CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRAS DE LIE

Esther Galina

Universidad Nacional de Córdoba

Estas son notas realizadas para un curso básico del Primer Encuentro Nacional de Álgebra en Agosto de 2003.

Contenidos.

§1. Un poco de historia.

Sólo a modo de introducción y motivación daremos una breve información sobre los orígenes de la noción de álgebra de Lie conforme a la propia concepción del matemático noruego Sophus Lie (1849-1925). Cabe aclarar que, a pesar de esta introducción, el enfoque que daremos a este curso es desde un punto de vista totalmente algebraico.

Como la historia nos lo viene diciendo, en general los resultados importantes y trascendentes en matemática son los capaces de vincular dos estructuras, en su esencia, totalmente distintas. Sophus Lie en el año 1873, estudiando propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, dió el puntapié inicial a lo que hoy llamamos la Teoría de Lie. Según Bourbaki [B], una de las ideas más originales que tuvo fue la introducción de la noción de invariantes en el análisis y en la geometría diferencial. Una de las observaciones que hizo fue que los métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales "por cuadraturas" se basaban todos en el hecho que la ecuación es invariante por una familia "continua" de transformaciones. Es decir, dada la ecuación diferencial

$$F(x_1,\dots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_i},\frac{\partial^2 y}{\partial x_i x_j},\dots)=0$$

decimos que $y(x_1\dots,x_n)$ es una solución si satisface la ecuación anterior; es invariante por una de transformación $x_i'=f_i(x_1,\dots,x_n)$ si dada una solución del sistema $y(x_1\dots,x_n)$, al aplicarle dichas transformaciones $y'(x'_1 \dots, x'_n)$ la ecuación diferencial no cambia, es decir sigue siendo de la forma

$$F(x'_1, \dots, x'_n, y', \frac{\partial y'}{\partial x'_i}, \frac{\partial^2 y'}{\partial x'_i x'_j}, \dots) = 0$$

Esto dice que al aplicarle dichas transformaciones a una solución, esta sigue siendo solución de la ecuación original, dando mucha información del conjunto de soluciones y permitiendo atacarlas como espacios vectoriales en los que actúa un conjunto de transformaciones.

Lie estaba preocupado en estudiar la familia de transformaciones continuas (no necesariamente lineales) en n variables

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \qquad 1 \le i \le n \tag{1.1}$$

dependiendo "efectivamente" de r parámetros, que dejan invariante un sistema diferencial. Como primera observación Lie obtuvo que este conjunto de transformaciones continuas era un grupo cerrado para la composición, pero no en un sentido global, pues las funciones f_i no estaban definidas globalmente. Asumiendo que $x_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1^o, \dots, a_r^o)$ para todo i, el hecho importante fue que a cada grupo de transformaciones le podía asociar una familia de "transformaciones infinitesimales" que contenía la información que ahora viene asociada al álgebra de Lie. Rápidamente hablando, el término de primer orden de los desarrollos de Taylor de las funciones f_i

$$f_i(x_1, \dots, x_n; a_1^o + z_1, \dots, a_r^o + z_r) = x_i + \sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \dots, x_n) + \dots \qquad 1 \le i \le n,$$

da lugar a una transformación "genérica" que mueve puntos en distancias infinitamente pequeñas que depende linealmente de r parámetros z_i

$$dx_i = \left(\sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \dots, x_n) \right) dt$$

Al integrar el sistema diferencial

$$\frac{d\xi_1}{\sum_{k=1}^{r} z_k X_{k1}(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \dots = \frac{d\xi_n}{\sum_{k=1}^{r} z_k X_{kn}(\xi_1, \dots, \xi_n)} = dt$$

para cada punto $(z_1, \dots, z_r)$, Lie obtiene un grupo de un parámetro

$$t \to x'_i = g_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r, t) \tag{1.2}$$

de modo que $x_i = g_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r, 0)$ para todo i. Además, usando que la transformación (1.1) es estable para la composición, el grupo monoparamétrico (1.2) es un subgrupo del grupo de transformaciones dado.

Analizando el término de segundo orden en el desarrollo de Taylor de los g_i como funciones de t y teniendo en cuenta las propiedades de composición de las transformaciones aparecen las siguientes relaciones

$$\sum_{j=1}^{n}\left(X_{hj}(x)\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}-X_{kj}(x)\frac{\partial X_{hi}}{\partial x_j}\right)=\sum_{l=1}^{n}c_{lhk}X_{li}(x) \tag{1.3}$$

Considerando $z_k=1$ y $z_h=0$ si $h\neq k$ se obtienen r transformaciones infinitesimales, a las que Lie les asocia los operadores $A_kf=\sum_{i=1}^{n}X_{ki}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y reescribe las condiciones (1.3) resultando

$$[A_h,A_k]=A_hA_k-A_kA_h=\sum_l c_{lhk}A_l$$

donde las constantes c_{lhk} son fijas para cada grupo continuo de transformaciones. Así aparece una estructura fundamental en el espacio vectorial generado por los A_k que da origen a la noción de *álgebra de Lie*.

Lie tuvo ocación de trabajar con grupos globales particulares como ciertos grupos clásicos de matrices complejos. Pero la idea de estudiar sistemáticamente grupos definidos globalmente surgió con Weyl (1924). Los aspectos fundamentales que caracterizaron el trabajo de Lie son la de asociar a cada grupo de transformaciones continuas un álgebra de Lie y la de establecer una aplicación del álgebra de Lie al grupo a través de los grupos monoparamétricos.

En la idea original de Lie la cantidad de parámetros r del grupo de transformaciones no se restringía sólo a una cantidad finita. En geometría diferencial y física surgieron aplicaciones importantes de estos grupos de transformaciones continuas para r finito que ahora se conocen como *grupos de Lie* de dimensión finita, pero también hay trabajos en que r es infinito, en general relacionados con la física.

§2. Definición y ejemplos.

De acuerdo lo discutido en la sección anterior, la noción de álgebra de Lie surge como un espacio vectorial de transformaciones lineales munido de un nuevo producto: $[x,y]=xy-yx$ (con el producto usual de transformaciones lineales a la derecha) que en general no es ni conmutativo ni asociativo.

Definamos más precisamente estos conceptos en la forma más general posible. Sea k un anillo conmutativo con unidad entendemos por álgebra lo siguiente:

Definición. *Un k-módulo A es un álgebra sobre k si viene dado con una aplicación k-bilineal $A\times A\to A$.*

Observemos que esta aplicación o *producto* no es necesariamente asociativo. La definición dada es una generalización del enunciado más conocido: Un espacio vectorial A sobre un cuerpo k es un *álgebra* si tiene un producto $A\times A\to A$ k-bilineal.

Ejemplos. 1. El espacio de matrices $(M(n,k),+,.)$ con la suma y el producto usual es un álgebra no conmutativa y asociativa.

2. El espacio de matrices $(M(n,k),+,[\,,])$ con la suma y el producto definido por $[x,y]=xy-yx$ es un álgebra no conmutativa y no asociativa.

Ejercicio 2.1. En la difinición más general de álgebra probar que se puede reemplazar la condición "con una aplicación k-bilineal $A \times A \to A$ " por "con un morfismo de k-módulos $A \otimes_k A \to A$ ".

Definición. *Un álgebra* $(\mathfrak{g}, [\,,])$ *es un álgebra de Lie si el producto satisface:*
(i) $[x, y] = -[y, x]$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{g}$ *(producto antisimétrico).*
(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *para todo* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *(identidad de Jacobi).*

Ejercicio 2.2. Probar que son equivalentes:
a) (i) de la definición;
b) $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, si la caracterítica de k es distinta de 2;
c) que el morfismo $A \otimes_k A \to A$ admite una factorización $A \otimes_k A \to \bigwedge^2 A \to A$.

A continuación daremos algunos ejemplos.

Ejemplos. 1. $(M(n, k), +, [\,,])$ es álgebra de Lie y $(M(n, k), +, .)$ no lo es.
2. El subespacio $\mathfrak{sl}(n, k)$ de matrices de traza 0 es un álgebra de Lie.
3. Sea $\mathfrak{g}$ un k-módulo, definamos $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Esta se dice un álgebra de Lie conmutativa.
4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie conmutativa, entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ es álgebra de Lie con el producto definido para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{g}$ por

$$[x, y] = x \wedge y \qquad [x, y \wedge z] = [x \wedge y, z] = [x \wedge y, z \wedge w] = 0$$

5. Un álgebra asociativa $(A, +, .)$ sobre k con el producto $[x, y] = x.y - y.x$ para todo $x, y \in A$ es un álgebra de Lie.
6. Dado un abierto U de $\mathbb{R}^n$, sea TU el conjunto de campos vectoriales C^∞ en U, entonces $(TU, +, [\,,])$ es un álgebra de Lie con $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ para toda f función suave en U pues TU es un álgebra asociativa con la composición.
7. Si G es un *grupo de Lie* (grupo topológico con estructura de variedad diferencial tal que el producto y la inversión son funciones C^∞), $\mathfrak{g}$ el espacio tangente a G en la identidad tiene una estructura natural de álgebra de Lie. Ejemplos de grupos de Lie son los subgrupos cerrados de matrices no singulares.
8. $\mathfrak{s}o(n, k)$, el espacio de matrices antisimétricas es un álgebra de Lie que cuando k es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ coincide con el álgebra de Lie del grupo de matrices ortogonales.

Al definir una nueva categoría de objetos con cierta estructura es necesario también plantear cuando dichos objetos son equivalentes en dicha categoría, es decir hay que definir los morfismos de la categoría. En el caso de las álgebras de Lie definimos los morfismos como sigue.

Definición. *Un morfismo de álgebras de Lie* ϕ *es un morfismo de* k*-módulos tal que* $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Ejercicio 2.3. Probar que un *isomorfismo de álgebras de Lie* es un morfismo de álgebras de Lie que es un isomorfismo de k-módulos.

Resulta natural definir el concepto de *subálgebra* $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como un subespacio de $\mathfrak{g}$ cerrado para el corchete, es decir $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Un *ideal* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es un subespacio que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Definición. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es simple si es no abeliana y sus únicos ideales son 0 y $\mathfrak{g}$.*

No es difícil clasificar todas las álgebras de Lie de dimensión 1 y 2.

Ejercicio 2.4. Clasificar todas las álgebras de Lie de dimensión 1.

Ejercicio 2.5. Probar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión 2, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana o es isomorfa a una con una base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Esta última es el álgebra de Lie del grupo de tansformaciones afines de la recta.

A continuación nos surge la pregunta ¿habrá una cantidad finita de álgebras de Lie de $\dim 3$ no isomorfas entre sí? Antes de contestarla veamos varios ejemplos de álgebras de Lie de dimensión 3 para $k = \mathbb{R}$.

Ejemplos. 1. El álgebra de Lie de todas las matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la llamada álgebra de Lie de Heisenberg, incluso cuando k no es $\mathbb{R}$.

2. El álgebra de Lie de todas las matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es el álgebra de Lie del grupo de translaciones y dilataciones del plano.

3. El álgebra de Lie de todas las matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \theta & x \\ -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es el álgebra de Lie del grupo de translaciones y rotaciones del plano.

4. El álgebra de Lie del producto vectorial es la que tiene base **i, j, k** con corchete

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k} \qquad [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i} \qquad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Esta es un ejemplo de álgebra de Lie simple.

Ejercicio 2.6. Probar que el álgebra de Lie del producto vectorial es isomorpha a $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, la subálgebra de matrices generada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Otro ejemplo de álgebra de Lie simple es

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 2.7. Encontrar una base $\{h, e, f\}$ de $\mathfrak{sl}(2, k)$ tal que

$$[h, e] = 2e \qquad [h, f] = -2f \qquad [e, f] = h$$

A través del siguiente ejercicio veamos que hay una cantidad infinita de álgebras de Lie de dimensión 3 no isomorfas entre sí.

Ejercicio 2.8. Para cualquier matriz $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no singular sobre k sea el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ generada por $\{x, y, z\}$ que satisface

$$[x, y] = 0 \qquad [x, z] = \alpha x \qquad [y, z] = y$$

Probar que si $\alpha > 1$ son todas mutuamente no isomorfas. Por lo tanto, si $k = \mathbb{R}$ hay una cantidad no numerable no isomorfas.

Otro ejemplo particular de álgebra de Lie es $\mathrm{Der}(A)$, el conjunto de derivaciones del álgebra A sobre k. Una *derivación* de A es una aplicación k-lineal $D\colon A \to A$ con la propiedad $D(x.y) = Dx.y + x.Dy$.

Para que $[D, D'] = DD' - D'D$ sea un corchete de $\mathrm{Der}(A)$ tenemos que ver que $[D, D']$ es efectivamente una derivación,

$$\begin{aligned}
[D, D'](x.y) &= DD'(x.y) - D'D(x.y) \\
&= D(D'x.y + x.D'y) - D'(Dx.y + x.Dy) \\
&= DD'x.y + D'x.Dy + Dx.D'y + x.DD'y - D'Dx.y - Dx.D'y - D'x.Dy - x.D'Dy \\
&= DD'x.y - D'Dx.y + x.DD'y - x.D'Dy \\
&= [D, D']x.y + x.[D, D']y
\end{aligned}$$

Si consideramos el ejemplo dado para un álgebra de Lie, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Cada $x \in \mathfrak{g}$ define una aplicación $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por $\mathrm{ad}(x)y = [x, y]$. Entonces,*

(i) $\mathrm{ad}(x)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$.

(ii) La aplicación $x \to \mathrm{ad}(x)$ es un morfismo de Lie de $\mathfrak{g}$ en $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Demostración. Veamos (i),

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(x)([y, z]) &= [x, [y, z]] \\
&= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\
&= [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z]
\end{aligned}$$

Ahora veamos (ii),

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}[x,y](z) &= [[x,y],z] \\ &= -[[y,z],x]] - [[z,x],y] \\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\ &= \operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)z - \operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(x)z \\ &= [\operatorname{ad}(x),\operatorname{ad}(y)](z) \qquad \square\end{aligned}$$

Observación. La demostración del teorema anterior dice que tanto (i) como (ii) son equivalentes a la identidad de Jacobi.

A partir de álgebras de Lie conocidas podemos construir otras nuevas:

a) *Álgebra de Lie cociente:* Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y J un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}/J$ es un álgebra de Lie con el corchete dado por $[x+J, y+J] = [x,y]+J$.

b) *Álgebra de Lie producto directo:* Sean $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras de Lie, entonces $\prod_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ es un álgebra de Lie.

c) *Álgebra de Lie producto semidirecto:* Supongamos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, que $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ es un ideal y que $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ se dice producto semidirecto de $\mathfrak{b}$ por $\mathfrak{a}$ si la aplicación natural $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ induce un isomorfismo $\mathfrak{b}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es un ideal, para cada $x\in\mathfrak{b}$ tenemos que $\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}}(x)\in\operatorname{Der}(\mathfrak{a})$, es decir que define un morfismo de Lie $\theta\colon\mathfrak{b}\to\operatorname{Der}(\mathfrak{a})$.

Teorema 2.2. *La estructura de $\mathfrak{g}$ como producto semidirecto queda determinada por $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y el morfismo de Lie $\theta\colon\mathfrak{b}\to\operatorname{Der}(\mathfrak{a})$.*

Demostración. Como k-módulo, $\mathfrak{g}$ es suma directa de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. Por otro lado, por ser el producto bilineal y anticonmutativo, sólo es necesario considerar el corchete $[x,y]$ cuando $x,y\in\mathfrak{a}$, cuando $x,y\in\mathfrak{b}$ y cuando $y\in\mathfrak{a}$ y $x\in\mathfrak{b}$. Por ser subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$, en los dos primeros casos el corchete es preservado por la respectiva subálgebra. En el tercer caso tenemos que $[x,y]=\operatorname{ad}(x)y=\theta(x)y$.

Recíprocamente, dadas dos álgebras de Lie $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ y un morfismo de Lie $\theta\colon\mathfrak{b}\to\operatorname{Der}(\mathfrak{a})$ se puede construir un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como producto semidirecto de $\mathfrak{b}$ por $\mathfrak{a}$ de modo que $\theta(x)=\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}}(x)$, donde $\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}}(x)$ es la restricción de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ a $\mathfrak{a}$. Lo único que tenemos que comprobar es que vale la identidad de Jacobi

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

Como $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son álgebras de Lie, si x,y,z están los tres en alguna de las dos la identidad de Jacobi se satisface. Si $x,y\in\mathfrak{a}$ y $z\in\mathfrak{b}$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = -[x,\theta(z)y]-[\theta(z)x,y]+\theta(z)[x,y]$$

y por el teorema anterior, eso es cero. Si $x\in\mathfrak{a}$ y $y,z\in\mathfrak{b}$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = -\theta([y,z])x+\theta(y)\theta(z)x-\theta(z)\theta(y)x$$

y por ser θ un morfismo de Lie, esa suma es cero. □

Ejemplos. Los ejemplos 2 y 3 de la página 5 son productos semidirectos de álgebras de Lie.

Ejercicio 2.9. a) Sea $\mathfrak{h} = V \oplus \mathbb{R}$ con V un espacio vectorial real y $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica. Si se define el cochete por $[v+t, w+s] = \Phi(v,w)$ para todo $v, w \in V$ y $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces, $\mathfrak{h}$ con ese corchete es un álgebra de Lie.

b) Mostrar que el álgebra de Heisenberg de Lie es un caso particular del álgebra de Lie definida en a).

§3. Álgebras de Lie de grupos algebraicos de matrices.

En la sección anterior planteamos como ejemplos álgebras de Lie que vienen asociadas a los grupos de Lie. Estos surgieron como una generalización de los grupos de transformaciones continuas estudiados por Sophus Lie e involucran una estructura diferencial. También existen análogos algebraicos, es decir álgebras de Lie asociadas a grupos definidos algebraicamente como ceros de familias de polinomios. Debido a la base de conocimientos de los participantes de este curso veremos en particular cómo ciertos grupos de matrices llamados grupos algebraicos de matrices tienen asociados un álgebra de Lie. Seguiremos las notas de Serre [S] donde presenta una manera bien general de hacerlo.

Sea k un anillo conmutativo. Dado un conjunto de polinomios P_α en n^2 variables con coeficientes en k, un cero de la familia de polinomios (P_α) es una matriz $x = (x_{ij})$ con $x_{ij} \in k$ tal que $P_\alpha(x_{ij}) = 0$ con $1 \le i, j \le n$ para todo α.

Denotemos por $G(k)$ el conjunto de ceros de (P_α) en $GL(n,k)$, matrices invertibles de $M(n,k)$. Si k' es cualquier k-álgebra conmutativa y asociativa tenemos análogamente el grupo $G(k') \subset M(n,k')$. Por ejemplo si $k = \mathbb{R}$ podemos considerar $k' = \mathbb{C}$.

Definición. *$G(k)$ es un grupo algebraico de matrices $n \times n$ sobre k si $G(k')$ es un subgrupo de $GL(n,k')$ para toda k-álgebra conmutativa y asociativa k'.*

Ejemplo. El grupo ortogonal $O(n,k)$ es un grupo algebraico donde la ecuación es $X^tX = 1$.

Consideremos ahora la k-álgebra $k[\epsilon]$ libre en sobre k con base $\{1, \epsilon\}$ tal que $\epsilon^2 = 0$. Veamos como podemos asociar algebraicamente un álgebra de Lie a $G(k)$.

Teorema 3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ el conjunto de matrices $X \in M(n,k)$ tal que $1 + \epsilon X \in G(k[\epsilon])$. Entonces $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $M(n,k)$.*

Demostración. Tenemos que probar que si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $aX + bY$, para todo $a, b \in k$ y $[X,Y] = XY - YX$ también lo están.

Sabemos que decir que $X \in \mathfrak{g}$ es equivalente a decir que $P_\alpha(1 + \epsilon X) = 0$ para todo α. Como $\epsilon^2 = 0$,

$$P_\alpha(1 + \epsilon X) = P_\alpha(1) + dP_\alpha(1)\epsilon X$$

donde esta expresión hay que entenderla en términos de los coeficiente de las matrices. Pero $1 \in G(k)$, por lo tanto, como $P_\alpha(1) = 0$, $P_\alpha(1 + \epsilon X) = dP_\alpha(1)\epsilon X$. Esto dice $\mathfrak{g}$ es un submódulo de $M(n,k)$ pues elementos del tipo $aX + bY$, para todo $a, b \in k$ y para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ están en $\mathfrak{g}$, demostrando así la primera afirmación.

Para ver que $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ consideremos el álgebra $k'' = k[\epsilon, \epsilon', \epsilon\epsilon']$ donde $\epsilon^2 = \epsilon'^2 = 0$ y $\epsilon\epsilon' = \epsilon'\epsilon$. Notemos que tanto $G(k[\epsilon])$ como $G(k[\epsilon'])$ están contenidos en $G(k'')$, y que si $g = (1+\epsilon X) \in G(k[\epsilon])$ y $g' = (1+\epsilon' Y) \in G(k[\epsilon'])$, entonces $gg' = g'g \in G(k'')$. Observemos tmabién que

$$gg' = 1 + \epsilon X + \epsilon' Y + \epsilon\epsilon' XY$$
$$g'g = 1 + \epsilon X + \epsilon' Y + \epsilon\epsilon' YX$$

Por lo tanto,

$$gg' = g'g(1 + \epsilon\epsilon'[X,Y])$$

Esto dice que $(1+\epsilon\epsilon'[X,Y]) \in G(k'')$. Pero la subálgebra $k[\epsilon\epsilon']$ de k'' puede identificarse con $k[\epsilon]$ pues es en una variable y la variable al cuadrado es 0. Entonces, $(1+\epsilon[X,Y]) \in G(k[\epsilon])$, es decir que $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. $\square$

Ejemplo. El álgebra de Lie del grupo ortogonal es el conjunto de matrices tal que

$$1 = (1+\epsilon X)(1+\epsilon X^t) = 1 + \epsilon(X + X^t)$$

es decir que $X + X^t = 0$.

Ejercicio 3.1. Determinar cuáles son las álgebras de Lie de los grupos algebraicos de matrices

$$SL(n,k) = \{g \in GL(n,k) \colon \det g = 1\}$$
$$SO(n,k) = \{g \in SL(n,k) \colon gg^t = 1\}$$
$$Sp(n,k) = \left\{g \in SL(2n,k) \colon g^t \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Ejercicio 3.2. Probar que $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ son isomorfas y que son simples.

§4. $\mathfrak{g}$-módulos.

En esta sección consideraremos que k es un cuerpo y que las álgebras de Lie son de dimensión finita.

Definición. *Un $\mathfrak{g}$-módulo es un k-espacio vectorial V junto con una aplicación k-bilineal*

$$\mathfrak{g} \times V \to V$$
$$(x,v) \to xv$$

que satisface la condición $[x,y]v = xyv - yxv$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$. El correspondiente morfismo $\pi \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ junto con el espacio de la representación V definen un par (π, V) que se denomina representación de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos. 1. Un espacio vectorial V se puede mirar como un $\mathfrak{g}$-módulo bajo la *acción trivial* $xv = 0$ para todo $v \in V$ y $x \in \mathfrak{g}$.

2. Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $M(n,k)$, entonces $V = k^n$ es un $\mathfrak{g}$-módulo bajo la acción usual.

3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, entonces $V = \mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo bajo la acción $\mathrm{ad}(x)y = [x,y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Efectivamente $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ es una representación por Teorema 2.1 llamada la *representación adjunta.*

A partir de $\mathfrak{g}$-módulos conocidos podemos construir otros:

a) *Producto tensorial:* Sean V_1 y V_2 dos $\mathfrak{g}$-módulos, el producto tensorial $V_1 \otimes V_2$ tiene una única estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de modo que

$$x(v_1 \otimes v_2) = (xv_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (xv_2)$$

b) *Espacio de homomorfismo:* Dados dos $\mathfrak{g}$-módulos V_1 y V_2, el espacio de transformaciones k-lineales $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$ tiene la siguiente estructura de $\mathfrak{g}$-módulo: $(xf)(v_1) = x(f(v_1)) - f(xv_1)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y todo $v_1 \in V_1$.

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V un $\mathfrak{g}$-*submódulo* W de V es un subespacio de V cerrado bajo la acción de $\mathfrak{g}$, es decir $xw \in W$ para todo $w \in W$ y todo $x \in \mathfrak{g}$. En este caso se dice que si (π, V) es la representación asociada al $\mathfrak{g}$-módulo V, (π, W) es una *subrepresentación* de (π, V).

Ejercicio 4.1. Si (π, V) es una representación de $\mathfrak{g}$ y U un $\mathfrak{g}$-submódulo de V, probar que $(\tilde{\pi}, V/U)$ es también una representación, llamada *representación cociente*, para $\tilde{\pi}(x+U) = \pi(x)v + U$.

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V se dice que un elemento $v \in V$ es $\mathfrak{g}$-*invariante* si $xv = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. La terminología proviene del significado a nivel de grupo pues es equivalente a que $(1 + \epsilon x)v = v$.

Ejercicio 4.2. Probar que el conjunto de todos los elementos $\mathfrak{g}$-invariantes de V es un submódulo.

Una forma bilineal $B\colon V \times V \to k$ se dice *invariante* si

$$B(xv, w) + B(v, xw) = 0$$

Observemos que a nivel de grupo, si $g = 1 + \epsilon x$ la condición se convierte en $B(gv, gw) = B(v, w)$.

Teorema 4.1. *Dada (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$ siempre existe una forma bilineal simétrica en $\mathfrak{g}$ invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ dada por $B_\pi(x, y) = \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi(y))$.*

Demostración. B_π es simétrica pues $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$ para todo $S, T \in \mathrm{End}(V)$. Veamos que es invariante por la adjunta

$$
\begin{aligned}
B_\pi(\operatorname{ad}(z)x, y) + B_\pi(x, \operatorname{ad}(z)y) &= \operatorname{Tr}(\pi([z,x])\pi(y)) + \operatorname{Tr}(\pi(x)\pi([z,y])) \\
&= \operatorname{Tr}([\pi(z),\pi(x)]\pi(y)) + \pi(x)[\pi(z),\pi(y)])) \\
&= \operatorname{Tr}(\pi(z)\pi(x)\pi(y) - \pi(x)\pi(z)\pi(y)) + \pi(x)\pi(z)\pi(y) - \pi(x)\pi(y)\pi(z))) \\
&= \operatorname{Tr}(\pi(z)\pi(x)\pi(y)) - \operatorname{Tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z))) \\
&= \operatorname{Tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z)) - \operatorname{Tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z))) \\
&= 0 \qquad\qquad \square
\end{aligned}
$$

Definición. *La forma de Killing es la forma bilineal simétrica invariante de* $\mathfrak{g}$ *dada por* $B(x,y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y))$.

Ejercicio 4.3. a) Para $\mathfrak{sl}(2,k)$,

a) Probar que $B(X,Y)$ es un múltiplo de $\operatorname{Tr}(XY)$. Calcular dicho múltiplo. (*Ayuda:* Usar una base apropiada).

b) Probar que $B(x,x)$ es un múltiplo del $\det X$.

Ejercicio 4.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, es decir $k = \mathbb{R}$, probar que:

a) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja.

b) $B^{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} = B$ donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ y $B^{\mathbb{C}}$ la de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Ejercicio 4.5. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real de matrices complejas con la propiedad que si $0 \neq X \in \mathfrak{g}$ entonces $iX \notin \mathfrak{g}$.

a) Probar que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ puede realizarse como un álgebra de Lie de matrices complexificando las entradas de los elementos de $\mathfrak{g}$.

b) Usar a) para probar que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ tienen complexificaciones isomorfas.

c) Probar que en $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ la forma de Killing es definida negativa y que en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ hay elementos tales que $B(X,X) > 0$.

d) Probar que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ no son isomorfas.

§5. Álgebras de Lie nilpotentes.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre el cuerpo k y sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Podemos definir una cadena descendente de ideales de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera

$$C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset C^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^1\mathfrak{g}] \supset C^3\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^2\mathfrak{g}] \supset \dots$$

Debemos entender que cuando hablamos del corchete entre dos subálgebras de Lie $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ nos referimos a la subálgebra que, como espacio vectorial, está generada por los elementos $[x_1, x_2]$ para todo $x_i \in \mathfrak{h}_i$.

Ejercicio 5.1. Probar que $[C^r\mathfrak{g}, C^s\mathfrak{g}] \subset C^{r+s}\mathfrak{g}$.

Teorema 5.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un entero n tal que $C^n\mathfrak{g} = 0$.

(ii) Existe un entero n tal que

$$[x_1, [x_2, [\dots [x_{n-1}, x_n] \dots]]] = \mathrm{ad}(x_1)\mathrm{ad}(x_2) \dots \mathrm{ad}(x_{n-1})x_n = 0$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$.

(iii) $\mathfrak{g}$ es una sucesiva extensión central de álgebras de Lie abelianas, es decir que existe una cadena de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots \mathfrak{a}_n = 0$ tal que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ es el centro de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$, o dicho de otra manera, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ para todo i.

Ejercicio 5.2. Demostrar el Teorema 5.1 de la forma (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) y probar que si los ideales a_i son como en (iii) entonces $C^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_i$ para todo i.

Definición. *Si $\mathfrak{g}$ satisface las condiciones del Teorema 5.1, $\mathfrak{g}$ se dice nilpotente.*

Ejemplos. 1. El subconjunto de matrices $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : t \in k \right\}$ es un álgebra de Lie nilpotente.

2. El álgebra de Heisenberg dada como ejemplo de álgebra de Lie de dimensión 3 en §1 y las del ejercicio 2.9 son nilpotentes.

Recordemos que $u \in \mathrm{End}(V)$ se dice nilpotente si existe un natural n tal que $u^n = 0$. Definamos *bandera* de V a una sucesión $F : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ de subespacios vectoriales de V tal que $\dim V_i = i$.

Ejercicio 5.3. Justifique por qué todo endomorfismo nilpotente de V determina una bandera F de V tal que $uV_i \subset V_{i-1}$.

Ejercicio 5.4. Sea V un espacio vectorial y $F : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ una bandera de V. Probar que:

a) $\mathfrak{u}(F) = \{u \in \mathrm{End}(V) \colon uV_i \subset V_{i-1} \text{ para todo } i \geq 1\}$ es un álgebra de Lie con el corchete usual de $\mathrm{End}V$;

b) $\mathfrak{u}(F)$ es isomorfa a una subálgebra de matrices triangulares superiores estrictas (con ceros en la diagonal);

c) $\mathfrak{u}(F)$ es nilpotente (*Ayuda:* Usar Teorema 5.1 (iii) considerando los ideales $\mathfrak{u}_k(F) = \{u \in \mathrm{End}(V) \colon uV_i \subset V_{i-k} \text{ para todo } i \geq k\}$).

Ahora podremos justificar la nomenclatura dada a las álgebras de Lie con las propiedades del Teorema 5.1.

Teorema 5.2. *$\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $\mathrm{ad}x$ es nilpotente para cada $x \in \mathfrak{g}$.*

Antes de demostrar el Teorema 5.2 consideremos el Teorema de Engel.

Teorema 5.3 (Engel). *Sea $\pi \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$ tal que $\pi(x)$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Entonces existe una bandera F de V tal que $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{u}(F)$.*

La recíproca es trivial pues $\mathfrak{u}(F)$ es nilpotente. De acuerdo al Ejercicio 5.3, el significado del Teorema de Engel es el siguiente: si para cada $x \in \mathfrak{g}$ existe una bandera F_x

tal que $\pi(x)V_{x,i} \subset V_{x,i=1}$ entonces existe una bandera F que funciona para todos los x simultáneamente.

Otra versión de este teorema es:

Teorema 5.4. *Sea $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$ tal que $\pi(x)$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $V \neq 0$, entonces existe un vector no nulo $v \in$ tal que $\pi(x)v = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Si vale el Teorema 5.3, dado cualquier $v \in V_1$ se tiene que $\pi(x)v \in V_0 = 0$. Si vale el Teorema 5.4, usando inducción en la $\dim V$ se deduce inmediatamente el Teorema 5.3. En efecto, para $\dim V = 1$ no hay nada que probar y si vale para $\dim V = n-1$ consideremos $W = V/kv$ que tiene dimensión $n-1$. Por hipótesis inductiva W tiene una bandera que induce una bandera en V con las propiedades requeridas.

Para una demostración del Teorema 5.4 ver [S].

Demostración del Teorema 5.2. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\mathrm{ad}(x)$ es nilpotente por Teorema 5.1 (ii).

Recíprocamente, si $\mathrm{ad}(x)$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, el Teorema de Engel aplicado a la representación adjunta dice que existe una bandera $0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$ de subespacios de $\mathfrak{g}$ tales que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i-1}$ para todo i. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es nilpotente por Teorema 5.1 (iii). $\square$

Se puede plantear un teorema análogo al Teorema de Engel a nivel de grupos algebraicos de matrices. Para ello consideraremos V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo k. Un elemento $g \in GL(V)$ se dice *unipotente* si satisface las siguientes condiciones, o alguna de ellas pues son equivalentes entre sí:

(i) $g = 1 + n$ con n nilpotente;
(ii) en una base apropiada g es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal;
(iii) 1 es el único autovalor de g.

Teorema 5.5 (Kolchin). *Sea G un subgrupo de $GL(V)$ tal que todo elemento $g \in G$ es unipotente. Entonces, existe una bandera $F = \{V_i\}$ de V tal que $GV_i = V_i$.*

En otras palabras el Teorema de Kolchin dice que hay una base en la cual todos los elementos de G se representan simultáneamente como matrices triangulares superiores con 1's en la diagonal.

Demostración. Suponiendo que $V \neq 0$, si probamos que existe $0 \neq v \in V$ dejado fijo por todo el grupo G, haciendo inducción en la $\dim V$ se obtiene el resultado esperado.

Para probar la afirmación anterior consideremos la ecuación lineal $(g-1)v = 0$ para $g \in G$. Tendrá solución no trivial v sobre k si y sólo si tiene una sobre $\bar{k}$ la clausura algebraica de k, es decir en $V \otimes_k \bar{k}$. Por lo tanto podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Más aún, reemplazando V por un G-submóldulo podemos suponer que V es simple (no contiene submódulos propios no triviales). Usaremos el Teorema de Burnside [BA, Cap. 8, §4.3], que dice que si $\dim V < \infty$, k algebraicamente cerrado, V un A-módulo simple con A una subálgebra de $\mathrm{End}(V)$, entonces $A = \mathrm{End}(V)$. Por lo tanto, como los elementos de G generan linealmente la k-subálgebra $A = \sum_{g\in G} kg$ tenemos que G genera todo $\mathrm{End}_k V$.

Por otro lado, para cada $g = 1 + n \in G$ se tiene que $\mathrm{Tr} g = \mathrm{Tr} 1 + \mathrm{Tr} n = \mathrm{Tr} 1$ por ser n nilpotente ya que su único autovalor es el 0. Eso dice que la traza de g es independiente de $g \in G$. Además para cada $h \in G$, $\mathrm{Tr}(nh) = \mathrm{Tr}((g-1)h) = \mathrm{Tr}(gh) - \mathrm{Tr}(h) = 0$. Como h genera todo $\mathrm{End}_k V$, $\mathrm{Tr}(nx) = 0$ para todo $x \in \mathrm{End}_k V$, por lo tanto $n = 0$ y $g = 1$. Esto es lo que queríamos probar, que G actúa trivialmente en V. □

§6. Álgebras de Lie solubles.

Podemos definir otra cadena descendente de ideales de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera

$$D^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} = [D^1\mathfrak{g}, D^1\mathfrak{g}] \supset D^3\mathfrak{g} = [D^2\mathfrak{g}, D^2\mathfrak{g}] \supset \dots$$

Teorema 6.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) Existe un entero n tal que $D^n\mathfrak{g} = 0$.

(ii) Existe un entero n tal que

$$[[\dots[[x_1, y_1], [x_2, y_2]], \dots], [\dots, [[x_{n-1}, y_{n-1}], [x_n, y_n]], \dots]] = 0$$

para todo $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$.

(iii) $\mathfrak{g}$ es una sucesiva extensión de álgebras de Lie abelianas, es decir que existe una cadena de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots \mathfrak{a}_n = 0$ tal que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ es abeliana, o dicho de otra manera, $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ para todo i.

Ejercicio 6.1. Demostrar el Teorema 6.1 de la forma (i) ⇒ (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i).

Definición. *Si $\mathfrak{g}$ satisface las condiciones del Teorema 6.1, $\mathfrak{g}$ se dice soluble.*

Ejemplos. 1. Toda álgebra de Lie nilpotente es soluble pues $D^i\mathfrak{g} \subset C^i\mathfrak{g}$ para todo i.

2. El subconjunto de matrices $\left\{ \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & b \end{bmatrix} : t \in k \right\}$ es un álgebra de Lie soluble.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $F : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ una bandera de V. El álgebra de Lie $\mathfrak{b}(F) = \{b \in \mathrm{End}(V) \colon bV_i \subset V_i \text{ para todo } i\}$ es un álgebra de Lie con el corchete usual de $\mathrm{End}V$. En efecto, eligiendo una base apropiada compatible con la bandera F se deduce que $\mathfrak{b}(F)$ consiste de matrices triangulares. Como el cociente $\mathfrak{b}(F)/\mathfrak{u}(F)$ es abeliana, $\mathfrak{b}(F)$ resulta soluble.

Ejercicio 6.2. Probar que el álgebra de Lie del grupo de translaciones y dilataciones del plano y la del grupo de rotaciones y dilataciones del plano dadas como ejemplo de álgebra de Lie de dimensión 3 en §1 son solubles.

El Teorema Lie es el más importante sobre álgebras de Lie solubles sobre cuerpos de característica 0.

Teorema 6.1 (Lie). *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y sea (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$. Entonces existe una bandera F de V tal que $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(F)$.*

Por inducción el Teorema de Lie se reduce a:

Teorema 6.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y sea (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$. Si $V \neq 0$ existe $0 \neq v \in V$ tal que v es un autovector de $\pi(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Para una demostración del Teorema 6.2 ver [S].

Notemos que un autovector v como del Teorema 6.2, determina una aplicación $\lambda\colon \mathfrak{g} \to k$ tal que $\pi(x)v = \lambda(x)v$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

El Teorema de Lie es falso si la caracteística de k es distinta de 0. En efecto, consideremos $\mathfrak{sl}(2, k)$ tal que car $k = 2$, es nilpotente y sin embargo en la representación usual en k^2 no hay un autovector común a todos los endomorfismos dados por la representación.

Ejercicio 6.3. Probar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tal que car $k = 0$, entonces $\mathfrak{g}$ tiene una bandera de ideales.

Como consecuencia del Teorema de Lie tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.3. *si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble y* car $k = 0$, *entonces $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es nilpotente.*

Demostración. La vuelta es inmediata pues $D^i\mathfrak{g} \subset C^i\mathfrak{g}$ para todo i.

Observemos que no es necesario pedir que el cuerpo sea algebraicamente cerrado pues si k' es una extensión de k y $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$, entonces es evidente que $\mathfrak{g}$ es soluble (resp. nilpotente) si y sólo si $\mathfrak{g}'$ es soluble (resp. nilpotente). Si $\mathfrak{g}$ es soluble, el ejercicio 6.3 nos asegura que hay una bandera $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = 0$ de ideales de $\mathfrak{g}$. Es decir que los endomorfismo de $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ triangularizan simultáneamente en una base apropiada. Si $[x, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, como $\operatorname{ad}([x, y]) = [\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)]$ en esa base corresponde a una matriz triangular superior estricta, es decir $\operatorname{ad}([x, y])\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. Por lo tanto $\operatorname{ad}([x, y])$ es nilpotente para todo x e y, es decir $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ lo es. $\square$

Un elemento $u \in \operatorname{End}_k(V)$ se dice *semisimple* si es diagonalizable, es decir si tiene una base de autovectores.

El siguiente es el conocido resultado de álgebra lineal para cuerpos algebraicamente cerrados y de característica 0.

Teorema 6.5 (Descomposición de Jordan). *Para cada $u \in \operatorname{End}_k(V)$ existen un endomorfismo semisimple s y otro nilpotente n tal que $u = s+n$ y $sn = ns$. Esta descomposición es única bajo esas condiciones y existen polinomios P y Q con término independiente nulo tales que $P(u) = s$ y $Q(u) = n$.*

El siguiente es un importante criterio de solubilidad.

Teorema 6.6 (Criterio de Solubilidad de Cartan). *Sea k un cuerpo de característica 0 y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces, $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si la forma de Killing B satisface $B(x, y) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Ejercicio 6.4. Demostrar para $k = \mathbb{C}$ la parte ($\Leftarrow$) del Criterio de Solubilidad de Cartan usando el Corolario 6.3. Probar por el absurdo que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es nilpotente bajo las condiciones del teorema, para ello usar la descomposición de Jordan $\operatorname{ad}(y) = s+n$ y analizar $\operatorname{Tr}(\bar{s}\operatorname{ad}(y))$ donde $\bar{s}$ es el endomorfismo conjugado a s.

Para una demostración completa del Teorema 6.4 ver [K] o [S].

Ejercicio 6.5. Clasificación de las álgebras de Lie solubles de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$*:*

a) Probar que si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 1$, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de Heisenberg o es la suma directa de una subálgebra de dimensión 1 y otra no abeliana de dimesión 2.

b) Si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 2$ usar el ejercicio 6.3 para mostrar que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es abeliana. Sean x, y una base de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ y x, y, z una de $\mathfrak{g}$. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$[x, z] = ax + by \qquad [y, z] = cx + dy$$

Mostrar que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es no singular. Observar además que las álgebras del ejercicio 2.8 son de este tipo, por lo tanto hay una cantidad no numerable de álgebras de Lie solubles no isomorfas de dimensión 3.

c) Concluir que las únicas álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ son, salvo isomorfismo, las abelianas y el álgebra de Heisenberg. Concluir también que las restantes solubles son las dadas en b) la que es suma directa de una álgebra de Lie de dimensión 1 con una no abeliana de dimensión 2.

Ejercicio 6.6. Probar que la clase de álgebras de Lie nilpotentes (resp. solubles) es cerrada por cocientes, subálgebras y productos ¿y por extensiones?

§7. Álgebras de Lie semisimples.

En esta sección consideraremos k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Dados dos ideales solubles $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es soluble pues $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ es una extensión por $\mathfrak{a}$. Por lo tanto, existe un ideal soluble que contiene a todos los demás ideales solubles de $\mathfrak{g}$.

Definición. *El radical* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$ *es el ideal soluble maximal, es decir que es único y contiene a todos los ideales solubles de* $\mathfrak{g}$*.*

Definición. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se dice semisimple si* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$*, es decir no tiene ideales solubles no nulos.*

Otro criterio de semisimplicidad es el siguiente.

Teorema 7.1 (Criterio de Semisimplicidad de Cartan). *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es semisimple si y sólo si la forma de Killing es no degenerada.*

Demostración. Sea $\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} \colon B(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}$. Es fácil ver que $\mathfrak{u}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. En particular, $B(x, y) = 0$ para todo $y \in D\mathfrak{u} = [\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$, lo que dice que $\mathfrak{u}$ es soluble por el Criterio de Solubilidad de Cartan. Por lo tanto, si $\mathfrak{g}$ es semisimple, $\mathfrak{u} = 0$.

Para ver la recíproca, consideremos $\mathfrak{a}$ un ideal abeliano en $\mathfrak{g}$. Veamos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}$. En efecto, dados $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ y $\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)\mathfrak{a} = 0$, por lo tanto $(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))^2 = 0$ y $B(x, y) = 0$. $\square$

Teorema 7.2. *Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{a}^\perp$ el espacio ortogonal a $\mathfrak{a}$ con respecto a la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{a}^\perp$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$.*

Demostración. Por ser la forma de Killing invariante, $\mathfrak{a}^\perp$ resulta un ideal de $\mathfrak{g}$. Por otro lado, usando el Criterio de Solubilidad de Cartan, se obtiene que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ es soluble. Por lo tanto $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$. □

Corolario 7.3. *Toda álgebra de Lie semisimple es producto de álgebras de Lie simples.*

Ejercicio 7.1. Demostrar el Corolario 7.3.

Si $\mathfrak{s}$ es un álgebra de Lie simple es inmediato que $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Esto asegura que:

Corolario 7.4. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Corolario 7.5. *Si $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{a}_i$ es una expresión de $\mathfrak{g}$ como suma de ideales simples, entonces cualquier ideal de $\mathfrak{g}$ es suma de algunos de los $\mathfrak{a}_i$.*

Ejercicio 7.2. Demostrar el Corolario 7.5.

Ejercicio 7.3. Probar que todas las álgebras de Lie del ejercicio 3.1 son simples para $k = \mathbb{C}$ salvo, en algunos casos, para alguna dimensión pequeña.

Todas las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ están clasificadas. Las llamadas álgebras de Lie clásicas son las familias del ejercicio 7.3 y las excepcionales son exactamente cinco álgebras de Lie llamadas E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2.

§8. Reducibilidad completa.

En esta sección continuaremos asumiendo que k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y V un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Definición. *Un $\mathfrak{g}$-módulo V (resp. una representación (π, V)) se dice simple (resp. irreducible) si $V \neq 0$ y V sus únicos submódulos son 0 y V.*

V (resp. (π, V)) se dice semisimple (resp. completamente reducible) si V es suma directa de submódulos simples, o equivalentemente, todo submódulo de V tiene un submódulo complementario.

Observemos que $\mathfrak{g}$ puede ser semisimple como $\mathfrak{g}$-módulo sin ser semisimple como álgebra de Lie. Ejemplo de ello es $\mathfrak{g} = k$.

Teorema 8.1 (Weyl). *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ es completamente reducible.*

Por una demostración ver [S].

Corolario 8.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un ideal semisimple del álgebra de Lie $\mathfrak{q}$, entonces existe un único ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$ tal que $\mathfrak{q} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$.*

Demostración. Aplicando la completa reducibilidad a la representación $(\mathrm{ad}|_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{q})$ de $\mathfrak{g}$ se obtiene un k-subespacio complementario a $\mathfrak{q}$ que es estable por $\mathrm{ad}(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Veamos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$. En efecto, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ por ser $\mathfrak{g}$ un ideal y ser $\mathfrak{a}$ estable por la acción de $\mathfrak{g}$. Es decir que $\mathfrak{a} = \{y \in \mathfrak{q} \colon [\mathfrak{g}, y] = 0\}$ pues escribiendo $y = x + a$ con $x \in \mathfrak{g}$ y

$a \in \mathfrak{a}$ se tiene que $[\mathfrak{g}, y] = [\mathfrak{g}, x]$ y $[\mathfrak{g}, x] = 0$. Por lo tanto, $x = 0$ pues $\mathfrak{g}$ tiene centro 0. Eso dice que $\mathfrak{a}$ es único, incluso como $\mathfrak{g}$-módulo, y también que $\mathfrak{a}$ es un ideal en $\mathfrak{q}$ porque ser el anulador del $\mathfrak{q}$-módulo $\mathfrak{g}$. □

Definición. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice reductiva si todo ideal $\mathfrak{a}$ de tiene un ideal complemetario $\mathfrak{b}$, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.*

Ejercicio 8.1. Probar que toda álgebra de Lie reductiva tiene una descomposición $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z_{\mathfrak{g}}$ donde $Z_{\mathfrak{g}}$ es el centro de $\mathfrak{g}$.

Corolario 8.3. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces toda derivación de $\mathfrak{g}$ es de la forma* $\mathrm{ad}(x)$ *para algún $x \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Podemos aplicar el Corolario 8.2 a $\mathfrak{q} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ pues $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ya que si $x \in \mathfrak{g}$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tenemos que $[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(Dx)$. Por lo tanto, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ donde $\mathfrak{a}$ consiste de las derivaciones que conmutan con $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Sea $D \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(Dx) = [D, \mathrm{ad}(x)] = 0$, lo que dice que $Dx = 0$ pues el centro de $\mathfrak{g}$ es cero. Entonces $\mathfrak{a} = 0$. □

Referencias

[BA] N. Bourbaki, *Algebra*, Hermann.
[BG] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, 1972.
[H] J. Humpheys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1987.
[K] A. Knapp, *Lie groups byond an introduction*, Birkhäuser, 1996.
[S] J. P. Serre, *Lie algebras and Lie groups (Lectures Notes 1500)*, Springer-Verlag, 1992.