.3.1. Mostrar que

$$\mathcal{U} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{K}) \oplus (\mathcal{H}^\perp \cap \mathcal{K}^\perp) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{K}^\perp) \oplus (\mathcal{H}^\perp \cap \mathcal{K}) \oplus \mathcal{W}$$

y que dicha descomposición es invariante por p y por q.

Ejercicio 7.3.2. Mostrar que en $\mathcal{W}$, p y q están en *posición general*, es decir que

$$p \wedge q = 0, \qquad p \vee q = 1, \qquad (1-p) \wedge q = 0, \qquad (1-p) \wedge q = 1$$

Ejercicio 7.3.3. Si $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $0 \leq a \leq 1$, mostrar que

$$p = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(1-a)} \\ \sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{pmatrix}$$

es una proyección en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. ¿Cuándo p está en posición general con $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 7.3.4. Sea $a = (p-q)^2$ y $A = \{a\}''$. Mostrar que $a \in Z(M)$ y que

$$\{a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq + a_4 qp : a_i \in A\}$$

es una $*$-álgebra densa en M.

Ejercicio 7.3.5. probar que pMp es abeliana y generada por pqp.

Para los ejercicios que siguen suponer que p y q están en posición general.

Ejercicio 7.3.6. Mostrar que $p \approx q$(*Ayuda:* considerar la descomposición polar de pq).

Ejercicio 7.3.7. Probar que existe un sistema 2×2 de unidades matriciales $(e_{ij}) \in M$ con $p = e_{11}$.

Ejercicio 7.3.8. Probar que M es espacialmente isomorfa a $B \otimes M_2(\mathbb{C})$ para alguna álgebra de von Neumann B generada por b con $0 \leq b \leq 1$, con

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} b & \sqrt{b(1-b)} \\ \sqrt{b(1-b)} & 1-b \end{pmatrix}$$

Dejemos de considerar que p y q están en posición general.

Ejercicio 7.3.9. Mostrar que $p \vee q - p \approx q - p \wedge q$ en M.

Ahora usemos representaciones de grupos.

Ejercicio 7.3.10. Mostrar que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}$semidricto $\mathbb{Z}_2$, el group dihedral infinito.

Ejercicio 7.3.11. Clasificar todas las representaciones unitarias del grupo dihedral infinito (*Ayuda:* usar el Teorema Espectral para operadores unitarios.

Ejercicio 7.3.12. Concluir que $2p-1$ y $2q-1$ son operadores unitarios autoadjuntos.

Ejercicio 7.3.13. Obtener la estructura del álgebra de von Neumann del Ejercicio 7.3.8 usando los últimos tres ejercicios.

Capítulo 8

Forma estándar de factores de tipo II_1 y de tipo II_∞

8.1. Forma estándar

En la Sección 7.2 hemos construído un álgebra de von Neumann a partir de una C^*-álgebra y de una funcional lineal positiva en ella a través de la construcción GNS. Si aplicamos esta construcción a $L^\infty(X,\mu)$ con traza $\int f\, d\mu$, el espacio de Hilbert determinado es $L^2(X,\mu)$. Por esta razón, si M es un factor de tipo II_1 con traza Tr ultradébilmente continua positiva fiel y normalizada, escribimos $L^2(M,\mathrm{Tr})$ al espacio de Hilbert dado por la construcción GNS a partir de la traza Tr. A este espacio lo denotaremos más simplemente por $L^2(M)$.

En este sentido, podríamos definir espacios L^p, para $1 \leq p \leq \infty$ con la norma L^p dada por $\|x\|^p = \mathrm{Tr}(|x|)^{1/p}$. Una versión no conmutativa de la desigualdad de Holder muestra que $\| \ \|_p$ es una norma en

$$L^p(M) = \{x \in M : \mathrm{Tr}(|x|)^{1/p} < \infty\}$$

Definimos $L^\infty(M) = M$ y se puede ver que $L^1(M)$ es el espacio predual de M que no hemos definido (ver [J], [KR], [RS]).

Denotemos por Ω al vector en $L^2(M)$ que es la unidad de M.

Proposición 8.1.1. *Si M es un factor de tipo* II_1*, la bola unidad de M respecto de $\| \ \|$ es un espacio métrico completo para $\| \ \|_2$ y la topología definida por $\| \ \|_2$ en la bola unidad es exactamente la topología fuerte (y ultrafuerte).*

Demostración. Si x_n es una sucesión de Cauchy con $\| \ \|_2$ en la bola unidad de M, entonces para cada $a \in M$, $x_n a$ también lo es pues $\|x_n a\|_2 \leq \|a\|\|x_n\|_2$. Entonces, si miramos a Ω como la unidad de M,

$$x(a\Omega) = xa = \lim_{n\to\infty} x_n a = \lim_{n\to\infty} x_n a\Omega$$

Esto define al operador x en el subespacio denso $M\Omega$ de $L^2(M)$.

Observemos que $\|x\| \leq 1$. En efecto, si $x_n \to x$ en $\| \|_2$, significa que $\mathrm{Tr}(|x_n|) \to \mathrm{Tr}(|x|)$. Como Tr es ultradébilmente continua, es continua para $\| \|$, entonces $\|x_n^* x_n\| = \|x_n\|^2 \to \|x^*x\| = \|x\|^2$.

Como $\|x\| \leq 1$, tenemos que $\|x(a\Omega)\|_2 \leq \|x\|\|a\Omega\|_2 \leq \|a\Omega\|_2$ para todo $a \in M$. Entonces, x se puede extender a un operador acotado en $L^2(M)$ y tal que $x\Omega = x = \lim_{n\to\infty} x_n$ en $\| \|_2$.

La topología fuerte es obviamente no más fuerte que la de $\| \|_2$ pues la seminorma $a \to \|a\Omega\|$ define la topología de $\| \|_2$. Más aún, $\|xa\Omega\| \leq \|x\|_2\|a\|$ dice que $\| \|_2$ controla la topología fuerte en la bola unidad.

Finalmente notemos que en la afirmación del teorema no importa qué representación de M se use para definir la topología fuerte en la bola unidad, ni la topología ultrafuerte cambia bajo la manipulaciones hechas para obtener la construcción GNS a partir de un factor de tipo II_1 en un espacio de Hilbert arbitrario. □

Definición 8.1.2. La acción de M en $L^2(M, \mathrm{Tr})$ se dice *forma estándar de M.*

Notemos que $vN(\Gamma)$ en $l^2(\Gamma)$ ya está en la forma estándar. En realidad hemos visto que hemos podido obtener el primer ejemplo de factor de tipo II_1 aplicando la construcción GNS al álgebra de grupo $\mathbb{C}\Gamma$ con la traza $\mathrm{Tr}(\sum_\gamma c_\gamma u_\gamma) = c_1$.

Ahora vamos a determinar M' cuando M está en la forma estándar.

Sea
$$\begin{aligned} J : L^2(M) &\to L^2(M) \\ x\Omega = x &\to x^* = x^*\Omega \end{aligned}$$
la involución antilineal unitaria que extiende la aplicación dada de M en M.

Lema 8.1.3. *Para $x, a \in M$ y $\xi, \eta \in L^2(M)$,*
(i) $\langle J\xi, J\eta\rangle = \langle \eta, \xi\rangle$
(ii) $JxJ(a\Omega) = ax^*\Omega$

Demostración. (i) Si $\xi = a\Omega$ y $\eta = b\Omega$, $\langle J\xi, J\eta\rangle = \mathrm{Tr}(ba^*) = \langle \eta, \xi\rangle$.
(ii) $JxJ(a\Omega) = J(xa^*\Omega) = ax^*\Omega$. □

Corolario 8.1.4. *Para la forma estándar de M en $L^2(M)$, $JMJ \subset M'$.*

Demostración. Como multiplicación a izquierda y a derecha conmutan, si $x \in M$ tenemos que para todo $a \in M$,

$$JxJa(b\Omega) = J(xJ(ab\Omega) = J(xb^*a^*\Omega) = abx^*\Omega = aJ(xb^*\Omega) = aJ(xJ(b\Omega)) = aJxJ(b\Omega)$$

□

Ahora daremos una expresión clara de J para los elementos de $M'\Omega \subset L^2(M)$.

Lema 8.1.5. *Para la forma estándar de M en $L^2(M)$, si $x \in M'$, entonces $Jx\Omega = x^*\Omega$.*

Demostración. Para todo $a \in M$,

$$\langle Jx\Omega, a\Omega\rangle = \langle Ja\Omega, x\Omega\rangle = \langle a^*\Omega, x\Omega\rangle = \langle \Omega, ax\Omega\rangle = \langle \Omega, xa\Omega\rangle = \langle x^*\Omega, a\Omega\rangle$$

$\square$

Teorema 8.1.6. *Para la forma estándar de M en $L^2(M)$, $JMJ = M'$.*

Demostración. Basta probar que $x \to \langle x\Omega, \Omega\rangle$ es una traza en $M' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$ pues nos permite definir $L^2(M')$. Como Ω es cíclico y separador para M, por Proposición 7.2.2, tenemos que Ω es cíclico para M', es decir que $L^2(M) = \overline{M'\Omega}$. Pero entonces $L^2(M') = L^2(M)$ por la construcción de $L^2(M')$. Por lo tanto ambas aplicaciones J coinciden y $JM'J \subset M$. Entonces, $M' \subset JMJ$.

Veamos que $x \to \langle x\Omega, \Omega\rangle$ es efectivamente una traza. Sean $x, y \in M'$,

$$\langle xy\Omega, \Omega\rangle = \langle y\Omega, x^*\Omega\rangle = \langle y\Omega, Jx\Omega\rangle = \langle x\Omega, Jy\Omega\rangle = \langle x\Omega, y^*\Omega\rangle = \langle yx\Omega, \Omega\rangle$$

$\square$

Hemos visto que el conmutador de la representación regular a izquierda de Γ en $l^2(\Gamma)$ es el álgebra de von Neumann generada por la representación regular a derecha pues $Ju_\gamma J\varepsilon_{\gamma'} = \varepsilon_{\gamma'\gamma^{-1}}$.

Más generalmente el conmutador de la representación multiplicación a izquierda es la $*$-álgebra generada por la representación multiplicación a derecha. En particular, el conmutador de un factor M de tipo II_1 sobre $L^2(M)$ es también un factor de tipo II_1. Ese no es el caso para M sobre un espacio de Hilbert cualquiera.

Por ejemplo, podemos considerar $M \otimes 1$ en $L^2(M) \otimes \mathcal{H}$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita. Entonces, el conmutador de $M \otimes 1$ será $JMJ \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$, matrices infinitas con coeficientes en JMJ. Si $JMJ \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fuera de tipo II_1 tendría una traza positiva ultradébilmente continua cuya restricción a $1 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ daría una traza positiva en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, lo cual es un absurdo por el Ejercicio 3.3.4.

Definición 8.1.7. Un *factor de tipo* II_∞ es un factor de la forma $M \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con M un factor de tipo II_1 y $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Proposición 8.1.8. *Sea M un factor infinito con una proyección $p \in M$ tal que pMp es de tipo II_1. Entonces, M es un factor de tipo II_∞.*

Demostración. Elijamos $\{p_\alpha\}$ una familia maximal de proyecciones mutuamente ortogonales en M tal que $p_\alpha \approx p$ para todo α. Sea $q = \sum p_\alpha$. Si $1 - q \succeq p$ podríamos contradecir la maximalidad de la familia $\{p_\alpha\}$. Por lo tanto, existe q' tal que $1 = q' + q$ con $q' \preceq p$. Como M es infinito, el conjunto de índices $\{\alpha\}$ es infinito. Tomemos una biyección $\iota : \{\alpha\} \to \{\alpha\} \setminus \{\alpha_o\}$ para algún índice α_o. Notemos que p_{α_o} y $\sum_{\alpha \neq \alpha_o} p_\alpha$ son ortogonales. Por lo tanto,

$$1 = q' + q \preceq p_{\alpha_o} + \sum_{\iota(\alpha)} p_\alpha$$

Entonces, por ser la suma ortogonal, $p_{\alpha_o} + \sum_{\iota(\alpha)} p_\alpha = 1$. Esto nos permite construir un sistema de unidades matriciales $\{e_{ij}\}$ usando isometrías parciales que determinan las equivalencias entre los p_α tal que $e_{11} = p$. A partir del Ejercicio 5.3.2 tenemos que M es isomorfa a $pMp \otimes \mathcal{B}(l^2(\{\alpha\}))$. □

Notemos que hemos usado implícitamente en la prueba anterior que el supremo de una cantidad finita de proyecciones finitas es finito.

Puede suceder que dado un factor M de tipo II_∞, el factor de tipo II_1 de la forma pMp depende de p, salvo equivalencias. Ahora introduciremos la traza de un factor de tipo II_∞ que aclarará esta afirmación un poco más. .

Si M es un factor de tipo II_1, identifiquemos $M \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con un conjunto de matrices infinitas con coeficientes en M, para ello elejamos una base de $\mathcal{H}$. Definamos la aplicación Tr del conjunto de elementos positivos $(M \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}))_+$ de $M \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ en el intervalo $[0, \infty]$ por

$$\mathrm{Tr}((x_{ij})) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(x_{ii})$$

Notemos que esta no una traza en el sentido de la Definición 7.1.12.

Teorema 8.1.9. *Sea M un factor de tipo II_∞. Entonces,*

(i) $\mathrm{Tr}(\lambda x) = \lambda \,\mathrm{Tr}(x)$ *para* $\lambda \geq 0$.

(ii) $\mathrm{Tr}(x + y) = \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y)$.

(iii) Si $\{a_\alpha\}$ es una red creciente de operadores positivos con $\bigvee_\alpha a_\alpha = a$, entonces $\mathrm{Tr}(a) = \lim_\alpha \mathrm{Tr}(a_\alpha)$.

(iv) $\mathrm{Tr}(x^*x) = \mathrm{Tr}(xx^*)$.

(v) $\mathrm{Tr}(uxu^*) = \mathrm{Tr}(x)$ *para todo operador unitario $u \in M$ y para cualquier $x \in M$ positivo.*

(vi) Si p es una proyección en M, entonces p es finita si y sólo si $\mathrm{Tr}(p) < \infty$.

(vii) Si p y q son proyecciones en M con p finita, entonces $p \preceq q$ si y sólo si $\mathrm{Tr}(p) \leq \mathrm{Tr}(q)$.

(viii) pMp es un factor de tipo II_1 *para cualquier proyección $p \in M$.*

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son inmediatas por la definición.

Para *(iii)* notemos que las entradas diagonales de las matrices positivas de la red conservan el mismo orden que las matrices de la red y las trazas de ellos son todos números positivos. Entonces, $\mathrm{Tr}(a)$ será el supremo de esas sumas.

(*iv*) Es obvio usando multiplicación de matrices pues

$$\operatorname{Tr}(x^*x) = \sum_i \operatorname{Tr}((x^*x)_{ii}) = \sum_{i,j} \operatorname{Tr}((x^*)_{ij}x_{ji}) = \sum_{i,j} \operatorname{Tr}(x_{ji}(x^*)_{ij}) = \operatorname{Tr}(xx^*)$$

(*v*) Se sigue de (*iv*) observando que $uxu^* = (u\sqrt{x})(\sqrt{x}u^*)$.

(*vi*) Si $\operatorname{Tr}(p) < \infty$ y p es infinita, existe una subproyección propia de p que tiene la misma traza que p. La diferencia de ambas proyecciones tendrá traza cero, lo cual es imposible.

Si $\operatorname{Tr}(p) = \infty$ y q es una proyección finita tal que $q \preceq p$, podemos suponer que $q \leq p$ y que $\operatorname{Tr}(q) < \infty$. Entonces $\operatorname{Tr}(p - q) = \infty$, por lo cual podemos construir una sucesión infinita de proyecciones equivalentes a q mutuamente ortogonales cuyo supremo sea menor que p. A través de una biyección con una subsucesión propia, p domina una proyección infinita, por lo cual es ella misma infinita.

(*vii*) Sale fácilmente como en el caso en que M es un factor de tipo II_1. En efecto, si $p \preceq q$, existe p' equivalente a p tal que $q - p \geq 0$. Entonces $\operatorname{Tr}(q - p) \geq 0$, o equivalentemente, $\operatorname{Tr}(q) \geq \operatorname{Tr}(p) = \operatorname{Tr}(p')$.

(*viii*) Sólo hay que observar que $\operatorname{Tr}(p) < \infty$ significa que $p \preceq q$ para alguna q cuya matriz tiene todas sus entradas cero excepto una cantidad finita de entradas diagonales que son 1. Obviamente qMq es de tipo II_1 para esa q porque corresponde a la matriz en bloques que es nula salvo en el bloque correspondiente a q (mirada como una matriz diagonal con una cantidad finita de 1 y el resto 0). □

Corolario 8.1.10. *Sea M un factor de tipo II_∞ en un espacio de Hilbert separable y* Tr *sea la dada por una descomposición $N \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con N de tipo II_1. Entonces,* Tr *define un isomorfismo de conjuntos totalmente ordenados entre las clases de equivalencias de proyecciones en M y el intervalo $[0, \infty]$.*

Demostración. Por el teorema anterior sólo tenemos que demostrar que cualquier proyección infinita es equivalente a la identidad. pero si p es infinita, elijamos u tal que $uu^* = p$ y $u^*u < p$. Entonces, $(u^*)^n u$ es una sucesión estrictamente decreciente de proyecciones equivalentes, por lo tanto podemos escribir p como una suma ortogonal de proyecciones

$$p = p_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

con todos los $p_i = (u^*)^i u - (u^*)^{i-1} u$ equivalentes entre sí. Ahora escribamos la identidad como una suma ortogonal numerable de proyecciones todas $\preceq p_1$ (usando la descomposición $N \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si es necesario). Esto dice que $1 \leq p$. □

Observación 8.1.11. Observemos que la traza en los factores de tipo II_∞ no se puede normalizar como en los casos de factores de tipo II_1 ($\operatorname{Tr}(1) = 1$) o en el caso de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

(Tr(proyección minimal) = 1). La posibilidad de normalizar la traza permite establecer la unicidad. Por lo tanto, dado un automorfismo α de M, usando la unicidad de la traza nomalizada tenemos que $\mathrm{Tr}(\alpha(x)) = \lambda \,\mathrm{Tr}(x)$ para todo $x \geq 0$ y $0 < \lambda \neq 1$.

Ejercicio 8.1.1. Mostrar que la traza en un factor de tipo II_∞ es única con las propiedades (i) a (vi), salvo múltiplos por escalares.

Ejercicio 8.1.2. Si $\alpha : M \to N$ es un $*$-morfismo entre factores de tipo II_1, entonces α es un isomorfismo y fuertemente continuo en la bola unidad.

Capítulo 9

Clasificación de los módulos separables de factores de tipo II_1

En este capítulo caracterizaremos las acciones de un dado factor M de tipo II_1 sobre espacios de Hilbert separables, es decir determinaremos los M-módulos separables. Mostraremos que están parametrizadas por un número en $[0, \infty]$ que llamaremos dimensión del M-módulo, ya que sus propiedades se asemejan a las de la dimensión de espacios vectoriales complejos, a pesar que pueden ser números positivos no naturales.

9.1. M-módulos y constante de acoplamiento

En esta sección daremos la noción de M-módulo para un factor de tipo II_1. Si bien esta noción existe para cualquier factor, en particular cuando hemos clasificado los factores de tipo I lo hemos hecho dándoles una estructura de módulos sobre sí mismos, nos restringiremos sólo a este caso.

Definición 9.1.1. Sea M un factor de tipo II_1, un *M-módulo* es un par $(\mathcal{H}, \rho)$ conformado por un espacio de Hilbert y un $*$-homomorfismo ultradébilmente continuo

$$\rho : M \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

tal que $\operatorname{Im} \rho$ es un factor de tipo II_1 sobre $\mathcal{H}$. Escribiremos la acción de $x \in M$ en un vector $\xi \in \mathcal{H}$ simplemente por $\rho(x)\xi = x\xi$.

Luego veremos que la condición de continuidad ultradébil es superflua.

Ejemplo 9.1.2. La aplicación identidad convierte al espacio de Hilbert donde M está definido en un M-módulo.

Ejemplo 9.1.3. Sea $\mathcal{K}$ otro espacio de Hilbert, la aplicación $x \to x \otimes 1_{\mathcal{K}}$ convierte a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ en un M-módulo.

Ejemplo 9.1.4. $L^2(M)$ es un M-módulo por medio de la representación GNS.

Existe la noción de (M, M)-*bimódulo*, en ese caso hay dos acciones de M sobre el espacio de Hilbert que conmutan entre sí. Un ejemplo de (M, M)-bimódulo es $L^2(M)$ a través de la acción a izquierda y a derecha.

Por otro lado existe la noción obvia de suma directa de M-módulos. De hecho, dado un M-módulo $\mathcal{H}$ la utilizaremos para compararlo con $L^2(M)$ formando la suma directa de $\mathcal{H}$ con una cantidad numerable de copias de $L^2(M)$.

Teorema 9.1.5. *Sea M un factor de tipo II_1 y $\mathcal{H}$ un M-módulo separable. Entonces, existe una isometría $u : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$ tal que $ux = (x \otimes 1)u$ (i.e. u es M-lineal).*

Demostración. Definamos el M-módulo $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$. Sea $p = 1 \oplus 0 \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ la proyección sobre $\mathcal{H}$ y $q = 0 \oplus 1$ la proyección sobre $L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$. Tanto p como q están en $M' \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Veamos que M' es un factor de tipo II_∞. Por un lado, q es claramente infinita en M', por otro lado, si e es una proyección de rango uno en $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$, entonces $(0 \oplus (1 \otimes e))M'(0 \oplus (1 \otimes e))$ es un factor de tipo II_1 pues coincide con el conmutador de M en $L^2(M)$. Por lo tanto, por Proposición 8.1.8, tenemos que M' es de tipo II_∞.

Como q es infinita en M', por el Corolario 8.1.10 tenemos que q es equivalente a la identidad. O sea que existe una isometría parcial u en M' tal que $u^*u = p$ y $uu^* \leq q$. Usando la notación matricial obvia para operadores en $\mathcal{K}$, podemos representar a u por una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si calculamos $u^*u = p$ y $uu^* \leq q$ da que $b^*b + d^*d = 0$ y que $aa^* + bb^* = 0$. Como cada uno de los sumandos en ambas igualdades es un operador positivo, tenemos que cada sumando es 0. Por lo tanto,

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

para alguna isometría $w : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$.

Más aún, el hecho que u conmuta con M sobre $\mathcal{K}$ dice que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

es decir que que $wx = (x \otimes 1)w$ para todo $x \in M$. □

Corolario 9.1.6. *El conmutador de un factor de tipo II_1 es un factor de tipo II_1 o de tipo II_∞.*

Ejercicio 9.1.1. Demostrar el corolario anterior.

Proposición 9.1.7. *Si $u : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$ es una isometría M-lineal, entonces $uu^* \in M'$ sobre $L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$ y $\mathrm{Tr}(uu^*)$ es independiente de u.*

Demostración. Por ser u M-lineal, sale inmediato que $uu^* \in M'$.

Ahora, si v fuera otra isometría M-lineal con las mismas características, tenemos que $uu^* = uv^*vu^*$. Por lo tanto, $\mathrm{Tr}(uu^*) = \mathrm{Tr}((vu^*)(uv^*)) = \mathrm{Tr}(vv^*)$. □

Observemos que si M fuera reemplazado por $\mathbb{C}$ en la construcción anterior, el número $\mathrm{Tr}(uu^*) = \mathrm{Tr}(u^*u) = \mathrm{Tr}(1_{\mathcal{H}})$ sería la dimensión de $\mathcal{H}$. Esto induce a dar la siguiente definición.

Definición 9.1.8. Si M un factor de tipo II_1 o de tipo I_n, la *M-dimensión* o la *constante de acoplamiento* de un M-módulo $\mathcal{H}$ se define por $\dim_M \mathcal{H} = \mathrm{Tr}(uu^*)$.

Dado un número $d \in [0, \infty]$, podemos elegir una proyección apropiada p en M' sobre $L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$ tal que $p(L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ es un M-módulo de M-dimensión d. En la próxima sección discutiremos esto con más detalle. En particular,

(i) $\dim_M L^2(M) = 1$,

(ii) $\dim_M(L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})) = \infty$.

9.2. Propiedades elementales de $\dim_M \mathcal{H}$

De acuerdo a la notación de la sección anterior, $\dim_M \mathcal{H}$ tiene las siguientes propiedades.

Teorema 9.2.1. (i) *$\dim_M \mathcal{H} < \infty$ si y sólo si $M' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un factor de tipo II_1.*

(ii) *$\dim_M \mathcal{H} = \dim_M \mathcal{K}$ si y sólo si M sobre $\mathcal{H}$ y M sobre $\mathcal{K}$ son unitariamente equivalentes, es decir espacialmente isomorfos.*

(iii) *Si $\{\mathcal{H}_i\}$ son una familia numerable de M-módulos, $\dim_M(\bigoplus_i \mathcal{H}_i) = \sum_i \dim_M \mathcal{H}_i$.*

(iv) *$\dim_M(L^2(M)q) = \mathrm{Tr}(q)$ para cualquier proyección $q \in M$.*

(v) *Si p es una proyección en M, $\dim_{pMp}(p\mathcal{H}) = \mathrm{Tr}_M(p)^{-1} \dim_M \mathcal{H}$.*

Para las siguientes propiedades vamos a suponer que M' es finita, por lo tanto es un factor de tipo II_1 con traza $\mathrm{Tr}_{M'}$.

(vi) *Si p es una proyección en M', $\dim_{Mp}(p\mathcal{H}) = \mathrm{Tr}_{M'}(p) \dim_M \mathcal{H}$.*

(vii) *$(\dim_M \mathcal{H})(\dim_{M'} \mathcal{H}) = 1$.*

Demostración. Usando una isometría M-lineal u vimos que M sobre $\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a M sobre $uu^*(L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N}))$. De esto resultan evidentes las afirmaciones (i) y (ii).

(iii) Elijamos isometrías M-lineales $u_i : \mathcal{H}_i \to L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N})$ de modo que sus imágenes sean todas ortogonales, eso es posible haciendo las composiciones necesarias con otras isometrías. Al sumarlas obtenemos una isometría M-lineal u tal que $uu^* = \sum_i u_i u_i^*$. Por lo tanto, la traza de uu^* da el resultado esperado.

(iv) Tomemos un vector $\xi \in l^2(\mathbb{N})$ y definamos la isometría M-lineal

$$\begin{aligned} u : L^2(M)q &\to L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N}) \\ vq \quad &\to u(vq) = vq \otimes \xi \end{aligned}$$

Entonces, uu^* es una proyección en $(M\otimes 1)' = JMJ\otimes\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ sobre $L^2(M)\otimes l^2(\mathbb{N})$. Si e es la proyección definida en $l^2(\mathbb{N})$ sobre el espacio vectorial generado por ξ, tenemos que $uu^* = JqJ\otimes e$. En efecto, $JqJ\otimes e(v\otimes\xi) = Jqv^* = vq^* = vq$. Entonces, $\mathrm{Tr}(uu^*) = \mathrm{Tr}(q)$ pues J es una involución unitaria.

(v) Probemos primero el resultado para $L^2(M)q$ con q una proyección en M tal que $q \le p$. Observemos que la aplicación

$$\begin{aligned} L^2(pMp) &\to pL^2(M)p \\ pxp\Omega &\to p(x\Omega)p \end{aligned}$$

es unitaria. Entonces, la acción de pMp sobre $pL^2(M)q$ es unitariamente equivalente a la acción de pMp sobre $L^2(pMp)q$. Por (iv), $\dim_{pMp}(pL^2(M)q) = \mathrm{Tr}_{pMp}(q)$, pero por la normalización de la trazas $\mathrm{Tr}_{pMp}(1_{p\mathcal{H}}) = \mathrm{Tr}_M(p)^{-1}\,\mathrm{Tr}_M(1_{p\mathcal{H}})$, es decir que $\mathrm{Tr}_{pMp}(q) = \mathrm{Tr}_M(p)^{-1}\,\mathrm{Tr}_M(q) = \mathrm{Tr}_M(p)^{-1}\dim_M(L^2(M)q)$.

Ahora, sea $\mathcal{H}$ un M-módulo cualquiera. Entonces, $p\mathcal{H}$ es un pMp-módulo, por lo tanto existe una isometría pMp-lineal $u : p\mathcal{H} \to L^2(pMp)\otimes l^2(\mathbb{N}) = pL^2(M)p\otimes l^2(\mathbb{N})$ tal que $p\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a $uu^*(pL^2(M)p\otimes l^2(\mathbb{N}))$. Pero la proyección uu^* es una suma ortogonal de proyecciones equivalentes a proyecciones q_i menores o iguales a p cuyas imágenes son espacios del tipo $pL^2(M)q_i$. Entonces, aplicando (iii) sale pues ya hemos probado los casos especiales del tipo $pL^2(M)q_i$.

(vi) Podemos suponer que $\mathcal{H} = e(L^2(M)\otimes l^2(\mathbb{N}))$ para alguna proyección $e \in M'$, por lo tanto $M' = e(M\otimes 1)'e$ sobre $\mathcal{H}$. Por otro lado, como $p\in M'$, $p\mathcal{H}$ es un M-módulo y p define la isometría en la definición de $\dim_{Mp}(p\mathcal{H}) = \dim_M(p\mathcal{H}) = \mathrm{Tr}_{(M\otimes 1)'}(p)$. Pero p es una proyección menor que e en un factor de tipo II_∞, entonces por la unicidad de la traza normalizada,

$$\dim_M(p\mathcal{H}) = \mathrm{Tr}_{(M\otimes 1)'}(p) = \mathrm{Tr}_{(M\otimes 1)'}(p)\,\mathrm{Tr}_{(M\otimes 1)'}(e)^{-1}\dim_M(\mathcal{H}) = \mathrm{Tr}_{M'}(p)\dim_M(\mathcal{H})$$

(vii) Observemos que si $\mathcal{H} = L^2(M)$, $\dim_M(\mathcal{H})\dim_{M'}(\mathcal{H}) = 1$ pues ambas son iguales a 1. Veamos que el resultado es cierto para $\mathcal{H} = pL^2(M)$ con $p\in M$. En efecto, $\mathcal{H}$ es un pMp-módulo y también es módulo sobre M'. Para cada $x\in M$ la acción de $JxJ\in M'$ sobre $pL^2(M)$ está dada por $(JxJ)(pv) = JxJpv = Jxv^*p = pvx^*$; es decir que la acción de M' sobre $pL^2(M)$ es unitariamente equivalente a la acción de M sobre $L^2(M)p$. Por (iv) y por (v) respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim_{M'}(pL^2(M)) &= \dim_M(L^2(M)p) = \mathrm{Tr}_M(p) \\ \dim_{pMp}(pL^2(M)) &= \mathrm{Tr}_M(p)^{-1}\dim_M L^2(M) = \mathrm{Tr}_M(p)^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es válido para $\mathcal{H} = pL^2(M)$.

Por otro lado, si $\mathcal{K}$ es de la forma $\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{H} = (1 \otimes e)(\mathcal{H} \otimes l^2(\mathbb{N}))$, donde e es una proyección de rango k,

$$\dim_M(\mathcal{K}) = \dim_{(M\otimes 1)}(\mathcal{H} \otimes e(l^2(\mathbb{N}))) = k \dim_M(\mathcal{H})$$

Por otro lado, como $(M \otimes 1)' = (1 \otimes e)(M' \otimes \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))(1 \otimes e)$, por (v) tenemos que

$$\dim_{(M\otimes 1)'}(\mathcal{K}) = \mathrm{Tr}_{(M\otimes 1)'}(1 \otimes e)^{-1} \dim_{(M'\otimes\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N})))}(\mathcal{H} \otimes l^2(\mathbb{N})) = k^{-1} \dim_{M'}(\mathcal{H})$$

Pero como M' es de tipo II_1 cualquier $\mathcal{H}$ se puede obtener de $L^2(M)$ como $\bigoplus_{i=1}^k pL^2(M)$, ya que $\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a $(p\otimes e)(L^2(M)\otimes l^2(\mathbb{N}))$ para k y p apropiados. $\square$

Ejemplo 9.2.2. Si $\Gamma_o < \Gamma$ son grupos de c.c.i., $vN(\Gamma_o)$ actúa en $l^2(\Gamma)$. Si $\gamma \in \Gamma$, el operador unitario $\rho(\gamma)$ correspondiente a la acción regular a derecha da una isometría $vN(\Gamma_o)$-lineal entre $l^2(\Gamma_o)$ y $l^2(\Gamma_o\gamma^{-1})$. Por lo tanto, por la descomposición en coclases, $\dim_{vN(\Gamma_o)}(l^2(\Gamma)) = [\Gamma, \Gamma_o]$.

Esto motiva a dar la siguiente definición.

Definición 9.2.3. Si $N \subset M$ son factores de tipo II_1, el *índice de* N *en* M es el número real $[M : N] = \dim_n(L^2(M)$.

Ejercicio 9.2.1. Mostrar que $[M : N] = 1$ implica que $N = M$.

Ejemplo 9.2.4. (Dado por Atiyah y Schmidt) Las series discretas o representaciones de cuadrado integrable de grupos de Lie semisimples. Estos grupos son grupos localmente compactos.

La restricción por una proyección del conmutador de un factor de tipo II_1 ocurre en las teoría de estas representaciones. Si una serie discreta es restringida a un reticulado de clases de conjugación infinita, generan un factor de tipo II_1. La constante de acoplamiento está dada por la razón entre la “dimensión formal” y el covolumen del reticulado.

Mostraremos lo que sucede en el caso de $G = PSL(2, \mathbb{R})$, el grupo de transformaciones del semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, para comprender mejor lo que sucede. La acción de este grupo en $\mathbb{H}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Como G actúa transitivamente en $\mathbb{H}$ y $G_i = PSO(2)$ es el grupo que deja invariante a $i \in \mathbb{H}$, tenemos que $\mathbb{H} = G/G_i$. Es bien conocido que existe un dominio fundamental D para la acción del grupo $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$. El conjunto D y todos sus transladados por $PSL(2, \mathbb{Z})$ cubren $\mathbb{H}$. Estos se intersectan sólo en los bordes que son de medida de Lebesgue nula. Por lo tanto, si μ es una medida invariante equivalente a la medida de

Lebesgue, $L^2(\mathbb{H}, d\mu)$ da una representación unitaria de Γ que es unitariamente equivalente a la representación regular tensoriada con la identidad en $L^2(D, d\mu)$, convirtiendo a $L^2(\mathbb{H}, d\mu)$ en un $vN(\Gamma)$-módulo cuya $vN(\Gamma)$-dimensión es infinita.

La medida $d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$ es Γ-invariante. Variaremos un poco esta medida para obtener representaciones de Γ. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $d\mu_n = \frac{dxdy}{y^{2-n}}$. Estas medidas no son Γ-invariantes pero si definimos la acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{H}, d\mu_n)$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} f(z) = \frac{1}{(cz+d)^n}\, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

Esta representación resulta ser unitaria. Como para cada n la medida no es más Γ-invariante, la restricción de esta representación a Γ determina un $vN(\Gamma)$-módulo $\mathcal{H}_n = L^2(\mathbb{H}, d\mu_n)$. Estos resultan ser todos unitariamente equivalentes. El conmutador de $vN(\Gamma)$ en $\mathcal{H}_n$ es un factor de tipo II_∞.

Es bien conocido que las funciones holomorfas forman un subespacio cerrado de funciones L^2 que son invariantes por $PSL(2, \mathbb{R})$. También se sabe que la representación unitaria resultante es irreducible y es llamada *serie discreta holomorfa* de $PSL(2, \mathbb{R})$. Se puede ver que corresponde a una proyección finita en Γ'. Esto da un ejemplo concreto de un $vN(\Gamma)$-módulo de constante de acoplamiento o $vN(\Gamma)$-dimensión finita.

En general, si G es un grupo localmente compacto con medida de Haar dg, las series dicretas son precisamente las representaciones unitarias irreducibles π que son sumandos directos de la representación regular a izquierda en $L^2(G, dg)$. Por lo tanto, si Γ es un subgrupo discreto con dominio fundamental D tal que G es cubierto por $\gamma(D)$ y si estos son disjuntos salvo conjuntos de medida nula, podemos aplicar en forma análoga el mismo razonamiento para obtener un $vN(\Gamma)$-módulo. Un problema inmediato es determinar la constante de acoplamiento. Esto no es tan complicado utilizando propiedades particulares de las series discretas.

Si $\mathcal{H}$ es el espacio de representación de una serie discreta π de G, entonces los *coefficientes matriciales* de π dados por las funciones $g \to \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle$, son funciones en $L^2(G, dg)$. Para grupos finitos o compactos el conjunto de coeficientes matriciales de π generan todo $\mathcal{H}$ como subespacio de $L^2(G, dg)$. Las relaciones de ortogonalidad de Schur para grupos compactos de los coeficientes matriciales determinan un número d_π tal que

$$d_\pi \int_G \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle \overline{\langle \pi(g)\xi', \eta'\rangle} = \langle \xi, \xi'\rangle \langle \eta, \eta'\rangle$$

Si G es compacto y la medida de Haar es normalizada de modo que G tenga medida 1, d_π es la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{H}$. En general, d_π depende de la elección de la medida de Haar, pero el producto de d_π con el covolumen $\int_D dg$ no depende de tal elección. Una cálculo rápido de la traza de la proyección sobre la imagen de $\mathcal{H}$ en $vN(\Gamma)'$ da inmediatamente la siguiente fórmula,

$$\dim_{vN(\Gamma)} \mathcal{H} = d_\pi \ \mathrm{covolume}(\Gamma)$$

Detalles de estos cálculos se pueden ver en [GHJ] pág. 142-148.

Ejemplo 9.2.5. Consideremos el subfactor diagonal $N \subset N \otimes M_n(\mathbb{C})$. Cada matriz unitaria e_{ij} da una isometría N-lineal de $L^2(N)$ sobre el subespacio de $L^2(N \otimes M_n(\mathbb{C}))$, que a su vez es una suma ortogonal de esos subespacios equivalentes. Por lo tanto, $[N \otimes M_n(\mathbb{C}) : N] = n^2$.

Proposición 9.2.6. *Si M es un factor de tipo* II_1 *en $\mathcal{H}$, entonces*
(i) M tiene un vector separador si $\dim_M(\mathcal{H}) \geq 1$.
(ii) M tiene un vector cíclico si $\dim_M(\mathcal{H}) \leq 1$.

Demostración. Si ξ es separador para M, significa que es cíclico para M'. Por lo tanto, por las propiedades de la M-dimensión alcanza con probar una de ellas. Ahora comparando $\mathcal{H}$ con $pL^2(M)$ o una suma directa de copias de él se obtiene la afirmación. □

Podemos decir que en realidad ambas afirmaciones de la proposición son un "si y sólo si". Con lo cual sólo es necesario controlar vectores arbitrarios en $L^2(M)$. De hecho, la definición original de Murray y von Neumann es la siguiente:

Sea M un factor de tipo II_1 *sobre $\mathcal{H}$ cuyo conmutador sea también de tipo* II_1. *Elijamos cualquier vector no nulo $\xi \in \mathcal{H}$ y sean p y q proyecciones sobre las clausuras de $M\xi$ y $M'\xi$ respectivamente, resultando que $p \in M$ y $q' \in M'$. Usando las trazas normalizadas, la* **constante de acoplamiento** *está definida por* $\frac{\mathrm{Tr}_M(q)}{\mathrm{Tr}_{M'}(p)}$.

La parte difícil con esta definición es probar que esta constante es independiente de ξ. Asumiendo esta última afirmación es trivial identificar la constante de acoplamiento de Murray-von Neumann con la $\dim_M \mathcal{H}$. Pero a esta altura no es posible agregar nada para simplificar la demostración del por qué ese número es independiente de ξ.

Ejemplo 9.2.7. (dado por M. Rieffel) Si (X, μ) es un espacio de medida y Γ es un grupo numerable actuando por transformaciones que preservan la medida en (X, μ), entonces Γ actúa por operadores unitarios u_γ en $L^2(X, \mu)$ de la manera natural. Diremos que un subconjunto medible $D \subset X$ es un *dominio fundamental* de Γ si $X = \bigcup_\gamma \gamma(D)$ y $\mu(D \cap \gamma(D)) = 0$ para todo $1 \neq \gamma \in \Gamma$. En esa situación, el álgebra de von Neumann abeliana $L^\infty(X)^\Gamma$ de funciones L^∞ Γ-invariantes puede ser identificado con el espacio $\mathbb{L}^\infty(D)$.

Ahora supongamos Γ y Λ dos grupos actuando en X como arriba con dominios fundamentales D y E respectivamente. Entonces, podemos considerar el álgebra de von Neumann $M_{\Gamma,\Lambda}$ sobre $L^2(X, \mu)$ definida por $\{\{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup L^\infty(X)^\Lambda\}''$.

Capítulo 10

Construcción del producto cruzado

Posiblemente la forma más útil de producir álgebras de von Neumann a partir de otras es a través del producto cruzado. Comenzaremos definiendo una noción bien general y luego la examinaremos cuidadosamente en casos especiales.

10.1. Acciones de grupos

Definición 10.1.1. Dados M un álgebra de von Neumann y G un grupo, una *acción* de G en M es un homomorfismo

$$\begin{aligned} G &\to Aut(M) \\ g &\to \quad \alpha_g \end{aligned}$$

donde los automorfismos son ultradébilmente continuos si es necesario.

El álgebra de puntos fijos bajo dicha acción es denotada por M^G y es un álgebra de von Neumann.

Un caso especial, pero de gran importancia es cuando hay una representación unitaria $g \to u_g$ con $u_g M u_g^* = M$ para todo $g \in G$. Entonces, podemos definir una acción de G en M, y en M', por $\alpha_g(x) = u_g x u_g^*$.

En este caso decimos que la acción α está *implementada* por la representación unitaria u_g. Además, si los u_g están en M, decimos que es *interior*, así como un automorfismo interior de M es por definición uno de la forma $Ad(u)x = uxu^*$ para u unitario en M. Un automorfismo se dice *exterior* si no es interior.

Las acciones no son simepre implementables, a pesar de que la noción depende del espacio de Hilbert en que M esté actuando.

Definición 10.1.2. Sea (X, μ) un espacio de medida y T una biyección sobre X se dice que μ es T-*quasi-invariante* si T preserva la clase de medida de μ, es decir si $\mu(A) = 0$ si y sólo si $\mu(T^{-1}(A)) = 0$.

Definición 10.1.3. Si (X, μ) es un espacio de medida tal que μ es T-quasi-invariante, T se dice *ergódica* si cada subconjunto medible T-invariante A de X $(T(A) = A)$, satisface que $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$. En otras palabras, los subconjuntos de medida positiva T-invariantes difieren de X en un subconjunto de medida nula.

Si (X, μ) es un espacio de medida y T es una biyección sobre X tal que μ es T-quasi-invariante, entonces que T define un automorfismo α_T de $L^\infty(X, \mu)$ dado por

$$\alpha_T(f) = f \circ T$$

Además, es fácil verificar, que dicho automorfismo es implementable por el operador unitario u sobre $L^2(X, \mu)$ dado por $u(f) = f \circ T$.

Proposición 10.1.4. *Una biyección T sobre X es ergódica si y sólo si los únicos puntos fijos por α_T son las funciones constantes.*

Demostración. Sea $f \in L^\infty$ tal que $\alpha_T(f) = f$. Podemos asumir que $f(x) = f(T(x))$ para casi todo $x \in X$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, por la definición de supremo esencial, $\mu(\{x : \|f\| - |f(x)| < \varepsilon\}) \neq 0$. Pero ese conjunto es invariante por T, entonces por ser T ergódica, es igual a X salvo por un conjunto de medida nula. Haciendo tender ε a 0, vemos que $\mu(\{x : \|f\| \neq |f(x)|\}) = 0$. Por lo tanto podemos asumir que $f(x) = e^{ig(x)}$ para alguna función medible g con valores en $[0, 2\pi)$. Repitiendo el argumento para g da que f es una constante salvo un conjunto de medida nula.

Para demostrar la recíproca supongamos que A es un conjunto medible, entonces su función característica es fijada por α_T en L^∞ si y sólo si A es T-invariante. Si asumimos que las funciones constantes son las únicas fijadas por α_T, por la observación anterior tenemos que si A es medible y T-invariante, entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$. Es decir, T es ergódica. $\square$

Ejercicio 10.1.1. Sean

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

las matrices spin de Pauli. Mostrar que $Ad(\sigma_x)$, $Ad(\sigma_y)$ y $Ad(\sigma_z)$ definen una action del grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ en $M_2(\mathbb{C})$ que no es implementable para $M_2(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^2$.

Ejercicio 10.1.2. Mostrar que cualquier acción es implementable para un factor de tipo II_1 en la forma estándar, y más generalmente, cualquier grupo de automorfismos que preserva un estado normal fiel es implementable en la representación GNS.

Ejercicio 10.1.3. Mostrar que cualquier automorfismo de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es interior.

Ejercicio 10.1.4. Mostrar que el automorfismo de $vN(\mathbb{F}_2)$ que proviene del automorfismo que intercambia los dos generadores es exterior.

Si G es un grupo topológico hay muchas nociones de continuidad. La más útil es la de convergencia $*$-fuerte punto a punto, es decir asumimos que la aplicación $g \to \alpha(g)(x)$ es $*$-fuertemente continua para todo $x \in M$. Muchas otras nociones de continuidad serán equivalentes a esta e incluso algunos condiciones de medibilidad aseguran esta continuidad.

Siempre asumiremos continuidad $*$-fuerte punto a punto cuando nos refiramos a una acción de un grupo topológico.

Ejercicio 10.1.5. La acción por tranlaciones de $\mathbb{R}$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ ¿es continua en norma punto a punto? ¿es fuertemente continua punto a punto? ¿es $*$-fuertemente continua punto a punto?

Las acciones de un grupo dado en álgebras de von Neumann son fáciles de construir, pero acciones de un grupo en una dada álgebra de von Neumann puede ser difícil de descubrir.

Definición 10.1.5. Una acción de G en M se dice *ergódica* si $M^G = \mathbb{C}1$

Ejercicio 10.1.6. Mostrar que si G actúa en (X, μ) y μ es G-invariante, entonces la acción resultante de G en $L^\infty(X, \mu)$ es ergódica si y sólo si los únicos subconjuntos medibles $A \subset X$ que satisfacen $\mu(g(A)\Delta A) = 0$ para todo $g \in G$, satisfacen $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$, donde $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

La siguiente pregunta es un interesante problema abierto.

¿Tiene $SU(3)$ una acción ergódica en un factor de tipo II_1*?*

Se sabe que $SU(2)$ no tiene una tal acción [**?**] y también se sabe que si un grupo compacto actúa ergódicamente en un álgebra de von Neumann, entonces esa álgebra de von Neumann tiene una traza normal fiel [**?**].

10.2. El producto cruzado

Sea α es una acción de un grupo localmente compacto G con medida de Haar dg en el álgebra de von Neumann M sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Definamos el espacio de Hilbert $\mathcal{K} = L^2(G, \mathcal{H}) = L^2(G) \otimes \mathcal{H}$. El grupo G actúa en $\mathcal{K}$ por $u_g = L_g \otimes 1$, donde L es la acción regular a izquierda. Más aún, M actúa en $\mathcal{K}$ por

$$(\tilde{x}f)(g) = \alpha_{g^{-1}}(x)(f(g))$$

Notemos que este proceso da otra manera de obtener una acción de un grupo implementable, por lo menos cuando es localmente compacto.

Definición 10.2.1. Si α es una acción de un grupo localmente compacto G en el álgebra de von Neumann M sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el *producto cruzado* $M \rtimes_\alpha G$ es el álgebra de von Neumann sobre $\mathcal{K} = L^2(G) \otimes \mathcal{H}$ generada por los $\{u_g = L_g \otimes 1 : g \in G\}$ y $\{\tilde{x} : x \in M\}$.

Ejercicio 10.2.1. Mostrar que $x \to \tilde{x}$ es un $*$-isomorfismo ultradébilmente continuo de M sobre una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Ejercicio 10.2.2. Mostrar que $u_g \tilde{x} u_g^* = (\alpha_g(x))\tilde{}$.

De ahora en más no escribiremos más $\tilde{}$ y identificaremos M con $\tilde{M}$. Notemos que combinaciones finitas $\sum_g x_g u_g$ forman una $*$-subálgebra densa de $M \rtimes_\alpha G$. Más aún, los u_g son linealmente independientes sobre M en el sentido que $\sum_g x_g u_g = 0$ implica $x_g = 0$ para cada g en la suma. Esta álgebra densa puede llamarse *producto cruzado algebraico*.

Existe una teoría bien desarrollada sobre productos cruzados $M \rtimes_\alpha G$ cuando G es compacto o abeliano, pero en estas notas haremos más énfasis en el caso en que G es discreto, tratando de imitar el juego de elementos matriciales que hicimos con $vN(\Gamma)$ para ganar control sobre los límites débiles de elementos en el producto cruzado algebraico.

Ejemplo 10.2.2. El álgebra de von Neumann $vN(\Gamma)$ es un ejemplo de producto cruzado donde $M = \mathbb{C}$ y la acción es trivial. En este caso el producto cruzado algebraico es exactamente el álgebra de grupo $\mathbb{C}\Gamma$.

Veremos inmediatamente, como en el Capítulo 3, que si G es discreto cualquier elemento de $M \rtimes_\alpha G$ define una función $g \to x_g$ tal que $\sum_g x_g u_g$ tiene sentido para ciertos operadores en $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes l^2(G)$. Más aún, cualquier matriz de esa forma que define un operador acotado en $\mathcal{K}$ está en $M \rtimes_\alpha G$. Esto es porque la suma converge punto a punto por lo menos en un subconjunto denso de funciones de G en $\mathcal{H}$ de soporte finito.

En el caso en que el producto cruzado es un factor de tipo II_1 sabemos que el conmutador consiste en multiplicación a izquierda por elementos de $M \rtimes_\alpha G$, por lo tanto una subálgebra densa de $(M \rtimes_\alpha G)'$ preserva ese subespacio denso de vectores y en ese subespacio $\sum_g x_g u_g$, la multiplicación a derecha por u_g y $x \in M$ conmutan.

Más aún, por multiplicación de matrices se obtienen las fórmulas

$$\left(\sum x_g u_g\right)^* = \sum \alpha_g(x_{g^{-1}}) u_g$$

$$\left(\sum x_g u_g\right)\left(\sum y_h u_h\right) = \sum_g \left(\sum_h x_h \alpha_h(y_{h^{-1}g}) u_g\right)$$

Ahora, asumiendo que G es discreto, daremos algunas condiciones suficientes para que $M \rtimes_\alpha G$ sea un factor.

Definición 10.2.3. Una acción α de G en M se dice *exterior* si el único $g \in$ para el cual α_g es interior es la identidad.

Lema 10.2.4. *Sea M un factor y α un automorfismo de M. Si existe un $x \in M$, $x \neq 0$, tal que $yx = x\alpha(y)$ para todo $y \in M$, entonces α es un automorfismo interior.*

Demostración. Si x fuera unitario, eso sería obvio. Tomemos la adjunta de la relación para obtener $x^*y = \alpha(y)x^*$ para todo $y \in M$. Entonces, $yxx^* = x\alpha(y)x^* = xx^*y$, es decir que $xx^* \in Z(M)$. Análogamente, $x^*x \in Z(M)$. Pero ambos, xx^* y x^*x, tienen el mismo espectro, como M es un factor, ambos son iguales al mismo número positivo λ. Dividiendo por $\sqrt(\lambda)$ convierte a x en un operador unitario, con lo cual queda demostrado el lema. □

Proposición 10.2.5. *Si G es un grupo discreto y α es una acción exterior de G en un factor M, entonces $M \rtimes_\alpha G$ es un factor.*

Demostración. Si $x = \sum x_g u_g \in Z(M \rtimes_\alpha G)$, igualando coeficientes en la expresion $xy = yx$ para todo $y \in M$ da que $yx_g = x_g\alpha_g(y)$ para todo $y \in M$ y todo $g \in G$. Por el lema anterior, eso implica que $x_g = 0$ para todo $g \neq 1$. Por lo tanto, $x \in M$ y como M es un factor, x es un múltiplo de la identidad. □

Estos resultados conducen a la siguiente definición.

Definición 10.2.6. Un automorfismo α de un álgebra de von Neumann M se dice *libre* si

$$yx = x\alpha(y) \quad \forall y \in M \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Una acción α es *libre* si α_g es libre para todo $g \neq 1$.

Observación 10.2.7. Del argumento de la demostración de la proposición anterior se desprende lo siguiente,

a) si α es una acción libre en un álgebra de von Neumann M, entonces $Z(M \rtimes_\alpha G) \subset M$;

b) si α es un automorfismo exterior sobre un factor M, entonces α es libre.

Teorema 10.2.8. *Si α es una acción ergódica libre de G en un álgebra de von Neumann M, entonces $M \rtimes_\alpha G$ es un factor.*

Demostración. De acuerdo a la observación anterior, si $x \in Z(M \rtimes_\alpha G) \subset M$, en particular conmuta con los u_g, es decir $x = u_g x u_g^* = \alpha_g(x)$. Entonces, $Z(M \rtimes_\alpha G) \subset M^G = \mathbb{C}1$. Por lo tanto, $M \rtimes_\alpha G$ es un factor. □

Observación 10.2.9. De la demostración del teorema anterior podemos concluir que si α es un automorfismo de un álgebra de von Neumann M, $Z(M \rtimes_\alpha G) = Z(M)^G$.

Para entender el sentido de ser libre para un automorfismo del tipo α_T haremos una hipótesis sobre (X, μ), de otra manera uno podría tener una biyección T no trivial sobren X para la cual α_T es la identidad. Para ello supondremos que a partir de aquí, que (X, μ) *numerablemente separable.* Es decir que existe una sucesión B_n de conjuntos medibles tales que $\mu(B_n) > 0$ y para los cuales, si $x \neq y$, existe un n tal que $x \in B_n$ pero $y \notin B_n$. En particular, $\mathbb{R}^n$ es numerablemente separable.

Proposición 10.2.10. *Si T es una transformación del espacio de medida numerablemente separable (X, μ) tal que μ es T-quasi-invariante, entonces α_T es libre si y sólo si el conjunto de puntos fijos por T satisface $\mu(\{x : Tx = x\}) = 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si A es cualquier conjunto medible tal que $T|_A = 1_A$, entonces $\chi_A f = \alpha_T(f\chi_A) = \alpha_T(f)\chi_A$ para todo $f \in L^\infty(X, \mu)$. Como α_T es libre tenemos que $\chi_A = 0$, es decir que $\mu(A) = 0$.

($\Leftarrow$) Podemos suponer que T no tiene puntos fijos en X. Supongamos también que $f_1\alpha_T(f_2) = f_2 f_1$ para toda $f_2 \in L^\infty(X, \mu)$. Tenemos que ver que $f_1 = 0$. Sea A el soporte de f_1. Entonces, como T no tiene puntos fijos, existen subconjuntos B_n tales que $A = \cup_n(A \cap B_n \setminus T^{-1}(B_n))$.

Si $f_1 \in L^\infty(X, \mu)$ es no nula, $\mu(A \cap B_n \setminus T^{-1}(B_n)) > 0$ para algún n. Consideremos $f_2 = \chi_{B_n}$, entonces para cada $x \in A \cap B_n \setminus T^{-1}(B_n)$ tenemos que $f_1(x)f_2(x) \neq 0$, pero $f_1(x)f_2(Tx) = f_1(x)\chi_{B_n}(Tx) = 0$ pues $x \notin T^{-1}(B_n)$. Por lo tanto, $f_1\alpha_T(f_2) \neq f_2 f_1$ en $L^\infty(X, \mu)$. Es decir que la medida de A, soporte de f_1, deber ser cero. O sea que α_T es libre. $\square$

Ejercicio 10.2.3. Mostrar que si $\alpha_T = 1_M$, entonces $Tx = x$ para casi todo $x \in M$.

De estos resultados se desprende inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 10.2.11. *Si Γ es un grupo numerable actuando libre y ergódicamente en un espacio de medida X cuya medida μ es Γ-quasi-invariante, entonces el producto cruzado $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ es un factor.*

Observación 10.2.12. Si Γ es abeliano y la acción es ergódica, entonces también es libre.

Ejercicio 10.2.4. Mostrar que la condición que la acción sea libre en realidad establece que $L^\infty(X, \mu)$ es abeliano maximal en el producto cruzado.

El producto cruzado $M \rtimes \Gamma$ cuando M es abeliano y Γ es discreto se dice *construcción de espacio de medida de grupo*. Daremos algunos ejemplos.

Ejemplo 10.2.13. Si $X = \mathbb{Z}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ actuando por translaciones y μ la medida de contar, entonces la acción es libre y ergódica y $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma = \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}))$.

Ejemplo 10.2.14. El álgebra de von Neumann de rotación irracional se puede ver como el producto cruzado donde $(X, \mu) = (\mathbb{T}^1, d\theta)$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, donde la acción está generada por la transformación $T(z) = e^{i\alpha} z$ con $\alpha/2\pi$ es irracional.

Usando series de Fourier se prueba que T es ergódica.

Ejemplo 10.2.15. Sea H un grupo abeliano finito y $\Gamma = \oplus_{n\in\mathbb{N}} H$ el grupo numerable de sucesiones $\{h_n\}$ con h_n la identidad salvo una cantidad finita de índices. Si $H = \{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$, denotemos por η_i^k al elemento de Γ que todas sus componentes son iguales a la identendidad de H salvo en el lugar k que tiene a η_i. Entonces Γ está formado por sumas finitas de elementos del tipo η_i^k.

Sea $X = G = \prod_{n\in\mathbb{N}} H$ el conjunto de todas las sucesiones con la topología producto. Entonces G es un grupo compacto y por lo tanto tiene la medida de Haar μ. El grupo Γ actúa en X por translación a izquierda, es decir

$$\eta_i^k(h_1, \ldots, h_k, \ldots) = (h_1, \ldots, h_{k-1}, \eta_i h_k, h_{k+1}, \ldots)$$

La acción es libre y ergódica. Veamos que esto es cierto.

Hay una manera algebraica particular de ver este ejemplo sin construir el espacio (X, μ).

Sea $A = L^\infty(H) = \mathbb{C}\hat{H}$ el álgebra de grupo del grupo dual $\hat{H}$ con su traza usual. Como en el primer ejemplo de la construcción GNS, formemos el producto tensorial $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}^{alg} A$ con traza producto Tr. Luego usemos la construcción GNS con respecto a Tr para obtener un álgebra de von Neumann abeliana. Esta puede ser identificada con $L^\infty(G, \mu)$, por lo tanto el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de la construcción GNS es $L^2(G, \mu)$. Pero es claro que una base ortonormal de $\mathcal{H}$ está dada por sucesiones finitas $\{\chi_n\}$ de elementos de $\hat{H}$ que definen elementos $\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$ en $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}^{alg} A$. El punto es que esta base de vectores son autovalores para la acción de Γ en $L^2(G, \mu)$, es decir,

$$\{h_n\}(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots) = \left(\prod_n \chi_n(h_n)\right) \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$$

La ergodicidad sale fácilmente pues el único elemento de la base que es fijado por todos los $\{h_n\}$ es el que tiene todos los $\chi_n = 1$.

Este ejemplo, en el caso $H = \mathbb{Z}_2$, corresponde al álgebra de von Neumann generada por los operadores $N = a^*a$ y $N' = aa^*$ donde a y a^* son operadores de creación y aniquilación de las relaciones de anticonmutación de la física cuántica definida en el trabajo de Gärding y Withmann [?] (ver también [G], [GKS]), con la medida de Haar sobre el conjunto X de sucesiones de ceros y unos. En los trabajos mencionados se utiliza cualquier medida sobre X para describir todas las representaciones complejas, reales y cuaterniónicas de las relaciones de anticonmutación sobre espacios de Hilbert separables.

Ejercicio 10.2.5. Mostrar que si $H = \mathbb{Z}_2$, la subálgebra del producto cruzado del ejemplo anterior generada por $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}^{alg} A$ y Γ es el producto tensorial infinito de $M_2(\mathbb{C})$.

Los dos ejemplos últimos son casos especiales de uno más general: X es un grupo compacto con medida de Haar y Γ es un subgrupo numerable denso actuando libremente por translaciones a izquierda. El Teorema de Peter-Weyl muestra que dicha acción es ergódica.

Ejemplo 10.2.16. *Levantamiento de Bernoulli:* Si Γ es un grupo infinito y $A = \mathbb{C}\mathbb{Z}_2$ podemos formar el producto tensorial indexado por Γ de copias de A. El álgebra de von Neumann así obtenida es nuevamente el espacio L^∞ del espacio de medida producto infinito $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{Z}_2$, esta vez con Γ como conjunto que indexa el producto. La medida que consideramos sobre X es la medida de Haar.

Como en el ejemplo anterior podemos obtener una base de L^2 indexada por funciones $f : \Gamma \to \{0,1\}$ que valen 0 para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Estas funciones corresponden a subconjuntos de Γ y la acción de Γ en el espacio de Hilbert está dada por permutación de la base en el sentido obvio: para cada $\gamma \in \Gamma$, $(u_\gamma f)(\eta) = f(\gamma^{-1}\eta)$ para todo $\eta \in \Gamma$.

La ergodicidad sale del hecho de que la órbita de cualquier subconjunto no vacío es infinito.

También se puede elegir otra traza en vez de la usual y modificar la base ortonormal de A de acuerdo a ello. Las medidas son las obvias salvo alguna especificación particular.

Daremos otros ejemplos de acciones ergódicas libres sin dar las pruebas de la ergodicidad.

Ejemplo 10.2.17. $SL(2,\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ vía la acción lineal en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 10.2.18. $PSL(2,\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ por transformaciones conformes.

Ejemplo 10.2.19. $SL(2,\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por transformaciones lineales.

Ejemplo 10.2.20. $\mathbb{Q}$ actúa en $\mathbb{R}$ por translaciones.

Una manera de ver que esta acción es ergódica es restringir la acción a un subgrupo denso de un grupo compacto bajo la observación que las funciones en $L^\infty(\mathbb{R})$ que son invariantes por translación en $\mathbb{Z}$ definen funciones en $L^\infty(\mathbb{T})$. Luego usando series de Fourier.

Ejemplo 10.2.21. El grupo $\mathbb{Q} \rtimes \mathbb{Q}^*$ que actúa en $\mathbb{R}$ por $(a,b)x = ax + b$.

Ejemplo 10.2.22. El mismo ejemplo 10.2.15 pero con $H = \mathbb{Z}_2$ pero usando una traza normalizada en $\mathcal{H}$ que es diferente a la usual. Esta traza está determinada por sus valores en las proyecciones minimales de $\mathcal{H}$ que podemos llamar p y $1-p$ para $0 < p < 1$. La medida producto no es absolutamente continua respecto a la medida de Haar y no es preservada por las translaciones del grupo. Por lo tanto, este ejemplo es tal vez más fácil de aproximar por una construcción de álgebras de von Neumann donde se pueda "implementar" la acción de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ por operadores unitarios. Estos operadores unitarios provienen de unos en $L(H)$ que intercambian dos puntos de pesos diferentes, por lo que deben ser correctamente normalizados.

Ejercicio 10.2.6. Hacer los detalles del ejemplo anterior.

En los ejemplos hemos visto diferentes tipos de acciones ergódicas libres:
Tipo I: Γ actúa transitivamente. Ejemplo 10.2.13.
Tipo II_1: Γ preserva una medida finita. Ejemplos 10.2.14, 10.2.15, 10.2.16, 10.2.17.
Tipo II_∞: Γ preserva una medida infinita. Ejemplos 10.2.19, 10.2.20.
Tipo III: Γ no preserva ninguna medida equivalente a μ. Ejemplos 10.2.18, 10.2.21, 10.2.22.

10.3. Los tipos del producto cruzado

Seguiremos con la notación de la sección anterior. Definamos la aplicación

$$E_M : M \times_\alpha \Gamma \to M$$
$$\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma u_\gamma \to x_1$$

Esta aplicación tiene gran importancia. Se denomina *espectación condicional* sobre M y satisface las siguientes condiciones,
(i) $E_M^2 = E_M$,
(ii) $E_M(x)^* = E_M(x^*)$, $E_M(1) = 1$,$E_M(x^*x) = 0$ si y sólo si $x = 0$,
(iii) $E_M(x^*x) \geq E_M(x^*)E_M(x)$, $\|E_M(x)\| \leq \|x\|$,
(iv) $E_M(axb) = aE_M(x)b$ para todo $a, b \in M$,
(v) E_M es ultradébilmente continua.

Por lo tanto, E_M es una proyección de norma 1 en el sentido de espacio de Banach. La condición (iv) dice que E_M es un morfismo de (M, M)-bimódulo.

Teorema 10.3.1. *Si Γ actúa no transitivamente en forma libre y ergódica preservando la medida μ, entonces*
(i) *si μ es finita, $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ es un factor de tipo* II_1;
(ii) *si μ es infinita σ-finita, $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ es un factor de tipo* II_∞;
(iii) *si Γ actúa transitivamente, $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ es de tipo* I.

Demostración. (i) Podemos demostrar un caso más general en el caso en que $\mu(X) = 1$. Supongamos que Γ preserva la traza tr positiva fiel y ultradébilmente continua en el álgebra de von Neumann A y que su acción es libre y ergódica. Entonces afirmamos que $M = A \rtimes \Gamma$ es un factor de tipo II_1 (o un factor de dimensión finita). Por resultados previos sólo necesitamos probar que tiene una traza positiva ultradébilmente continua. Definamos $\mathrm{Tr} = \mathrm{tr} \circ E_A$ en M. La continuidad ultradébil y la positividad son obvias, por lo tanto por continuidad y linearidad es suficiente probar que $\mathrm{Tr}(au_\gamma bu_{\gamma'}) = \mathrm{Tr}(bu_{\gamma'}au_\gamma)$. Que ambos lados de la igualdad no sean cero es equivalente a decir que $\gamma' = \gamma^{-1}$.

Entonces, la parte izquierda es $\mathrm{tr}(a\alpha_\gamma(b)) = \mathrm{tr}(\alpha_\gamma^{-1}(a\alpha_\gamma(b))) = \mathrm{tr}(b\alpha_\gamma^{-1}(a))$, que es igual a $\mathrm{Tr}(bu_{\gamma'}au_\gamma)$.

(ii) Si μ es infinita y no actúa transitivamente, entonces no hay átomos o proyecciones minimales, es decir que existen subconjuntos Y de X de medida positiva arbitraria. Se Y un conjunto de medida finita no nula y sea ξ la función $\xi(\gamma) = \delta_{\gamma,1}\ \chi_Y$. Entonces,

$$\langle au_\gamma\xi, \xi\rangle = \omega_\xi(au_\gamma) = \delta_{1,\gamma}\int_Y a(x)d\mu(x)$$

Fácilmente se ve que $go_\xi((pau_\gamma p)(pbu_{\gamma'})) = go_\xi((pbu_{\gamma'})(pau_\gamma p))$, por lo tanto ω_ξ define una traza positiva ultradébilmente continua en $p(A \rtimes \Gamma)p$ que es un factor de tipo II_1. Pero $A \rtimes \Gamma$ no es un factor de tipo II_1 pues A contiene una familia infinita de proyecciones mutuamente ortogonales. Entonces, $A \rtimes \Gamma$ es de tipo II_∞.

(iii) Si Γ actúa transitivamente, $(X, \mu) = (\Gamma$, medida de contar) y al función característica de un conjunto generado por un elemento es una proyección minimal de $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$. $\square$

Ejercicio 10.3.1. Si Γ actúa ergódicamente en (X, μ) preservando la medida σ-finita μ, probar que cualquier otra medida invariante es proporcional a μ.

Para terminar con esta sección vamos a mostrar que existen factores que no son ni de tipo I ni de tipo II.

Supongamos que $M = L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ es un factor de tipo I o II. Por lo tanto, M tiene una traza $\mathrm{Tr} : M_+ \to [0, \infty]$. Vamos a definir una medida invariante en X, absolutamente continua con respecto a μ, revirtiendo el procedimiento del Teorema 10.3.1 y definiendo la medida $\nu(E) = \mathrm{Tr}(\chi_E)$, observemos que $\chi_E \in L^\infty(X, \mu) \subset M$.

La invariancia de la medida ν no tiene ninguna dificultad. El problema es que $\mathrm{Tr}(\chi_E)$ puede ser infinito para todo conjunto no nula E. Mostraremos que este no es el caso. Para ello necesitaremos del concepto de semicontinuidad.

Definición 10.3.2. Si X es un espacio topológico diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ es *semicontinua inferiormente* si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto abierto $U \subset X$ tal que $f(u) > f(x) - \varepsilon$ para todo $u \in U$.

Ejercicio 10.3.2. Probar que si f es semicontinua inferiormente, entonces

(a) $f^{-1}((-\infty, K])$ es cerrado para todo $K \in \mathbb{R}$;

(b) f alcanza un mínimo en cualquier subconjunto compacto de X.

Ejercicio 10.3.3. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\xi \in \mathcal{H}$, la función $a \to \|a\xi\|$ definida sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es *débilmente* semicontinua inferiormente.

Ejercicio 10.3.4. Si f_α es una familia de funciones semicontinuas inferiormente, entonces si existe $\bigvee_\alpha f_\alpha$ es semicontinua inferiormente.

Lema 10.3.3. *Sea M un factor de tipo* I *o* II *y* $\mathrm{Tr} : M_+ \to [0, \infty]$ *la correspondiente traza de acuerdo al tipo de factor que sea, entonces, para cada $K \geq 0$, el conjunto $M_{1,K} = \{x : \mathrm{Tr}(x^*x) \leq K\}$ es débilmente compacto.*

Demostración. La situación es clara en el caso en que M es de tipo II_1. En el caso en que $M = N \otimes \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ en $\mathcal{H}$ con N de tipo II_1 o $\mathbb{C}$ podemos asumir, de acuerdo a la Proposición 9.2.6, existe un vector $\xi \in e_{11}\mathcal{H}$ con ω_ξ una traza en $e_{11}Me_{11}$. Por lo tanto, si $\xi_i = e_{i1}\xi$ tenemos que , salvo múltiplos,

$$\mathrm{Tr}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x\xi_i, \xi_i \rangle$$

Por los ejercicios anteriores y la compacidad débil de la bola unidad, se obtiene lo buscado. $\square$

Proposición 10.3.4. *Para cada $x \in M_{1,K}$, sea $W(x)$ la clausura débil del conjunto convexo*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i x u_i^* : k < \infty, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, u_i \in L^\infty(X, \mu) \text{ unitario} \right\}$$

Entonces, $W(x) \subset M_{1,K}$ y si $\phi(y) = \mathrm{Tr}(y^*y)$ para $y \in W(x)$, ϕ alcanza su mínimo en un único punto $\mathcal{E}(x)$ de $W(x)$.

Demostración. Notemos primero que $\{z \in M : \mathrm{Tr}(z^*z) < \infty\}$ es un espacio vectorial en el cual $\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}(y^*x)$ define una estructura de espacio pre-Hilbert. Más aún, como $W(x)$ es un subconjunto débilmente compacto de M por estar contenido en $M_{1,K}$, la semixontinuidad inferior ϕ asegura que alcanza un mínimo. Y este es alcanzado en un único punto ya que la convexidad de $W(x)$ permite aplicar la Proposición 2.1.2. $\square$

Proposición 10.3.5. *Sea $M = L^\infty(X\mu) \rtimes \Gamma$ un factor de tipo* I *o* II *para el cual la acción de Γ en $L^\infty(X\mu)$ es libre y ergódica. Sea* Tr *la traza en M definida anteriormente y p una proyección en M tal que $\mathrm{Tr}(p) < \infty$. Entonces,*

$$\mathcal{E}(p) = E_{L^\infty(X\mu)}(p) \qquad y \qquad 0 < \mathrm{Tr}(\mathcal{E}(p)^2) \leq \mathrm{Tr}(p)$$

Demostración. Sea $E = E_{L^\infty(X\mu)}(p)$. Por la unicidad de $\mathcal{E}(p)$ este conmuta con todo operador unitario de $L^\infty(X\mu)$, por lo tanto está en $L^\infty(X\mu)$ por Ejercicio 10.2.4. Por otro lado, tenemos que $E(y) = E(p)$ para todo $y \in W(x)$ por las propiedades (iv) y (v) de la espectación condicional. En particular para $y = \mathcal{E}(p)$, es decir que $E(\mathcal{E}(p)) = E(p) = \mathcal{E}(p)$. Pero $\phi(\mathcal{E}(p)) \leq \phi(p) = \mathrm{Tr}(p) \leq \infty$. Finalmente sólo falta ver que $\phi(\mathcal{E}(p)) \neq 0$. En efecto, $E(p) = E(p^2)$ resulta ser un operador autoadjunto no nulo, por lo cual tiene traza no nula. $\square$

Teorema 10.3.6. *Sea* Γ *actuando libre y ergódicamente en el espacio numerablemente separable de medida* σ*-finita* (X, μ) *de modo que no haya ninguna medida* σ*-finita* Γ*-invariante en* X *absolutamente continua con respecto a* μ*. Entonces,* $L^\infty(X\mu) \rtimes \Gamma$ *es un factor que no es de tipo* I *ni* II.

Demostración. Si el producto cruzado fuera de tipo I o II, definamos la medida ν en X por $\nu(A) = \mathrm{Tr}(\chi_A)$. Por el resultado anterior $\nu(A)$ debería ser finito y no nulo para algún A pues la función $f = E(p)^2$, que es L^∞, debe dominar un múltiplo de χ_A para algún A (por ejemplo, si A es el conjunto de x tal que $f(x)$ es suficientemente cercano a $\|f\|$). Pero por ergodicidad $X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(A)$, salvo conjuntos de medida nula, por lo tanto ν es σ-finita.

La medida ν es automáticamente absolutamente continua respecto de μ por su definición. Y la invariancia de ν por Γ se sigue del hecho que $\mathrm{Tr}(u_\gamma x u_\gamma^{-1}) = \mathrm{Tr}(x)$ para todo $x \geq 0$. □

Definición 10.3.7. Un factor que no es de tipo I o II se dice de *factor de tipo* III.

El Ejemplo 10.2.21 corresponde a un factor de tipo III pues el subgrupo $\mathbb{Q}$ actúa ergódicamente, or lo tanto la única posible medida omavroamte es un múltiplo de dx por el Ejercicio 10.3.1 y esta no es invariante por mulplicación.

observemos que las técnicas expuestas funcionan con alguna generalidad mayor que sólo para la acción de grupos en espacios de medida.

Ejercicio 10.3.5. Adaptar las demostraciones de los resultados obtenidos en esta sección para mostrar que $M \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ es un factor de tipo III si la acción α está generada por un sólo automorfismo de un factor de tipo II_∞ multiplicando la traza por un factor $\lambda \neq 1$.

Bibliografía

[A] Amblard, *Notas de curso de Análisis Funcional I*, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, 1984.

[C] J. A. Cuenca, *On one-sided infinite-dimensional normed real algebras*, Publ. Mat. 36 (1992), 485-488.

[G] V. Ya. Golodets, *Classification of representations of the anticommutation relations*, Russ. Math. Surv. **24**, 1–63 (1969)

[GHJ] F. M. Goodman, P. de la Harpe y V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of albebras*, Springer-Verlag, 1989.

[GKS] E. Galina, A. Kaplan y L. Saal, *Spinor types in infinite dimensions*, J. of Lie Theory 15 (2005), 457–495.

[GN] I. M. Gelfand, M. A. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space*, Math. Sbornik, vol 12 (1943).

[GW] L. Gårding and A. Wightman, *Representations of the anticommutation relations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **40**, 617–621 (1954)

[J] V.F.R. Jones, *Von Neumann Algebras*, http://math.berkeley.edu/ṽfr/math209.html, 2003.

[K] I. Kaplansky, *Infinite dimensional quadratic forms admitting composition*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 956-960.

[L] S. Lang, $SL_2(\mathbb{R})$, Springer-Verlag, 1985.

[McD] D. McDuff , *Uncountably many* II_1 *factors*, Ann of Math. 90 (1969), 372-377.

[RS] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, 1972.

[RP] A. Rodríguez Palacios, *One-sided division absolute valued algebras*, Publ. Mat. 36 (1992), 925–954.

[W] A. Wassermann, *Operator algebras and conformal field theory III. Fusion of positive energy representations of LSU(N) using bounded operators*, Inventiones Mathematicae 133 (1998), Number 3 / August, 1998 Category Article DOI 10.1007/s002220050253 Pages 467-538