GRUPOS DE RANGO DE MORLEY FINITO
UN PROBLEMA DE CLASIFICACION PROVENIENTE DE LA LOGICA MATEMATICA

BRUNO POIZAT

Resumen. Este curso es una corta introducción a un problema de clasificación que se ha planteado en un contexto estructural general de Teoría de Modelos.

Índice

Introducción

Este curso es una corta introducción a un problema de clasificación que se ha planteado en un contexto estructural general de Teoría de Modelos. La Teoría de Modelos es la parte de la Lógica matemtica que se preocupa de las estructuras matemáticas clásicas.

Concierne a los grupos que aparecen cuando se dispone de una noción de dimensión satisfaciendo las propiedades formales de la dimensión en Geometría algebraica. Estos grupos se llaman "grupos de rango de Morley finito", el rango de Morley siendo precisamente la versión modelo-teorética de la noción de dimensión. Los grupos algebraicos son un caso particular, y se conjetura que, por lo esencial, los grupos de rango de Morley finito son algebraicos; más precisamente, la conjetura es que un grupo simple de rango de Morley finito debe ser algebraico.

El asalto a esta conjetura se apoya primero en técnicas de Teoría de Modelos para extender propiedades geométricas a un contexto más amplio que el de la Geometría algebraica, y después en técnicas de Teoría de Grupos extraídas de la clasificación de los grupos finitos simples.

Date: 15-06-06.

1. Grupos algebraicos

Recordemos que los grupos algebraicos son los grupos definidos algebraicamente en un cuerpo K algebraicamente cerrado: G es una variedad V, y su ley de grupo es un morfismo de $V \times V$ en V.

Los grupos algebraicos simples son todos afines, es decir (geométricamente) isomorfos a un subgrupo Zariski-cerrado de $\mathrm{Gl}_n(K)$, definido por un conjunto de ecuaciones polinomiales.

Son el objeto de una clasificación, y forman una familia enumerable, puesto que cada uno tiene una representación lineal definida por ecuaciones con coeficientes enteros.

2. Conjuntos constructibles

Los geómetras trabajan con las variedades, por ejemplo, en el caso afín, con los cerrados de Zariski. Los teóricos de modelos, cuando hacen Geometría, viven en el mundo de los conjuntos constructibles, que definiremos a continuación.

Son las combinaciones buleanas de un número finito de cerrados de Zariski. Una parte constructible de $K \times \cdots \times K$ es reunión de un número finito de conjuntos que son a su vez intersección de un abierto y de un cerrado de Zariski.

Primera propiedad notable: la proyección sobre K^n de una parte constructible de K^{n+1} es une parte constructible de K^n.

Segunda propiedad: toda relación de equivalencia constructible E es de la forma $f(x) = f(y)$, donde f es una aplicación (con grafo) constructible. A nivel constructible se pueden hacer cocientes, puesto que el cociente A/E se identifica con el conjunto constructible $f(A)$.

Ejemplo 2.1. Ejemplo sobre $K \times K$: $(x, y)E(u, v)$ si y sólo si ($x = u$ y $y = v$) o ($x = v$ y $y = u$); $f(x, y) = (x + y, x.y)$.

Tercera propiedad: la dimensión se define de manera combinatoria a nivel constructible. Para un conjunto A constructible no vacío, $d(A) = n + 1$ si y sólo si se pueden encontrar una infinidad $A_1, \ldots A_m, \ldots$ de subconjuntos constructibles de A, no vacíos y dos a dos disjuntos tal que $d(A_m) = n$ para cada m; $d(A)$ es la dimensión geométrica de la clausura de Zariski de A.

Cuarta propiedad: los grupos constructibles son constructiblemente isomorfos a los grupos algebraicos, los cuales son un caso particular de grupos constructibles.

3. Universos

Más generalmente, éste es el contexto abstracto en cual trabaja un teórico de modelos:

Un universo U es el dato de un conjunto M infinito y, para cada $n = 1$, de una familia de partes de M^n, los conjuntos definibles en U, tales que:

1. **Combinaciones buleanas.** Los subconjuntos definibles de cada M^n forman un álgebra de Boole.

2. **Producto.** El producto cartesiano de una parte definible de M^m y de una parte definible de M^n es una parte definible de M^{m+n}; las diagonales de M^n son definibles.

3. **Proyección.** La proyección sobre M^n de una parte definible de M^{n+1} es una parte definible de M^n.

4. **Parámetros.** Las partes finitas de M son definibles.

5. **Cocientes.** Toda relación de equivalencia definible es de la forma $f(x) = f(y)$, donde f es una función definible.

4. Universo con rango

Los universos con rango son los que tienen una noción abstracta de dimensión satisfaciendo las propiedades siguientes:

A todo conjunto definible no vacío A se asocia un entero positivo o nulo $d(A)$, su "dimensión", o su rango de Morley", tal que:

a. *Definición combinatoria de la dimensión:* $d(A) \geq n + 1$ ssi se puede encontrar una infinidad $A_1, \ldots A_m, \ldots$ de partes definibles de A, no vacías y dos a dos disjuntas tal que $d(A_m) \geq n$.

b. *Definibilidad:* si f es una aplicación definible de A en B, $\{b/d(f^{-1}(b)) = k\}$ es definible.

c. *Aditividad:* si f es un aplicación definible de A en B, y cada fibra $f^{-1}(b)$ es de dimensión k, entonces $d(A) = d(B) + k$.

d. *Uniformidad:* las fibras finitas de una aplicación definible f son de cardinalidad acotada por un entero $m(f)$.

5. Grupos de rango de Morley finito

Son los grupos que viven en un universo con rango, su base y su ley de grupo siendo definibles en él.

Ejemplo 5.1. Los grupos algebraicos, que viven en el universo de los conjuntos constructibles de un cuerpo algebraicamente cerrado, para los que el rango de Morley es la dimensión.

Conjetura 5.2. ***Conjetura de Cherlin.*** *Un grupo simple (infinito) con rango de Morley finito es un grupo algebraico sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.*

La verificación de esta conjetura significaría que, en lo esencial, la noción de grupo clásico sería caracterizable a partir simplemente de la noción de dimensión, la cual permitiría reconstruir toda su geometría.

Los grupos con rango de Morley finito intervienen en Lógica matemática, más precisamente en Teoría de modelos, en un contexto abstracto. La definición dada más arriba fue especialmente elaborada para ser comprensible por los matemáticos no especializados en Lógica, pero no es la definición original.

Comencemos por extender a estos grupos propiedades bien conocidas de los grupos algebraicos.

6. Multiplicidad

Se llama multiplicidad de un conjunto definible al número máximo de conjuntos definibles del mismo rango (= dimensión) en que puede dividirse. Por inducción sobre la dimensión y la multiplicidad, se ve que no hay cadenas infinitas descendentes de grupos definibles.

Se dice que un grupo es conexo si no tiene ningún subgrupo definible propio de índice finito.

Se dice que una parte definible con multiplicidad uno de G es genérica en G si tiene el mismo rango que G.

Lema 6.1. *Un grupo conexo es de multiplicidad uno.*

Demostración. Si A y B son dos partes genéricas de G, se dice que $A \approx B$ si su diferencia simétrica no es genérica; por la definibilidad de la dimensión, se obtiene sobre las clases de esta equivalencia una acción definible de G con órbitas finitas. Debido a la conexidad, para todo a de G, $aA \approx A$, e igualmente $Aa \approx A$. Si A y B son conjuntos genéricos disjuntos, la aditividad demuestra que $A \times B$ es genérico (con multiplicidad uno) en $G \times G$, asícomo $\{(a,b)/a \in A, b \in B, ab \in A\}$ y $\{(a,b)/a \in A, b \in B, ab \in B\}$, de donde se llega a una contradicción. □

Corolario 6.2. *La multiplicidad de un grupo G es el índice de su menor subgrupo G^o definible y de índice finito en G; se llama la 'componente conexa' de G.*

Demostración. Los conjuntos genéricos son casi iguales a clases laterales módulo G^o. □

Observación 6.3. 1. Si G es conexo, A es genérico en G ssi $aA \approx A$ para cada a de G ssi G es recubierto por un número finito de transladados (a la derecha o a la izquierda) de A.

2. Un grupo simple infinito es conexo puesto que G^o es normal en G.

7. Grupos de dimensión uno

Teorema 7.1. (Teorema de Reineke.) *Un grupo infinito con rango de Morley finito sin subgrupos propios definibles infinitos, y en particular un grupo conexo de rango uno, es abeliano.*

Demostración. Si G no es abeliano, su centro es finito; todos sus elementos no centrales tienen un centralizador finito y una clase de conjugación del mismo rango que G; son conjugados debido a la conexidad de G. En $G/Z(G)$ todos los elementos $\neq 1$ son conjugados de orden $p \neq 2$; como x y x^{-1} son conjugados, existe un g que los intercambia, por lo que g^2 conmuta con x; por lo tanto hay involuciones en el grupo: contradicción. □

Corolario 7.2. *Un grupo infinito de rango de Morley finito contiene un subgrupo abeliano infinito.*

Se llama borel de G a un subgrupo definible resoluble conexo maximal; los boreles (o subgrupos de Borel) de un grupo infinito con rango de Morley finito son por lo tanto infinitos.

Los boreles de un grupo algebraico son conjugados, lo que no se sabe demostrar para un grupo de rango de Morley finito.

Los boreles de un grupo algebraico simple no son abelianos, ni siquiera nilpotentes; se recupera el cuerpo de base en la acción del toro del borel sobre su parte unipotente.

8. Cuerpos de rango de Morley finito

Teorema 8.1. (Teorema de Macintyre.) *Un cuerpo K infinito con rango de Morley finito es algebraicamente cerrado.*

Demostración. La componente conexa del grupo aditivo de K es un ideal, así que K es aditivamente conexo, con multiplicidad uno; luego es también multiplicativamente conexo. Por lo tanto las aplicaciones que a x asocian x^n o $x^p - x$ (en característica p) son exhaustivas, así que K no tiene extensiones abelianas. Este es verdad no solamente para K, sino también para sus extensiones de grado finito, que viven en el mismo universo, y la Teoría de Galois da la conclusión. □

9. Grupos de dimensión dos

Teorema 9.1. (Teorema de Cherlin.) *Un grupo conexo de rango de Morley dos es resoluble.*

Demostración. En caso contrario, los boreles B de G son de rango uno, y ninguno es normal en G; $Z(G)$ es finito, y gracias a un cociente se reduce al caso donde $Z(G) = \{1\}$.

Si $a \in B \cap B'$, $B \neq B'$, el centralizador de a es de rango dos y $a = 1$; entonces la unión de los conjugados de B es de rango dos; como no se pueden encontrar conjuntos genéricos disjuntos, todos los boreles son conjugados. No hay ningún elemento con centralizador finito, para el cual la clase de conjugación sería un conjunto genérico disjunto de $\cup B^g$. Entonces, todo $a \neq 1$ centraliza un único borel $B(a)$; se ve que $a \in B(a)$, porque sino se obtendría un conjunto genérico disjunto de $\cup B^g$. Conclusión: G es la unión de sus boreles, los cuales son conjugados, disjuntos y autocentralizantes.

Sea $a \neq 1$ en B; su clase de conjugación C es de rango uno y de multiplicidad uno; si $C \cap \neg N(B)$ es finito, siendo normalizado por B, es centralizado por B y vacío: C normaliza todos los conjugados de B, lo que no es posible; luego $C \cap N(B)$ es finito, centralizado por B y reducido a $\{a\}$. Vemos por tanto que cada borel es autonormalizante.

Esta configuración de centralizadores prohíbe la presencia de involuciones en G: si i fuese una involución y j un conjugado de i situado en otro borel, tanto i como j invertirían ij, y normalizarían a su borel sin conmutar con él.

La contradicción final viene de la decomposición de G en solamente dos clases dobles $G = B \cup BgB$; en efecto, si $g \notin B$, $B.gBg^{-1}$, asícomo BgB son genéricos. Como $BgB = Bg^{-1}B$, se encuentra una involución en G. □

10. Grupos de dimensión tres

Teorema 10.1. (Teorema de Cherlin.) *Un grupo simple de rango de Morley tres no isomorfo a* $\mathrm{PSL}_2(K)$*, con* K *algebraicamente cerrado, es un grupo malo.*

Un grupo malo es un grupo simple, de rango de Morley finito, cuyos boreles son nilpotentes; no tiene involuciones. Un grupo malo de rango tres tendría boreles de rango uno, autonormalizantes, conjugados y dos a dos disjuntos, recubriendo el grupo.

La existencia de estos grupos malos contradice la Conjetura de Cherlin; no se sabe eliminarlos, ni siquiera en el caso de rango tres.

11. Involuciones

Teorema 11.1. (Teorema de Borovik y Poizat.) *En un grupo de rango de Morley finito, los 2-subgrupos de Sylow son conjugados.* □

Este teorema es el punto de partida del Programa de Borovik para atacar la Conjetura de Cherlin reproduciendo técnicas utilizadas en la clasificación de los grupos simples finitos. Ha dado lugar a una cantidad considerable de trabajos, que utilizan tanto técnicas de Teoría de grupos como de Teoría de modelos. Finalmente, han permitido demostrar que un grupo infinito simple G, de rango de Morley finito, satisface una de las tres condiciones siguientes:

Primer caso. Los 2-subgrupos de Sylow son infinitos con exponente acotado; en este caso, se ha demostrado que G es un grupo algebraico simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 2.

Segundo caso. Los 2-subgrupos de Sylow son infinitos con exponente no acotado, y con un subgrupo abeliano de índice finito; en este caso, se espera demostrar próximamente que G es un grupo algebraico sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2$.

Tercer caso. G no tiene involuciones. Este caso contiene el de los grupos malos; la tendencia actual es más bien de creer que estos grupos malos existen, pero nadie ha logrado construirlos.

Referencias

[1] Joachim REINEKE, *Minimale Gruppen*, Z. für Math. Logik **21**, 357–359 (1975).
[2] Angus MACINTYRE, *On omega-one-categorical theories of fields*, Fund. Math. **71**, 1-25 (1971).
[3] Gregory CHERLIN, *Groups of small Morley rank*, Ann. Pure Appl. Logic **17**, 1-28 (1979).
[4] Aleksandr BOROVIK y Bruno POIZAT, *Tores et p-groupes*, Journal of Symbolic Logic **55**, 478-491 (1990).
[5] Aleksandr BOROVIK y Ali NESIN, *Groups of finite Morley rank*, Oxford, Clarendon Press, 1994.
[6] Bruno POIZAT, *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1987 ; traducción "Stable groups", AMS, 2001.

…y numerosos trabajos de Tuna ALTINEL, Andreas BAUDISCH, Oleg BELEGRADEK, Ayse BERKMAN, Aleksandr BOROVIK, Jeffrey BURDGES, Gregory CHERLIN, Luis Jaime CORREDOR, Adrien DELORO, Olivier FRECON, Ehud HRUSHOVSKI, Khalid JABER, Eric JALIGOT, Dugald MACPHERSON, Erulan MUSTAFIN, Ali NESIN, Abderrazzaq OULD HOUCINE, Anand PILLAY, Bruno POIZAT, Simon THOMAS, Frank WAGNER, Boris ZIL'BER ...

Université Claude Bernard. Lyon-1.
E-mail address: `poizat@math.univ-lyon1.fr`