CAPíTULO 1

Representaciones de grupos localmente profinitos

En lo que sigue G designa siempre un grupo localmente profinito, esto es: localmente compacto y totalmente disconexo.

Es sabido que un tal grupo tiene un sistema fundamental de vecindades de la identidad de G formado por subgrupos abiertos y compactos. Para mas detalles sobre grupos localmente profinitos ver [P] y [Sh].

1.1. Definiciones

Definición 1.1.1. Una representación compleja de G es un par (π, V), donde V es un espacio vectorial complejo y $\pi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(V)$ es un homomorfismo de grupos.

Se dice que la representación (π, V) es finita de orden n si $\dim_{\mathbf{C}}(V) = n$, de lo contrario se dice que (π, V) es una representación infinita de G.

Ejemplo 1.1.2.

1. La representación $(\pi, \mathbf{C})$ definida por $\pi(g) = 1$, con $\pi : G \longrightarrow \mathbf{C}^{\times}$, es una representación de G llamada *representación trivial* de G.

2. Si $\mathbf{F}$ es una extensión finita del cuerpo p-ádico $\mathbf{Q}_p$ entonces $\psi_a = \chi_a \circ Tr$ donde Tr es la traza de la extensión $\mathbf{F}$ de $\mathbf{Q}_p$ y $\chi_a(x) = e^{2\pi i \lambda(ax)}$ para $ax = \sum\limits_{i \geq -n} \alpha_i p^i$ en $\mathbf{Q}_p$ y $\lambda\left(\sum\limits_{i \geq -n} \alpha_i p^i\right) = \sum\limits_{i=-n}^{0} \alpha_i p^i$, es una representación (continua) de dimensión 1 del grupo localmente profinito $(\mathbf{F}, +)$. La representación ψ_a es llamada, usualmente, un *carácter cuasicontinuo* de $\mathbf{F}$.

Al igual que antes, el dual $\widehat{\mathbf{F}^+}$ del grupo $(\mathbf{F}, +)$, esto es el conjunto de todas las representaciones (continuas) de dimensión 1 de G, forman un grupo topológicamente isomorfo a $(\mathbf{F}, +)$ (dado a en $\mathbf{F}$ se tiene el carácter ψ_a y recíprocamente). Este es un resultado general para grupos abelianos localmente compacto. Para más detalles ver [P].

De ahora en adelante, diremos que un carácter ψ de $\mathbf{F}^+$ tiene conductor $P_{\mathbf{F}}^n$, donde $P_{\mathbf{F}}^n = \omega_{\mathbf{F}}^n O_{\mathbf{F}}$, $n \in \mathbf{Z}$, siendo $O_{\mathbf{F}}$ el anillo de los enteros del cuerpo local no arquimideano $\mathbf{F}$, con $\omega_{\mathbf{F}}$ el elemento uniformizante de $O_{\mathbf{F}}$. Así, por ejemplo, el carácter ψ_a, definido anteriormente, es un carácter de $\mathbf{F}^+$ con conductor $P_{\mathbf{F}}$. Para más detalles sobre cuerpos p-ádicos ver [S1].

Observación 1.1.3. Darse una representación (π, V) de un grupo G es tener una acción lineal de G en V, por lo tanto tenemos lo siguiente:

1. Dado un elemento v en V tenemos el estabilizador de v en G, $G_v = \{g \in G/\pi_g(v) = v\}$ el cual es un subgrupo de G.

2. Dado un elemento v en V tenemos la órbita de v bajo la acción de G, $\mathrm{Orb}_G(v) = \{\pi_g(v)/g \in G\}$ el cual es un subconjunto de V.

3. Dado un subgrupo H de G tenemos el subespacio de V de todos los elementos dejados fijos por H, a saber $V^H = \{v \in V/\pi_h(v) = v \quad \forall h \in H\}$.

Por otra parte, (π, V) es una representación continua de G si y solamente si $\pi : G \times V \longrightarrow V$ es una función continua y esto equivale a tener, si a V le damos la topología discreta, que G_v debe ser abierto en G

Definición 1.1.4. Sea (π, V) una representación de G. Diremos que v en V es un vector liso si su estabilizador G_v, bajo la acción de G, es un subgrupo abierto de G.

Proposición 1.1.5. Sea (π, V) una representación de G y denotemos por V_l el subespacio vectorial de todos los vectores lisos de V, entonces:

1. V_l es un subespacio $G-$invariante de V.

2. Si (π, V) es una representación continua entonces V_l es denso en V.

Demostración:

1. Sea $v \in V_l$ y $g \in G$, $\pi_g(v)$ es un vector liso en V. En efecto,

$$\begin{aligned} G_{\pi_g(v)} &= \{h \in G/\pi_h(\pi_g(v)) = \pi_g(v)\} \\ &= \{h \in G/\pi_{g^{-1}hg}(v) = v\} \\ &= gG_vg^{-1} \end{aligned}$$

Así, $G_{\pi_g(v)}$ es abierto en G pues G_v lo es.

Definición 1.1.6. Dada una representación (π, V) de G diremos que U sub-espacio de V es una subrepresentación de (π, V) si U es invariante bajo la acción de G.

Una representación (π, V) se dice irreducible si los únicas subespacios invariantes son los subespacios triviales.

De la proposición 1.1.5. se tiene que el subespacio V_l, de todos los vectores lisos de una representación (π, V) de G, es una subrepresentación de (π, V). Además, si (π, V) es una representación continua de G entonces la representación (π, V_l) es densa en (π, V).

Definición 1.1.7. Una representación (π, V) de G se dice lisa si todo vector v de V es liso, esto es, G_v es un subgrupo abierto en G para cualquier v en V.

Proposición 1.1.8. Una representación (π, V) es lisa si y solo si $V = \bigcup_K V^K$ donde K corre en los subgrupos abiertos y compactos de G.
Demostración:

Sea (π, V) una representación lisa de V entonces dados $v \in V$ se tiene que G_v es un subgrupo abierto en G, como G tiene un sistema fundamental de vecindades formada por subgrupos abiertos y compactos entonces es posible encontrar K subgrupo abierto y compacto con $K \subset G_v$ y así $v \in V^K$ y por lo tanto $V \subset \bigcup_K V^K$ con K subgrupo abierto y compacto.

Recíprocamente , si $v \in V$ entonces existe K subgrupo abierto y compacto tal que v está en $V^K = \{w \in V / \pi_k(w) = w \ \forall k \in K\}$ entonces $K \subset G_v$ y por lo tanto G_v es abierto esto es v es un vector liso de V.

Definición 1.1.9. Una representación (π, V) de G se dice finitamente generada si existen finitos vectores $v_1, ..., v_m$ de V tal que el conjunto

$$\{\pi_g(v_i) / g \in G, 1 \leq i \leq m\}$$

genera el espacio vectorial complejo V.

Sea ahora (π, V) una representación lisa de G y consideremos $\widetilde{V}$ el espacio de todos los elementos lisos de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C})$ bajo la acción natural de G sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C})$ definida por $\widetilde{\pi}_g$, para $g \in G$, del siguiente modo:

$$(\widetilde{\pi}_g f)(v) = f(\pi_{g^{-1}} v) \qquad\qquad (g \in G, \quad f \in \widetilde{V}, \quad v \in V)$$

Definición 1.1.10. Dada una representación lisa (π, V) de G decimos que la representación $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ es la representación lisa contragadiente (o dual) de (π, V).

Proposición 1.1.11. Para cualquier subgrupo abierto compacto K de G se tiene que,

$$\widetilde{V}^K \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^K, \mathbf{C})$$

Demostración:

Definamos por $\langle , \rangle : V \times \widetilde{V} \longrightarrow \mathbf{C}$, la evaluación canónica.

$$\widetilde{V}^K = \left\{ f \in \widetilde{V} / \widetilde{\pi}_k f = f \quad \forall k \in K \right\}$$

Así, la función

$$\phi : \widetilde{V}^K \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^K, \mathbf{C})$$

definida por $\phi(f) = f_{|_{V^K}}$ es un isomorfismo ya que

$$\langle \pi_k v, \widetilde{\pi}_k f\rangle = \langle v, f\rangle \qquad (k \in K,\ v \in V^K,\ f \in \widetilde{V}^K)$$

Definición 1.1.12. Una función $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$ se dice localmente constante si dado cualquier x en G existe un subgrupo abierto y compacto U de G tal que $f_{|_{xU}}$ es constante.

Ejemplo 1.1.13. Consideremos el conjunto,

$$\mathcal{H}(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbf{C}/f \text{ es localmente constante y de soporte compacto}\}$$

El conjunto $\mathcal{H}(G)$ es claramente un $\mathbf{C}-$espacio vectorial sobre el cual podemos definir las siguientes representaciones de G:

1. La *representación regular derecha* la cual está definida por

$$R : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(\mathcal{H}(G))$$

donde $R_g : \mathcal{H}(G) \longrightarrow \mathcal{H}(G)$ es tal que

$$(R_g f)(x) = f(xg) \qquad (x, g \in G,\ f \in \mathcal{H}(G))$$

2. La *representación regular izquierda* la cual está definida por

$$L : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(\mathcal{H}(G))$$

donde $L_g : \mathcal{H}(G) \longrightarrow \mathcal{H}(G)$ es tal que

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) \qquad (x, g \in G,\ f \in \mathcal{H}(G))$$

Ambas son representaciones lisas de G. En efecto si $\mathrm{Sop}(f) = K$ entonces $G_f = K$ el cual es un abierto compacto.

Definición 1.1.14 Sean (π^i, V_i) $(i = 1, 2)$ dos representaciones lisas de G y $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ una transformación lineal de $\mathbf{C}-$espacios vectoriales. Diremos que ϕ es un *operador de entrelazamiento* entre las representaciones (π^1, V_1) y (π^2, V_2) de G si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi} & V_2 \\ \pi_g^1 \downarrow & & \downarrow \pi_g^2 \\ V_1 & \xrightarrow{\phi} & V_2 \end{array}$$

para todo g en G.

Ejercicio 1.1.15

1. Si G es compacto entonces toda representación lisa irreducible de G es de dimensión finita.

2. Si (π, V) es una representación lisa de dimensión finita de $GL(n, \mathbf{F})$ entonces $\dim_{\mathbf{C}}(V) = 1$

1.2. Representaciones Admisibles.

En lo que sigue siempre consideraremos a G como un grupo unimodular, esto es: G posee una medida de Haar bi-invavariante que denotamos por μ.

La medida μ es racional, en efecto, sean X_1 y X_2 dos conjuntos no vacíos abiertos y compactos cualesquiera de G. Sin perdida de generalidad podemos suponer $1 \in X_1$ y $1 \in X_2$. Así existen subgrupos abiertos y compactos $K_1 \subset X_1$ y $K_2 \subset X_2$ tal que $K = K_1 \cap K_2$. Ahora como $X_i \subset G$ $(i = 1, 2)$ y $G = \bigcup_j x_j K$ entonces $X_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} x_j^i K$ $(i = 1, 2)$ y así $\mu(X_i) = n_i \mu(K)$ $(i = 1, 2)$ de donde se obtiene que:

$$\frac{\mu(X_1)}{\mu(X_2)} = \frac{n_1}{n_2}$$

En particular, si X_2 es un subgrupo de X_1 entonces

$$\frac{\mu(X_1)}{\mu(X_2)} = [X_1 : X_2]$$

Así, dado $\mathbf{F}$ un cuerpo local no arquimideano con anillo de enteros $O_{\mathbf{F}}$ y único ideal primo $P_{\mathbf{F}} = \varpi_{\mathbf{F}} O_{\mathbf{F}}$, con $\varpi_{\mathbf{F}}$ el uniformizante, entonces si fijamos que $\mu(O_{\mathbf{F}}) = 1$ se tiene que $\mu(P_{\mathbf{F}}^n) = \frac{1}{q^n}$, $n \in \mathbf{Z}$, donde q es el cardinal del cuerpo residual $k_{\mathbf{F}} = O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}$ de $\mathbf{F}$.

Ahora, si (π, V) es una representación lisa de G y K es un subgrupo abierto y compacto de G entonces podemos definir el operador lineal $P_K : V$

$$P_K(v) = \frac{1}{\mu(K)} \int_K \pi_k(v) dk$$

Como π es una representación lisa se tiene que este operador es esencialmente una suma finita.

Claramente se tiene que $\operatorname{Im} P_K = V^K$ y así tenemos que

$$\operatorname{Ker}(P_K) = V(K) = \langle \pi_k v - v / k \in K, v \in V \rangle$$

y por lo tanto

$$V = V^K \oplus V(K)$$

como representaciones de K.

Definición 1.2.1. Una representación lisa (π, V) se dice admisible si la dimensión de los subespacios V^K es finita para cualquier subgrupo K abierto y compacto de G.

Proposición 1.2.2. Sea (π, V) una representación lisa de G y K un subgrupo abierto y compacto de G. Entonces (π, V) es admisible si y solamente si $\pi_{|_K}$ es suma directa de representaciones irreducibles de dimensión finita. Cada clase de isomorfía, entre ellas, tiene multiplicidad finita.
Demostración:
Supongamos que π es admisible, por teorema 17 en [P], existe K_1 subgrupo normal abierto (y por lo tanto compacto) de K y se tiene que

$$V = V^{K_1} \oplus V(K_1)$$

Siendo cada sumando una representación de K. Como el grupo K_1 actúa trivialmente sobre V^{K_1} entonces V^{K_1} puede ser considerada una representación de K/K_1, así una suma directa con multiplicidad finita de representaciones irreducibles de K.

La multiplicidad finita sigue del hecho que cualquier representación lisa π de dimensión finita tiene algún subgrupo abierto y normal en el $\operatorname{Ker}(\pi)$.

El recíproco es claro de la definición de representación admisible.

Proposición 1.2.3. Si (π, V) es una representación admisible y unitaria, con forma hermiciana $\langle u, v \rangle$, y U es cualquier $G-$subespacio estable de V, entonces $U^{\perp} = \{v \in V / \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$ es también un $G-$subespacio estable y $V = U \oplus U^{\perp}$.
Demostración: Es inmediata.

Observación 1.2.4. Es trabajoso probar, pero tan solo una rutina, que la categoría de representaciones lisas de G y la categoría de representaciones admisible de G son ambas categorías abelianas.

Proposición 1.2.5. Sean (π_i, V_i) $(i = 1, 2, 3)$ representaciones lisas de G, K un subgrupo abierto y compacto de G. Si $V_1 \xrightarrow{\vartheta_1} V_2 \xrightarrow{\vartheta_2} V_3$ es una sucesión exacta de $G-$morfismos (operadores de entrelazamientos) entonces la sucesión $V_1^K \xrightarrow{\vartheta_1} V_2^K \xrightarrow{\vartheta_2} V_3^K$ es también exacta.
Demostración:

Dado $v \in V_2^K$ tal que $\vartheta_2(v) = 0$ escojamos $v_1 \in V_1$ tal que $\vartheta_1(v_1) = v$. Ahora tenemos que $P_K(v_1) \in V_1^K$ y $\vartheta_1(P_K(v_1)) = v$ ya que $\pi_K(v) = \pi_K(\vartheta_1(v_1)) = \vartheta_1(v_1) \in V_2^K$.

Corolario 1.2.6. Sean (π_i, V_i) $(i = 1, 2, 3)$ representaciones lisas de G y la sucesión de $G-$morfismos

$$0 \longrightarrow V_1 \overset{\vartheta_1}{\longmapsto} V_2 \xrightarrow{\vartheta_2} V_3 \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces π_2 es admisible si y solamente si π_1 y π_3 lo son.
Demostración:

Por la proposición anterior tenemos que dado K subgrupo abierto y compacto de G entonces

$$0 \longrightarrow V_1^K \longrightarrow V_2^K \longrightarrow V_3^K \longrightarrow 0$$

es exacta. Ahora, si π_2 es admisible $\dim_{\mathbf{C}} V_2^K$ es finita si y solamente si $\dim_{\mathbf{C}} V_1^K$ y $\dim_{\mathbf{C}} V_3^K$ son finitas.

Proposición 1.2.7. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La representación (π, V) es admisible

(b) La representación contragradiente $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ es admisible.

(c) La representación contragradiente $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ es isomorfo a (π, V).

Demostración:

(a) equivalente (b). Usando 1.1.11 se tiene $\widetilde{V}^K \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^k, \mathbf{C})$

(b) equivalente (c). Para todo K, $\widetilde{V}^K$ es de dimensión finita y como $\widetilde{V}^K \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^K, \mathbf{C})$ entonces $\dim_{\mathbf{C}} V^K$ es finita y por lo tanto $\widetilde{\pi}_{|_K} \simeq \oplus \widetilde{V}_i \simeq \oplus V_i \simeq \pi_{|_K}$.

Se tiene, por supuesto, la incrustación canónica de π en $\widetilde{\widetilde{\pi}}$. Es claro, al igual que siempre, que el funtor $\pi \longrightarrow \widetilde{\pi}$ es contravariante y exacto.

Sea ahora (π, V) una representación lisa y U un subconjunto cualquiera de V. Definimos:

$$U^\circ = \left\{ \widetilde{v} \in \widetilde{V} / \widetilde{v}(x) = 0 \quad \forall x \in U \right\}$$

el cual es un subconjunto del dual.

Si (π, V) es admisible y unitaria entonces la forma hermiciana sobre V nos permite identificar V con $\widetilde{V}$.

Proposición 1.2.8. Supongamos que (π, V) es una representación admisible y U un subespacio $G-$estable de V. Entonces $U^\circ \subset \widetilde{V}$ es isomorfo a la representación contragradiente de V/U.

Demostración:

La función que envía $\widetilde{v}$ de U° en $\widetilde{\widetilde{v}}$ de $\widetilde{V/U}$ es un isomorfismo lineal. En efecto, $(\widetilde{\pi}_g\widetilde{v})(w) = \widetilde{v}(\pi_{g^{-1}}(w)) = 0$, $\widetilde{v} \in U^\circ$, $w \in U$. Lo cual significa que U° es $G-$estable.

Por otra parte, como, $\pi_g(x + U) = \pi_g(x) + U$ y $\widetilde{V/U} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V/U, \mathbf{C})$ entonces, para $x + U \in V/U$ se tiene que $\widetilde{\widetilde{v}}(x + U) = \widetilde{v}(x)$ y

$$\begin{aligned}(\widetilde{\pi}_g\widetilde{\widetilde{v}})(x + U) &= \widetilde{\widetilde{v}}(\pi_{g^{-1}}(x + U) \\ &= \widetilde{v}(\pi_{g^{-1}}(x)) \\ &= \widetilde{\widetilde{v}}(\pi_{g^{-1}}(x) + U)\end{aligned}$$

esto es $\widetilde{\widetilde{v}}$ está en $\widetilde{V/U}$.

Corolario 1.2.9. La representación admisible (π, V) es irreducible si y solamente si $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ lo es.

Demostración: Directa usando 1.2.8.

Proposición 1.2.10. Supongamos que (π, V) es una representación admisible unitaria de G. Entonces (π, V) es $G-$isomorfo a una suma directa de representaciones admisibles unitarias irreducibles cada una con multiplicidad finita.

Si G tiene una base contable de vecindades de la identidad entonces la suma directa es contable.

Proposición 1.2.11. Si (π, V) es una representación admisible unitaria irreducible, entonces (salvo multiplicación por un escalar) existe un único producto interior hermitiano $G-$invariante sobre V.

1.3. Lema de Schur.

Sea G un grupo localmente profinito unimodular y K un subgrupo abierto compacto de G. Denotaremos por $\mathcal{H}(G, K)$ el espacio vectorial complejo de todas las funciones $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$ las cuales satisfacen:

1. La función f es bi-invariante bajo K , esto es:

$$f(kgk') = f(g) \qquad (g \in G, k, k' \in K)$$

2. La función f es localmente constante (lo que es equivalente a decir que f se anula fuera de una unión finita de dobles clases KgK).

Definamos en el $\mathbf{C}-$espacio vectorial $\mathcal{H}(G,K)$ el producto de convolución usual, el que tiene sentido para una medida de Haar μ sobre G, por

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g)dx$$

para f_1, f_2 en $\mathcal{H}(G,K)$ y $g \in G$.

Con esta multiplicación $\mathcal{H}(G,K)$ es una álgebra asociativa sobre $\mathbf{C}$ con elemento identidad $\mathbf{e}_K : G \longrightarrow \mathbf{C}$ definida por

$$\mathbf{e}_K(x) = \begin{cases} u(K)^{-1} & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

Cuando K' es un subgrupo abierto compacto de K entonces $\mathcal{H}(G,K)$ es un subanillo de $\mathcal{H}(G,K')$, con diferente elemento identidad si $K \neq K'$.

Del hecho que G tiene un sistema fundamental de vecindades de $1, \mathfrak{S}$ formado por subgrupos abiertos compactos de G entonces

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_{K \in \mathfrak{S}} \mathcal{H}(G,K)$$

donde $\mathcal{H}(G)$ es el conjunto definido en 1.1.13. Es claro ahora que $\mathcal{H}(G)$ con el producto de convolucion, definido anteriormente, es una álgebra asociativa sin elemento identidad (salvo que G sea discreta) y es conmutativa si y solo si G lo es.

El álgebra $\mathcal{H}(G)$ es llamada *el álgebra de Hecke de* G y $\mathcal{H}(G,K)$ *el álgebra de Hecke de* G *con respecto a* K.

Definición 1.3.1. Sea (π, V) una representación lisa de G y $\widetilde{V}$ el dual liso de V. Se define la función coeficiente de la representación (π, V), a las funciones coeficientes de π, $\pi_{v,\widetilde{v}} : G \longrightarrow \mathbf{C}$ definidas por;

$$\pi_{v,\widetilde{v}}(g) = \langle \widetilde{v}, \pi_g(g) \rangle \qquad (v \in V,\ \widetilde{v} \in \widetilde{V},\ g \in G)$$

Las funciones coeficientes $\pi_{v,\widetilde{v}}$ (v en V y $\widetilde{v}$ en $\widetilde{V}$) de π son funciones localmente constantes sobre G.

Si (π, V) es una representación lisa de G entonces el espacio V tiene estructura de $\mathcal{H}(G)-$módulo con el producto definido por,

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi_g(v)dg \qquad (f \in \mathcal{H}(G),\ v \in V)$$

Observe que $\pi(f)v$ es esencialmente una suma finita. En efecto, dado v en V existe un subgrupo abierto compacto K de G tal que $v \in V^K$ y constantes $c_1, ..., c_m$ y elementos $g_1, ..., g_m$ de G tales que $f = \sum_{i=1}^{m} c_i X_{giK}$ entonces $\pi(f)v = \mu(K)\sum_{i=1}^{m} c_i \pi_{g_i}(v)$.

Proposición 1.3.2. Sea (π, V) una representación lisa de G y K un subgrupo abierto y compacto de G. Entonces el operador $P_K : V \longrightarrow V$ definido por:

$$P_K(v) = \pi(\mathbf{e}_K)v \qquad (v \in V)$$

es una proyección de V sobre V^K.
Demostración: Ejercicio.

Corolario 1.3.3. Si (π, V) es una representación lisa de G entonces V es un $\mathcal{H}(G)-$módulo no degenerado, esto es: $\mathcal{H}(G)V = V$.
Demostración:
La representación (π, V) es lisa entonces $V = \bigcup_K V^K$, K subgrupo abierto y compacto de G, así dado $v \in V$ existe un subgrupo abierto y compacto K_v de G tal que $\pi(\mathbf{e}_{K_v})v = v$ lo que nos dice que $V \subset \mathcal{H}(G)V$.

Proposición 1.3.4. Sea (π, V) una representación lisa de G, entonces:

1. Un subespacio U de V es estable bajo los operadores π_g para g en G si y solamente si U es un $\mathcal{H}(G)-$submódulo de V.

2. Sea (π', V') otra representación lisa de G y $\phi : V \longrightarrow V'$ una transformación lineal. Entonces ϕ es un operador de entrelazamiento de la representación (π', V'), esto es satisface $\pi'_g \circ \phi = \phi \circ \pi_g$ para cualquier $g \in G$, si y solamente si $\pi(f) \circ \phi = \phi \circ \pi(f)$, donde $\pi(f)$ es el operador de V en V definido por, $\pi(f)v = \int_G f(g)\pi_g(v)dg$ para $f \in \mathcal{H}(G)$ y $v \in V$.

Demostración: Ejercicio

Observación 1.3.5. De la primera parte de la proposición anterior se tiene que la representación (π, V) es (algebraicamente) irreducible si y solo si V es un $\mathcal{H}(G)-$módulo simple.

Con esto es inmediato que una representación (π, V) de G es finitamente generada (1.1.9.) si y solo si existen finitos vectores; $v_1, ..., v_m$ de V los cuales generan V como $\mathcal{H}(G)-$módulo.

Observación 1.3.6. La parte (2) de la proposición anterior nos dice simplemente que un operador de entrelazamiento ϕ entre dos representaciones (π, V) y (π', V') de G no es mas que un homomorfismo de $\mathcal{H}(G)-$módulos.

Proposición 1.3.7. (Lema de Schur)

Sea (π, V) una representación lisa irreducible de G. Supongamos que G tiene una topología con base numerable (todo grupo algebraico sobre un cuerpo local satisface esta condición). Entonces todo endomorfismo de entrelazamiento $\phi : V \longrightarrow V$ es una homotecia.

Demostración:

Como G tiene una base numerable y

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_K \mathcal{H}(G, K)$$

entonces $\mathcal{H}(G)$ tiene dimensión numerable pues dim $_{\mathbf{C}}\mathcal{H}(G, K)$ es numerable ya que $[G : K]$ es numerable para cualquier subgrupo abierto compacto K de G.

Sea ahora $v \neq 0$ en V y definamos de $\mathcal{H}(G)$ en V la función $f \longrightarrow \pi(f)v$ la cual es sobreyectiva (V es irreducible) y por lo tanto V tiene dimensión numerable. Consideremos ahora el álgebra $A = \mathrm{End}_G(V)$ y así la función

$$\mathbf{ev}_v : A \longrightarrow V$$

definida por $\mathbf{ev}_v(\phi) = \phi(v)$ es inyectiva, porque (π, V) es irreducible y por lo tanto la dimensión sobre $\mathbf{C}$ del álgebra A es numerable.

Pero sabemos que A es un álgebra de división sobre el cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbf{C}$.

Si $A \neq \mathbf{C}$ entonces existe un subcuerpo de A isomorfo al cuerpo de las fracciones racionales $\mathbf{C}(x)$. En este cuerpo, el conjunto $\{(x - \lambda)^{-1}/\lambda \in \mathbf{C}\}$ es no numerable y linealmente independiente, lo cual es una contradicción, así $A \simeq \mathbf{C}$.

La demostración del Lema de Schur es debida a Jacquet en el año 1975 ver [J1]. Otro teorema importante debido a Jacquet es el siguiente:

Teorema 1.3.8. Si (π, V) es una representación lisa e irreducible de un grupo G entonces (π, V) es admisible.

Demostración. Bastante técnica, ver [J1].

Ejemplo 1.3.9. Sea z un elemento del centro Z de G y (π, V) una representación lisa de G. Así, $\pi_z \circ \pi_g = \pi_g \circ \pi_z$ para todo $g \in G$ y usando el lema de Schur tenemos que $\pi_z = \lambda_\pi(z)\mathbf{1}_v$ con $\lambda_\pi(z)$ un número complejo. Es claro que $\lambda_\pi(z)$ nos define un carácter $\lambda_\pi : Z \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ ya que, $\lambda_\pi(zz') = \pi_{zz'} = \pi_z \circ \pi_{z'} = \lambda_\pi(z) \cdot \lambda_\pi(z')$

El carácter λ_π de Z asociado a la representación (π, V) recibe el nombre de *carácter central* de la representación (π, V).

Proposición 1.3.10. A todo $\mathcal{H}(G)-$módulo no degenerado se le asocia una única representación lisa de G y recíprocamente.
Demostración: Ejercicio.

La proposición anterior simplemente establece el hecho que la categoría de $\mathcal{H}(G)-$módulos no degenerados es equivalente a la categoría de las representaciones lisas de G.

Observación 1.3.11. Sea (π, V) una representación lisa de G y K un subgrupo abierto compacto de G. Consideremos ahora una representación (α, U) de K, (por ejemplo $(\pi_{|_K}, V)$ es una representación de K). Cualquier vecindad del 1 de K contiene un subgrupo L normal abierto y compacto de K (K es localmente profinito, ver [P]) entonces K/L es un grupo finito y tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & K & \xrightarrow{p} & K/L & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \searrow \alpha & \downarrow \widetilde{\alpha} & & \\ & & & & & & \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(U) & & \end{array}$$

Esto nos dice que cualquier representación (α, U) de K, la cual verifique $L \subset \operatorname{Ker} \alpha$, se factoriza a través de un grupo finito K/L para un subgrupo normal L compacto abierto de K.

Como (π, V) es lisa, dado v en V existe L subgrupo normal abierto y compacto de K tal que los elementos de L fijan v ($G_v \cap K < K$, $G_v \cap K$ es compacto abierto en K así que $x^{-1}(G_v \cap K)x$ es abierto compacto en K, para todo $x \in K$, y $L = \bigcap_{x \in K} x^{-1}(G_v \cap K)x$ es abierto, compacto y normal en K). Ahora sean $k_1, ..., k_m$ en K tal que $K = \bigcup_{i=1}^{m} k_i L$. El subespacio W generado por $\pi_{k_1}(v), ..., \pi_{k_m}(v)$ es estable bajo la acción de K y L actúa trivialmente, esto es (π, W) es una representación de K/L y por lo tanto W es la suma directa de representaciones irreducibles del grupo finito K/L y por lo tanto de K. Esto quiere decir que $\pi_{|_K}$ es una representación semisimple.

Ahora, para cualquier (α, U) representación de K denotamos por V_α el sub-espacio de V, $V_\alpha = \langle\{v \in V/\pi_k(v) = \alpha_k(v) \quad \forall k \in K\}\rangle$ es una representación llamada *la componente isotípica de clase α de π*. Si λ es la representación de K de dimensión 1 dada por $\lambda(k) = 1$ para $k \in K$, entonces $V_\lambda = V^K$. Mas generalmente, para cualquier carácter χ de K, el espacio V_χ está definido por

$$V_\chi = \{v \in V/\pi_k(v) = \chi(k) \cdot v \forall k \in K\}$$

Proposición 1.3.12. Si (π, V) es una representación lisa de G y K es un subgrupo abierto y compacto de G entonces

$$V = \bigoplus_{\psi \in \mathcal{C}(K)} V_\psi$$

donde $\mathcal{C}(K)$ es el conjunto de clases de equivalencia de representaciones continuas irreducibles finito dimensionales de K.

Mas aún, (π, V) es admisible si y solamente si V_ψ es de dimensión finita para todo $\psi \in \mathcal{C}(K)$.

Proposición 1.3.13. Sea (π, V) una representación lisa de G. Entonces (π, V) es admisible si y solo si el operador $\pi(f)$ es de rango finito para cualquier f en $\mathcal{H}(G)$.

Observación 1.3.14. Usando la proposición anterior tenemos que a cualquier representación admisible (π, V) de G le podemos asociar una distribución $\boldsymbol{\theta}_\pi$ sobre G por

$$\boldsymbol{\theta}_\pi(f) = Tr(\pi(f)) \qquad\qquad (f \in \mathcal{H}(G))$$

y podemos así llamar a $\boldsymbol{\theta}_\pi$ el carácter de la representación (π, V).

1.4. Representaciones Supercuspidales.

En lo que sigue G es un grupo localmente profinito y unimodular. Denotaremos por Z el centro de G y por μ una medida de Haar sobre G/Z.

Definición 1.4.1. Una representación admisible (π, V) de G se dice supercurpidal si las funciones coeficientes $\pi_{v,\widetilde{v}}$, v en V y $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ son de soporte compacto módulo el centro Z de G.

Observación 1.4.2. Una de las principales propiedades es el hecho que verifican las relaciones de ortogonalidad de Schur para sus caracteres, las cuales tienen sentido como funciones de clases de G en $\mathbf{C}$.

Observemos que (π, V) es una representación supercuspidal de un grupo reductivo $p-$ádico es equivalente a decir que dado un subgrupo parábolico cualquiera $P = LN$ (descomposición de Levi, donde L es el subgrupo de Levi y N es el subgrupo unipotente) y la representación trivial $(1, \mathbf{C})$ de N, $\mathrm{Hom}_N(\mathrm{Res}_N^G \pi, 1) = 0$, donde $\mathrm{Res}_N^G \pi$ denota la representación π restringida a los elementos de N.

Proposición 1.4.3. Sea (π, V) una representación supercuspidal irreducible de G. Entonces V es proyectivo en la categoría de $\mathcal{H}(G)-$módulos no degenerados.
Demostración: Ver [Cs].

Corolario 1.4.4. Toda representación supercuspidal de G es suma directa de representaciones supercurpidales irreducibles de G con multiplicidad finita.

Corolario 1.4.5. Si (π, V) es una representación supercuspidal de G y cualquier operador de entrelazamiento $\phi : V \longrightarrow V$ es una homotecia entonces (π, V) es irreducible

Observe que este último corolario es el recíproco del lema de Schur.

1.5. Representaciones Inducidas.

Sea G un grupo localmente profinito unimodular y H un subgrupo cerrado de G (así H es también localmente profinito y unimodular).

Sea (τ, W) una representación lisa de H y denotemos por X el espacio de funciones $\phi : G \longrightarrow W$ satisfaciendo la condición: $\phi(hg) = \tau_h(\phi(g))$, $h \in H$ y $g \in G$. Es claro que G actúa sobre X por traslación a la derecha,

$$(\rho_g \phi)(x) = \phi(xg) \qquad\qquad (x, g \in G)$$

dando una representación (ρ, X) de G no necesariamente lisa.

Ahora consideremos el espacio V de todas los elementos lisos de X bajo la acción de G, esto es: ϕ esta en V si y solo si $\phi \in X$ y existe un subgrupo abierto L de G tal que $\phi(xl) = \phi(x)$, para todo $x \in G$ y $l \in L$. Claramente G actúa sobre V por traslación a la derecha, y así tenemos una representación lisa de G.

Definición 1.5.1. La representación lisa (ρ, V) de G, dada anteriormente, recibe el nombre de *representación inducida lisa* desde (τ, W) y usualmente se denota por $\mathrm{Ind}_H^G(\tau, W) = (\rho, V)$ o simplemente por $\mathrm{Ind}_H^G(\tau) = \rho$ o bien, si no hay confusión respecto a τ y a ρ, $\mathrm{Ind}_H^G W = V$.

También se puede considerar el subespacio vectorial V_c de V, de todas las funciones ϕ de V con soporte compacto modulo H y al igual que antes , G actúa por traslación a la derecha sobre V_c teniendo otra representación (ρ, V_c) de G.

Definición 1.5.2. La representación lisa (π, V_c) de G, dada anteriormente recibe el nombre de *representación inducida lisa compacta* desde (π, W) y usualmente se denota por $c - \mathrm{Ind}_H^G(\tau, W) = (\pi, V_c)$.

Observemos que $c - \mathrm{Ind}_H^G(\tau, W)$ esta contenida en $\mathrm{Ind}_H^G(\tau, W)$.

Proposición 1.5.3. (Reciprocidad de Frobenius)
Sea (π, V) una representación lisa cualquiera de G y (σ, W) una representación lisa de H, con H subgrupo cerrado de G entonces,

$$\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G \pi, \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \sigma)$$

donde $\mathrm{Res}_H^G \pi$ denota la representación (π, W) restringida a H.
Demostración:
Existe un $H-$homomorfismo canónico $q : \mathrm{Ind}_H^G W \longrightarrow W$ definido por $q(\phi) = \phi(1)$, el cual claramente verifica
$(\sigma_h \circ q)(\phi) = \sigma_h(q(\phi)) = \sigma_h\phi(1) = \phi(h \cdot 1) = \phi(1 \cdot h) = (\rho_h\phi)(1) = (q \circ \rho_h)(\phi)$ de donde se obtiene que $\sigma_h \circ q = q \circ \rho_h$, donde $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \sigma$
Ahora definamos el $H-$homomorfismo $\alpha : V \longrightarrow W$, donde (π, V) es una representación lisa de G, esto es $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G \pi, \sigma)$ entonces podemos asociar un único $G-$homomorfismo $\alpha_* : V \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G W$ tal que $q \circ \alpha_* = \alpha$. En efecto, $\alpha_*(v) : G \longrightarrow W$ definida por

$$\alpha_*(v)(g) = \alpha(\pi_g(v)) \qquad (g \in G,\ v' \in V)$$

nos da un isomorfismo canónico $\phi : \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G \pi, \sigma) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \sigma)$.

Observación 1.5.4.
1. La proposición anterior solo establece, de un modo diferente, *la propiedad universal de la representación inducida.* Esto es, dada una representación lisa cualquiera (π, V) de G y un $\Psi \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G \pi, \sigma)$ entonces existe un único $\Psi_* \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \sigma)$ tal que el diagrama siguiente,

$$\begin{array}{ccc} & & (\rho, \mathrm{Ind}_H^G W) \\ & \Psi_* \nearrow & \downarrow q \\ (\pi, V) & \underset{\Psi}{\longrightarrow} & (\sigma, W) \end{array}$$

es conmutativo.

2. Observemos también el hecho que la inducción es funtorial en el sentido que dados (σ_1, W_1) y (σ_2, W_2) representaciones lisas de H y $\Psi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_1,\sigma_2)$ entonces

$$\mathrm{Ind}_H^G \Psi : \mathrm{Ind}_H^G \sigma_1 \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G \sigma_2$$

de modo que $f \in \mathrm{Ind}_H^G \sigma_1$ es enviado en $\Psi(f) \in \mathrm{Ind}_H^G \sigma_2$ la cual es la función que lleva $x \in G$ en $\Psi(f(x))$.

Además se tiene claramente que dado (σ_3, W_3) otra representación lisa de H y $\Upsilon \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_2,\sigma_3)$ entonces,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\Upsilon \circ \Psi) = \mathrm{Ind}_H^G(\Upsilon) \circ \mathrm{Ind}_H^G(\Psi)$$

Esto es, el funtor $\mathrm{Ind}_H^G : \mathfrak{R}(H) \longrightarrow \mathfrak{R}(G)$ es un funtor covariante.

Por otra parte tenemos el funtor $\mathrm{Res}_H^G : \mathfrak{R}(H) \longrightarrow \mathfrak{R}(G)$, el cual envía una representación lisa (π, V) de G en $(\pi_{|_H}, V)$ siendo $\pi_{|_H}$ la representación π restringida al subgrupo H, es también un funtor covariante y tenemos que la reciprocidad de Frobenius dice, en otras palabras, que el funtor Ind_H^G es un funtor adjunto al funtor Res_H^G .

Supongamos ahora que H es un subgrupo abierto y compacto de G. Sea (σ, W) una representación lisa de H, si definimos $i : W \longrightarrow c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ de manera que cada función $i(w) \in c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ sea definida por,

$$i(w)(x) = \begin{cases} \sigma_x(w) & \text{si} \quad x \in H \\ 0 & \text{si} \quad x \notin H \end{cases}$$

entonces i es una incrustación de representaciones, esto es un operador de entrelazamiento inyectivo.

En efecto, $i(w)$ es una función lisa y de soporte compacto módulo H y además tenemos que el $\mathbf{C}-$espacio generado $\langle\{i(w)/w \in W\}\rangle = c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma$. Claramente $\langle\{i(w)/w \in W\}\rangle \subset c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma$. Por otra parte, dada $f \in c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ entonces $\mathrm{Sop}(f) = K$ subgrupo abierto y compacto de G, como f es localmente constante entonces dado $x \in K$ existe subgrupo abierto $L_x \subset K$ tal que $f_{|_{L_x}} = w_x$ como w_x es liso en W entonces existe H_{w_x}estabilizador de w_x en H, así $L_x \cap H_{w_x} \subset K$ y como K es compacto entonces $K = \bigcup_{i=1}^{n}(H_{x_i} \cap H_{w_{x_i}})$ y por lo tanto

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} i(w_{x_j})(x) = \sigma_x(w_{x_j})$$

Usando lo anterior tenemos la siguiente,

Proposición 1.5.5. Dado un subgrupo abierto y compacto H de G y una representación lisa (σ, W) de H entonces para cualquier representación lisa (π, v) de G y cualquier $\Phi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi)$ existe un único $G-$homomorfismo $\phi^* : c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma \longrightarrow V$ tal que

$$\begin{array}{ccc} c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma & & \\ i \uparrow & \overset{\phi^*}{\nwarrow} & \\ W & \underset{\Phi}{\longrightarrow} & V \end{array}$$

es un diagrama conmutativo.
Demostración: Ejercicio.

Observación 1.5.6. De la proposición anterior se deduce una forma dual de la reciprocidad de Frobenius:

$$\mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{Res}_H^G \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma, \pi)$$

lo cual dice que el funtor $c - \mathrm{Ind}_H^G$ es un funtor coadjunto al funtor Res_H^G.

Observemos aun mas que, si $H \diagdown G$ es compacto entonces $c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma = \mathrm{Ind}_H^G \sigma$.

Proposición 1.5.7.

Sea L un subgrupo abierto de G conteniendo al centro Z de G y tal que L/Z es compacto. Sea (σ, W) una representación lisa irreducible de L. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathrm{Ind}_L^G \sigma$ es admisible.
2. $c - \mathrm{Ind}_L^G \sigma$ es admisible.
3. $c - \mathrm{Ind}_L^G \sigma = \mathrm{Ind}_L^G \sigma$, es decir la inclusión canónica de $c - \mathrm{Ind}_L^G \sigma$ en $\mathrm{Ind}_L^G \sigma$ es un isomorfismo.
4. $\mathrm{Ind}_L^G \sigma$ es una suma directa finita de representaciones supercuspidales irreducibles de G.

Demostración:

Que (1) implica (2) es trivial.

Supongamos (2) esto es $c-\mathrm{Ind}_L^G \sigma$ es admisible. Sea ahora K un subgrupo abierto compacto de G y definamos un conjunto $S \subset L \diagdown G \diagup K$ del siguiente modo: para $g \in G$, $LgK \in S$ si y solo si existe $\phi \in V^K$ con $\phi(g) \neq 0$, donde $V = \mathrm{Ind}_L^G W$ ($V^K = \{f \in V/\pi_k f = f\}$ y como, $\pi = \mathrm{Ind}_L^G \tau$, es lisa entonces $V = \bigcup_K V^K$. Si para cualquier g en G se tiene que $\phi(g) = 0$ entonces $V^K = \{0\}$ lo que implica que va a existir un K tal que $V^K \supsetneq \{0\}$ de lo contrario $V = \{0\}$). Así, dado $Lg\ K \in S$ existe $\phi \in V^K$ tal que $\phi(g) \neq 0$ y podemos entonces definir la función:

$$\phi^{(g)} = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in LgK \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

Es claro que $\phi^{(g)} \in V_c^K$ donde $V_c = c - \operatorname{Ind}_L^G W$ pues $\operatorname{Sop} \phi = LgK$, el cual es compacto modulo L ($L \diagdown LgK = gK$ el cual es compacto).

Mas aún, si tenemos distintas coclases dobles $Lg_iK \in S, \quad 1 \leq i \leq r$, las correspondientes funciones $\phi^{(g_i)}$ están en V_c^K y forman un conjunto de funciones linealmente independientes. Usando la hipótesis se tiene que $\dim_{\mathbf{C}}(V_c^K)$ es finita y por lo tanto S es un conjunto finito. Por otra parte, dado cualquier $\phi \in V^K$, el soporte de ϕ es unión de dobles clases $LgK \in S$. Como S es finito, cualquier ϕ es de soporte compacto módulo L y así hemos probado que $V^K = V_c^K$.

Para probar que (3) implica (1) se supone que $\operatorname{Ind}_L^G \tau$ no es admisible se toma $S \subset LgK$ para un K tal que $\dim_{\mathbf{C}} V^K$ no sea finita y así se llega a una contradicción.

Probar que (4) implica (1) es inmediato.

La demostración de (1) implica (4) es larga y técnica, para ver detalles consultar [Bu1].

1.6. Teorema de Mackey.

En esta sección veremos el teorema de Mackey, el cual es una herramienta de las mas útiles para construir representaciones supercuspidales irreducibles de grupos tales como $GL(N, F)$, el grupo de las matrices invertibles de orden $N \times N$. Este teorema fue demostrado, para grupos localmente profinitos, por Phil Kutzko en 1977 [K1].

Definición 1.6.1. Sea G un grupo topológico, H un subgrupo de G y τ una representación algebraica de H sobre un espacio vectorial complejo W. Si x es cualquier elemento de G, se define *la representación conjugada* τ^x *de* τ como la representación del subgrupo $x^{-1}Hx$ de G sobre W definido por

$$\tau_z^x(w) = \tau_{xzx^{-1}(w)} \qquad (z \in x^{-1}Hx,\ w \in W)$$

Ejemplo 1.6.2. Sea $G = GL(2, \mathbf{F})$, $\mathbf{F}$ un cuerpo $p-$ádico, y sea B el subgrupo de Borel de G esto es $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} / x, z \in \mathbf{F}^{\times}, y \in \mathbf{F}^{\times} \right\}$. Consideremos ahora el carácter $\chi_{\alpha,\beta}$ del grupo B definido por,

$$\chi_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \alpha(x)\beta(z)$$

donde $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbf{F}^{\times}}$, esto es α, β son caracteres del grupo multiplicativo $\mathbf{F}^{\times}$. El homomorfismo $\chi_{\alpha,\beta}$ así definido, es una representación de dimensión uno del subgrupo de Borel B.

Si $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en G entonces $w^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} w \in w^{-1}Bw$ y así tenemos que

$$\chi^{w}_{\alpha,\beta}(w^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} w) = \chi_{\alpha,\beta}(w \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & x \end{pmatrix} w^{-1}) = \chi_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \alpha(x)\beta(z)$$

lo cual define a $\chi^{w}_{\alpha,\beta}$ como una representación de dimensión uno del subgrupo $w^{-1}Bw$.

Definición 1.6.3. Sea G un grupo topológico, H_1, H_2 subgrupo cerrados de G y T_1, T_2 representaciones algebraicas de H_1y H_2 respectivamente sobre espacios vectoriales complejos W_1, W_2. Si $\phi : W_1 \longrightarrow W_2$ es una transformación lineal tal que $\phi T_1(h) = T_2(h)\phi$ para todo $h \in H_1 \cap H_2$ entonces decimos que ϕ entrelaza T_1 con T_2. Denotaremos el espacio de todos estos entrelazamientos por $I(T_1, T_2)$.

Teorema 1.6.4. (**Teorema de Mackey**)

Sea G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y K un subgrupo abierto de G. Para algún conjunto de índices I, sea x_l, con $l \in I$, un conjunto completo de representantes de las dobles clases $H \diagdown G \diagup K$. Sea σ una representación de K sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y τ una representación de H sobre un espacio vectorial W de dimensión arbitraria.

Entonces,

$$\mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, \mathrm{Ind}_H^G \tau) \simeq \prod_{l \in I} \mathrm{Hom}_{x_l^{-1} H x_l \cap K}(\sigma, \tau^{x})$$

Si además, la imagen de K en $H \diagdown G$ es compacta entonces,

$$\mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, c - \mathrm{Ind}_H^G \tau) \simeq \bigoplus_{l \in I} \mathrm{Hom}_{x_l^{-1} H x_l \cap K}(\sigma, \tau^{x})$$

Demostración:

Definamos,

$S(\sigma,\tau) = \{s : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V,W) \mid s(hxk) = \tau(h)s(x)\sigma(k)\ \forall h \in H, \forall \in K\}$

y

$S_c(\sigma,\tau) = \{s \in S(\sigma,\tau) \mid H\diagdown \mathrm{Sop}(S) \text{ es compacto en } H\diagdown G\}$

Mostraremos que existe un isomorfismo de $\mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, \mathrm{Ind}_H^G \tau)$ en $S(\sigma,\tau)$ el cual manda $\mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, c - \mathrm{Ind}_H^G \tau)$ en $S_c(\sigma,\tau)$.

Con este objeto definamos la función $f_v : G \longrightarrow V$ por,

$$f_v(x) = \begin{cases} \sigma_x(v) & \text{si} \quad x \in K \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

La función $f_v \in c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma$ ya que $\mathrm{Sop}(f_v) = K$ y $K\diagdown K = \{0\}$ el cual es compacto en $K\diagdown G$.

Ahora, sea $A \in \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, \mathrm{Ind}_H^G \tau)$ y definamos $S_A : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V,W)$ por

$$S_A(x)(v) = A(f_v)(x) \qquad (x \in G,\ v \in V)$$

entonces se tiene claramente que $S_A \in S(\sigma,\tau)$.

Por otra parte, si $s \in S(\sigma,\tau)$ y $f \in c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma$, entonces para un x_0 fijo en G la función $\widetilde{f} : G \longrightarrow W$ definida por $\widetilde{f}(z) = s(x_0 z^{-1})f(z)$ es constante sobre las coclases derechas de K .

En efecto,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(kg) &= s(x_0 g^{-1} k^{\cdot -1}) f(kg) \\ &= s(x_0 g^{-1})\sigma(k^{-1})\sigma(k) f(g) \\ &= s(x_0 g^{-1}) f(g) \\ &= \widetilde{f}(g) \end{aligned}$$

y $\widetilde{f}$ tiene soporte una unión finita de coclases derecha pues como K es abierto en G entonces $K\diagdown G$ es un espacio topológico discreto ($G \longrightarrow K\diagdown G$ continua y abierta, entonces $\{Kg\}$ es abierto en $K\diagdown G$). Ahora dado $f \in c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma$, $K\diagdown \mathrm{Sop}(f)$ es compacto en $K\diagdown G$ así existe una unión finita de coclases derecha las cuales soportan f y entonces $\widetilde{f}$ tiene soporte una unión finita de coclases derechas.

Por lo tanto, si Z es un conjunto de representantes de coclases derechas de K en G entonces podemos definir la función,

$$A_s : c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G \tau$$

por

$$(A_s f)(x) = \sum_{z \in Z} s(xz^{-1}) f(z)$$

Es inmediato ver que $A_s \in \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, \mathrm{Ind}_H^G \tau)$ y es fácil probar que $A \longrightarrow S_A$ y $s \longrightarrow S_A$ es una inversa de la otra.

Finalmente se prueba que dado $A \in \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, \mathrm{Ind}_H^G \tau)$ entonces, usando el hecho que $\dim_{\mathbf{C}}(V)$ es finito, $S_A \in S_c(\sigma, \tau)$ y dado un $s \in S_c(\sigma, \tau)$, $A_s \in \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma, c - \mathrm{Ind}_H^G \tau)$.

Sea ahora x_l, $l \in I$, un conjunto completo de representantes de las coclases dobles de $H \diagdown G \diagup K$. Sea
$S_l = \{S : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V, W) \mid S(hxk) = \tau(h)S(x)\sigma(k),\ \ \mathrm{Sop}(S) \subset Hx_lK\}$
entonces se tiene que

$$S(\sigma, \tau) \simeq \prod_{l \in I} S_l$$

En efecto, como $G = \bigcup_{l \in I} Hx_lK$ entonces dado $s \in S(\sigma, \tau)$ podemos definir $S : I \longrightarrow \bigcup_{l \in I} S_l$ de manera que $S(l) : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V, W)$ es tal que

$$S(l)(x) = \begin{cases} s(hx_lk) & x \in Hx_lK \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Así tenemos que la función definida por $S \longrightarrow \{S(l)\}_{l \in I}$ es el isomorfismo entre $S(\sigma, \tau)$ y $\prod_{l \in I} S_l$.

Por otra parte si K tiene imagen compacta en $H \diagdown G$ entonces, para cada l en I, $S_l \subset S_c(\sigma, \tau)$ y así $S_c(\tau, T) \simeq \bigoplus_{l \in I} S_l$

Finalmente debemos probar que para cada l en I,

$$S_l \simeq \mathrm{Hom}_{x_l^{-1}Hx_l \cap K}(\sigma, \tau^{x_l})$$

Para esto, basta considerar un $S \in S_l$ y probar que $S(x_l)$ es un elemento del $\mathrm{Hom}_{x_l^{-1}Hx_l \cap K}(\sigma, \tau^{x_l})$.

Recíprocamente, dada $\alpha \in \mathrm{Hom}_{x_l^{-1}Hx_l \cap K}(\sigma, \tau^{x_l})$ podemos definir

$$S_\alpha : G \longrightarrow \operatorname*{End}_{\mathbf{C}}(V, W)$$

por,

$$S_\alpha(x) = \begin{cases} \tau(h) \circ \alpha \circ \sigma(k) & \text{si} \quad x = hx_lk \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

y tenemos que $S_\alpha \in S_l$ es tal que $S_\alpha(x_l) = \alpha$. Así la función $\alpha \longrightarrow S(x_l)$ es un isomorfismo de S_l sobre $\mathrm{Hom}_{x_l^{-1}Hx_l \cap K}(\sigma, \tau^{x_l})$, con lo cual se tiene probado el teorema.