INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE INVARIANTES

ALVARO RITTATORE

ABSTRACT. Estas notas corresponden al cursillo "Introducción a la teoría de invariantes" dictado en elENA III, Vaquerías, Córdoba, 31 de julio – 5 de agosto de 2006. En ellas pretendemos introducir brevemente el lenguaje de la teoría de invariantes moderna. En particular, presentaremos las definiciones de cociente categórico y geométrico, viendo en más detalle el caso de un grupo finito actuando en una variedad algebraica afín.

CONTENTS

INTRODUCCIÓN

La construcción de invariantes es una de las herramientas fundamentales — sino la fundamental — para la clasificación de objetos matemáticos. En ese sentido, la teoría de invariantes permea toda la matemática. En la actualidad, se considera que su objeto de estudio son las acciones de grupos de transformaciones en variedades.

En [5] el lector encontrará una exposición sobre la historia y principales problemas abordados por la teoría de invariantes. Comentemos sólo aquí que comienza con los trabajos de Euler,

Date: Mayo 2006.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 14L24, 14L30.
Estas notas fueron escritas con apoyo parcial del proyecto Clemente Estable No 10018.

Lagrange, Gauss, Cauchy y otros sobre la clasificación de formas cuadráticas. A mediados del siglo XIX, se desarrollan los métodos algebraicos formales para la construcción de invariantes y se presenta el problema de la generación finita de invariantes. Los trabajos de Hilbert, y en particular el décimo cuarto problema de su famosa lista presentada en el Congreso Matemático Mundial de París en 1900, están en el origen de la teoría de invariantes tal cual se entiende hoy en día.

El objetivo de este cursillo es presentar las definiciones y problemas básicos de la teoría de invariantes, asumiendo conocimientos mínimos de álgebra conmutativa y geometría algebraica afín. Hemos divididos las notas en 4 secciones. En la Sección 1 presentamos el lenguaje de la geometría algebraica a ser utilizado en el resto del trabajo. Las restantes secciones se corresponden a cada una de las exposiciones a realizar. En la Sección 2 presentamos las propiedades básicas de los grupos algebriacos y sus acciones regulares en variedades. En la Sección 3 definimos los cocientes categórico y geométrico, y establecemos algunas propiedades de los mismos. En la Sección 4 probamos la generación finita de invariantes en el caso de los grupos finitos, asícomo la relación entre la existencia de cociente y el problema de la generación finita de invariantes. Finalizamos la sección presentandos dos resultados cruciales en el estudio de las acciones regulares de un grupo algebraico: los teoremas de Sumihiro y Rosenlicht.

En lo que sigue supondremos que $\Bbbk$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Si bien muchas de las definiciones y resultados presentados son válidos (con eventuales modificaciones) en característica arbitraria, por simplicidad supondremos que $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Entenderemos por variedad algebraica afín una variedad algebraica afín definida sobre $\Bbbk$.

1. Preliminares

En esta sección presentamos muy brevemente — y de forma no muy rigurosa — las nociones básicas de geometría algebraica necesarias en lo que sigue. Omitiremos las pruebas; el lector interesado en las mismas puede consultar por ejemplo [2], y por un tratamiento más en profundidad de la geometría algebraica [3].

1.1. **Conjuntos algebraicos y variedades algebraicas afines.**

Si $\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ denota el álgebra de polinomios en n-variables con coeficientes en $\Bbbk$, y $X\subset \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ es un subconjunto, notemos por

$$\mathcal{V}(X)=\big\{(a_1,\dots,a_n)\in\Bbbk^n : f(a_1,\dots,a_n)=0\big\}\,.$$

Por ser $\Bbbk$ algebraicamente cerrrado este conjunto es no vacío (Hilbert Nullstellensatz, ver Teorema 1.2), y se verifican las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{V}(X)=\mathcal{V}\big(\langle X\rangle\big)$, donde $\langle X\rangle$ denota el ideal generado por X. En particular, existen $f_1,\dots,f_l\in X$ tales que $\mathcal{V}(X)=\mathcal{V}(f_1,\dots f_l)$.
(2) $\mathcal{V}(\emptyset)=\Bbbk^n$, $\mathcal{V}\big(\Bbbk[x_1,\dots,x_n]\big)=\emptyset$.
(3) Para toda familia de ideales $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\cap_{\alpha\in A}\mathcal{V}(I_\alpha)=\mathcal{V}\big(\cup_{\alpha\in A}I_\alpha\big)$.
(4) Para todo par de ideales $I,J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, $\mathcal{V}(I)\cup\mathcal{V}(J)=\mathcal{V}(I\cap J)=\mathcal{V}(IJ)$.

Definición 1.1. Llamaremos *topología de Zariski* en $\Bbbk^n$ a la topología cuyos cerrados son de la forma $\mathcal{V}(X)$, para $X\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$. Un *conjunto algebraico* de $\Bbbk^n$ es un cerrado en la topología Zariski.

Recíprocamente, dado un subconjunto $X \subset \Bbbk^n$ podemos considerar el ideal

$$\mathcal{I}(X) = \big\{ f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n] : f|_X = 0 \big\} .$$

El Nullstellensatz nos dice que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal radical:

Teorema 1.2 (Nullstellensatz)**.** *Para todo subconjunto $X \subset \Bbbk^n$, el ideal $\mathcal{I}(X)$ es radical. Más aún, $X = \{p\}$ si y solamente si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal maximal.*

Además se cumple que para todo $X \subset \Bbbk^n$, $\mathcal{V}\mathcal{I}(X) = \overline{X}$ (topología Zariski), y para todo $I \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, se verifica $\mathcal{I}\,\mathcal{V}(I) = \sqrt{I}$.

Observación 1.3. Si $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, entonces el conjunto $\Bbbk^n_f = \{p \in \Bbbk^n : f(p) \neq 0\}$ es un abierto de $\Bbbk^n$. Es fácil ver que estos conjuntos, llamados los *abiertos básicos*, constituyen una base de la topología de Zariski, ver Ejercicio 1.

Definición 1.4. Sea $X \subset \Bbbk^n$ un conjunto algebraico y $f_1, f_2 \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. Entonces $f_1|_X = f_2|_X$ si y solamente si $f_1 - f_2 \in \mathcal{I}(X)$. Luego, la restricción a X induce un morfismo sobreyectivo $\Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$. Llamaremos *álgebra de funciones regulares en* X al álgebra $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$.

Diremos que el par $\big(X, \Bbbk[X]\big)$ es una *variedad algebraica afín* (omitiremos la referencia al álgebra de funciones regulares cuando esté claro por el contexto).

Observación 1.5. (1) Si X es una variedad algebraica, el álgebra $\Bbbk[X]$ es *afín*, es decir finitamente generada sin nilpotentes.
(2) Recíprocamente, sea A un álgebra afín y $a_1, \dots, a_n$ generadores. Entonces el morfismo sobreyectivo inducido $\varphi : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to A$, $\varphi(x_i) = a_i$, induce un isomorfismo de álgebras $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\operatorname{Ker}\varphi \cong A$.

Por el Nullstellensatz, tenemos que en esta correspondencia los ideales maximales de A están en biyección con los puntos de $\mathcal{V}\big(\operatorname{Ker}(\varphi)\big) \subset \mathbb{A}^n$; ver Ejercicio 3.

Ejemplo 1.6. (1) El espacio $\Bbbk^n$ es una variedad algebraica, lo notaremos por $\mathbb{A}^n$, y lo llamaremos el *espacio afín.*
(2) Un punto $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ tiene como ideal asociado el ideal maximal $\mathcal{M}_p = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$; por lo tanto $\{p\}$ es cerrado. El Nullstellensatz puede leerse entonces como *los ideales maximales de* $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ *son de la forma* $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$*,* $a_i \in \Bbbk$.

Definición 1.7. Diremos que la variedad afín X es *irreducible* si toda vez que $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 cerrados, entonces o bien $Y_1 = X$ o bien $Y_2 = X$.

Observación 1.8. (1) Si X es una variedad algebraica afín, entonces los cerrados de la topología Zariski se obtienen como los ceros comunes de un conjunto finito de funciones regulares $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$.
(2) Nuevamente, si $f \in \Bbbk[X]$, entonces el conjunto $X_f = \big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\}$ es un abierto de X para la topología de Zariski, siendo la familia de tales conjuntos una base para esta topología, ver Ejercicio 1.

Definición 1.9. Diremos que un mapa $\varphi : X \to Y$ entre variedades agebraicas afines es *polinomial* o un *morfismo de variedades algebraicas afines* si $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk^X = \{f : X \to \Bbbk \text{ función}\}$, $\varphi^*(p) = p \circ \varphi$, tiene su imagen contenida en $\Bbbk[X]$. En otras palabras, precomponer una función regular en Y con φ da una función regular en X.

Observación 1.10. Es fácil ver que si $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ y $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : X \to Y$, $\varphi_i \in \Bbbk^X$, entonces φ es morfismo si y sólo si $\varphi_i \in \Bbbk[X]$, ver Ejercicio 2.

Lema 1.11. *(1) Un morfismo $\varphi : X \to Y$ entre variedades algebraicas afines es una* inmersión cerrada *(es decir inyectivo con imagen cerrada) si y sólo si $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ es sobreyectivo.*
(2) Un morfismo $\varphi : X \to Y$ es dominante *(i.e. $\overline{\varphi(X)} = Y$) si y sólo si φ^* es inyectivo.*

Proof. Ver Ejercicio 7. □

1.2. **Variedades algebraicas.**

Comenzamos por definir el haz de funciones regulares en una variedad afín.

Definición 1.12. Sea X un espacio topológico. Un *haz* de anillos es una correspondencia $\mathcal{F}$ que a cada abierto $U \subset X$ le asocia un anillo $\mathcal{F}(U)$, de modo que si $U \subset V$ son dos abiertos, existe un morfismo de anillos (la *restricción*) $r_{VU} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ tales que se verifica
(1) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
(2) si $U \subset V \subset W \subset X$ son abiertos, entonces $r_{WU} = r_{VU} \circ r_{WV}$ y $r_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$;
(3) para todo abierto $U \subset X$, todo cubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$ de U por subconjunto abierto y toda familia $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tal que $r_{V_i\, V_i\cap V_j}(s_i) = r_{V_j\, V_i\cap V_j}(s_j)$, existe una única $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $r_{UV_i}(s) = s_i$, para todo $i \in I$.

El anillo $\mathcal{F}(U)$ se denomina el anillo de *secciones* del haz $\mathcal{F}$ en el abierto U.

Definición 1.13. Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín. Definimos el *haz de funciones regulares* en X, que notaremos $\mathcal{O}_X$, del siguiente modo.

Si $f \in \Bbbk[X]$, entonces $\mathcal{O}_X(X_f) = \Bbbk[X]_f$, el localizado del anillo $\Bbbk[X]$ respecto a f. Si $U \subset X$ es un abierto Zariski cualquiera, cubrimos U por abiertos básicos X_{f_i} y definimos $\mathcal{O}_X(U)$ de modo tal que se cumpla (3) para este cubrimiento. Ver [2, Sec. 1.4] o [3] por una prueba de que este procedimiento efectivamente produce un haz de anillos.

Observación 1.14. Si X es una variedad afín y $U \subset X$ un abierto, la $\Bbbk$-álgebra $\mathcal{O}_X(U)$ puede interpretarse como el álgebra de las funciones regulares de U en $\Bbbk$.

A modo de ejemplo, si $f \in \Bbbk[X]$, entonces $\mathcal{O}_X(X_f) = \Bbbk[X]_f$ puede interpretarse como que la función regular $f \in \Bbbk[X]$ puede invertirse en X_f, dando lugar a una función regular en ese abierto — esta idea vaga puede formalizarse, consultar la biliografía recomendada.

Definición 1.15. Una *prevariedad algebraica* es un espacio topológico X munido un *atlas afín*, es decir tal que existe un cubrimiento U_i por abiertos con U_i homeomorfo a una variedad afín, de modo que las estructuras de variedades afines inducidas por U_i y U_j en $U_i \cap U_j$ coinciden.

En este caso, se puede probar que existe un único haz de $\Bbbk$-álgebras en X, que notaremos $\mathcal{O}_X$, de modo que $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{U_i}(U)$ para todo abierto $U \subset U_i$.

Consideremos en $X\times X$ la topología inducida por la topología Zariski de $U_i\times U_j$ (ver Ejercicio 6). Diremos que X es una *variedad algebraica* si la diagonal $\Delta(X) \subset X \times X$ es cerrada en $X \times X$.

Observación 1.16. (1) Si X es una variedad algebraica e $Y \subset X$ es un cerrado de X, entonces Y es una variedad algebraica; diremos que $Y \subset X$ es una *subvariedad* de X.
(2) Si X es una variedad algebraica y $U \subset X$ un abierto, entonces U es una variedad algebraica.
(3) El álgebra $\mathcal{O}_X(U)$ puede interpretarse como el álgebra de las funciones regulares en U (por ejemplo, a través de un cubrimiento por abiertos afines).

Ejemplo 1.17. Una subvariedad cerrada de una variedad afín es afín, pero no es necesariamente así en el caso de los abiertos, como muestra el ejemplo de $X = \mathbb{A}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\} \subset \mathbb{A}^2$. En efecto, toda función regular $f \in \mathcal{O}_X(X)$ puede extenderse a una función regular de $\mathbb{A}^2$. Luego, si X fuera afín sería $\mathbb{A}^2$, ver Ejercicio 8.

Definición 1.18. Sea X un espacio topológico irreducible X, y $X_0 = X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_l = \emptyset$ una familia de conjuntos cerrados irreducibles (inclusiones estrictas). Diremos la cadena $X_0 \supset \cdots \supset X_l$ tiene largo l.

Notemos que si X es una variedad algebraica afín, entonces toda cadena de irreducibles tiene largo finito, por lo que tiene sentido definir la *dimensión* de X, que notamos $\dim X$, como el largo de una cadena maximal de irreducibles — puede probarse que toda cadena maximal de irreducibles tiene el mismo largo. Si X es una variedad algebraica irreducible, al ser cubierta por abiertos afines toda cada de irreducibles será de largo finito, y podemos nuevamente definir la dimensión de X como el largo de una cadena maximal.

Definición 1.19. Sea X, Y dos variedades algebraicas. Una función continua $f : X \to Y$ es un *morfismo de variedades algebraicas* si para todo $U \subset Y$ $f^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathbb{k}^{f^{-1}(U)}$, $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, tiene imagen contenida en $\mathcal{O}_X\big(f^{-1}(U)\big)$.

Definición 1.20. Sea X una variedad algebraica. Diremos que un subconjunto $Y \subset X$ es *constructible* si puede describirse como uniones e intersecciones finitas de cerrados y abiertos de X.

Ejemplo 1.21. Consideremos el subconjunto $Y = \big\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x \neq 0\big\} \cup \big\{(0, 0)\big\} \subset \mathbb{A}^2$. El conjunto X es constructible, pero no es una variedad algebraica (ver Ejercicio 9).

Terminamos esta sección con dos resultados debidos a Chevalley sobre morfismos de variedades algebraicas.

Teorema 1.22 (Chevalley)**.** *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades algebraicas. Entonces $f(X) \subset Y$ es constructible.* □

Teorema 1.23 (Chevalley)**.** *Sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante de variedades algebraicas irreducibles, y sea $r = \dim X - \dim Y$. Entonces*
(1) existe un abierto no vacío $U \subset Y$ contenido en $f(X)$ tal que para todo $y \in U$, $\dim f^{-1}(y) = r$;
(2) si además para todo $W \subset Y$ se verifica que para toda componente irreducible Z de $f^{-1}(W)$ $\dim Z = \dim W + r$, entonces f es un mapa abierto. □

Ejercicios.

(1) Sea X una variedad algebraica afín. Probar que los abiertos básicos son una base de la topología Zariski.
(2) Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ dos variedades afines. Probar que una función $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : X \to Y$ es un morfismo si y sólo si $\varphi_i \in \mathbb{k}[X]$ para todo $i = 1, \dots, m$.
(3) Sea A un álgebra afín, y $\varphi : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \to A$ un morfismo de álgebras sobreyectivo.
    (a) Consideremos el *espectro maximal*
    $$\operatorname{Spm}(A) = \{M \subset A : M \text{ ideal maximal de } A\}.$$
    Probar que los conjuntos $\mathcal{V}(I) = \big\{M \in \operatorname{Spm}(A) : I \subset M\big\}$, $I \subset A$ ideal, son los cerrados de una topología en $\operatorname{Spm}(A)$, que llamaremos la *topología Zariski.*
    (b) Probar que φ induce un homeomorfismo entre $\mathcal{V}\big(\operatorname{Ker}(\varphi)\big) \subset \mathbb{A}^n$ y $\operatorname{Spm}(A)$.

(4) (a) Probar que $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ es una variedad algebraica afín, identificándolo con la subvariedad de $\mathbb{A}^2$ asociada al ideal $I = \langle xy-1\rangle \subset \Bbbk[x,y]$. Deducir que $\Bbbk[X] = \Bbbk[x,x^{-1}]$.
(b) Dado $f \in \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, consideremos el conjunto $\mathbb{A}^n_f = \bigl\{x \in \mathbb{A}^n : f(x) \neq 0\bigr\}$. Probar que este conjunto es homeomorfo (con la topología de Zariski) a $\mathcal{V}\bigl(\langle xf(x)-1\rangle\bigr) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. De este modo, $\mathbb{A}^n_f$ es una variedad algebraica afín. Deducir que $\Bbbk\bigl[\mathbb{A}^n_f\bigr] \cong \Bbbk\bigl[x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f(x_1,\dots,x_n)}\bigr]$.
(c) Generalizar al caso X una variedad algebraica afín y $f \in \Bbbk[x]$.

(5) (a) Probar que una variedad afín X es irreducible si y sólo si el ideal asociado $\mathcal{I}(X)$ es primo. En particular, X es irreducible si $\Bbbk[X]$ es un dominio.
(b) Dar un ejemplo de una variedad algebraica reducible (i.e. que no es irreducible) que sea conexa.

(6) (a) Probar que $\Bbbk[x_1,\dots,x_n]\otimes\Bbbk[y_1,\dots,y_m] \cong \Bbbk[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$, via el isomorfismo $\varphi(p\otimes q)(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = p(x_1,\dots,x_n)q(y_1,\dots,y_m)$.
(b) Probar que si $n = s+t$, $st \neq 0$, entonces la topología Zariski de $\mathbb{A}^n$ no es la topología producto de $\mathbb{A}^s \times \mathbb{A}^t$.
(c) Sean $X \subset \mathbb{A}^s$ e $Y \subset \mathbb{A}^t$ dos variedades algebraicas afines. Probar que $X\times Y \subset \mathbb{A}^{s+t}$ es un cerado. Calcular su ideal en función de los ideales de X e Y. Diremos que $X \times Y$ es la *variedad producto* de X con Y. Observar que de acuerdo a la parte anterior, la topología de la variedad producto no es la topología producto usual.
(d) Probar que $\Bbbk[X\times Y] \cong \Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]$.

(7) Probar el Lema 1.11.
(8) Probar que $\mathbb{A}^2 \setminus \bigl\{(0,0)\bigr\}$ no es una variedad afín (cf. Ejemplo 1.17).
(9) Probar lo afirmado en el Ejemplo 1.21.
(10) Sea $X = \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^1$ (unión disjunta). Consideremos en X la relación de equivalencia $x \sim y$ si $x = y \neq 0$. Probar que $X/\sim$ es una prevariedad que no es variedad.

2. Grupos algebraicos afines

2.1. **Definición y primeros ejemplos.**

En esta sección presentamos brevemente las definiciones y resultados básicos de la teoría de grupos algebraicos afines.

Definición 2.1. Sea G una variedad algebraica afín. Supongamos que el conjunto subyacente G está equipado con una estructura de grupo abstracto, es decir con un producto asociativo $m : G\times G \to G$, un elemento distinguido $1 \in G$ y un mapa inversa $i : G \to G$ satisfaciendo los axiomas de grupo. Si además $m : G\times G \to G$ e $i : G \to G$ son morfismos de variedades algebraicas, diremos que G es un *grupo algebraico afín.*

Si G, H son dos grupos algebraicos afines, un morfismo de grupos $f : G \to H$ es un *morfismo de grupos algebraicos* si además es un morfismo de variedades algebraicas.

La noción de *isomorfismo de grupos algebraicos* es la estándar: es un morfismo de grupos algebraicos que es un isomorfismo de variedades algebraicas.

Un *subgrupo algebraico* o un subgrupo cerrado de un grupo algebraico G es una subvariedad cerrada $H \subset G$ tal que H es un subgrupo abstracto de G.

Observación 2.2. Es claro que si G es un grupo algebraico y $H \subset G$ un subgrupo algebraico, entonces H es un grupo algebraico con la restricción del producto e inversa de G a H.

Ejemplo 2.3. El *grupos aditivo* G_a consiste en la variedad algebraica $\mathbb{A}^1$ con la estructura dada por la suma en $\Bbbk$, es decir $m(a,b) = a+b$, $i(a) = -a$, para todo $a, b \in \mathbb{A}^1 = \Bbbk$.

En efecto, $m : G_a \times G_a \to G_a$ es un morfismo de variedades algebraicas, ya que $\Bbbk[G_a] = \Bbbk[x]$ y para todo $p \in \Bbbk[x]$, $m^*(p)(x,y) = p(x+y) \in \Bbbk[x,y]$. Del mismo modo se prueba que la inversa es un morfismo de variedades algebraicas (ver Ejercicio 1).

Ejemplo 2.4. El grupo multiplicativo G_m consiste en la variedad algebraica afín $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ munida del producto de $\Bbbk^*$ (ver Ejercicio 1.4).

En efecto, $m(a,b) = ab$ para todo $a, b \in G_m$, y recordando que $\Bbbk[G_m] = \Bbbk[x, x^{-1}]$, obtenemos que $m^* : \Bbbk[x, x^{-1}] \to \Bbbk[x, x^{-1}] \otimes \Bbbk[x, x^{-1}]$ está dada por $m^*(x^{\pm 1}) = x^{\pm 1} \otimes x^{\pm 1} \in \Bbbk[x, x^{-1}]$. Claramente $i^*(x^{\pm 1}) = x^{\mp 1}$, por lo que G_m es un grupo algebraico afín.

Ejemplo 2.5. Obviamente, todo grupo finito es un grupo algebraico.

Ejemplo 2.6. *El grupo general lineal* $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

El conjunto $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ de las matrices $n \times n$ invertibles pueden verse como el conjunto de las matrices tales que el determinante (una función polinomial) no se anula; luego es una variedad algebraica afín, con $\Bbbk\big[\mathrm{GL}_n(\Bbbk)\big] = \Bbbk[x_{11}, \dots, x_{nn}, \frac{1}{\det}]$, donde x_{ij} es la función coordenada que a una matriz le asocia su coeficiente en la fila i-ésima y columna j-ésima.

El producto de matrices es claramente un morfismo de variedades algebraicas. Por otro lado, es sabido que los coeficientes de la inversa de una matriz A son polinomiales en los coeficientes de A y $\det(A)$, por lo que $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ es un grupo algebraico afín.

El conjunto $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ de las matrices con determinante 1 claremente es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

Ejemplo 2.7. Los grupos clásicos son grupos algebraicos afines, ver por ejemplo [2, Cap. 3].

Ejemplo 2.8. Dado que el producto de dos grupos algebraicos en un grupo algebraico (ver Ejercicio 3), el *toro (algebraico)* $T^n = G_m^n$ es un grupo algebraico afín.

Lema 2.9. *Sea G un grupo algebraico afín y $U, V \subset G$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de G, con $\overline{V} = G$. Entonces $G = UV$.*

Proof. La inversión y la multiplicación a la derecha — la *traslación derecha* — por un elemento fijo son isomorfismos de variedades algebraicas. Luego para todo $x \in G$ $xV^{-1} = \{xv^{-1} : v \in V\}$ es un abierto denso de V, por lo que $U \cap xV^{-1} \neq \emptyset$, es decir existen $a \in U$ y $b \in V$ tales que $a = xb^{-1}$. □

Proposición 2.10. *Sea G un grupo algebraico afín y $H \subset G$ un subconjunto constructible, tal que es un subgrupo abstracto. Entonces $\overline{H} = H$, es decir H es un subgrupo algebraico de G (ver Ejercicio 4).*

Proof. Por ser H constructible, existe $U \subset H$ abierto no vacío en el grupo algebraico $\overline{H}$. Dado que la traslación a derecha es un isomorfismo de variedades algebraicas, deducimos que $H = \cup_{h \in H} hU$ es abierto en $\overline{H}$. Aplicando el lema 2.1 al par de abiertos H, H deducimos que $H = HH = \overline{H}$. □

Teorema 2.11. *Sea $\varphi : G \to H$ un morfismo de variedades algebraicas. Entonces*
(i) $\operatorname{Ker} \varphi \subset G$ *es un subgrupo normal cerrado.*
(ii) $\operatorname{Im} \varphi \subset H$ *es un subgrupo cerrado.*
(iii) $\dim G = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Proof. Ver ejercicio 7. □

Teorema 2.12. *Sea G un grupo algebraico afín.*
(i) Las componentes irreducibles de G son sus componentes conexas.
(ii) $G = \cup_{i=1}^{r} x_i G_1$, donde G_1 es la componente irreducible por la identidad y $x_1, \dots, x_r \in G$. Más aún la componente irreducible por x es xG_1.
(iii) La componente irreducible por la identidad es un subgrupo normal irreducible de G.
(iv) Si H es otro grupo algebraico y $\varphi : G \to H$ un morfismo de grupos algebraicos, entonces $\varphi(G_1) \subset H_1$.

Proof. (i) Afirmamos que alcanza con probar que hay una única componente irreducible por 1. En efecto, si $X \subset G$ es una componente irreducible y $x \in X$, entonces $\varrho_{x^{-1}} = \varrho_x^{-1} : X \to G$, $\varrho(a) = x^{-1}a$ tiene imagen irreducible, y como contiene a $\varrho_{x^{-1}}(x) = x^{-1}x = 1$, deducimos que $\varrho_x^{-1}(X) \subset G_1$. Como ϱ_y es un isomorfismo para todo $y \in G$, deducimos que $G_1 = X$.

Sean $X, Y \subset G$ componente irreducibles de G conteniendo a 1. Entonces $m(X \times Y) = XY \subset G$ es irreducible y contiene a $X \cup Y = (X \cdot 1) \cup (1 \cdot Y)$, por lo que $XY = X = Y$.
(ii) El mismo argumento de (i) muestra que si X es una componente irreducible y $x \in X$, entonces $X = xG_1$. Como las compontentes irreducibles son una cantidad finita, deducimos el resto de la afirmación.
(iii) Como antes $m(G_1 \times G_1) \subset G_1$, y del mismo modo se prueba que $G_1^{-1} \subset G_1$. Luego G_1 es un subgrupo. Para probar que G_1 es normal alcanza con observar que el razonamiento anterior se puede aplicar usando traslaciones a izquierda, probando entonces que si $x \in X$, X una componente conexa, entonces $X = xG_1 = G_1x$.
(iv) Nuevamente, como G_1 es irreducible $\varphi(G_1)$ es un conjunto irreducible que contiene a 1_H, por lo que $\varphi(G_1) \subset H_1$. □

2.2. **Acciones de grupos algebraicos. Módulos.**

Es bien sabido que estudio de la estructura de un grupo a través de sus acciones en conjuntos arbitrarios es de gran utilidad; dentro de este esquema, tiene particular relevancia el estudio de la teoría de representaciones del grupo. En el contexto de los grupos algebraicos la interpretación de los mismos como grupos de transformaciones de objetos geométricos tiene particular relevancia.

Definición 2.13. Sea G un grupo algebraico y X una variedad diferenciable. Una *acción regular (izquierda)* de G en X es un morfismo de variedades $\varphi : G \times X \to X$, que es además una acción del grupo abstracto G en X, es decir, si $\varphi(a, x) = a \cdot x$, $1 \cdot x = x$, $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ para todo $a, b \in G$, $x \in X$. Diremos que X es una *G-variedad*.

Observación 2.14. Notemos que si $a \in G$, entonces $\varphi_a : X \to X$, $\varphi_a(x) = a \cdot x$, es un isomorfismo de variedades algebraicas.

Definición 2.15. Sea G un grupo actuando en un conjunto X. Si $x \in X$, llamamos *órbita del elemento x por la acción de G*, y notamos $\mathcal{O}(x) = G \cdot x$, al conjunto $\{a \cdot x : a \in G\} \subset X$.

Llamamos *estabilizador* de x o *grupo de isotropía* de x al conjunto $G_x = \{a \in G : a \cdot x = x\}$.

Si $G_x = G$ diremos que x es un *punto fijo* para la acción de G. Notaremos ${}^G X$, o X^G cuando no haya confusión posible, al conjunto de los puntos fijos por la acción de X.

Observación 2.16. Si G es un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X, entonces el grupo de isotropía de un elemento $x \in X$ es un subgrupo cerrado de G.

En efecto, consideremos el *mapa de órbitas* $\phi : G \times X \to C \times X$, $\phi(a, x) = (x, g \cdot x)$. Si $\iota : G \to G \times X$ es la inclusión $\iota(a) = (a, x)$, entonces $G_x = (\phi \circ \iota)^{-1}\Delta(X)$, donde $\Delta(X) \subset X \times X$ es la diagonal.

Definición 2.17. Un *espacio homogéneo* es una G-variedad X, G un grupo algebraico, tal que $G \cdot x = X$ para algún (para todo) $x \in X$.

Ejemplo 2.18. Si G es un grupo algebraico, la multiplicación induce una acción $G \times G \to G$, $a \cdot b = ab$, de G en sí mismo (basta aplicar los axiomas de grupo), siendo un espacio homogéneo.

Ejemplo 2.19. Si $H \subset G$ es un subgrupo, toda acción de G induce una de H por restricción.

En particular, H actúa en G por multiplicación a izquierda. En este caso, las órbitas de H son las coclases Hx, $x \in G$.

Ejemplo 2.20. G actúa sobre sí mismo por conjugación: $a \cdot b = aba^{-1}$, $a, b \in G$. En este caso las órbitas son las clases de conjugación de G.

Ejemplo 2.21. En la línea del ejemplo anterior, consideremos la acción de las matrices invertibles en las matrices, $\varphi : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \times \mathrm{M}_n(\Bbbk) \to \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, $A \cdot B = ABA^{-1}$. En este caso las órbitas consisten en las matrices equivalentes.

Ejemplo 2.22. *El espacio homogéneo* $(G \times G)/\Delta(G)$.

Consideremos la acción de $G \times G$ en G dada por $(a, b) \cdot x = axb^{-1}$. La órbita del 1 es todo G, y el grupo de isotropía de 1 es $\Delta(G)$. Luego, *como conjuntos actuados por un grupo abstracto*, G es isomorfo al espacio homogéneo $(G \times G)/\Delta(G)$.

Definición 2.23. Sea G un grupo algebraico y X, Y G-variedades. Diremos que un *morfismo* $\varphi : X \to Y$ es de *G-variedades* si $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ para todo $a \in G$ y $x \in X$.

Teorema 2.24. *Sea G un grupo algebraico afín actuando regularmente en una variedad algebraica X. Entonces para todo $x \in X$, la órbita $\mathcal{O}(x)$ es abierta en $\overline{\mathcal{O}(x)}$.*

Proof. Consideremos el mapa $\varphi_x : G \to Y\overline{\mathcal{O}(x)}$, $\varphi_x(g) = g \cdot x$. El mapa φ_x es morfismo de variedades algebraicas, por lo que su imagen $\mathcal{O}(x)$ es constructible, y contiene entonces un abierto U de Y. Pero como $\mathcal{O}(x)$ es homogéneo, trasladando U por los elementos de G tenemos que $\mathcal{O}(x) = \cup_{a \in G} a \cdot U$ es abierto en Y. □

Corolario 2.25. *Toda acción regular de un grupo algebraico G en una variedad algebraica X contiene órbitas cerradas.*

Proof. Podemos asumir que tanto G como X son irreducibles. Probemos el resultado por inducción en $\dim X$. Si $\dim X = 0$ no hay nada que probar. Si $\dim X = n$, y $x \in X$ consideramos $Y = \overline{\mathcal{O}(x)} \setminus \mathcal{O}(x)$. Si $Y \neq \emptyset$, entonces Y es un cerrado no vacío de X que no es igual a X, por lo que $\dim Y < \dim X$. Como Y es G-estable, deducimos por hipótesis de inducción que existe una G-órbita cerrada en Y, que obviamente será cerrada en X. □

Definición 2.26. Sea V un espacio vectorial finito dimensional, considerado como variedad algebraica afín. Sea G un grupo algebraico afín actuando regularmente por transformaciones lineales. Diremos que V es un *G-módulo racional*, o una *representación lineal.* En otras palabras, un G-módulo racional es una representación de G como grupo abstracto, de modo que el morfismo $\varphi : G \times V \to V$ es un morfismo de variedades algebraicas (ver ejercicio 8).

Si V es un espacio vectorial de dimensión infinita, diremos que es un *G-módulo racional* si es una representación de G como grupo abstracto, de modo que para todo $v \in V$ existe $W \subset V$, G-submódulo de dimensión finita tal que $v \in W$ y $G \times W \to W$ es un morfismo de variedades algebraicas, es decir, W es un G-módulo racional.

Definición 2.27. Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X. Definimos la acción izquierda $G \times \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X)$ por $a \cdot f(x) = f(a^{-1} \cdot x)$, y la acción derecha $\mathcal{O}_X(X) \times G \to \mathcal{O}_X(X)$ por $(f \cdot a)(x) = f(a \cdot x)$, ver Ejercicio 5.

Observemos que las acciones definidas más arriba son por automorfismos de $\mathbb{k}$-álgebras, es decir $a \cdot (fg) = (a \cdot f)(a \cdot g)$, y $(fg) \cdot a = (f \cdot a)(g \cdot a)$.

Teorema 2.28. *Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad afín X. Entonces para la acción inducida $\mathbb{k}[X]$ es un G-módulo racional.*

Proof. Sea $\varphi : G \times X \to X$, $\varphi(a, x) = a^{-1} \cdot x$; consideremos $\varphi^* : \mathbb{k}[X] \to \mathbb{k}[G \times X] \cong \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X]$. Entonces φ^* es una estructura de comódulo, por lo que la acción es racional (ver Ejercicio 6). $\square$

Terminamos esta sección con la caracterización de los grupos algebraicos afines como los subgrupos cerrados de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$.

Teorema 2.29. *Sea G un grupo algebraico afín. Entonces existe una representación racional de dimensión finita fiel de G. En particular, todo grupo algebraico afín es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ para algún $n \geq 0$.*

Proof. Consideremos la acción de G en G por multiplicación izquierda. Entonces $\mathbb{k}[G]$ es un G-módulo racional para la acción inducida de G. Sean $f_1, \dots, f_n$ un generador de $\mathbb{k}[G]$. Entonces exsite un G-módulo $V \subset \mathbb{k}[G]$ de dimensión finita con $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V$. Luego, V es un generador de $\mathbb{k}[G]$ como $\mathbb{k}$-álgebra, y existe un morfismo de G-módulo álgebras sobreyectivo $\mathcal{S}(V) \to \mathbb{k}[G]$. Por el Ejercicio 10, $\mathcal{S}(V) \cong \mathbb{k}[V^*]$, y el Lema 1.11 nos garantiza que el morfismo inducido $\varphi : G \hookrightarrow V^*$ es una inmersión cerrada, que por construcción es G-equivariante. $\square$

Ejercicios.

(1) Completar la prueba de las afirmaciones del ejemplo 2.3. Probar que bajo la identificación del ejercicio 1.6, $m^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.
(2) Completar la prueba de las afirmaciones del ejemplo 2.4.
(3) Probar que G, H son dos grupos algebraicos afines, entonces $G \times H$ lo es.
(4) Probar que si G es un grupo algebraico y $H \subset G$ es un subgrupo abstracto, entonces $\overline{H} \subset G$ es un subgrupo algebraico.
(5) Sea G un gurpo algebraico y X una G-variedad. Probar que los mapas definidos en la Definición 2.27 son acciones de G por automorfismos del álgebra.
(6) Sea G un grupo algebraico afín.
    (a) Probar que $\mathbb{k}[G]$ es un álgebra de Hopf, con la multiplicación y unidad usuales de $\mathbb{k}[G]$, comultiplicación $m^* : \mathbb{k}[G] \to \mathbb{k}[G \times G] \cong \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G]$, counidad la evaluación en 1 y antípoda i^*, donde $i(x) = x^{-1}$, $x \in G$.
    (b) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que V es un G-módulo racional si y solamente si es un $\mathbb{k}[G]$-comódulo. Sugerencia: Si V es un G-módulo, y $\varphi : G \times V \to V$ es la acción, entonces $\varphi^* : \mathbb{k}[V] \to \mathbb{k}[V \times G] \cong \mathbb{k}[V] \otimes \mathbb{k}[G]$ es la coacción.
    (c) Probar que el resultado anterior sigue siendo válido en dimensión infinita.
    (d) Completar la prueba del teorema 2.28.
(7) Probar el Teorema 2.11. Sugerencia: Para la prueba de (iii) se necesitará el teorema de Chevalley sobre la dimensión genérica de las fibras de un morfismo.
(8) Sea V, un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que V es un G-módulo racional si y sólo si el morfismo inducido $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es un morfismo de grupos algebraicos.

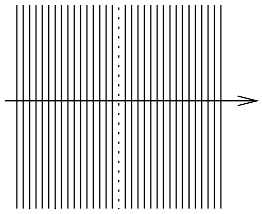

FIGURE 1. Una acción con todas sus órbitas cerradas.

(9) Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X. Probar que toda órbita de dimensión minimal es cerrada.

(10) Sea V un G-módulo racional de dimensión finita.
   (a) Probar que V^* es un G-módulo racional para la acción $a \cdot f(v) = f(a^{-1}v)$, $a \in G$, $f \in V^*$, $v \in V$.
   (b) Probar que como G-módulo álgebras, $\Bbbk[V] \cong \mathcal{S}(V^*)$, donde $\mathcal{S}(V)$ es el álgebra simétrica de V.

3. Geometría de las acciones regulares

Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X. El estudio de la geometría de esta acción puede dividirse en dos partes: por un lado el estudio de la geometría de las órbitas — los espacios homogéneos — y por otro el estudio de la relación de las órbitas entre sí. El objeto geométrico mediante el cual se controla esta relación entre las órbitas es el espacio cociente.

Comenzamos esta sección introduciendo nuevos ejemplos de acciones regulares, y mostrando como "linearizar" las acción de un grupo algebraico afín en una variedad algebraica afín. A continuación, introducimos las nociones de cociente categórico y geométrico.

3.1. **Acciones regulares.**

Ejemplo 3.1. Consideremos la acción de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ en $\mathbb{A}^n$ por multiplicación izquierda. En esta situación $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tiene dos órbitas: $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ — que es una órbita abierta — y $\{0\}$ — que es cerrada.

Ejemplo 3.2. La acción del ejemplo anterior induce una acción de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ en $\mathbb{P}^{n-1}(\Bbbk)$. Más aún, como $\Bbbk\,\mathrm{Id}$ actúa trivialmente en $\mathbb{P}^{n-1}(\Bbbk)$, la acción original induce una acción de $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$ en $\mathbb{P}^{n-1}(\Bbbk)$.

Para estas acciones, $\mathbb{P}^{n-1}(\Bbbk)$ es un espacio homogéneo.

Ejemplo 3.3. Consideremos la acción de G_a en $\mathbb{A}^2$ dada por $\lambda \cdot (x, y) = (x, y + \lambda x)$. Todas las órbitas de esta acción son cerradas, y de dos tipos: los puntos de la forma $(0, a)$, $a \in \Bbbk$, son fijos, mientras que $\mathcal{O}(a, b) = \{(a, y) : y \in \Bbbk\}$; verfigura 1

Ejemplo 3.4. La acción de G_m por homotecias en $\mathbb{A}^n$, $t \cdot v = tv$, posee una única órbita cerrada: el origen $(0, \dots, 0)$. El conjunto de las restantes órbitas — las órbitas de $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ — es el espacio $\mathbb{P}^{n-1}(\Bbbk)$ de las rectas (puntuadas) por el origen; ver figura 2.

Ejemplo 3.5. La acción de G_m en $\mathbb{A}^2$ dada por $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}t)$ tiene como órbitas las hipérbolas no degeneradas, cada eje sin el origen y el origen; ver figura 3.

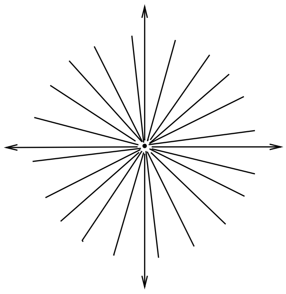

FIGURE 2. La acción de G_m en el plano por homotecias.

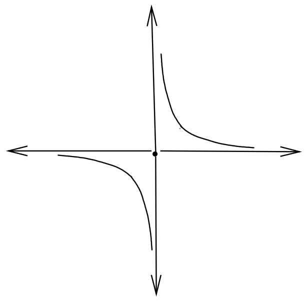

FIGURE 3. Las órbitas de la acción $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}t)$.

Mostremos ahora como una acción regular de un grupo algebraico afín en una variedad afín puede verse como la restricción de una acción lineal en $\mathbb{A}^n$ a una subvariedad cerrada.

Teorema 3.6. *Sea G un grupo algebraico afín actuando regularmente en una variedad algebraica afín X. Entonces existe una representación lineal V y una inmersión cerrada morfismo de G-variedades $\varphi : X \to V$. En otras palabras, existe $n \geq 0$ tal que $X \subset \mathbb{A}^n$ y la acción de G en X es la restricción de una acción lineal en $\mathbb{A}^n$.*

Proof. La prueba de este teorema es completamente similar a la del Teorema 2.29.

Consideremos la acción de G en G por multiplicación izquierda. Entonces $\Bbbk[X]$ es un G-módulo racional para la acción inducida de G. Sean $f_1, \dots, f_n$ un generador de $\Bbbk[X]$. Entonces exsite un G-módulo $V \subset \Bbbk[X]$ de dimensión finita con $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V$. Luego, V es un generador de $\Bbbk[X]$ como $\Bbbk$-álgebra, y existe un morfismo de G-módulo álgebras sobreyectivo $\mathcal{S}(V) \to \Bbbk[X]$. Por el Ejercicio 10, $\mathcal{S}(V) \cong \Bbbk[V^*]$, y el Lema 1.11 nos garantiza que el morfismo inducido $\varphi : X \hookrightarrow V^*$ es una inmersión cerrada, que por construcción es G-equivariante. $\square$

3.2. **Cocientes categóricos y geométricos.**

Supongamos que G es un grupo abstracto actuando en un conjunto X. Notemos por $\operatorname{Orb}(X)$ al espacio cociente de X por la relación de equivalencia $x \sim y$ si existe $a \in G$ tal que $g \cdot x = y$ (es decir las clases de equivalencia son las órbitas de la acción). Llamamos *espacio de órbitas (abstracto)* al par $\big(\operatorname{Orb}(X), \pi\big)$, donde π es la proyección canónica para la relación de equivalencia.

Observemos que en este caso se cumple la siguiente propiedad universal: para toda función $f : X \to Z$ constante en las órbitas de la acción, existe una única función $\widehat{f} : \operatorname{Orb}(X) \to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ \mathrm{Orb}_G(X) \arrow[ur, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Observemos que para que el espacio de órbitas asociado a una acción regular sea una variedad y el mapa π un morfismo, es necesario que todas las órbitas sean cerradas. El ejemplo 3.4 ya nos muestra que no siempre estamos en esta situación. Motivados por la propiedad universal, definimos entonces el análogo en el caso de acciones regulares de grupos algebraicos:

Definición 3.7. Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X. Un *cociente categórico* para la acción de G en X es un par (Y, π), donde Y es una variedad algebraica y $\pi : X \to Y$ un morfismo de variedades constante en las órbitas de G, tal que para todo otro par (Z, f), Z variedad algebraica y $f : X \to Z$ morfismo de variedades constante en las órbitas, existe un único morfismo $\widehat{f} : Y \to Z$ tal que el diagrama de abajo conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Si las fibras de π contienen exactamente una órbita, diremos que el par (Y, π) es un *espacio de órbitas*. Notaremos $Y = G\backslash X$, o, cuando no haya confusión respecto al tipo de acción (e.g. cuando todas las acciones consideradas son izquierdas), X/G.

Observación 3.8. Ya hemos comentado que el espacio de órbitas no siempre será el cociente categórico. Sin embargo, los ejemplos más abajo muestras que aunque no todas las órbitas sean cerradas, el cociente categórico puede existir.

En relación a las órbitas cerradas, observemos que si el cociente categórico X/G existe, entonces toda fibra $\pi^{-1}(y)$, $y \in X/G$, es un subconjunto cerrado G-estable de X, por lo que contiene al menos una órbita cerrada.

Observación 3.9. Es importante remarcar que el cociente categórico no necesariamente existe (ver [2, Ex. 6.4.10] por un ejemplo concreto de este hecho).

Observación 3.10. Claramente, una función regular $f : X \to \Bbbk$ es constante en las órbitas si y sólo si $f \in \Bbbk[X]^G$. Luego aplicando la propiedad universal del cociente tenemos que $\pi^* : \mathcal{O}_{X/G}(X/G) \to \mathcal{O}_X(X)^G$ es un morfismo sobreyectivo.

En efecto $\pi^*(g) = g \circ \pi$ para toda $g \in \mathcal{O}_{X/G}(X/G)$, y como π es G-invariante tenemos que $\pi^*(g)$ lo es. La propiedad universal garantiza la sobreyectividad.

Revisitemos los ejemplos de la sección anterior a la luz de estas definiciones.

Ejemplo 3.11. Para la acción de $\mathrm{Gl}_n(\Bbbk)$ en $\mathbb{A}^n$ por multiplicación a izquierda (Ejemplo 3.1), todo morfismo $f : \mathbb{A}^n \to Z$ constante en las órbitas es constante en el abierto $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$, por lo que es constante. Luego, el cociente categórico existe y es un punto: $\pi : \mathbb{A}^n \to \{p\}$.

Ejemplo 3.12. Si G es un grupo algebraico, todo G-espacio homogéneo X posee cociente categórico igual a un punto $\pi : \mathbb{A}^n \to \{p\}$; en este caso tenemos un espacio de órbitas.

Ejemplo 3.13. Consideremos la acción de G_a en $\mathbb{A}^2$ $a \cdot (x, y) = (x, y + ax)$ (Ejemplo 3.3). Supongamos que existe el espacio de órbitas $\pi : \mathbb{A}^n \to Y$. Entonces, como π es continua, tenemos que $\pi(0,y_1)=\pi(0,y_2)$ para todo $y_1,y_2\in\Bbbk$, de donde la fibra $\pi^{-1}\big(\pi(0,0)\big)$ es el eje Oy, y por lo tanto una unión infinita de órbitas cerradas. Luego, no existe el espacio de órbitas en este caso.

El lector debe observar que el argumento de más arriba, si bien es correcto, es menos ingenuo de lo que parece a simple vista, ya que la topología considerada no es Hausdorff.

Observemos que si consideramos el abierto $U=\mathbb{A}^n\setminus Oy$, en este caso la acción de G_a si posee un espacio de órbitas, que puede visualizarse como la restricción de proyección sobre el eje Ox. Es decir, el morfismo $\pi:\mathbb{A}^n\setminus Ox\to\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ $\pi(x,y)=x$, provee un espacio de órbitas para la acción de G_a en U.

Ejemplo 3.14. La acción de G_m en $\mathbb{A}^2$ por homotecias (Ejemplo 3.4) tiene como cociente categórico un punto.

Si consideramos la restricción de esta acción a $\mathbb{A}^2\setminus\{0\}$, el cociente categórico es la proyección canónica $\mathbb{A}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^1(\Bbbk)$; es un espacio de órbitas. En particular, observemos que la restricción a un abierto del cociente categórico no es el cociente categórico (comparar con Teorema 3.21 y Ejercicio 4).

Ejemplo 3.15. La acción de G_m en $\mathbb{A}^2$ dada por $t\cdot(x,y)=(tx,t^{-1}y)$ (Ejemplo 3.5) no tiene espacio de órbitas; sin embargo, el cociente categórico existe, ver Teorema 4.5.

Observación 3.16. Es fácil ver que el espacio cociente, en caso de existir es único a menos de isomorfismos, ver Ejercicio 3.

Como ya lo dijéramos, el cociente categórico describe de algún modo la geometría de la acción del grupo G. Cuando tenemos un mejor control del comportamiento del mapa cociente (por ejemplo si sabemos que es un espacio de órbitas), podemos obtener más información acerca de la geometría de la acción. Sin embargo, es de interés controlar el comportamiento del mapa cociente con respecto a los haces de funciones de la variedad actuada y su cociente, lo que a priori no es garantizado por la existencia del espacio de órbitas. Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

Definición 3.17. Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X. Un *cociente geométrico* para la acción es un par (Y,π), donde Y es una variedad algebraica y $\pi:X\to Y$ un morfismo tales que:

(1) π es sobreyectiva, abierta y con fibras las G-órbitas de X;

(2) para cada abierto $U\subset Y$, el mapa $\pi_U^*:\mathcal{O}_Y(U)\to\mathcal{O}_X\big(\pi^{-1}(U)\big)^G$ es un isomorfismo de álgebras.

Observación 3.18. Probaremos en 3.21 que en caso de existir el cociente geométrico es el cociente categórico. En particular, es único a menos de isomorfismos.

Observemos que la condición (1) dice en en particular que el conjunto subyacente al cociente geométrico es $\mathrm{Orb}(X)$ y que π es la proyección canónica. La condición (2) permite controlar, junto con la condición de ser π un mapa abierto, los aspectos más finos de la geometría de la acción.

Ejemplo 3.19. Sea X un G-espacio homogéneo y $x\in X$ arbitrario, entonces $X=\mathcal{O}(x)$ y $\pi:G\to X$, $\pi(a)=a\cdot x$ es un cociente geométrico. Si $H=G_x$, las fibras de π son las coclases aH, $a\in G$.

La importancia del siguiente resultado debe quedar clara a la luz de los dicho en la introducción de la sección y del ejemplo anterior.

Teorema 3.20. *Sea G un grupo algebraico afín y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Entonces G/H admite una estructura de variedad algebraica casai proyectiva, de modo que la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ es el cociente geométrico de la acción de H en G por multiplicación a derecha.*

Proof. Ver por ejemplo [2]. □

Teorema 3.21. *Sea G un grupo algebraico actuando regularmente en una variedad algebraica X, de modo que existe un cociente geométrico (Y, π). Entonces (Y, π) es el cociente categórico para la acción considerada. En particular, el cociente geométrico si existe es único a menos de isomorfismos.*

Proof. Sea Z una variedad algebraica y $f : X \to Z$ un morfismo constante en las G-órbitas. Debemos construir $\widehat{f} : Y \to Z$ tal que $f = \widehat{f} \circ \pi$.

Asumimos primeramente que $Z \subset \mathbb{A}^n$ es una variedad afín, por lo que $f = (f_1, \dots, f_n)$, con $f_i \in \Bbbk[X]$ para $i = 1, \dots, n$. Como viéramos en la Observación 3.10, el hecho que f_i sea constante en las órbitas se traduce en $f_i \in \Bbbk[X]^G$. Por ser Y un cociente geométrico, tenemos que $\pi^* : \Bbbk[Y] \to \mathcal{O}_X\big(\pi^{-1}(Y)\big)^G = \Bbbk[X]^G$ es un isomorfismo; luego existe una única $\widehat{f_i} \in \Bbbk[Y]$ tal que $\widehat{f_i} \circ \pi = \pi^*(*\widehat{f_i}) = f_i$. El morfismo $(\widehat{f_1}, \dots, \widehat{f_n})$ es el buscado.

Si Z es una variedad algebraica arbitraria, consideramos un cubrimiento por abiertos afines W_i, $i \in I$. Para cada $i \in I$, los conjuntos $V_i = f^{-1}(W_i) \subset X$ son abiertos G-estables, y entonces los conjuntos $\pi(V_i)$ son abiertos en Y. Como los conjuntos W_i son afines y los pares $\big(V_i, \pi|_{V_i} : V_i \to \pi(V_i)\big)$ son cocientes geométricos (ver Ejercicio 4), existen morfismos $\widehat{f_i} : \pi(V_i) \to W_i$ tales que $\widehat{f_i} \circ \pi|_{V_i} = f_i = f|_{V_i}$. Como $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$, deducimos que $\widehat{f_i}|_{\pi(V_i)\cap\pi(V_j)} = \widehat{f_j}|_{\pi(V_i)\cap\pi(V_j)}$. Entonces, existe una única $f : Y \to Z$ tal que $f|_{\pi(V_i)} = \widehat{f_i}$, que es el morfismo buscado.

□

El siguiente teorema nos garantiza que el espacio de órbitas en caso de existir (y ser una variedad normal) es el cociente goemétrico:

Teorema 3.22. *Sea G un grupo algebraico afín y X una G-variedad tal que* $\operatorname{Orb}(X)$ *admite una estructura de variedad algebraica normal, de modo que $\pi : X \to \operatorname{Orb}(X)$ es un morfismo de variedades. Entonces $\big(\operatorname{Orb}(X), \pi\big)$ es el cociente geométrico de X para la acción de G.*

Ejercicios.

(1) Probar rigurosamente las afirmaciones de los ejemplos 3.13 y 3.14.
(2) Probar que si G es un grupo actuando en un conjunto X, entonces dos puntos pertenecientes a la misma órbita tiene grupos de isotropía conjugados.
(3) Probar, usando la propiedad universal del cociente, que el cociente categórico en caso de existir es único a menos de isomorfismos.
(4) Sea G un grupo algebraico afín y X un G-variedad tal que el cociente geométrico $\pi : X \to X//G$ existe. Consideremos un abierto $U \subset X$ *saturado* (es decir $\pi^{-1}(\pi(U) = U)$. Probar que $(U, \pi|_U)$ es un cociente geométrico.
(5) Consideramos la *variedad de banderas*

$$\mathcal{F}(\mathbb{A}^n) = \{0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{A}^n\}.$$

Es sabido que $\mathcal{F}(\mathbb{A}^n)$ es una variedad algebraica proyectiva.

(a) Probar que es una $G = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$-variedad para la acción inducida por la acción inducida por la multiplicacón a izqueirda de una matriz por un vector.
(b) Probar que es un espacio homogéneo, y probar que el grupo de isotropía de una bandera es conjugado al subgrupo B de las matrices trangulares superiores. Leugo G/B es una variedad proyectiva.

4. Generación finita de invariantes

El problema de la existencia del cociente para una acción regular está íntimamente relacionado con el 14to problema de Hilbert, o de *generación finita de invariantes.* En lenguaje moderno, (en su forma más general) éste puede enunciarse así:

Sea A un álgebra finitamente generada y G un grupo algebraico afín actuando en A por automorfismos. ¿Cuándo es A^G, el álgebra de invariantes, finitamente generada?

La respuesta completa a este problema es el resultado del trabajo de muchos matemáticos a lo largo de siete décadas (Hilbert, E. Nœther, Weyl, Weinzenböck, Nagata, Hochschild, Mostow, Mumford, Haboush, Popov, por mencionar algunos). Antes de ser formulado por Hilbert, algunos casos particulares del problema ya habían sido resueltos por Gordan, Hilbert mismo y otros. E. Nœther prueba en 1915 que para todo grupo finito la respuesta es afirmativa. En 1950 Nagata presenta el primer ejemplo de un álgebra finitamente generada actuada por un grupo algebraico afín cuya álgebra de invariantes no es finitamente generada. Los trabajos de Mumford, la escuela de Nagata y Haboush permitieron responder afirmativamente el problema en el caso de grupos reductivos, y Popov, basándose en el trabajo de Nagata, mostró que esta propiedad caracteriza a los grupos reductivos:

Un grupo algebraico afín G es tal que para toda G-módulo álgebra – es decir un álgebra en la que G actúa por automorfismos del álgebra — finitamente generada, A^G es finitamente generada, si y solamente si G es reductivo.

Remitimos al lector a [2] y [5] para un panorama de este problema.

En esta sección mostraremos el caso finito, y como este problema se conecta con el problema de la existencia del cociente categórico.

Teorema 4.1 (Nœther)**.** *Sea G un grupo finito y A una G-módulo álgebra conmutativa. Entonces la extensión $A^G \subset A$ es integral, y si A es finitamente generada, entonces A^G también lo es.*

Proof. Sea x una indeterminada; extendemos la acción de G en A a una acción de G en $A[x]$ haciendo que x sea un punto fijo. Si $a \in A$, el polinomio $P_a(g) = \prod_{g\in G}(x - g \cdot a)$. Claramente el polinomio P_a es G-invariante, por lo que todos sus coeficientes pertenecen a A^G. Luego la extensión $A^G \subset A$ es integral.

Si A es finitamente generada el hecho de ser A^G fnitamente generada es un consecuencia del teorema de Artin-Tate. □

Presentamos a continuación una construcción más o menos explícita de los invariantes de un grupo finito, en el caso particular de $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$.

Lema 4.2. *Sea G un grupo finito y A una G-módulo álgebra. Entonces el operador de Reynolds $\mathcal{R} : A \to A^G$, $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{d}\sum_{g\in G} x \cdot f$, con $d = |G|$ el orden de G, es un morfismo de G-módulos tal que $\mathcal{R}(xy) = \mathcal{R}(x)y$ para todo $x \in A$, $y \in A^G$.*

Proof. Probaremos sólo la última afirmación, el resto queda como ejercicio (ver Ejercicio 2). Sea $x \in A$ e $y \in A^G$. Entonces

$$\mathcal{R}(xy) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot(xy) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g\cdot x)(g\cdot y) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g\cdot x)y = \big(\mathcal{R}(x)\big)y\,.$$

$\square$

Teorema 4.3. *Sea G un grupo finito y V un G-módulo de dimensión finita. Entonces $\Bbbk[V]^G$ es un álgebra finitamente generada por polinomios homogéneos de grado menor o igual a $d = |G|$, el orden del grupo G.*

Proof. Sea $A \subset \Bbbk[V]^G$ el álgebra generada por los invariantes homogéneos de grado menor o igual a d. Debemos probar que $A = \Bbbk[V]^G$.

Afirmamos que $\Bbbk[V] = A\Bbbk[V]_{<d}$. En efecto, si $f \in V^*$ es un polinomio lineal entonces $f^n \in A\Bbbk[V]_{<d}$ si $n < d$. Si $n = d$, entonces $\prod_{a\in G}(t - a\cdot f) \in \Bbbk[V]^G[t]$ y evaluando en $t = f$ obtenemos una relación $f^d + a_1 f^{d-1} + \cdots + a_0 = 0$, con $a_i \in \Bbbk[V]^G_{\leq d} \subset A$. Entonces

$$f^d \in A + Af + \cdots Af^{d-1} \subset A\Bbbk[V]_{<d}\,. \tag{4.1}$$

Consideremos ahora $n > d$ tal que $f, f^2, \ldots, f^{n-1} \in A\Bbbk[V]_{<d}$; multiplicando la ecuación (4.1) por f^{n-d} obtenemos lo deseado.

Claramente, si $f^n \in A\Bbbk[V]_{<d}$ para todo $f \in V^*$ y $n \geq 0$, entonces $\Bbbk[V] = A\Bbbk[V]_{<d}$.

El operador de Reynolds $\mathcal{R} : \Bbbk[V] \to \Bbbk[V]^G$ preserva grados, luego aplicando $\mathcal{R}$ a la igualdad $A\Bbbk[V]_{<d} = \Bbbk[V]$ obtenemos:

$$A = A\big(\Bbbk[V]^G_{<d}\big) = A\,\mathcal{R}\big(\Bbbk[V]_{<d}\big) = \mathcal{R}\big(A\Bbbk[V]_{<d}\big) = \mathcal{R}\big(\Bbbk[V]\big) = \Bbbk[V]^G\,,$$

y la prueba está terminada. $\square$

Veamos las consecuencias geométricas del teorema de E. Nœther:

Teorema 4.4. *Sea G un grupo finito actuando regularmente en una variedad algebraica afín X. Entonces $\Bbbk[X]^G$ es un álgebra afín y el par $\big(\mathrm{Spm}\big(\Bbbk[X]^G\big), \pi\big)$, donde π es el morfismo inducido por la inclusión $\Bbbk[X]^G \hookrightarrow \Bbbk[X]$, es un cociente geométrico.*

Proof. Como una consecuencia directa del Teorema 4.1 obtenemos que $\Bbbk[X]^G$ es un álgebra afín; sea $Y = \mathrm{Spm}\big(\Bbbk[X]^G\big)$. Como la extensión $\Bbbk[X]^G \subset \Bbbk[X]$ es integral, el morfismo π es finito y por lo tanto un mapa cerrado. Más aún, π es dominante ya que π^* es inyectivo, por lo que π es sobreyectivo, y por lo tanto abierto.

Para probar que π es constante en las órbitas basta probar que para toda $f \in \Bbbk[Y] = \Bbbk[X]^G$ y $a \in G$, se cumple que $f\big(\pi(x)\big) = f\big(\pi(a\cdot x)\big)$. Por construcción tenemos que si $f \in \Bbbk[Y] = \Bbbk[X]^G$, entonces $f = \pi^*(f)$, es decir $f\big(\pi(x)\big) = f(x) = f(a\cdot x) = f\big(\pi(a\cdot x)\big)$.

Probemos a continuación que las fibras de π son las órbitas de G. La G-equivariancia de π implica que para todo $x \in G$, $\mathcal{O}(x) \subset \pi^{-1}\big(\pi(x)\big)$. Supongamos que existe $x' \in \pi^{-1}\big(\pi(x)\big)\setminus\mathcal{O}(x)$. Entonces $G\cdot x \cap G\cdot x' = \emptyset$, mientras que $\pi(x) = \pi(x')$. Como las órbitas son cerradas (de hecho finitas), existe $f \in \Bbbk[X]$ que las separa, es decir $f(G\cdot x) = 1$, $f(G\cdot x') = 0$. Consideremos la función G-invariante $F(x) = \prod_{a\in G} a\cdot f$; claramente se sigue cumpliendo que $F(G\cdot x) = 1$ y $F(G\cdot x') = 0$. Viendo a F como una función regular en Y, tenemos que $\pi(x) \neq \pi(x')$, lo que contradice nuestra hipótesis.

Nos resta probar que si $U \subset Y$ es un abierto, entonces $\pi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\big(\pi^{-1}(U)\big)^G$ es un isomorfismo. Como todo abierto puede cubrirse por abiertos elementales Y_f, $f \in \Bbbk[Y]$, basta probar que $\mathcal{O}_Y(Y_f) \cong \mathcal{O}_X\big(\pi^{-1}(Y_f)\big)^G = \mathcal{O}_X(X_f)^G$ para toda $f \in \Bbbk[X]^G$. En este caso,

$$\pi^*\big(\Bbbk[Y_f]\big) = \pi^*\Big(\big(\Bbbk[X]^G\big)_f\Big) = \Big(\pi^*\big(\Bbbk[X]^G\big)\Big)_{\pi^*(f)} = \big(\Bbbk[X]^G\big)_f = \big(\Bbbk[X_f]\big)^G = \Bbbk\big[\pi^{-1}(Y_f)\big]^G .$$

□

El teorema anterior es en realidad un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Sea G un grupo reductivo actuando en una variedad afín X. Entonces el cociente categórico X/G existe y está dado por la inclusión canónica* $\operatorname{Spm}\big(\Bbbk[X]^G\big)$. □

De hecho, los grupos reductivos son los únicos grupos para los cuales toda G-variedad afín admite un cociente categórico, ver [2] para más detalles.

Observación 4.6. No es cierto que toda acción de un grupo reductivo (aún en el caso finito) admita un cociente categórico, ver por ejemplo [5, §4.6].

Observación 4.7. La elaboración de algoritmos que permitan obtener conjuntos de generadores para el álgebra de invariantes de una G-módulo álgebra es claramente un problema interesante, como lo muestran los resultados anteriores. Recientemente la *teoría de invariantes ocmputacional*, que estudia los problemas de la teoría de invariantes en sus aspectos algorítmicos, ha tenido un desarrollo importante. Sugerimos a los lectores interesados en estos aspectos la consulta de [1].

Algunos resultados importantes.

En este párrafo enunciaremos dos resultados cruciales a la hora de estudiar las acciones regulares de los grupos algebraicos afines: los teoremas de Sumihiro y Rosenlicht.

El Teorema de Sumihiro puede, en algún sentido, considerarse una generalización del Teorema 3.6. Nos muestra como localmente las acciones de un grupo algebraico afín son "lineales". Enunciaremos aquí una versión parcial del mismo, y mostraremos en un caso concreto como a partir del mismo puede obtenerse información sobre las acciones regulares de un grupo algebraico.

Teorema 4.8 (Sumihiro, [6])**.** *Sea G un grupo algebraico afín, X una G-variedad algebraica normal irreducible e $Y \subset X$ una órbita cerrada. Entonces existe un abierto G-estable $U \subset X$ conteniendo a Y, un G-módulo racional finito dimensional y una inmersión abierta G-equivariante $U \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$.* □

Definición 4.9. Sea G un grupo algebraico afín. Una G-variedad X es *simple* si posee una única órbita cerrada.

Corolario 4.10. *Sea G un grupo algebraico afín y X una G-variedad simple. Entonces X es casi-proyectiva.*

Proof. Por el teorema de Sumihiro, existe un abierto $U \subset X$ G-estable que contiene a Y, y una inmersión G-equivariante abierta $U \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, con V un G-módulo de dimensión finita. El Ejercicio 1 nos garantiza que $U = X$. □

El teorema de Rosenlicht nos afirma que para toda acción regular (en una variedad irreducible) es posible encontrar un abierto estable para el cual exista el cociente geométrico. El lema de Zorn nos garantiza entonces la existencia de abiertos maximales para esta propiedad.

Sin embargo, no existen abiertos máximos; en otras palabras, una acción puede poseer dos abiertos (o más) estables maximales distintos para los cuales exista el cociente. Los cocientes obtenidos no son necesariamente variedades algebraicas isomorfas. Este problema es uno de los fundamentales de la llamada *teoría geométrica de invariantes*: dado un grupo algebraico afín y una G-variedad X, dar un procedimeinto para encontrar los abiertos maximales para los cuales existe el cociente geométrico, y estudiar la variación de los mismos. En [4] encontrará la resolución al problema de la construcción de los cocientes (debida a Mumford), así como el estudio de las variaciones de los mismos. En [2] se encontrará una prueba del resultado de Rosenlicht.

Teorema 4.11 (Rosenlicht)**.** *Sea G un grupo algebraico afín y X una variedad algebraica irreducible. Entonces existe un abierto G-estable $\emptyset \neq U \subset X$ tal que la acción restringida a U admite un cociente geométrico. Más aún, U puede tomarse tal que todos sus puntos sean regulares (es decir que U sea liso como variedad algebraica).* □

Ejercicios.

(1) Sea G un grupo algebraico afín, X una G-variedad simple, $Y \subset X$ la única órbita cerrada. Probar que si $Z \subset X$ es un cerrado G-estable, entonces $Y \subset Z$. En particular, el único abierto G-estable que contiene a Y es la variedad X.

(2) Sea G un grupo finito y V un G-módulo. Probar que $\mathcal{R} : V \to V^G$, $\mathcal{R}(v) = \frac{1}{d}\sum_{a\in G} a\cdot v$, donde $v \in V$ y $d = |G|$ es el orden de G, es una proyección, morfismo de G-módulos. En particular, V^G admite un complemento directo en la categoría de G-módulos. El morfismo $\mathcal{R}$ se denomima *operador de Reynolds*.

(3) Consideremos la acción de $\mathbb{Z}_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\}$ en $\Bbbk[x, y]$ dada por $\sigma \cdot x = -y$, $\sigma \cdot y = x - y$.
   (a) Hallar los polinomios invariantes de grado menor o igual a tres.
   (b) Probar que
$$\Bbbk[X, Y]^{\mathbb{Z}_3} = \Bbbk\big[X^2 - XY + Y^2, X^3 + Y^3 - 3XY^2, XY(X - Y)\big]\,.$$

(4) Consideremos las acciones de los ejemplo 3.3, 3.4 y 3.5. Hallar los diferentes abiertos maximales para los cuales existe el cociente geométrico, y describir el mismo.

(5) Sea $G = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ actuando por conjugación en $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Probar que el cociente categórico es isomorfo a $\mathbb{A}^n$.

References

[1] H. Derksen y G. Kemper, *Computational Invariant Theory*, Enc. of Math Sci. **130** (Vol. 1 de la serie Invariant Theory and Algebraic Transformation groups), Springer-Verlag, 2002.

[2] W. Ferrer y A. Rittatore, *Actions and Invariants of Algebraic Groups*, Pure and Appl. Math. **269**, Chapman & Hall/CRC, 2005.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Grad. Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, 1977.

[4] D. Mumford, J. Fogarty y F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3ra ed., Results in Mathematics and Related Areas (2) **34**, Springer-Verlag, 1994.

[5] V. Popov y E. Vinberg, *Invariant Theory*, ALgebraic Geometry IV, Enc. of Math. Sci. **55**, Springer-Verlag, 994.

[6] H. Sumihiro, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ, **14**, (1974) pp. 1–28.

Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, Iguá 4225, 11400 Montevideo, Uruugay.

E-mail address: alvaro@cmat.edu.uy