

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

---

SERIE “B”

**TRABAJOS DE MATEMÁTICA**

**Nº 56/2010**

**GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE**

PATRICIA JANCSA - MARCO FARINATI



Editores: Jorge R. Lauret–Jorge G. Adrover

---

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

# GRUPOS Y ÁLGBRAS DE LIE

ALEJANDRA PATRICIA JANCSA - MARCO FARINATI  
 PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE MATEMÁTICA,  
 ASTRONOMÍA Y FÍSICA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
 SERIE B – 2010

## Índice

<b>1. Grupos topológicos y grupos de Lie</b>	<b>6</b>
1.1. Primeras definiciones . . . . .	6
1.2. Ejemplos y ejercicios . . . . .	8
1.3. Grupos de Lie clásicos . . . . .	11
1.4. Ejercicios . . . . .	12
1.5. Morfismos y representaciones . . . . .	14
1.6. Ejercicios . . . . .	15
<b>2. Álgebras de Lie</b>	<b>17</b>
2.1. Definiciones . . . . .	17
2.2. Espacio tangente . . . . .	19
2.3. Álgebras de Lie lineales . . . . .	20
2.4. Álgebras de Lie clásicas . . . . .	21
2.5. Ideales . . . . .	23
2.6. Cocientes . . . . .	25
2.7. Ejercicios . . . . .	26
2.8. Derivaciones. Representación adjunta. . . . .	27
2.9. Producto semidirecto. . . . .	28
2.10. El álgebra de Lie de un grupo de Lie . . . . .	28
2.11. El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices y subejemplos . . . . .	31
2.12. Ejercicios . . . . .	33
<b>3. La Función Exponencial</b>	<b>34</b>
3.1. La función exponencial de matrices . . . . .	34
3.2. Propiedades elementales . . . . .	34
3.3. La función exponencial en un grupo de Lie . . . . .	36
3.4. Ejemplos de exponenciales y espacios tangentes . . . . .	38
3.5. Correspondencia subgrupos-subálgebras en grupos de Lie clásicos. . . . .	40
3.6. Grupos de Lie abelianos . . . . .	43
3.7. Ejercicios . . . . .	43
<b>4. Representaciones, la representación adjunta y la forma de Killing</b>	<b>45</b>
4.1. Representaciones de álgebras de Lie . . . . .	46
4.2. La forma de Killing . . . . .	47
4.2.1. Propiedades de la forma de Killing . . . . .	48
4.2.2. La forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y otros ejemplos . . . . .	49
4.3. Ejercicios . . . . .	50

<b>5. Álgebras de Lie nilpotentes y solubles</b>	<b>52</b>
5.1. Sucesión de conmutadores de $\mathfrak{g}$ : serie derivada y serie central . . . . .	52
5.2. El radical . . . . .	54
5.3. Teorema de Lie . . . . .	55
5.4. Teorema de Engel . . . . .	57
5.5. Criterios de Cartan . . . . .	58
5.6. Teorema de Weyl . . . . .	61
<b>6. Información sobre álgebras de Lie compactas y álgebras de Lie reductivas</b>	<b>62</b>
6.1. Álgebras de Lie compactas . . . . .	62
6.2. Álgebras de Lie reductivas . . . . .	63
<b>7. Descomposición de un álgebra de Lie a partir de una subálgebra de Cartan</b>	<b>65</b>
7.1. Introducción . . . . .	65
7.2. Descomposición en espacios raíces . . . . .	65
7.3. El ejemplo $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . . . . .	66
7.4. Propiedades para $\mathfrak{g}$ semisimple sobre $\mathbb{C}$ . . . . .	68
7.5. El ejemplo $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ , . . . . .	69
7.6. El ejemplo $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ , . . . . .	70
7.7. El ejemplo $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ . . . . .	71
<b>8. Subálgebras de Cartan abstractas</b>	<b>73</b>
8.1. Espacios de pesos generalizados . . . . .	73
8.2. Subálgebras de Cartan y elementos regulares . . . . .	74
8.3. Sistemas de raíces . . . . .	76
8.4. Ejercicios . . . . .	79
<b>9. Representaciones de <math>\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})</math></b>	<b>80</b>
9.1. El Casimir . . . . .	81
9.2. Lema de Whitehead y teorema de Weyl . . . . .	82
9.3. Construcción natural . . . . .	85
9.4. Ejercicios . . . . .	86
<b>10. Propiedades del sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple</b>	<b>87</b>
10.1. Corolarios de $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ . . . . .	87
10.2. Corolarios de las acciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Integralidad . . . . .	88
10.3. Geometría en el espacio real generado por las raíces . . . . .	90
<b>11. Axiomática de los sistemas de raíces</b>	<b>92</b>
11.1. Reflexiones en el espacio euclídeo . . . . .	92
11.2. Sistemas de raíces . . . . .	92
11.3. Raíces simples . . . . .	94
11.4. Matriz de Cartan . . . . .	96
11.5. Diagrama de Dynkin . . . . .	98
11.6. Clasificación de las matrices de Cartan y los diagramas de Dynkin . . . . .	101
11.7. Restricciones . . . . .	102
11.8. Clasificación de los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan . . . . .	106
11.9. Ejercicios . . . . .	110

<b>12. Relaciones de Serre</b>	<b>112</b>
12.1. Teoremas de isomorfismo . . . . .	113
12.2. Teorema de reconstrucción de Serre . . . . .	114
12.3. Reconstrucción de $\mathfrak{g}$ a partir de su matriz de Cartan: Ejemplos . . . . .	114
12.3.1. Matriz de Cartan de tipo $A_1 \times A_1$ . . . . .	114
12.3.2. Matriz de Cartan de tipo $A_2$ . . . . .	115
12.3.3. Matriz de Cartan de tipo $B_2$ . . . . .	115
12.4. Existencia de la forma real compacta . . . . .	117
12.5. Ejercicios . . . . .	117
<b>13. Representaciones</b>	<b>118</b>
13.1. Acción del Casimir: Lema de Whitehead y Teorema de Weyl . . . . .	118
13.2. Representaciones de peso máximo . . . . .	120
13.3. Representaciones de dimensión finita . . . . .	120
13.4. El Álgebra envolvente universal . . . . .	121
13.5. Módulos de peso . . . . .	124
13.6. Módulos de Verma . . . . .	125
13.7. Ejercicios . . . . .	133
<b>14. Álgebras de Clifford</b>	<b>136</b>
14.1. Definición . . . . .	136
14.2. Presentación del álgebra de Clifford por generadores y relaciones . . . . .	138
14.3. Álgebras de Clifford y representaciones de álgebras de Lie ortogonales . . . . .	140
14.4. Representación Spin . . . . .	142
14.5. Ejemplos . . . . .	144

# Introducción

## Breve reseña histórica

En el año 1873, Sophus Lie dio origen a las ideas que conformaron la hoy denominada *teoría de Lie*, con aportes posteriores de Weyl, Cartan, Chevalley, Killing, Serre, Harish-Chandra y otros. En los primeros trabajos de Lie, la idea subyacente era construir una teoría de "grupos continuos", que complementara la ya existente teoría de grupos discretos. La aplicación inicial que Lie tenía en mente era a las ecuaciones diferenciales. El objetivo era desarrollar una teoría capaz de unificar el estudio de las simetrías en el área de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si bien continuó su desarrollo en otra dirección, la teoría de Lie juega un rol central en la matemática contemporánea.

Lie observó que las simetrías de una ecuación diferencial daban lugar a grupos con parámetros (que hoy consideraríamos un grupo de Lie). El grupo de Lie que deja invariante una ecuación diferencial actúa sobre el conjunto de soluciones de dicha ecuación.

Los "grupos" y conjuntos con los que Lie trabajaba en general no eran grupos de Lie en realidad, dado que la estructura de grupo estaba definida sólo localmente cerca de la identidad. De todos modos, todo grupo local admite un álgebra de Lie, que a su vez se integra a un grupo global. Fue Weyl (1924) quien por primera vez estudió sistemáticamente grupos definidos globalmente. Los aportes fundamentales que realizó Lie fueron el asociar a cada grupo de transformaciones continuas un álgebra de Lie y el definir una aplicación del álgebra de Lie al grupo de Lie por medio de grupos monoparamétricos.

## Objetivos de estas notas

Estas notas están dirigidas a quien toma un primer curso de teoría de Lie, teniendo una base de estructuras algebraicas y de geometría diferencial. La dirección de los temas sigue dos núcleos troncales: la clasificación de las álgebras de Lie semisimples y la clasificación de sus representaciones de dimensión finita.

Nuestra experiencia indica que tener a mano un buen abanico de ejemplos es de suma utilidad, y quizás la teoría de Lie sea paradigmática en este sentido: no sólo los ejemplos clásicos son de gran importancia, sino que el teorema de clasificación de las álgebras de Lie simple nos vuelve a colocar frente a ellos. Razones históricas justificaron la necesidad de desarrollar la teoría a partir de las preguntas que habían aparecido con anterioridad; quizás más que ninguna otra, la teoría de Lie se erigió a partir de los ejemplos fundamentales que le dieron origen. Por este motivo, antes de desarrollar la teoría general de subálgebras de Cartan y descomposición en espacios raíces, incluimos en capítulo aparte la descripción de las subálgebras abelianas maximales naturales en los ejemplos clásicos, y la descomposición en espacios de raíces que se obtiene de la diagonalización simultánea de éstas.

Hay ejercicios propuestos en todas las secciones para que quien aborde los temas pueda ejercitarse, verificar la solidez de la teoría y evaluar su comprensión paso a paso.

## Organización de los capítulos

Los *primeros dos capítulos* contienen las definiciones y enunciados generales de grupos y álgebras de Lie; hacia el final del segundo se expone la manera de pasar de un grupo de Lie a su álgebra de Lie tangente, seguido del ejemplo fundamental de las matrices inversibles. En el *tercer capítulo* se estudia la función exponencial, que va del álgebra al grupo.

El *capítulo cuatro* comienza con las definiciones y construcciones generales de representaciones, estudiándose luego la forma de Killing, objeto de fundamental importancia en la teoría.

El *capítulo cinco* se refiere a los teoremas de Lie y de Engel, y es el primer momento en el cual se demuestran resultados finos de la teoría. También se enuncia (sin demostración) el criterio de solubilidad de Cartan, y se prueba a partir de éste el criterio de semisimplicidad, poniendo en evidencia la relevancia de la forma de Killing en el estudio de las álgebras de Lie semisimples. Se enuncia el teorema de completa reducibilidad de Weyl para que el alumno empiece a adquirir el sabor de los resultados de la teoría, aunque la demostración del mismo se pospone para cuando se cuente con herramientas más poderosas.

El *capítulo seis* tiene por objetivo brindar motivaciones al alumno a través de información sobre álgebras de Lie compactas y su relación con los grupos de Lie compactos, las álgebras reductivas y las álgebras semisimples.

El *capítulo siete* es la realización en los ejemplos fundamentales de los conceptos que se comienzan a estudiar en el *capítulo ocho*: las subálgebras de Cartan y la descomposición en espacios raíces. Para tal fin, es necesario hacer un paréntesis, estudiar las representaciones de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , lo cual es realizado en el *capítulo nueve*, y retomar luego en el *capítulo diez* con las sorprendentes propiedades de integralidad de los sistemas de raíces.

El *capítulo once* contiene el resultado más importante de estas notas, que es la clasificación de las álgebras de Lie simples, estudiando los sistemas de raíces abstractos, las matrices de Cartan asociadas, y los diagramas de Dynkin. En este capítulo, las demostraciones están hechas con especial detalle.

El *capítulo doce* contiene las ideas y enunciados de los teoremas de reconstrucción. En lugar de hacer énfasis en los resultados generales, hemos elegido realizar la reconstrucción abstracta del álgebra de Lie a partir de su matriz de Cartan en los ejemplos de rango bajo.

El *capítulo trece* es el que le sigue en importancia al capítulo de la clasificación de álgebras semisimples complejas y trata sobre la clasificación de las representaciones de dimensión finita de las álgebras semisimples complejas en términos de los pesos (enteros no negativos) de un vector de peso máximo. Para demostrar el resultado de clasificación se introduce el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie. Con esta herramienta se construyen los módulos de Verma, que son representaciones de peso máximo universales, con un peso máximo prescripto. A partir de los módulos de Verma se obtienen las representaciones simples de peso máximo arbitrario, y se muestra la finitud de aquellas que cumplen la condición de integralidad.

El *capítulo catorce* contiene la clasificación de las álgebras de Clifford complejas asociadas a una forma bilineal no degenerada, que es utilizada para construir representaciones naturales del álgebra de Lie ortogonal. Este capítulo presupone cierta familiaridad con la teoría de módulos sobre un anillo asociativo y con definiciones de objetos algebraicos a partir de propiedades universales. Finaliza con ejemplos en dimensiones bajas, utilizando hacia el final la teoría de vectores de peso máximo para distinguir clases de isomorfismo de representaciones, mostrando que las representaciones así construidas son "nuevas".

# 1. Grupos topológicos y grupos de Lie

## 1.1. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$

El subconjunto  $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det M \neq 0\}$  está determinado como imagen inversa de un abierto de  $\mathbb{R}$  (los números reales no nulos) por una función continua (el determinante), por lo tanto es un abierto de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Queda clara entonces su topología como la relativa de  $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ . Notemos que la multiplicación de matrices depende (bi)linealmente de los coeficientes, por lo tanto

$$GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

$$(M, N) \mapsto M \cdot N$$

es una función continua. A la vez, la fórmula de la adjunta de los cofactores dividido el determinante nos dice que la función invertir

$$GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

$$M \mapsto M^{-1} = \frac{\text{Cof}(M)^t}{\det M}$$

es una función racional, por lo tanto continua donde el denominador no se anula, es decir, es continua en  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Más generalmente, si  $V$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita,  $k = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , se puede considerar  $GL(V) = \{f : V \rightarrow V : f \text{ es isomorfismo lineal}\}$ . La topología de  $GL(V)$  es la transferida por  $GL(n, k)$  a partir de una elección de una base de  $V$ , donde  $n = \dim_k V$ ; dejamos como ejercicio verificar que esta topología es, en realidad, independiente de la base elegida.

Con estas propiedades, que relacionan la estructura de grupo con la topología,  $GL(n, \mathbb{R})$  es el ejemplo a tener en mente cuando hablemos de "grupo continuo", y un poco más tarde de "grupo de Lie".

**Definición 1.1.** Un **grupo continuo**, o **grupo topológico**, es un espacio topológico  $G$  muniendo de una estructura de grupo tal que la multiplicación y la inversión son continuas.

Si  $S, G$  son grupos continuos, una función  $f : S \rightarrow G$  se dice un homomorfismo de grupos continuos si es un morfismo de grupos abstractos y es continua. Un par  $(S, \iota)$  se dice un subgrupo continuo de un grupo continuo  $G$  si  $S$  es un grupo continuo e  $\iota$  es un homomorfismo inyectivo de grupos continuos de  $S$  en  $G$ .

**Ejercicio 1.2.** Sea  $G$  un grupo continuo.

- Si  $S$  un subgrupo de  $G$ , muestre que con la topología inducida y con  $\iota$  la inclusión de conjuntos,  $(S, \iota)$  es un subgrupo continuo. Si además  $S$  es normal, muestre que  $G/S$  con la topología cociente es un grupo continuo.
- Si  $G$  es Hausdorff y  $S$  es normal, muestre que  $G/S$  es Hausdorff si y sólo si  $S$  es cerrado en  $G$ .
- Si  $G_0$  la componente conexa de la identidad de  $G$ , muestre que es un subgrupo normal, y que la topología de  $G/G_0$  es la discreta, es decir, todo subconjunto de  $G/G_0$  es abierto (y a la vez cerrado).

**Ejemplo 1.3.** Cualquier subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  es un grupo continuo. Si  $S \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ , entonces  $\overline{S}$ , la clausura de  $S$  en  $GL(n, \mathbb{R})$  (¡atención, que no es la clausura en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ !) es un subgrupo cerrado.

**Ejemplo 1.4.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita que sea un álgebra en un sentido general, es decir, supongamos que  $V$  está munido de una operación bilineal  $m : V \times V \rightarrow V$  que es simplemente una función bilineal (arbitraria). Si denotamos  $m(v, w) = vw$ , la condición para que un isomorfismo lineal  $g$  de  $V$  en  $V$  sea un automorfismo de  $(V, m)$  es, por definición, que  $g(vw) = g(v)g(w)$  para todo  $v, w \in V$ ; entonces  $\text{Aut}(V, m) := \{g \in GL(V) : m(gv, gw) = g(m(v, w))\}$ , los automorfismos de  $(V, m)$ , es un subgrupo de  $GL(V)$  y, por lo tanto, un grupo continuo.

**Definición 1.5.** Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable sobre  $\mathbb{R}$  munida de una estructura de grupo tal que la siguiente

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (\sigma, \tau) &\mapsto \sigma \cdot \tau^{-1} \end{aligned}$$

es una operación  $C^\infty$ .

El primer ejemplo de grupo de Lie es, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G = GL(n, \mathbb{R})$  (ver el ejemplo 1.8). Una consecuencia de la definición es la siguiente observación:

**Observación 1.6.** En la definición de grupo de Lie, que la operación  $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \cdot \tau^{-1}$  sea  $C^\infty$  es equivalente a que las operaciones del grupo  $\tau \mapsto \tau^{-1}$  y  $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \cdot \tau$  sean funciones  $C^\infty$ . En efecto, la primera se obtiene como la composición  $\tau \mapsto (e, \tau) \mapsto e \cdot \tau^{-1}$  y la segunda como  $(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \tau^{-1}) \mapsto \sigma \cdot (\tau^{-1})^{-1} = \sigma \cdot \tau$ . Por lo tanto, en la definición anterior, la condición de que la operación  $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \cdot \tau^{-1}$  sea  $C^\infty$  es equivalente a pedir que estas dos operaciones sean  $C^\infty$ .

La componente conexa del elemento identidad de un grupo de Lie  $G$  forma ella misma un grupo de Lie; por otra parte, las componentes conexas de un grupo de Lie son todas difeomorfas entre sí. Más precisamente

**Proposición 1.7.** Sea  $G$  un grupo de Lie, entonces  $G_0 :=$  la componente conexa de la identidad, es un subgrupo normal de  $G$ . Además,  $G_0$  forma ella misma un grupo de Lie.

*Demostración.* Ante todo, veamos que es subgrupo. Sean  $g$  y  $g'$  dos elementos de  $G_0$  y sean  $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow G$  dos funciones continuas tales que  $\sigma(0) = 1_G = \tau(0)$ ,  $\sigma(1) = g$ ,  $\tau(1) = g'$ . Como la multiplicación es continua, la función  $t \mapsto \sigma(t)\tau(t)$ , que es la composición de

$$[0, 1] \xrightarrow{\sigma \times \tau} G \times G \xrightarrow{m} G$$

es una función continua, por lo tanto,  $\sigma(t)\tau(t)$  pertenece a la misma componente conexa para todo  $t \in [0, 1]$ ; dado que en 0 vale  $1_G \in G_0$  y en 1 vale  $gg'$ , obtenemos que  $gg' \in G_0$ . Análogamente se prueba que  $G_0$  es estable por  $g \mapsto g^{-1}$ .

Veamos ahora que es un subgrupo *normal*. Sea  $x \in G$  y consideremos la función

$$\begin{aligned} \text{Ad}_x : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto xgx^{-1} \end{aligned}$$

Nuevamente, esta función es la composición de funciones continuas

$$G \xrightarrow{i_x} G \times G \times G \xrightarrow{m} G$$

$$g \longmapsto (x, g, x^{-1}) \longmapsto xg, x^{-1}$$

Esta función tiene inversa continua  $\text{Ad}_{x^{-1}}$ , es decir, es un homeomorfismo, por lo tanto manda componentes conexas en componentes conexas. Dado que  $\text{Ad}_x(1_G) = x1_Gx^{-1} = 1_G$ , preserva la componente conexa de la identidad, es decir,  $xG_0x^{-1} = G_0$  para todo  $x \in G$ .

Además,  $G_0$  admite una estructura diferenciable como abierto de  $G$ ; en consecuencia, la operación

$$G_0 \times G_0 \rightarrow G_0 \tag{1}$$

$$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma.\tau^{-1} \tag{2}$$

es claramente una operación  $C^\infty$  que convierte a  $G_0$  en un grupo de Lie. □

Otra forma de comprobar que  $G_0$  es un grupo de Lie y, más aún, que es un *subgrupo de Lie de  $G$*  según la definición que daremos enseguida, es a partir de un teorema de Serre por el cual *todo subgrupo (abstracto) cerrado de un grupo de Lie resulta un subgrupo de Lie de él.* [W].

Un grupo de Lie complejo es, en particular, una variedad diferenciable compleja (es decir, analítica compleja). Consideraremos en adelante solamente grupos de Lie *reales* y por variedad diferenciable entendemos diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Por otra parte, las álgebras de Lie serán reales o complejas; más aún, en general, serán complejas porque son más fáciles de abordar y porque la teoría de espacios raíces está pensada sobre  $\mathbb{C}$ . A grupos de Lie reales le corresponden álgebras de Lie reales y a grupos de Lie complejos le corresponden álgebras de Lie complejas. Se aclarará en cada caso si estamos trabajando sobre  $\mathbb{R}$  o sobre  $\mathbb{C}$ .

En la definición de variedad diferenciable estamos asumiendo la hipótesis de ser  $N_2$  ó satisfacer el *2do axioma de numerabilidad: la topología tiene una base numerable*; por lo tanto, todo grupo de Lie es  $N_2$  y, en consecuencia, tiene a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas. Por otra parte, si se quitara la hipótesis  $N_2$ , todo grupo de Lie con una cantidad numerable de componentes sería necesariamente  $N_2$  como consecuencia de que todo grupo de Lie conexo es unión numerable de potencias de un entorno cualquiera de la identidad. Para más detalles, ver [W].

## 1.2. Ejemplos y ejercicios

**Ejemplo 1.8.** 1.  $\mathbb{R}^n$  es un grupo de Lie con la suma de vectores. Notar que es isomorfo al subgrupo cerrado de matrices de la forma  $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & \text{Id}_n \end{pmatrix}$  donde  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Id}_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n$  por  $n$  y el cero de la izquierda es el vector columna cero.

2. El conjunto de los números complejos no nulos  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es un grupo de Lie *real* con la multiplicación usual de números complejos.

En efecto, pensamos a  $\mathbb{C}^*$  como a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , una variedad real de dimensión 2. Si  $z = a + bi, w = a' + b'i \in \mathbb{C}$ , la multiplicación  $(z, w) \mapsto aa' - bb' + (ab' + ba')i$  que es

diferenciable. Análogamente, la operación de invertir elementos no nulos  $z \mapsto z^{-1}$  es la función  $a + bi \mapsto \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$  que es racional en las coordenadas.

3. El círculo unidad  $S^1 \subset \mathbb{C}^*$  (pensado como subgrupo cerrado de  $\mathbb{C}^*$ ) es un grupo de Lie con la multiplicación inducida de  $\mathbb{C}^*$ .
4. Si  $G, H$  son grupos de Lie, entonces  $G \times H$  es un grupo de Lie con la estructura de variedad producto y la estructura de grupo de producto directo, es decir coordenada a coordenada

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h')$$

para todo  $(g, h), (g', h') \in G \times H$ . Esta definición se extiende inductivamente a una cantidad finita de factores.

5. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el toro  $n$ -ésimo  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ , el producto de  $n$  copias de  $S^1$  es un grupo de Lie con la estructura producto.
6. La variedad  $GL(n, \mathbb{R})$  de todas las matrices  $n \times n$  no singulares reales es un grupo de Lie con la multiplicación usual de matrices.

En efecto, es un abierto de  $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ , por lo tanto hereda su estructura diferenciable. Las operaciones de grupo son claramente diferenciables pues:  $A \mapsto A^{-1}$  es una función racional en los coeficientes, por la fórmula de la matriz cofactor, es decir,  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Cof}(A)^t$  donde si denotamos por  $A(ij)$  a la matriz que se obtiene de  $A$  eliminando la fila  $i$  y la columna  $j$ , la matriz cofactor tiene como entradas  $(\text{Cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(ij)$ . Esta función es diferenciable justamente porque el denominador no se anula en las matrices inversibles.

La multiplicación de dos matrices es diferenciable, en efecto,  $(A, B) \mapsto A \cdot B$  es polinomial en los coeficientes, pues la entrada en el lugar  $ij$  de la matriz producto es

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

7. La subvariedad  $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ , que consiste de todas las matrices  $n \times n$  reales de determinante uno, es un grupo de Lie con la multiplicación usual de matrices. En efecto, es claro que es un subgrupo abstracto de  $GL(n, \mathbb{R})$ ; para la estructura diferenciable, basta mostrar que el uno es un valor regular de la función determinante  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  (*ejercicio!*), con lo cual su preimagen resulta una subvariedad embebida de dimensión  $n^2 - 1$ . En particular, la inclusión  $\iota : SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  es diferenciable; por lo tanto, las operaciones en  $SL(n, \mathbb{R})$  resultan diferenciables también.

Se obtiene también que es subvariedad por ser un **subgrupo cerrado de un grupo de Lie**.

Análogamente, la subvariedad  $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$  de todas las matrices  $n \times n$  complejas de determinante uno es un grupo de Lie complejo con la multiplicación usual de matrices, con el mismo argumento anterior, pero en este caso usando que la función determinante es holomorfa. Por otra parte, resulta un grupo de Lie real, por

ejemplo, por ser un subgrupo cerrado de  $GL(n, \mathbb{C})$ , considerando a éste como grupo de Lie real.

8. El conjunto  $T_n(\mathbb{R})$  de las matrices  $n \times n$  reales, no singulares, triangulares (i.e. todas las entradas por debajo de la diagonal iguales a cero) es un grupo de Lie con la multiplicación usual de matrices. Como antes, se identifica  $T_n(\mathbb{R})$  con un abierto de  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  ó se lo puede pensar como un cerrado de  $GL(n, \mathbb{R})$ .
9. El conjunto  $T_n^+(\mathbb{R})$  de las matrices  $n \times n$  reales triangulares con unos en la diagonal puede identificarse como variedad diferenciable con  $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ; también puede pensarse a  $T_n^+(\mathbb{R})$  como un cerrado de  $GL(n, \mathbb{R})$  ó de  $SL(n, \mathbb{R})$ .
10. Denotemos por  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  al conjunto de los números reales no nulos y consideremos  $K$  la variedad producto  $K = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . Con una estructura de grupo definida por

$$(s, t).(s', t') = (s.s', st' + t)$$

$K$  resulta un grupo de Lie, llamado el *grupo de los movimientos afines de  $\mathbb{R}$* , donde identificamos al elemento  $(s, t)$  con el movimiento afín  $x \mapsto (sx + t)$ ; la multiplicación en  $K$  es composición de movimientos afines. Este grupo es isomorfo al subgrupo de  $GL(2, \mathbb{R})$  dado por  $\left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}, s \neq 0 \right\}$ .

11. Consideremos la variedad producto  $K = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  con la estructura de grupo definida por

$$(A, v).(A', v') = (A.A', Av' + v)$$

$K$  resulta un grupo de Lie, el *grupo de los movimientos afines de  $\mathbb{R}^n$* , donde identificamos al elemento  $(A, v)$  de  $K$  con el movimiento afín  $x \mapsto (Ax + v)$ ; la multiplicación en  $K$  es composición de movimientos afines.

Podemos pensar a  $K$  como a un subgrupo cerrado de  $GL(n + 1, \mathbb{R})$  en virtud del isomorfismo

$$K \cong \left\{ \left( \begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \text{ tales que } A \in GL(n, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \right\}$$

Con esta identificación es claro que el conjunto es cerrado por la operación de grupo; en efecto:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A' & v' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A.A' & Av' + v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

De manera más general, si consideramos cualquier grupo de Lie  $G$  en lugar de  $GL(n, \mathbb{R})$  y cualquier representación de dimensión finita  $V$  de  $G$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ , obtenemos que

$$K = G \rtimes V = \{(g, v) \text{ con producto de grupo dado por } (g, v).(g', v') = (gg', g.v' + v)\}$$

un grupo de Lie, donde  $(g, v) \mapsto g.v$ , de  $G \times V \mapsto V$  es la acción de  $G$  en  $V$ . Ver la definición 1.16 para el concepto de representación.

12. *Producto semidirecto de grupos.* Generalizando aún más el ejemplo anterior, sean  $G$  y  $H$  dos grupos de Lie, consideremos  $\text{Aut}(H)$  el grupo de automorfismos de  $H$  como grupo abstracto y sea  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(H)$  un morfismo de grupos *abstractos*, entonces en el producto cartesiano  $K = G \times H$  se puede definir la ley de grupo

$$(g, h) \cdot (g', h') := (gg', \rho_g(h)h')$$

Denotemos por  $K = G \rtimes_{\rho} H$  a este grupo, llamado el producto semidirecto de  $G$  y  $H$ . Calcular la fórmula del inverso de un par  $(g, h)$  en  $K$ . Notar que hasta ahora no se usaron las estructuras diferenciables de  $G$  ni de  $H$ .

**Ejercicio 1.9.** Si  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(H)$  es tal que la función  $G \times H \rightarrow H$  dada por  $(g, h) \mapsto \rho_g(h)$  es diferenciable (respectivamente, continua) entonces  $K$  con ese producto resulta un grupo de Lie (respectivamente, continuo).

### 1.3. Grupos de Lie clásicos

Son los grupos lineales generales  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ , definidos antes, los denominados “especiales” y otros, subgrupos de los anteriores, que preservan alguna forma bilineal, según se describen a continuación.

- **El grupo lineal general:** real  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , complejo  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  y sobre  $\mathbb{H}$ ,  $\text{GL}(n, \mathbb{H})$ .
- **El grupo especial:** real  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ , complejo  $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ .
- **El grupo ortogonal:** real  $\text{O}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : MM^t = \text{Id}\}$ , complejo  $\text{O}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : MM^t = \text{Id}\}$ .  
Otra caracterización equivalente de  $\text{O}(n, \mathbb{R})$ , identificando matrices con endomorfismos, es  $\text{O}(n, \mathbb{R}) = \{f \in \text{GL}(\mathbb{R}^n) : \|f(v)\| = \|v\| \forall v \in \mathbb{R}^n\} = \{f \in \text{GL}(\mathbb{R}^n) : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^n\}$ , donde la norma y el producto interno son los canónicos en  $\mathbb{R}^n$ . En el caso  $\text{O}(n, \mathbb{C})$ , sus elementos no preservan necesariamente el producto interno canónico  $\langle v, w \rangle = \sum_i v_i \bar{w}_i$  de  $\mathbb{C}^n$ , sino la forma bilineal  $(v, w) = \sum_i v_i w_i$ .
- **El grupo ortogonal especial:** real  $\text{SO}(n, \mathbb{R}) = \text{O}(n, \mathbb{R}) \cap \text{SL}(n, \mathbb{R})$ , complejo  $\text{SO}(n, \mathbb{C}) = \text{O}(n, \mathbb{C}) \cap \text{SL}(n, \mathbb{C})$ .
- **El grupo unitario:**  $\text{U}(n) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : MM^* = \text{Id}\}$ . Otra caracterización equivalente es  $\text{U}(n) = \{f \in \text{GL}(\mathbb{C}^n) : \|f(v)\| = \|v\| \forall v \in \mathbb{C}^n\} = \{f \in \text{GL}(\mathbb{C}^n) : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathbb{C}^n\}$ , donde la norma y el producto interno son los canónicos en  $\mathbb{C}^n$ .
- **El grupo unitario especial:**  $\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{C})$ .
- **Grupos ortogonales:** Sea  $\eta(p, q) = \text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$  la matriz diagonal con  $p$  menos unos y  $q$  unos, que interpretamos como la matriz de una forma bilineal simétrica. Se define  $\text{O}(p, q) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : M\eta(p, q)M^t = \eta(p, q)\}$  y  $\text{SO}(p, q) = \text{O}(p, q) \cap \text{SL}(n, \mathbb{R})$ .

- **El grupo simpléctico:** Sea  $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  la forma bilineal *antisimétrica* definida por

$$\omega(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n) = \sum_{i=1}^n q_i p'_i - q'_i p_i$$

Se define  $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) : \omega(v, w) = \omega(Mv, Mw) \forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}\}$ . De manera análoga se define  $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ .

*Atención: no hay acuerdo general para la notación  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ .*

## 1.4. Ejercicios

**Ejercicio 1.10.** Probar que los grupos clásicos son grupos de Lie.

*Sugerencia: encontrar una función diferenciable conveniente*

$f : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow S$  ó  $f : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow S$ , con  $S$  una variedad diferenciable, de manera tal que el grupo en cuestión sea la preimagen de un valor regular. Por ejemplo,  $\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ , como se vio en el ítem 7 del ejemplo 1.8. Otra forma es pensarlos como subgrupos abstractos y a la vez subconjuntos cerrados de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Notar que  $\text{U}(n)$ ,  $\text{SU}(n)$ ,  $\text{O}(n, \mathbb{R})$  y  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$  son compactos.

**Ejercicio 1.11.** Consideremos el grupo simpléctico  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ .

- Demostrar que  $J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$  es la matriz de la forma bilineal  $\omega$  y la condición  $M \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  se lee como  $MJM^t = J$ . Idem para  $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ .
- Consideremos  $\omega : \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir  $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ , entonces  $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega \in \Lambda^{2n}(\mathbb{R}^{2n})^*$  es no nula y, por lo tanto, un múltiplo del determinante.
- Demuestre que  $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \subset \text{SL}(2n, \mathbb{R})$  y que  $\text{Sp}(n, \mathbb{C}) \subset \text{SL}(2n, \mathbb{C})$ . Demuestre que para  $n = 1$  vale la igualdad:  $\text{Sp}(1, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})$  y  $\text{Sp}(1, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , pero para  $n > 1$ ,  $\text{Sp}(n, \mathbb{K})$  está contenido estrictamente en  $\text{SL}(2n, \mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 1.12.** Sea  $A$  una  $\mathbb{R}$ -álgebra asociativa con 1 de dimensión finita. Entonces  $U(A) = \{a \in A : \exists a' \text{ con } a'a = aa' = 1_A\}$  es un grupo de Lie de dimensión igual a la dimensión de  $A$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $\rho : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(A) \cong \mathbb{R}^{\dim A \times \dim A}$  que a cada  $a$  le asigna  $\rho(a) =$  "la multiplicación por  $a$ ". Esta aplicación es inyectiva (¿por qué?) y lineal, por lo tanto continua y diferenciable, la imagen es un subespacio lineal. Identificando a  $U(A)$  con su imagen en  $\text{End}(A)$  tenemos que  $U(A) \cong \rho(A) \cap \text{GL}(A)$ , por lo tanto un subgrupo cerrado de  $\text{GL}(\dim A, \mathbb{R})$ ; la imagen es una subvariedad porque es la intersección de un abierto con un subespacio y, en consecuencia, de la misma dimensión. La multiplicación e inversión son diferenciables pues así lo son en  $\text{GL}(A)$ .  $\square$

**Ejercicio 1.13.**  $\text{SU}(2)$  y los cuaterniones. Recordemos la estructura multiplicativa de  $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik$$

1. Ver que  $\mathbb{H}$  se puede definir como el álgebra con generadores  $i, j$ , donde  $i^2 = j^2 = -1$  e  $ij = -ji$ .
2. Mostrar que  $\sigma$  definido por  $i \mapsto -i, j \mapsto -j$  y  $\sigma(k) = k$  determina un automorfismo de orden 2.
3. Mostrar que  $\tau(i) = i, \tau(j) = j$  y  $\tau(k) = -k$  determina un antimorfismo de álgebras, es decir  $\tau(hh') = \tau(h')\tau(h)$  para todo par  $h, h' \in \mathbb{H}$ , de orden 2.
4. Concluir (o mostrar directamente) que la "conjugación"  $h = a + bi + cj + dk \mapsto \bar{h} := a - bi - cj - dk$  es una involución, es decir  $\overline{\bar{h}} = h$  y  $\overline{hh'} = \bar{h}'\bar{h}$ . Mostrar que  $\bar{h}h = h\bar{h} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ; con esto se concluye que todo elemento no nulo es inversible.
5. Probar que  $G = \{h \in \mathbb{H} : |h|^2 = 1\}$  es un grupo de Lie, difeomorfo a  $S^3$  como variedad diferenciable.
6. La aplicación  $\text{Ad} : U(\mathbb{H}) \rightarrow \text{GL}(4, \mathbb{R})$  definida por

$$h \mapsto ((a, b, c, d) \mapsto \text{Ad}_h(a, b, c, d) := h(a + bi + cj + dk)h^{-1})$$

es un morfismo de grupos, cuya imagen está contenida en  $\text{SO}(4, \mathbb{R})$ . Para cualquier  $h$ , la aplicación  $\text{Ad}_h =$  "conjugar por  $h$ " deja invariante la recta  $\mathbb{R} \cdot 1$ , y por lo tanto define por restricción una función en el complemento ortogonal

$$U(\mathbb{H}) \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R})$$

luego de haber identificado  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  con  $xi + yj + zk \in 1^\perp$ .

7. Mostrar que la aplicación anterior restringida a  $G = \{h \in \mathbb{H} : |h| = 1\}$  tiene núcleo  $\{\pm 1\}$  y, por lo tanto, la aplicación es abierta.
8. Consideremos  $\text{SU}(2) = \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : MM^* = \text{Id}, \det M = 1\}$ . La condición  $MM^* = \text{Id}$  nos dice que las filas (o columnas) de  $M$  son vectores de norma uno, ortogonales entre sí, es decir que  $M \in \text{SU}(2)$  implica

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 = |w_1|^2 + |w_2|^2, z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 = 0$$

Dado que  $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ , la condición de ortogonalidad dice que existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $(w_1, w_2) = \lambda(\bar{z}_2, -\bar{z}_1)$ .

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\lambda\bar{z}_2 & \lambda\bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

Como además el determinante debe ser igual a 1, tenemos que  $\lambda = 1$ , por lo tanto

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

Con esto concluimos que  $\text{SU}(2) \cong S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \|(z, w)\| = 1\}$ . Más aún, la aplicación definida por

$$\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$a + bi + cj + dk = (a + ib) + (c + id)j \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebras, que se restringe a un isomorfismo de grupos  $S^3 = \{h \in \mathbb{H} : |h| = 1\} \cong \text{SU}(2)$ .

Como  $S^3$  es simplemente conexo, se sigue que  $\text{SU}(2)$  es el revestimiento universal de  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$  y, además,  $\pi_1(\text{SO}(3, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Más adelante, podremos recuperar  $\mathfrak{su}(2)$  como el espacio tangente en la identidad a  $\text{SU}(2)$ ; por lo anterior, también será isomorfa al álgebra de Lie tangente a  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ .

## 1.5. Morfismos y representaciones

Las definiciones de homomorfismos y subgrupos son las usuales:

**Definición 1.14.** Una función  $\phi : G \rightarrow H$  entre grupos de Lie se dice un homomorfismo de grupos de Lie si es un homomorfismo de grupos abstractos y es diferenciable. Decimos que es un isomorfismo de grupos de Lie si además es un difeomorfismo. Un isomorfismo de un grupo de Lie  $G$  en sí mismo se llama un automorfismo del grupo de Lie  $G$ .

Un par  $(H, \phi)$  se dice un subgrupo de un grupo de Lie  $G$  si  $H$  es un grupo de Lie en sí mismo,  $(H, \phi)$  es una subvariedad de  $G$  y  $\phi$  es un homomorfismo de grupos (abstractos).

$(H, \phi)$  se dice un subgrupo cerrado de  $G$  si además  $\phi(H)$  es cerrado en  $G$ , con la topología relativa.

El siguiente resultado muestra que el problema de probar que un morfismo de grupos abstractos, entre grupos de Lie, es de Lie se reduce a comprobar que es continuo.

**Teorema 1.15.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie y sea  $\phi : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos abstractos; si  $\phi$  es continuo entonces  $\phi$  es  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Definición 1.16.** Una **representación  $k$ -lineal** de un grupo abstracto  $G$  es un  $k$ -espacio vectorial  $V$  munido de una aplicación  $G \times V \rightarrow V$  denotada  $(g, v) \mapsto g \cdot v$  (se escribe a veces  $g(v)$ , ó  $\pi(g)v$ , ó  $gv$ ) con las propiedades siguientes:

- $g(g'v) = (gg')v$
- $1_G v = v$
- $g \cdot - : V \rightarrow V$  es una transformación  $k$ -lineal.

**Ejercicio 1.17.** Tener una representación  $V$  de un grupo  $G$  equivale a dar un morfismo de grupos  $G \rightarrow \text{GL}(V)$ .

En el caso particular de un homomorfismo de grupos de Lie  $\phi : G \rightarrow H = \text{Aut}(V)$ , que por definición es diferenciable, con  $V$  un espacio vectorial real o complejo, es decir  $H = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  ó  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ , se dice que  $(H, \phi)$  es una representación del grupo de Lie  $G$ .

### 1.6. Ejercicios

1. Sea  $G$  un grupo continuo y  $G_0$  la componente conexa de la identidad. Mostrar que  $G_0$  es un subgrupo normal.
2. Mostrar que  $S_n$  es isomorfo a un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Concluir que todo subgrupo finito es isomorfo a un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  para algún  $n$ . ¿Qué puede decir de  $n$  en términos del orden del grupo finito en cuestión?
3. Calcular las dimensiones de  $O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}), U(n), SU(n), SL(n, \mathbb{R}), Sp(n, \mathbb{R})$ . Mostrar que  $\dim SO(p, q, \mathbb{R}) = \dim SO(p + q, \mathbb{R})$  y que  $\dim SU(n) = \dim SL(n, \mathbb{R})$ .
4. Sea  $G$  un grupo finito y  $V$  una representación (real o compleja). Mostrar que  $V$  es isomorfa a una suma directa de representaciones simples.
5. Sea  $V$  una representación  $\mathbb{K}$ -lineal simple de un grupo finito  $G$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Mostrar que  $\text{End}_G(V)$ , las transformaciones  $\mathbb{K}$ -lineales y  $G$ -equivariantes, son un álgebra de división, de dimensión finita sobre  $\mathbb{K}$ . Concluir que en particular si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  entonces los únicos endomorfismos  $G$ -equivariantes son múltiplos de la identidad. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ¿cuáles son las posibilidades? Exhibir un ejemplo de  $G$  y  $V$  para cada posibilidad.
6. Verificar que los siguientes son morfismos de grupos de Lie:

a)  $S^1 \cong SO(2, \mathbb{R}) \subset SU(2)$  definido por  $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  y también

$$S^1 \rightarrow SU(2), \text{ dado por } e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

b)  $GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow SL(n + 1, \mathbb{K})$ , definido por  $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det^{-1}(M) \end{pmatrix}$ .

c)  $GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow Sp(n, \mathbb{K})$ , definido por  $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & (M^t)^{-1} \end{pmatrix}$ .

### 7. Proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt.

- a) Interprete atentamente el proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt para demostrar que el siguiente es un homeomorfismo de espacios topológicos (más aún, difeomorfismo de variedades diferenciables):

$$GL(n, \mathbb{C}) \cong U(n) \times T_{>0}(n, \mathbb{C}) \cong U(n) \times \mathbb{R}_{>0}^n \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2} \cong U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

donde  $T_{>0}(n, \mathbb{C})$  denota al conjunto de las matrices triangulares superiores, con elementos reales positivos en la diagonal. *Sugerencia: mostrar que la aplicación*

$$\begin{aligned} U(n) \times T_{>0}(n, \mathbb{C}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ (U, T) &\mapsto UT \end{aligned}$$

*es inyectiva por ser  $U(n)$  y  $T_{>0}(n, \mathbb{C})$  subgrupos con intersección trivial y que es sobreyectiva gracias a Gram-Schmidt.*

- b) Muestre que la aplicación anterior no es morfismo de grupos, ni siquiera considerando productos semidirectos. En particular, los anteriores no son necesariamente grupos de Lie isomorfos (al menos no en virtud de la aplicación anterior).

- c) Mostrar que restringiendo la aplicación anterior (o repitiendo el argumento) se obtienen homeomorfismos de espacios topológicos

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$$

- d) Concluir que  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $U(n)$ , idem para los otros. (Por ejemplo,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $S^1$ .)
- e) Mostrar que  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  tiene dos componentes conexas: las matrices de determinante positivo y las de determinante negativo. Concluir que  $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$  tiene dos componentes conexas y por lo tanto  $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$  es conexo. Concluir que  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  es conexo.

*Información adicional: ninguno de los factores de los productos anteriores es un subgrupo normal del grupo más grande; más aún, en cada caso, los únicos subgrupos normales son los contenidos en las matrices escalares (una matriz escalar es un múltiplo de la identidad). En particular, entre los anteriores no hay isomorfismos de grupos de Lie.*

## 2. Álgebras de Lie

### 2.1. Definiciones

**Definición 2.1.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Un **álgebra de Lie** sobre  $\mathbb{K}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  munido de una operación bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , llamada corchete de Lie, que satisface:

1. Antisimetría:  $[x, y] = -[y, x]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ .
2. Identidad de Jacobi:  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

De acuerdo a los intereses de este curso, consideraremos sólo álgebras de Lie de dimensión finita.

**Ejercicio 2.2.** Probar que la condición de *antisimetría*:  $[x, y] = -[y, x]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ , es equivalente a la identidad  $[x, x] = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , salvo en el caso en que  $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$ .

**Ejercicio 2.3.** Probar que si  $\dim(\mathfrak{g}) = 2$ , la identidad de Jacobi se obtiene inmediatamente de la condición de *antisimetría*.

**Ejercicio 2.4.** Probar que el miembro izquierdo de Jacobi es igual a un medio de la suma alternada, es decir, si denotamos por  $J(x, y, z)$  al miembro izquierdo de Jacobi, entonces

$$J(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]]$$

Para completar las definiciones correspondientes a la categoría de álgebras de Lie, necesitamos las siguientes:

**Definición 2.5.** Sean  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$  álgebras de Lie sobre  $\mathbb{K}$ ; un **homomorfismo de álgebras de Lie**, es decir, un morfismo en la categoría de álgebras de Lie, es una transformación lineal  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  tal que  $\phi[x, y] = [\phi x, \phi y]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Un **isomorfismo de álgebras de Lie** es un homomorfismo de álgebras de Lie que admite un homomorfismo inverso.

**Ejercicio 2.6.** Probar que un isomorfismo de álgebras de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie que es a la vez un isomorfismo lineal, es decir, que la inversa de un morfismo de Lie es automáticamente de Lie.

**Definición 2.7.** Una **subálgebra de Lie**  $\mathfrak{h}$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un subespacio  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  cerrado por el corchete, es decir, tal que  $[h, h'] \in \mathfrak{h}$  para todo  $h, h' \in \mathfrak{h}$ .

**Ejemplo 2.8.** ■ Sea  $A$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa, es decir  $A$  es un anillo y  $\mathbb{K} \subset \mathcal{Z}(A)$  (por lo tanto  $A$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial). Si definimos el corchete como el conmutador:

$$[x, y] := xy - yx$$

entonces  $(A, [-, -])$  es un álgebra de Lie, es decir, el corchete es antisimétrico, y verifica la condición de Jacobi. En efecto,

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= x[y, z] - [y, z]x + y[z, x] - [z, x]y + z[x, y] - [x, y]z \\ &= x(yz) - x(zy) - (yz)x + (zy)x + y(zx) - y(xz) \\ &\quad - (zx)y + (xz)y + z(xy) - z(yx) - (xy)z + (yx)z \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $x, y, z \in A$ , pues el producto es asociativo por hipótesis.

- Como caso particular, podemos tomar  $A = \mathbb{K}^{n \times n}$ , las matrices cuadradas de tamaño  $n$  por  $n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . Considerada como álgebra de Lie con el conmutador, se denota por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

Por ejemplo, calculemos los corchetes en el álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ . Identificando a  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$  con las matrices reales  $2 \times 2$ , está generada como espacio vectorial (de dimensión  $n^2 = 4$ ) por los elementos

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} = \{h_1, x, y, h_2\}$$

La yuxtaposición significa la multiplicación usual de matrices. Los corchetes de Lie entre elementos de la base dan como resultado

$$\begin{aligned} [E_{11}, E_{12}] &= E_{11}E_{12} - E_{12}E_{11} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $[h_1, x] = x$ . De igual modo se calcula

$$\begin{aligned} [E_{11}, E_{21}] &= E_{11}E_{21} - E_{21}E_{11} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $[h_1, y] = -y$ . Así siguiendo, obtenemos

$$[h_1, x] = x; [h_1, y] = -y; [h_1, h_2] = 0; [x, y] = h_1 - h_2; [x, h_2] = x; [y, h_2] = -y$$

Notar que de los 16 corchetes entre elementos de la base, sólo es necesario calcular explícitamente 6, por la propiedad de antisimetría del corchete. Observemos, además, que el álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$  puede pensarse como espacio vectorial generada por la misma base pero ahora como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Obtenemos las mismas *constantes de estructura* que para el álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ .

- Si  $\mathfrak{h}$  es un subespacio de  $\mathbb{K}^{n \times n}$  cerrado por conmutadores, entonces  $\mathfrak{h}$  es en sí misma un álgebra de Lie, por ejemplo las matrices de traza nula, que se denotan por  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ , o las matrices antisimétricas, que se denotan  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ . Veremos que los nombres no son casuales. Por definición, estas son subálgebras de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

Calculemos, por ejemplo, la estructura de álgebra de Lie de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , las matrices reales  $2 \times 2$  de traza cero, generada como espacio vectorial de dimensión  $n^2 - 1 = 3$  por los elementos de la base

$$\mathcal{B} = \{E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}\} = \{h, x, y\}$$

A partir de los cálculos previos en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , las propiedades del corchete y el hecho de que ahora  $h := h_1 - h_2$  de la base anterior, obtenemos sin demasiado esfuerzo

$$[h, x] = 2x; [h, y] = -2y; [x, y] = h$$

Como antes, si quisiéramos estudiar el álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  no tenemos más que considerar el espacio vectorial complejo, con la misma base  $\mathcal{B}$  y observar que se obtienen las mismas *constantes de estructura* que para el álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

- **Producto directo.** Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{l}$  álgebras de Lie, entonces el producto cartesiano  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}$  admite una estructura natural de álgebra de Lie con el corchete definido coordenada a coordenada, es decir, como espacio vectorial  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{l} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{l}$  y para todo  $x, x' \in \mathfrak{g}, l, l' \in \mathfrak{l}$

$$[(x, l), (x', l')] = ([x, x'], [l, l'])$$

Notar que las proyecciones en  $\mathfrak{g}$  y en  $\mathfrak{l}$  son morfismos de álgebras de Lie.

## 2.2. Espacio tangente

Nos interesa profundizar la relación entre grupos y álgebras de Lie, que en parte justifica el estudio de las álgebras de Lie.

**Proposición 2.9.** *Sea  $G$  un subgrupo de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$  y sea  $\mathfrak{g}$  el espacio tangente a  $G$  en la identidad, entonces  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .*

Antes de mostrar esta proposición, un pequeño repaso sobre espacios tangentes.

Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto no vacío y  $p \in M$ . Diremos que un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  es tangente a  $M$  en  $p$  si existe una curva diferenciable  $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , tal que  $\sigma(0) = p$  y  $\sigma'(0) = v$ .

El espacio tangente a  $M$  en  $p$ , denotado por  $T_p M$ , se define como el subespacio de  $\mathbb{R}^n$  generado por todos los vectores tangentes a  $M$  que pasan por  $p$ , es decir, por todos los vectores velocidades de curvas que pasan por  $p$ .

Es fácil ver que si  $v \in T_p M$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces reparametrizando una curva que pase por  $p$  a velocidad  $v$  (y eventualmente achicando el dominio) se puede obtener una curva que pase por  $p$  a velocidad  $\lambda v$ . Es un hecho que si  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  (es decir, localmente el gráfico de alguna función  $C^\infty f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ ), entonces el conjunto de vectores velocidades resulta un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  (es decir, es cerrado por sumas y por lo tanto en este caso no hace falta tomar "subespacio generado por").

*Demostración de la proposición 2.9.* Sea  $G$  un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ , sea  $e = \text{Id}_G$  y sea  $\mathfrak{g} := T_{\text{Id}} G = T_e G$  el espacio tangente a  $G$  en la identidad; sean  $X = \sigma'(0)$  e  $Y = \tau'(0)$  donde  $\sigma, \tau : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G \subset GL(n, \mathbb{R})$  son dos curvas diferenciables con  $\sigma(0) = \tau(0) = e$ ; o sea que, por definición,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Es suficiente probar que  $[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{g}$ . Consideremos la función de dos variables

$$\begin{aligned} f &: (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G \\ (s, t) &\mapsto \sigma(s)\tau(t)\sigma(s)^{-1} \end{aligned}$$

Es decir que tenemos dada una familia de curvas parametrizadas por  $s$ . Para cada  $s$  fijo, la curva  $f_s(t) = f(s, t)$  verifica que es diferenciable y que  $f_s(0) = \text{Id}$ , pues

$$\sigma(s)\tau(0)\sigma(s)^{-1} = \sigma(s)\text{Id}\sigma(s)^{-1} = e.$$

Podemos calcular  $f'_s|_{t=0}$  y nos dará un elemento del espacio tangente a  $G$  en  $e$ :

$$f'_s|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_s(t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \sigma(s)\tau(t)\sigma(s)^{-1}$$

$$= \sigma(s)\tau'(0)\sigma(s)^{-1} = \sigma(s)Y\sigma(s)^{-1}.$$

Notar que la cuenta anterior, si bien mezcla elementos de  $\mathfrak{g}$  con elementos de  $G$ , tiene sentido, si recordamos que los factores del producto son en particular matrices  $n \times n$  y la multiplicación es la usual. Es decir que, para cada  $Y \in T_eG$  y para cada  $s$ , obtuvimos que  $\sigma(s)Y\sigma(s)^{-1} \in T_eG$ . Si ahora consideramos la curva  $c(s) = \sigma(s)Y\sigma(s)^{-1}$ , tenemos que  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_eG$ , es decir, la imagen de  $c$  está contenida en el espacio vectorial  $T_eG$ , y por lo tanto, su vector velocidad debe estar contenido en el mismo espacio vectorial; por lo tanto, para todo  $s$ ,

$$c'(s) = \sigma'(s)Y\sigma(s)^{-1} + \sigma(s)Y(\sigma(s)^{-1})' = \sigma'(s)Y\sigma(s)^{-1} + \sigma(s)Y(-\sigma(s)^{-1}\sigma'(s)\sigma(s)^{-1}) \in T_eG$$

y en particular (usando que  $\text{Id}$  es la matriz identidad)

$$\begin{aligned} c'(0) &= \sigma(0)'Y\sigma(0)^{-1} - \sigma(0)Y\sigma(0)^{-1}\sigma'(0)\sigma(0)^{-1} = XY\text{Id} - \text{Id}Y\text{Id}^{-1}X\text{Id}^{-1} \\ &= XY - YX = [X, Y] \in T_eG. \end{aligned}$$

### 2.3. Álgebras de Lie lineales

Ya hemos mencionado como ejemplo de álgebra de Lie a  $\mathfrak{gl}(V)$ ; recordémosla brevemente con más generalidad. Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$  y  $\text{End}(V)$  el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales  $V \rightarrow V$ , que tiene dimensión  $n^2$ . Además,  $\text{End}(V)$  es un anillo con la composición usual; ésta permite definir una nueva operación

$$[x, y] = xy - yx$$

donde se sobrentiende la operación de composición; ya hemos estudiado que el corchete así definido convierte a  $\text{End}(V)$  en un álgebra de Lie que denotamos como  $\mathfrak{gl}(V)$ . Fija una base de  $V$ , se puede pensar  $\mathfrak{gl}(V)$  como el espacio de todas las matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{K}$ , que denotamos también como  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ . En particular, tenemos  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  y  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Toda subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  ó  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  se dice un **álgebra de Lie lineal**.

Una base de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  ó  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  está dada por las matrices  $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  donde  $E_{ij}$  tiene un uno en la entrada de la fila  $i$  y columna  $j$  y las demás entradas son todas iguales a cero:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos los corchetes entre ellas a partir de los productos de matrices  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ . Por ejemplo  $[E_{12}, E_{23}] = E_{13}$ , pues

$$(E_{12}E_{23})_{ij} = \sum_k (E_{12})_{ik}(E_{23})_{kj}$$

$(E_{12})_{ik}$  es cero a menos que  $i = 1$  y  $k = 2$ , en particular,  $(E_{12}E_{23})_{ij}$  es cero si  $i \neq 1$ . A la vez  $(E_{23})_{kj}$  es cero a menos que  $k = 2$  y  $j = 3$ , lo que dice que  $(E_{12}E_{23})_{ij}$  es cero también para  $j \neq 3$ , queda ver

$$(E_{12}E_{23})_{13} = \sum_k (E_{12})_{1k}(E_{23})_{k3} = \sum_k \delta_{2k}\delta_{2k} = 1$$

Una cuenta similar muestra que  $E_{23}E_{12} = 0$ . En general, vale que

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$$

luego todos los coeficientes de  $[E_{ij}, E_{kl}]$  dan  $\pm 1$  ó  $0$ .

Los grupos de Lie son una de las clases más importantes de variedades diferenciables y la importancia del estudio de las álgebras para los grupos de Lie es que:

**Las categorías de álgebras de Lie de dimensión finita y la de grupos de Lie conexos y simplemente conexos son equivalentes.**

Más aún, todo grupo de Lie conexo y simplemente conexo está completamente determinado, salvo isomorfismo, por su álgebra de Lie de campos de vectores invariantes a izquierda, que es isomorfa al espacio tangente a la identidad del grupo, (este isomorfismo se demuestra en la proposición 2.26). El estudio de los grupos se reduce en gran medida al estudio de sus álgebras de Lie. El nexo entre un grupo y su álgebra de Lie está dado por la función *exponencial* que es una generalización de la exponencial de matrices.

Los ejemplos más importantes son grupos y álgebras de Lie de matrices; más aún, toda álgebra de Lie de dimensión finita tiene un representante en su clase de isomorfismo que es un álgebra de Lie de matrices. Ésto es consecuencia de teoremas de Ado e Iwasawa. Ver el enunciado del teorema 2.27. La demostración de este hecho fundamental se encuentra, por ejemplo, en los libros [J] o [B].

## 2.4. Álgebras de Lie clásicas

Los ejemplos más importantes de toda la teoría se llaman **álgebras de Lie clásicas** y se agrupan en **cuatro familias de tipos**  $A_\ell, B_\ell, C_\ell$  y  $D_\ell$ , con  $1 \leq \ell$ , que a la vez se corresponden con cuatro familias de grupos de Lie clásicos, definidos en la sección 1.3. Todas ellas se construyen dentro de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  donde  $n$  depende de  $\ell$  y  $\mathbb{K}$  es cualquier cuerpo, salvo en los casos  $B_\ell, C_\ell$  y  $D_\ell$ , donde la característica de  $\mathbb{K}$  debe ser distinta de dos. Nos interesan las álgebras de Lie sobre  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

- **El álgebra de Lie de tipo  $A_\ell$**  es  $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{(\ell+1) \times (\ell+1)} : \text{tr}A = 0\}$ , el álgebra de Lie de matrices de traza cero. Usando las propiedades de la traza:  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  y  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(B + A)$  y que no depende de la base (por lo cual podemos pensar en la traza de un endomorfismo como la traza de su expresión en cualquier base), es fácil verificar que  $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{K})$  es cerrada para el corchete, más aún, que es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{K})$ .

Dado que es una subálgebra *propia* de  $\mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{K})$ , su dimensión es menor ó igual que  $n^2 - 1 = (\ell + 1)^2 - 1$ . Por otra parte, sea la base

$$\{E_{ij} : i \neq j\}_{1 \leq i, j \leq \ell} \cup \{h_i := E_{ii} - E_{i+1, i+1}\}_{1 \leq i \leq \ell}$$

que en total son  $(\ell + 1)^2 - (\ell + 1) + \ell = (\ell + 1)^2 - 1$  elementos base; por lo tanto, ésta es su dimensión.

• **El álgebra de Lie de tipo  $C_\ell$  para  $\ell \geq 3$**  es el álgebra simpléctica definida como el subespacio (y subálgebra de Lie) de  $\mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{K})$  dada por

$$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K}) := \left\{ A \in \mathbb{K}^{2\ell \times 2\ell} : A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} : m, n, p, q \in \mathbb{K}^{\ell \times \ell}, n^t = n, p^t = p, m^t = -q \right\}$$

Equivalentemente, sea  $\{v_1, \dots, v_{2\ell}\}$  una base de  $\mathbb{K}^{2\ell \times 2\ell}$ , sea  $F = \begin{pmatrix} 0 & Id_\ell \\ -Id_\ell & 0 \end{pmatrix}$  y sea  $f$  la forma bilineal antisimétrica no degenerada correspondiente a  $F$ ; es decir,  $f(v, w) = \langle v, Fw \rangle$ ,  $v, w \in \mathbb{K}^{2\ell}$ . Notar que  $f$  satisface  $f(v, w) = -f(w, v)$ . Se define el álgebra simpléctica como el subespacio de matrices o endomorfismos  $A$  de  $\mathbb{K}^{2\ell}$  tales que

$$FA = -A^tF$$

lo cual obliga  $\text{tr}A = 0$ . En otras palabras,  $A \in \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K})$  si y sólo si para todo  $v, w \in \mathbb{K}^{2\ell}$

$$f(Av, w) = -f(v, Aw)$$

Una base de  $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K})$  está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \{h_i := E_{ii} - E_{\ell+i, \ell+i} : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{E_{ij} - E_{\ell+j, \ell+i} : 1 \leq i \neq j \leq \ell\} \\ & \cup \{E_{i, \ell+i} : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{E_{i, \ell+j} + E_{j, \ell+i} : 1 \leq i < j \leq \ell\} \\ & \cup \{E_{\ell+i, i} : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{E_{\ell+i, j} + E_{\ell+j, i} : 1 \leq i < j \leq \ell\} \end{aligned}$$

En particular, se obtiene que la dimensión de  $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K})$  es igual a

$$\dim \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K}) = |\mathcal{B}| = \ell + (\ell^2 - \ell) + 2\left(\ell + \frac{1}{2}\ell(\ell - 1)\right) = 2\ell^2 + \ell$$

• **El álgebra de Lie de tipo  $B_\ell$  para  $\ell \geq 2$**  es el álgebra ortogonal  $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$  definida como el subespacio (y la subálgebra de Lie) de  $\mathfrak{sl}(2\ell + 1, \mathbb{K})$  de matrices antisimétricas

$$\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{(2\ell+1) \times (2\ell+1)} : A + A^t = 0\}$$

Notar que las condiciones implican  $\text{tr}A = 0$  si  $A \in \mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$ , por lo cual esta álgebra se denota también por  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{K})$ . Otra descripción de  $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$  (ver la próxima sección) está dada por

$$\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_2^t & m & n \\ -b_1^t & p & -m^t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(2\ell+1) \times (2\ell+1)} : m, n^t = -n, p^t = -p \in \mathbb{K}^{\ell \times \ell}, b_1, b_2 \in \mathbb{K}^\ell \right\}$$

Equivalentemente, sea  $\{v_1, \dots, v_{2\ell+1}\}$  una base de  $\mathbb{K}^{(2\ell+1) \times (2\ell+1)}$ , sea  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_\ell \\ 0 & Id_\ell & 0 \end{pmatrix}$  y sea  $f$  la forma bilineal simétrica no degenerada correspondiente a  $F$ ; como para  $C_\ell$ , una matriz  $A$  pertenece a  $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$  si y sólo si

$$f(Av, w) = -f(v, Aw)$$

De nuevo,  $\text{tr}A = 0$ . Consideremos la siguiente base de  $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$ :  $\mathcal{B} =$

$$= \{h_i := E_{ii} - E_{\ell+i, \ell+i}\}_{2 \leq i \leq \ell+1} \cup \{E_{i+1, j+1} - E_{\ell+j+1, \ell+i+1}\}_{1 \leq i \neq j \leq \ell} \cup \{E_{i+1, \ell+j+1} - E_{j+1, \ell+i+1}\}_{1 \leq i < j \leq \ell} \\ \cup \{E_{1, \ell+i+1} - E_{i+1, 1}; E_{1, i+1} - E_{\ell+i+1, 1}\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{E_{i+\ell+1, j+1} - E_{j+\ell+1, i+1}\}_{1 \leq j < i \leq \ell}$$

Como en el caso de  $C_\ell$ ,

$$\dim \mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K}) = |\mathcal{B}| = 2\ell^2 + \ell.$$

• **El álgebra de Lie de tipo  $D_\ell$**  es también un álgebra ortogonal pero que se construye sobre un espacio vectorial de dimensión par,  $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K}) = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{K})$  porque todos sus elementos tienen traza cero,

$$\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{2\ell \times 2\ell} : A + A^t = 0\}$$

La forma bilineal está dada por  $F = \begin{pmatrix} 0 & Id_\ell \\ Id_\ell & 0 \end{pmatrix}$ . Se deja como ejercicio construir una base y verificar que la dimensión de esta álgebra de Lie es  $\dim \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K}) = 2\ell^2 - \ell$ .

### Matrices ortogonales con respecto a una forma bilineal simétrica no degenerada

Sea  $V = \mathbb{K}^n$  y  $B$  una forma bilineal, simétrica, no degenerada, definida en  $V$ , se define

$$\mathfrak{o}(B) = \{f \in \mathfrak{gl}(n) : B(fv, w) + B(v, fw) = 0 \forall v, w \in V\}$$

$\mathfrak{o}(B)$  resulta un álgebra de Lie, que se identifica con la subálgebra de matrices dada por

$$\mathfrak{o}(B) = \{f \in \mathbb{K}^{n \times n} : fB + Bf^t = 0\}$$

donde ahora  $B$  significa la matriz de la forma bilineal  $B$  y a  $f$  la escribimos como matriz.

**Ejercicio 2.10.** Sea  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  inversible y  $B' = CBC^t$ , entonces  $\mathfrak{o}(B) \cong \mathfrak{o}(B')$  y este isomorfismo es de álgebras de Lie. En particular, sobre los números complejos, todas las  $\mathfrak{o}(B)$ , con  $B$  simétrica, no degenerada, son isomorfas al álgebra de Lie de matrices antisimétricas.

En el caso real, tiene sentido considerar  $\mathfrak{o}(p, q)$ , *el álgebra de Lie de matrices que preservan la forma bilineal que en su forma diagonal tiene  $p$  unos y  $q$  menos unos*. Toda subálgebra de Lie que preserve una forma bilineal simétrica, no degenerada en  $\mathbb{R}^n$  es necesariamente isomorfa a una de éstas. Se puede probar también que  $\mathfrak{o}(p, q) \cong \mathfrak{o}(q, p)$ , ¿por qué?

## 2.5. Ideales

**Definición 2.11.** Un **ideal** de  $\mathfrak{g}$  es un subespacio  $\mathfrak{J}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[g, z] \in \mathfrak{J}$  para todo  $z \in \mathfrak{J}$ ,  $g \in \mathfrak{g}$ , es decir, tal que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J}$ .

En teoría de Lie, los ideales juegan el rol que los subgrupos normales juegan en teoría de grupos y el de los ideales biláteros en teoría de anillos, por lo cual es natural estudiar un álgebra de Lie vía sus ideales. Notar que un ideal es automáticamente una subálgebra de Lie. Ideales triviales de  $\mathfrak{g}$  son todo  $\mathfrak{g}$  y el cero ó *ideal nulo* que consiste sólo del vector nulo. Menos trivial es el ideal  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} : [x, z] = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\}$ , el centro de  $\mathfrak{g}$ . Un ideal  $\mathfrak{J}$  de  $\mathfrak{g}$  se dice propio si  $0 \neq \mathfrak{J}$  e  $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{g}$ .

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** si  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ , es decir, si todos los corchetes son cero, o sea, si y sólo si  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ . En particular, todo espacio vectorial puede ser considerado como un álgebra de Lie abeliana.

El álgebra derivada de  $\mathfrak{g}$  es  $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , que consiste de todas las combinaciones lineales de elementos de la forma  $[x, y]$  con  $x, y \in \mathfrak{g}$ , es decir,

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \sum [x_i, y_i] = 0 : x_i, y_i \in \mathfrak{g} \right\}$$

y resulta un ideal (ver proposición 2.14 más adelante). Notar que  $\mathfrak{g}$  es abeliana si y sólo si  $\mathfrak{g}' = 0$ ; el otro extremo es  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \neq 0$ . Veremos enseguida por qué.

**Ejemplo 2.12.** Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  ó, más generalmente, sobre cualquier cuerpo de char  $\mathbb{K} \neq 2$ ; estudiemos su tabla de multiplicación en la base  $\{x, y, h\}$  donde

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces  $[x, y] = h$ ,  $[h, x] = 2x$  y  $[h, y] = -2y$ . Por lo tanto,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .

**Ejercicio 2.13.** La propiedad  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  vale para todas las álgebras de Lie lineales, incluso para  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  con  $n \neq 2$  si char  $\mathbb{K} = 0$ .

**Proposición 2.14.** Sean  $\mathfrak{J}, \mathfrak{K}$  ideales de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , entonces  $\mathfrak{J} + \mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{K}$  y  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{K}]$  son ideales de  $\mathfrak{g}$ ; en particular,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  y  $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$  son ideales.

*Demostración.* Sean  $\mathfrak{J}, \mathfrak{K}$  ideales de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ ; queda como ejercicio probar que entonces los subespacios

$$\mathfrak{J} + \mathfrak{K} = \{x + y : x \in \mathfrak{J}, y \in \mathfrak{K}\} \text{ y}$$

$$\mathfrak{J} \cap \mathfrak{K} = \left\{ \sum_{x \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{K}} x \right\}$$

también son ideales de  $\mathfrak{g}$ . Probemos que  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{K}] = \{\sum_i [x_i, y_i] : x_i \in \mathfrak{J}, y_i \in \mathfrak{K}\}$  es ideal de  $\mathfrak{g}$ :

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{J}, \mathfrak{K}]] \subseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{J}], \mathfrak{K}] + [\mathfrak{J}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{K}]] \subseteq [\mathfrak{J}, \mathfrak{K}] + [\mathfrak{J}, \mathfrak{K}] = [\mathfrak{J}, \mathfrak{K}].$$

El álgebra derivada de  $\mathfrak{g}$  es un caso especial de esta construcción. □

**Definición 2.15.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se dice **simple** si no admite más ideales que el cero y la misma  $\mathfrak{g}$  y si  $\mathfrak{g}$  no es abeliana.

Por ejemplo, si  $\mathfrak{g}$  es de dimensión uno, resulta automáticamente abeliana y, por lo tanto, no es simple; más aún, las simples de dimensión más chica son de dimensión tres (ejercicio).

Notar que si  $\mathfrak{g}$  es **simple**, entonces  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  y  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ .

**Ejemplo 2.16.** Veamos que  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ , que es de dimensión tres, es simple. Sea  $\{x, y, h\}$  la base de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  dada en el ejemplo 2.12:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que  $\mathfrak{J}$  es un ideal no nulo de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . Sea  $0 \neq t = ax + by + ch \in \mathfrak{J}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{K}$ , entonces  $[x, [x, t]] = -2bx \in \mathfrak{J}$  y también  $[y, [y, t]] = -2ay \in \mathfrak{J}$ ; por lo tanto, si  $a \neq 0$ ,  $\mathfrak{J}$  contiene a  $y$ , y por ser ideal, también contiene a  $h = [x, y]$ ; entonces  $\mathfrak{J}$  contiene a  $t - by - ch = ax$ . Es decir que si  $a \neq 0$ , obtenemos que  $y, h, x \in \mathfrak{J}$  y por lo tanto,  $\mathfrak{J} = \mathfrak{g}$ . Análogamente si  $b \neq 0$ . Por otra parte, si  $0 \neq ch \in \mathfrak{J}$ , entonces  $h \in \mathfrak{J}$  pero por ser ideal, también  $x = \frac{1}{2}[h, x] \in \mathfrak{J}$  e  $y = -\frac{1}{2}[h, y] \in \mathfrak{J}$  y de nuevo  $\mathfrak{J} = \mathfrak{g}$ .

## 2.6. Cocientes

A partir de un álgebra de Lie *no simple*, se puede construir otra álgebra de Lie de dimensión menor, como un cociente de la primera (de manera análoga al procedimiento para anillos); en efecto, si  $\mathfrak{g}$  no es simple, sea  $\mathfrak{I}$  un ideal propio, se define el **álgebra de Lie cociente** como el espacio vectorial cociente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$  con la estructura de álgebra de Lie dada por

$$[x + \mathfrak{I}, y + \mathfrak{I}] = [x, y] + \mathfrak{I}$$

es decir, en notación de clases, se define  $[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]}$ .

Buena definición: Supongamos que  $x + \mathfrak{I} = x' + \mathfrak{I}$  e  $y + \mathfrak{I} = y' + \mathfrak{I}$ , o sea que existen  $u, v \in \mathfrak{I}$  tales que  $x' = x + u$  e  $y' = y + v$  entonces

$$[x', y'] = [x, y] + ([x, v] + [u, y] + [u, v]) \in [x, y] + \mathfrak{I}$$

es decir que  $[x', y']$  y  $[x, y]$  difieren en un elemento de  $\mathfrak{I}$ , en otras palabras, tienen la misma clase en el cociente:  $[x, y] + \mathfrak{I} = [x', y'] + \mathfrak{I}$ .

En particular, obtenemos que **la proyección al cociente es un morfismo de álgebras de Lie por construcción y, en consecuencia, todo ideal es el núcleo de algún morfismo de Lie** como se prueba en el lema posterior 2.17.

Observemos que si  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un homomorfismo de álgebras de Lie,  $\ker \phi$  es un ideal en  $\mathfrak{g}$ ; en efecto, claramente, para todo  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $z \in \ker \phi$ , tenemos que  $\phi([x, z]) = [\phi x, \phi z] = [\phi x, 0] = 0$ . Notar también que la imagen es una subálgebra del espacio de llegada.

Ideales y morfismos de álgebras de Lie tienen muchas propiedades en común con ideales y morfismos de anillos. Una de ellas es la construcción de homomorfismos de álgebras de Lie  $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{h}$  donde  $\mathfrak{I}$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ . Entendamos esto: Sea  $\mathfrak{I}$  un ideal de  $\mathfrak{g}$  y  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un homomorfismo que satisface  $\mathfrak{I} \subset \ker(\phi)$  entonces  $\phi$  se factoriza por la proyección al cociente y define un morfismo de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{h}$ . En efecto, si  $\mathfrak{I} \subset \ker(\phi)$  el morfismo  $\bar{\phi} : \mathfrak{g}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{h}$  definido como  $\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x)$  está bien definido pues  $\bar{x} = \bar{x'} \iff x - x' \in \mathfrak{I} \subset \ker(\phi)$ , luego  $\phi(x) = \phi(x')$  y obtenemos que  $\bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{\phi}(\bar{x'})$ . Por lo tanto, el diagrama conmuta:  $\phi = \bar{\phi} \circ p$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{h} \\ p \downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{I} & & \end{array}$$

**Lema 2.17.** *Existe una correspondencia natural entre homomorfismos que salen de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e ideales de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\phi \mapsto \ker \phi$  e  $\mathfrak{I} \mapsto \psi$  con  $\psi : x \mapsto x + \mathfrak{I}$ . En particular, todo ideal es el núcleo de un morfismo de álgebras de Lie.*

*Demostración:* Ejercicio.

Otra propiedad es la correspondencia uno a uno de ideales de  $\mathfrak{g}$  que contienen a  $\mathfrak{I}$  e ideales de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ , dada por la proyección al cociente.

Finalmente, es importante mencionar el *Segundo Teorema de Isomorfismo*: sean  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  ideales en un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  tales que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$  entonces

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

donde el morfismo de la derecha es  $\overline{a + b} \mapsto \overline{b}$ .

Para resumir algunos de los enunciados más importantes, tenemos el siguiente teorema cuya prueba es estándar (es completamente análoga a la realizada para grupos). Ejercicio: verificar cómo se deben definir las flechas que falta mencionar.

**Teorema 2.18.** a) Si  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un morfismo de álgebras de Lie entonces  $\mathfrak{g}/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$ .

b) Si  $\mathfrak{I}$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{I} \subset \ker(\phi)$  entonces existe un único morfismo de álgebras de Lie  $\overline{\phi}: \mathfrak{g}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{h}$  tal que  $\phi = \overline{\phi} \circ p$  i.e. tal que el diagrama conmuta. En otras palabras,  $\phi$  se factoriza por la proyección al cociente y define un morfismo de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{h}$ .

c) Si  $\mathfrak{I}$  y  $\mathfrak{K}$  son ideales de  $\mathfrak{g}$  tales que  $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{K}$  entonces  $\mathfrak{K}/\mathfrak{I}$  es un ideal de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$  y  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{I})/(\mathfrak{K}/\mathfrak{I})$  es naturalmente isomorfo a  $\mathfrak{g}/\mathfrak{K}$ . Notar que en esta situación estamos identificando a  $\mathfrak{K}/\mathfrak{I}$  como su imagen  $p(\mathfrak{K})$  donde  $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{I}$  es la proyección al cociente.

d) Sean  $\mathfrak{K}, \mathfrak{I}$  ideales de  $\mathfrak{g}$  entonces  $(\mathfrak{K} + \mathfrak{I})/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{I}/(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{I})$ .

## 2.7. Ejercicios

1. Probar que la condición de antisimetría:  $[x, y] = -[y, x]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ , es equivalente a la identidad  $[x, x] = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , salvo en el caso en que  $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$ .
2. Probar que si  $\dim(\mathfrak{g}) = 2$ , la identidad de Jacobi se obtiene inmediatamente de la condición de antisimetría.
3. Probar que el miembro izquierdo de Jacobi es igual a un medio de la suma alternada, es decir, si denotamos por  $J(x, y, z)$  al miembro izquierdo de Jacobi, entonces

$$J(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]]$$

4. Probar que un espacio vectorial de dimensión 2 con base  $\{x, y\}$  con el corchete determinado por  $[x, y] = y$  es efectivamente un álgebra de Lie (ver ejercicio 2). Muestre que toda álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 es isomorfa a ésta.
5. Probar que  $(\mathbb{R}^3, \times)$  es un álgebra de Lie real, isomorfa a  $\mathfrak{su}(2)$ , el álgebra de Lie de  $SU(2)$ , llamada la forma compacta de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . La estructura de álgebra de Lie es la siguiente:

$$(\mathbb{R}^3, \times) = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w \text{ con el corchete } [u, v] = w, [v, w] = u, [w, u] = v$$

que se extiende bilinealmente. Probar que  $(\mathbb{R}^3, \times)$  no tiene ideales propios.

Mostraremos luego que esta álgebra de Lie es isomorfa al álgebra de Lie tangente a las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ , que a la vez es isomorfa al álgebra de Lie tangente a  $SU(2)$ , que a la vez es isomorfo al grupo de unidades de norma 1 de los cuaterniones.

6. Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Recordemos que un campo de vectores  $C^\infty$  es un operador sobre funciones  $C^\infty(U)$  de la forma  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $a_i \in C^\infty(U)$ .

El espacio vectorial real de todos los campos de vectores  $C^\infty$  sobre  $U$  admite una estructura de álgebra de Lie con el corchete definido por el conmutador  $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ , donde  $X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  en la forma  $X(f)(p) = X_p(f)$ . Probar que el corchete de dos campos es otro campo, mostrando que las derivadas de orden dos se cancelan.

Probar que la antisimetría y la identidad de Jacobi son consecuencias de las propiedades del álgebra asociativa generada por los campos de vectores (con las operaciones de suma y composición usuales).

Este ejemplo se puede generalizar a toda variedad  $C^\infty$   $M$ , es decir, el espacio vectorial real de todos los campos de vectores  $C^\infty$  sobre  $M$  admite una estructura de álgebra de Lie.

Más ejemplos importantes se estudian en las siguientes dos subsecciones, derivaciones y producto semidirecto.

## 2.8. Derivaciones. Representación adjunta.

Sea  $(V, m)$  un "álgebra" en el sentido general, es decir,  $m : V \times V \rightarrow V$  bilineal es una función (sin ninguna propiedad prescrita, salvo la bilinealidad, no necesariamente asociativa). Ver el ejemplo 1.4. Se define  $\text{Der}(V, m) := \{D \in \text{End}(V) : D(vw) = D(v)w + vD(w)\}$ , donde hemos denotado  $vw := m(v, w)$ . Si  $D$  y  $D'$  son dos derivaciones, en general  $DD'$  no es una derivación, pero  $DD' - D'D$  sí lo es, por lo tanto  $\text{Der}(V, m)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$ .

En efecto,

$$DD'(vw) = D(D'(v)w + vD'(w)) = D(D'(v))w + D'(v)D(w) + D(v)D'(w) + vDD'(w)$$

$$D'D(vw) = D'(D(v)w + vD(w)) = D'(D(v))w + D(v)D'(w) + D'(v)D(w) + vD'D(w)$$

$$(DD' - D'D)(vw) = (DD' - D'D)(v)w + v(DD' - D'D)(w)$$

Dado que un álgebra de Lie es un álgebra en el sentido anterior, está definida  $\text{Der } \mathfrak{g}$ , el **álgebra de Lie de derivaciones** del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Dentro de  $\text{Der } \mathfrak{g}$  hay derivaciones que aparecen naturalmente: para un  $x \in \mathfrak{g}$  se define el endomorfismo

$$z \mapsto \text{ad}_x z := [x, z]$$

que resulta una derivación como consecuencia de la identidad de Jacobi:

$$\text{ad}_x([y, z]) = [x, [y, z]] = [y, [x, z]] + [[x, y], z] = [y, \text{ad}_x z] + [\text{ad}_x y, z]$$

Las derivaciones de esta forma se llaman **derivaciones interiores de  $\mathfrak{g}$** ; las demás, **derivaciones exteriores**. Denotemos por  $\text{InDer}(\mathfrak{g})$  a las derivaciones interiores de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . La asignación  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{g}$  que manda  $x \mapsto \text{ad}_x$  se llama **representación adjunta** y volveremos sobre ella posteriormente.

**Ejercicio 2.19.** Demostrar que  $\text{InDer}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , donde  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  denota el centro de  $\mathfrak{g}$ .

**Observación 2.20.** Se verá más tarde que para un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  se verifica que  $\text{ad} : \mathfrak{g} \cong \text{Der}(\mathfrak{g})$ ; es decir que, en un álgebra de Lie semisimple, toda derivación es interior. Ver el final de la sección 5.5.

**Ejercicio 2.21.** Sea  $\delta$  una derivación de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $x \in \mathfrak{g}$ . Demostrar que

$$[\delta, \text{ad}_x] = \text{ad}_{\delta(x)}$$

donde el corchete está calculado en  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ . En particular,  $\text{InDer}(\mathfrak{g})$  es un ideal de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ .

**Ejercicio 2.22.** Sea  $\mathfrak{J}$  un ideal de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{s}$  una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Mostrar que la aplicación adjunta  $x \mapsto \text{ad}_x$  restringida a  $\mathfrak{s}$  define un morfismo de álgebras de Lie  $\mathfrak{s} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{J})$ . ¿Cuál es su núcleo?

## 2.9. Producto semidirecto.

Sean  $\mathfrak{l}, \mathfrak{g}$  álgebras de Lie sobre  $\mathbb{K}$  y sea  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{l})$  un homomorfismo de álgebras de Lie. Se define el **producto semidirecto de  $\mathfrak{l}$  y  $\mathfrak{g}$** , denotado por  $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$ , al álgebra de Lie cuyo espacio vectorial subyacente es  $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}$  y la estructura de Lie está dada por

$$[(l, g), (l', g')] = ([l, l'] + \pi(g)l' - \pi(g')l, [g, g'])$$

Con esta estructura de álgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$  resulta una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{l}$  un ideal de  $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$ .

Recíprocamente, si un álgebra de Lie es de la forma  $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}$  donde  $\mathfrak{l}$  es un ideal y  $\mathfrak{g}$  una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{h}$ , entonces  $\text{ad}_x : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$  es una derivación para todo  $x$ , en particular, para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , la cual define un homomorfismo de álgebras de Lie  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{l})$ . Se obtiene  $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$ , el producto semidirecto de  $\mathfrak{l}$  y  $\mathfrak{g}$ .

**Ejercicio 2.23.** Consideremos un producto semidirecto  $\mathfrak{l} \rtimes \mathfrak{g}$  como antes. Mostrar que  $\mathfrak{g}$  resulta un ideal si y sólo si la aplicación  $\pi$  es nula, si y sólo si el producto semidirecto coincide con el producto directo.

**Ejercicio 2.24.** Muestre que el álgebra de Lie no abeliana de dimensión dos es un producto semidirecto de dos álgebras de dimensión uno.

## 2.10. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Sea  $G$  un grupo de Lie. Si  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  y  $g \in G$ , consideremos la *traslación a izquierda* dada por  $f_g(x) = f(g.x)$  para todo  $x \in G$ . Un campo de vectores  $C^\infty$  se dice *invariante a izquierda* si  $X_{gp}f = dL_g(X_p)(f)$  para toda  $f \in C^\infty(G)$  y  $g, p \in G$ . Los campos vectoriales invariantes a izquierda forman una subálgebra de Lie del álgebra de Lie todos los campos  $C^\infty$  y esta es la que se llama el **álgebra de Lie de  $G$** , denotada por  $\mathfrak{g}$ . Podemos pensar a cada campo  $C^\infty$  invariante a izquierda como a una familia de vectores tangentes  $X_g$ , uno para cada  $g \in G$ ; dado que  $X_g = dL_g X_e$ , el campo  $X$  está determinado por  $X_e$ . Veremos que la función  $X \rightarrow X_e$ , con  $e$  el elemento identidad del grupo de Lie es un isomorfismo de espacios vectoriales de  $\mathfrak{g}$  en  $T_e(G)$ , el espacio tangente a la identidad de  $G$ . Finalmente,  $T_e(G)$  hereda la estructura de álgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  vía este isomorfismo.

Los enunciados precisos son los siguientes:

**Definición 2.25.** Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $g \in G$ . Se definen las traslaciones a izquierda y a derecha como los difeomorfismos de  $G$  dados por

$$l_g(\tau) = g \cdot \tau$$

$$r_g(\tau) = \tau \cdot g$$

Se dice que un campo de vectores  $X$  (no necesariamente  $C^\infty$  a priori) en  $G$  es **invariante a izquierda** si para todo  $g \in G$

$$\boxed{dl_g \circ X = X \circ l_g}$$

**Proposición 2.26.** Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $\mathfrak{g}$  el espacio vectorial de todos los campos de vectores invariantes a izquierda, entonces

1.  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial real y  $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$  vía el isomorfismo de espacios vectoriales  $\mathfrak{g} \mapsto T_e(G)$  dado por  $\alpha(X) = X_e$ .
2. Los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables.
3. El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda.
4. El espacio  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie que identificamos con  $T_e(G)$ , el álgebra de Lie de  $G$ .

*Demostración.* 1. Es claro que  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial real y que  $\alpha$  es lineal; veamos que  $\alpha(X)$  es inyectiva: Supongamos que  $\alpha(X) = \alpha(Y)$ , entonces para cada  $g \in G$   $dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e))$ , luego

$$X(g) = dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e)) = Y(g)$$

Por lo tanto,  $X = Y$ . Veamos que  $\alpha$  es suryectiva: sea  $x \in T_e(G)$ , definamos un campo de vectores invariantes a izquierda por  $X(g) = dl_g(x)$  para cada  $g \in G$ ; entonces  $\alpha(X) = x$ .

2. Veamos que los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables: es suficiente probar que para todo campo invariante  $X$  y toda  $f \in C^\infty(G)$ ,  $X(f)$  es  $C^\infty$ , para lo cual queremos ver ésta se escribe como una composición de funciones  $C^\infty$ . En efecto, para cualquier  $g \in G$

$$Xf(g) = X_g(f) = dl_g(X_e)f = X_e(f \circ l_g) (*)$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que  $(*)$  es  $C^\infty$ . El truco es tomar un campo  $C^\infty$   $Y$  tal que  $Y_e = X_e$  y reemplazar a  $X$  por  $Y$  en la anterior. Definamos inclusiones  $C^\infty$  de  $G \rightarrow G \times G$  por

$$i_e^1(g) = (g, e) \text{ e } i_\tau^2(g) = (\tau, g)$$

Finalmente, si  $m$  es la multiplicación en el grupo, veamos que  $(*)$  coincide con la función  $((0, Y)(f \circ m)) \circ i_e^1$  que es  $C^\infty$  por ser composición de funciones  $C^\infty$ . En lo siguiente, notemos que  $(0, Y)$  es un campo  $C^\infty$  en  $G \times G$ , el primer paso es la evaluación de un campo en una función aplicada en el punto  $(g, e)$  y las  $n$  primeras derivadas parciales son cero:

$$\begin{aligned} ((0, Y)(f \circ m)) \circ i_e^{-1}(g) &= (0, Y)_{(g,e)}(f \circ m) = 0_e(f \circ m \circ i_e^{-1}) + Y_e(f \circ m \circ i_e^{-1}) \\ &= Y_e(f \circ m \circ i_g^{-2}) = X_e(f \circ m \circ i_g^{-2}) = X_e(f \circ l_g) = (*) \end{aligned}$$

3. “El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda” es consecuencia del siguiente hecho más general: Sea  $\phi : G \rightarrow H$  un difeomorfismo entre variedades diferenciables  $G$  y  $H$ , sean  $X$  e  $Y$  campos de vectores en  $G$ , entonces

$$d\phi[X, Y] = [d\phi X, d\phi Y]$$

aplicado a  $G = H$  grupo de Lie,  $\phi = l_g$  la traslación a izquierda por  $g \in G$  arbitrario.

4. Esta afirmación es consecuencia inmediata de lo anterior.

Por lo tanto,  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, isomorfa a  $T_e(G)$ , el álgebra de Lie de  $G$ .

□

El siguiente teorema resume hechos fundamentales. Omitimos la pruebas. Para la demostración, ver [W]. Para una demostración del teorema de Ado, ver [J].

**Teorema 2.27.** 1. Si  $(H, \phi)$  es un subgrupo de un grupo de Lie  $G$  y denotamos por  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  a las álgebras de Lie de  $G$  y  $H$ , respectivamente, entonces  $d\phi$  es un isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  y la subálgebra de Lie  $d\phi(\mathfrak{h})$  de  $\mathfrak{g}$ .

2. Todo subgrupo abstracto  $H$  que es un subconjunto cerrado de  $G$  admite una única estructura de variedad diferenciable que lo convierte en un subgrupo de Lie de  $G$ .
3. Sea  $\phi : G \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos de Lie, sea  $A = \ker(\phi)$  y  $\mathfrak{a} = \ker(d\phi)$ ; entonces  $A$  es un subgrupo de Lie cerrado de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$ .
4. **[Ado]** Toda álgebra de Lie admite una representación fiel en  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  para algún  $n$ ; es decir que en cada clase de isomorfismo de álgebras de Lie, hay un representante que es un álgebra de Lie de matrices.
5. **Corolario del teorema de Ado.** Dada  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie, existe un único grupo de Lie conexo y simplemente conexo  $G$  tal que  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Más aún, existe una correspondencia 1-1 entre subgrupos conexos de un grupo de Lie conexo y simplemente conexo y subálgebras de su álgebra de Lie, en virtud de la cual, a subgrupos normales le corresponden ideales del álgebra de Lie (es decir, si  $H \subset G$  es un subgrupo de Lie conexo que es normal como subgrupo abstracto, entonces  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ ).
6. Un grupo topológico  $N_2$ , localmente euclídeo admite a lo sumo una estructura  $C^\infty$  que lo convierte en un grupo de Lie.
7. Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $H$  un subgrupo cerrado abstracto de  $G$ , entonces  $H$  admite una única estructura  $C^\infty$  que lo convierte en un subgrupo de Lie de  $G$  (necesariamente con la topología relativa, dado que  $(H, \phi)$  subgrupo cerrado si y sólo si  $\phi$  es un embedding.)  
(Recordemos que  $\phi$  es un imbedding si es un homeomorfismo :  $H \mapsto \phi(H) \subset G$  con la topología relativa).

8. Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie con álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$ , respectivamente, y con  $G$  simplemente conexo; sea  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  tal que  $d\phi = \psi$ .

**Ejemplo 2.28.** Existen subgrupos de Lie de un grupo de Lie  $G$  que no son cerrados, es decir, que no están embebidos en  $G$ . Una manera de construir un ejemplo es la siguiente. Sea  $G = T^2 = S^1 \times S^1$  y sea  $H$  el subgrupo abstracto y subgrupo de Lie  $H = \{(e^{i2\pi t}, e^{ia2\pi t}) : t \in \mathbb{R}\}$ , con  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , fijo; la irracionalidad de  $a$  implica que  $H \cong (\mathbb{R}, +)$ , donde  $H = (H, \cdot)$  con  $\cdot$  el producto coordenada a coordenada y  $G = (G, \cdot)$ . El isomorfismo es

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow H \\ t &\mapsto (e^{i2\pi t}, e^{ia2\pi t}) \end{aligned}$$

La función  $\phi$  es claramente suryectiva. El núcleo de  $\phi$  es  $\{t \in \mathbb{R} : e^{i2\pi t} = 1 = e^{ia2\pi t}\}$ ; pero  $e^{i2\pi t} = 1$  implica  $t \in \mathbb{Z}$  y  $e^{ia2\pi t} = 1$  implica  $at \in \mathbb{Z}$ , contradicción salvo  $t = 0$ ; por lo tanto,  $\phi$  es inyectiva.  $H$  no es cerrado en  $G$  pues si lo fuera,  $\mathbb{R}$  sería compacto porque  $G$  es compacto. *Ejercicio:* demostrar que la imagen de  $\phi$  es densa en  $G$ .

## 2.11. El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices y subejemplos

**Observación 2.29.** Recordemos que todo espacio vectorial real admite una estructura natural de variedad diferenciable y que su espacio tangente en cualquier punto se puede identificar con el mismo espacio, similarmente para un abierto de un espacio vectorial, por ejemplo  $GL(n, \mathbb{R})$ .

**Teorema 2.30.** El álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  es el álgebra de Lie del grupo de Lie lineal general  $GL(n, \mathbb{K})$ .

*Demostración.* Por un lado, sabemos que  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  es un álgebra de Lie; por otro, sabemos que el grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{K})$  tiene su álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \cong T_e(G) \cong$  espacio de campos invariantes a izquierda. Se quiere demostrar que  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

Calculemos los campos invariantes a izquierda: sea  $A$  una matriz, que identificamos con un elemento del tangente a la identidad en la forma

$$A = \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}|_{\text{Id}}$$

Notemos que si  $p$  es una matriz inversible, entonces existe un  $\epsilon$  positivo tal que  $c(t) = E_{ij}t + p$  es inversible para todo  $t$  de módulo menor que  $\epsilon$ . Podemos tomar esa curva y al calcular la derivada obtenemos

$$c'(t) = c'(0) = \partial_{x_{ij}}|_p \leftrightarrow E_{ij}$$

Sea  $X$  un campo de vectores de la forma

$$X(p) = \sum_{ijk} x_{ik}(p) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_p$$

para cada  $p \in G$ , donde  $a_{kj} \in \mathbb{R}$ . Notar que un campo tal es invariante y que

$$X(\text{Id}) = \sum_{ijk} x_{ik}(\text{Id}) a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\text{Id}} = \sum_{ijk} \delta_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\text{Id}} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{\text{Id}}$$

Dado que todo campo invariante queda completamente determinado por su valor en la identidad, todo campo invariante a izquierda es de esta forma para una única elección de coeficientes  $a_{ij}$ .

El isomorfismo es la composición siguiente

$$X \mapsto X(\text{Id}) = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_{\text{Id}} \mapsto A = (a_{ij})$$

Denotemos por  $X_A$  al único campo invariante a izquierda asociado a la matriz  $A$ . Falta probar que

$$[X_A, X_B] = X_{[A,B]}$$

donde a la izquierda es el corchete de Lie de campos y  $[A, B]$  es el conmutador de matrices. Utilicemos la fórmula del corchete de Lie

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

donde  $f, g$  son funciones, y  $X$  e  $Y$  son campos. Obtenemos

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= \left[ \sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \sum_{i'j'k'} x_{i'k'} b_{k'j'} \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} \right] \\ &= \sum_{ijk i'j'k'} x_{ik} a_{kj} x_{i'k'} b_{k'j'} \left[ \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} \right] \\ &\quad + \sum_{ijk i'j'k'} x_{ik} a_{kj} b_{k'j'} \frac{\partial(x_{i'k'})}{\partial x_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} - \sum_{ijk i'j'k'} x_{i'k'} b_{k'j'} a_{kj} \frac{\partial(x_{ik})}{\partial x_{i'j'}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \end{aligned}$$

utilizando  $\frac{\partial(x_{ik})}{\partial x_{i'j'}} = 1$  si  $i = i', j = k'$  y 0 en otro caso, idem para  $\frac{\partial(x_{i'k'})}{\partial x_{ij}}$ ,

$$= \sum_{ijk i'j'k'} x_{ik} a_{kj} b_{k'j'} \delta_{ii'} \delta_{jk'} \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} - \sum_{ijk i'j'k'} x_{i'k'} b_{k'j'} a_{kj} \delta_{ii'} \delta_{kj'} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

las sumas en  $i'$  y en  $k'$  colapsan y si se reemplaza  $i' = i$  y  $k' = j$  obtenemos

$$\begin{aligned} &= \sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} b_{jj'} \frac{\partial}{\partial x_{ij'}} - \sum_{ijk} x_{ik} b_{k'k} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad \text{usando } \sum_j a_{kj} b_{jj'} = (AB)_{kj'} \text{ obtenemos} \\ &= \sum_{ikj'} x_{ik} (AB)_{kj'} \frac{\partial}{\partial x_{ij'}} - \sum_{ijk'} x_{ik'} (BA)_{k'j} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad \text{y renombrando índices } k' \leftrightarrow k, j' \leftrightarrow j, \\ &= \sum_{ikj} x_{ik} [A, B]_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \\ &= X_{[A,B]} \end{aligned}$$

□

Con esto hemos mostrado que el corchete de Lie calculado con campos coincide con el corchete de Lie calculado por conmutadores, como habíamos visto en la proposición 2.9.

## 2.12. Ejercicios

1. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión 2. Mostrar si  $\mathfrak{g}$  es no abeliana, entonces existe una base  $\{x, y\}$  tal que  $[x, y] = x$ . Calcular el grupo de automorfismos de esta álgebra de Lie y calcular el álgebra de Lie de derivaciones de  $\mathfrak{g}$ .
2. Mostrar que vale Jacobi para el producto semidirecto.
3. Sea  $\mathfrak{g} = C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , se define el corchete de Poisson de dos funciones como  $\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \partial_i f \partial_{n+i} g - \partial_{n+i} f \partial_i g$ . Mostrar que verifica Jacobi, y por lo tanto  $(\mathfrak{g}, \{-, -\})$  es un álgebra de Lie.

4. Calcular el espacio tangente a  $SO(p, q, \mathbb{R})$  y a  $Sp(n, \mathbb{R})$ , explicitar los corchetes.

5. Sea  $f \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , digamos  $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y definamos en  $\mathbb{R}^3$ , con base  $\{x, y, z\}$  el corchete dado por

$$[z, x] = ax + by, [z, y] = cx + dy, [x, y] = 0$$

donde se sobrentiende que extendemos por bilinealidad y antisimetría. Llamemos  $\mathfrak{g}_f$  a  $\mathbb{R}^3$  dotado de este corchete antisimétrico.

- a) Mostrar que verifica Jacobi, es decir,  $\mathfrak{g}_f$  es un álgebra de Lie.
  - b) Mostrar que si  $f$  y  $f'$  son matrices conjugadas entonces  $\mathfrak{g}_f \cong \mathfrak{g}_{f'}$  (isomorfismo de álgebras de Lie).
  - c) Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sea  $\mathfrak{g}_\lambda := \mathfrak{g}_f$  donde  $f = \text{diag}(\lambda, 1)$ . Mostrar que si  $\lambda, \lambda' \in (-1, 1]$  entonces  $\mathfrak{g}_\lambda \cong \mathfrak{g}_{\lambda'}$  si y sólo si  $\lambda = \lambda'$ . Concluimos que hay una cantidad no numerable de clases de isomorfismo de álgebras de Lie reales de dimensión tres.
6. Sea  $V$  un espacio vectorial, que consideramos como álgebra de Lie abeliana. Mostrar que (trivialmente) todo endomorfismo de  $V$  resulta una derivación. Sea  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo dado, mostrar que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_f = V \oplus kx_0$  donde  $[x_0, v] = f(v)$  para todo  $v \in V$  y  $[V, V] = 0$  es un caso particular de producto semidirecto.
  7. Sea  $V$  un espacio vectorial,  $f_1, f_2 : V \rightarrow V$  dos endomorfismos, y  $\mathfrak{g}_{f_1}$  y  $\mathfrak{g}_{f_2}$  como en el ejercicio anterior. Muestre que si  $f_1$  es conjugado a un múltiplo no nulo de  $f_2$ , entonces  $\mathfrak{g}_{f_1}$  y  $\mathfrak{g}_{f_2}$  álgebras de Lie isomorfas.
  8. Sea  $G = S^3$  la esfera unitaria con la estructura de grupo dada por los cuaterniones de norma 1. Encuentre curvas  $\sigma, \tau, \rho : \mathbb{R} \rightarrow S^3$  tales que  $\sigma(0) = \tau(0) = \rho(0) = 1, \sigma'(0) = i, \tau'(0) = j$  y  $\rho'(0) = k$ . A partir de estas curvas, calcule el corchete de Lie del álgebra tangente a  $S^3$  y muestre que es isomorfa a  $\mathbb{R}^3$  con el producto vectorial.

### 3. La Función Exponencial

#### 3.1. La función exponencial de matrices

Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ; dado que  $A$  es una matriz cuadrada, podemos sumar y multiplicar, luego está claramente bien definida la fórmula

$$S_N := \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \cdots + \frac{1}{N!} A^N$$

Para cada  $N$  tenemos así definida una matriz; dado que sus coeficientes constituyen sucesiones convergentes, como se prueba seguidamente, podemos definir

$$\exp(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

**Proposición 3.1.** *Para cada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , la sucesión de matrices  $\{S_N\}_N$  definida antes es una sucesión convergente en norma, para la norma de matrices como operadores y, por lo tanto, es convergente en cualquier norma.*

*Demostración.* Vamos a demostrar que  $\{S_N\}_N$  es una sucesión de Cauchy. Si  $M > N$ ,

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n!} \|A\|^n$$

Aquí hemos utilizado la desigualdad triangular y el hecho de que  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . Como la exponencial de números reales es convergente y  $\|A\|$  es un número real, la sucesión de sumas parciales de la exponencial usual  $e^{\|A\|}$  es convergente, y en particular, es de Cauchy.  $\square$

#### 3.2. Propiedades elementales

**Proposición 3.2.** *La función exponencial de matrices tiene las siguientes propiedades:*

1. Si  $A$  y  $B$  son dos matrices que conmutan, entonces  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$
2. Para toda matriz  $A$ ,  $\exp(A)$  es una matriz inversible, con inversa  $\exp(-A)$ .
3. Si  $C$  es una matriz inversible, entonces  $\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A) C^{-1}$ .
4. Sea  $D$  una matriz diagonal,  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  entonces

$$\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Más aún, si  $J(\lambda, k)$  es un bloque de Jordan de tamaño  $k$  y autovalor  $\lambda$  entonces

$$\exp(J(\lambda, k)) = e^\lambda \left( \text{Id} + N + \frac{1}{2} N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} \right).$$

donde  $N$  es la matriz nilpotente  $N = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{k-1,k}$ .

5. Si  $t$  es un número real y  $A$  es una matriz fija, la función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  dada por  $t \mapsto \exp(tA)$  es diferenciable,  $\sigma(0) = \text{Id}$  y  $\sigma'(0) = A$ .

*Demostración.* 1. Sean  $A$  y  $B$  son dos matrices que conmutan.

$$\exp(A + B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Aquí hemos utilizado la fórmula del binomio de Newton, que vale para matrices que conmuten. Si calculamos, por otra parte,

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \right)$$

que es el producto de dos series convergentes en norma, podemos utilizar la fórmula del producto de Cauchy

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b^{n-k} \right)$$

que en nuestro caso da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \right)$$

como queríamos.

2. Es claro que  $\exp(0) = \text{Id}$ ; además, si usamos el punto anterior, obtenemos

$$\text{Id} = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A) \exp(-A)$$

3. Sea  $C$  es una matriz inversible y denotemos por  $S(A)_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n$ . La función

$$\begin{aligned} \text{Ad}_C : \mathbb{C}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ A &\mapsto CAC^{-1} \end{aligned}$$

es lineal en  $A$ , en particular, continua y diferenciable; además, verifica

$$\text{Ad}_C(A \cdot B) = (\text{Ad}_C A) \cdot (\text{Ad}_C B)$$

que a la vez implica

$$\text{Ad}_C(A^n) = (\text{Ad}_C A)^n$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} C \exp(A) C^{-1} &= \text{Ad}_C \left( \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(A) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Ad}_C S_N(A)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\text{Ad}_C A) = \exp(\text{Ad}_C(A)) \end{aligned}$$

4. Sea  $D$  una matriz diagonal,  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  entonces el resultado se sigue de que  $D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n)$ . Para la exponencial del bloque de Jordan, notemos que  $J(\lambda, k) = \lambda \text{Id} + N$  es una suma de matrices que conmutan, entonces

$$\exp(J(\lambda, k)) = \exp(\lambda \text{Id}) \cdot (\exp(N))$$

de donde se sigue el resultado.

5. Consideremos la curva  $\sigma(t) := \exp(tA)$ ; si  $A$  fuera un bloque de Jordan  $A = J(\lambda, k)$ , entonces los coeficientes de  $\exp(tA)$  serían un múltiplo de  $e^{t\lambda}$  por un polinomio en  $t$ , de grado menor o igual que  $k$ , explícitamente

$$\exp(tJ(\lambda, k)) = \exp(t\lambda \text{Id}) \exp(tN) e^{t\lambda} \left( \text{Id} + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^{k-1} \right)$$

Análogamente si  $A$  estuviera formada por bloques de Jordan de diferentes tamaños. compleja; en este caso, los coeficientes

Para calcular  $\exp(tA)'$  utilicemos nuevamente la fórmula  $(\sigma(t)\tau(t))' = \sigma'(t)\tau(t) + \sigma(t)\tau'(t)$  y su consecuencia (por inducción)

$$\sigma^n(t)' = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k(t) \sigma'(t) \sigma^{n-k-1}(t)$$

Si sucediera que  $\sigma(t)$  conmutara con  $\sigma'(t)$ , tendríamos  $\sigma^2(t)' = n\sigma^{n-1}(t)$ . En el caso particular  $\sigma(t) = (tA)^n$  obtenemos  $\sigma'(t) = nA(tA)^{n-1}$  y, en consecuencia,

$$s_N(tA)' = A s_{N-1}(tA)$$

de donde se deduce el resultado, después de tomar límite. La cuestión de convergencia para el límite es clara si  $A$  es un bloque de Jordan y, en general, también, porque la conjugación es un difeomorfismo y podemos reducirnos al caso anterior. □

### 3.3. La función exponencial en un grupo de Lie

Sea  $G$  un grupo de Lie. Un *subgrupo 1-paramétrico* de  $G$  es un homomorfismo de grupos de Lie de  $\mathbb{R}$  en  $G$ . Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$  y sea  $X \in \mathfrak{g}$ ; la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ \lambda \frac{d}{dr} \Big|_{r=0} &\mapsto \lambda X \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie de  $\mathbb{R}$  en  $\mathfrak{g}$ , donde pensamos a  $\mathbb{R}$  como el álgebra de Lie del grupo  $\mathbb{R}$ . Dado que  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo, el ítem 8 del teorema 2.27 asegura la existencia de un único subgrupo 1-paramétrico de  $G$

$$\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow G$$

tal que

$$d \exp_X \left( \lambda \frac{d}{dr} \Big|_{r=0} \right) = \lambda X$$

En otras palabras,  $t \rightarrow \exp_X(t)$  es el único subgrupo 1-paramétrico tal que la derivada en  $t = 0$  es  $X_e$ . Se define **la función exponencial** como

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \exp_X(1) \end{aligned}$$

Por otra parte, recordemos que si  $X$  es un campo de vectores  $\mathcal{C}^\infty$  y  $c(t)$  una curva  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $c$  se dice una curva integral del campo  $X$  si  $c'(t) = X_{c(t)}$  para todo  $t$ . Lo anterior se puede resumir en la forma siguiente. Sea  $\mathfrak{g} = T_e(G)$  álgebra de Lie de  $G$ ; para cada  $v \in T_e(G)$ , sea  $X$  el único campo invariante a izquierda tal que  $X_e = v$ , sea  $c(t)$  la única curva integral de  $X$  tal que  $c(0) = e$ , que, en particular, verifica  $c'(0) = v$ ; se define  $\exp(v) = c(1)$ , o sea,

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ v &\mapsto c(1) \end{aligned}$$

Si se quiere definir a  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ , pensando a  $\mathfrak{g}$  como el álgebra de Lie de campos invariantes a izquierda, se toma  $v = X_e$  y la definición es la misma.

**Teorema 3.3.** *Sea  $X$  un campo invariante a izquierda en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de un grupo de Lie  $G$ , entonces*

1. *La función  $c(t) : t \mapsto \exp(tX)$  es la única curva integral del campo  $X$  tal que  $c(0) = e$ , es decir que  $c(t)$  es el único subgrupo 1-paramétrico tal que la derivada en  $t = 0$  es  $X_e$ . En particular,  $c(1) = \exp(X)$ .*
2. *Para todo  $t, t' \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tX) \cdot \exp(t'X) = \exp((t + t')X)$ .*
3. *Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$ .*
4. *Si  $\sigma \in G$  y  $\ell_\sigma : G \rightarrow G$  es la translación a izquierda, entonces  $\ell_\sigma \circ \exp_X$  es la única curva integral de  $X$  que toma el valor  $\sigma$  en cero; en particular, los campos invariantes a izquierda en un grupo de Lie son completos.*
5. *Sea  $\phi : H \rightarrow G$  un homomorfismo de grupos de Lie, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\phi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Notar que a partir del ítem 5, si  $H$  es un subgrupo de  $G$  y concemos la exponencial de  $G$ , identificando  $di(\mathfrak{h}) = i_*(\mathfrak{h})$  con su imagen en  $\mathfrak{g}$ , sabemos calcular la exponencial de  $\mathfrak{h}$ .

**Proposición 3.4.** *Dada una matriz  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  el subgrupo 1-paramétrico  $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  está dado por  $c(t) = e^{tA}$ ; en consecuencia  $\exp(A) = e^A$ , con*

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

*Es decir que la función exponencial  $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  es la exponencial usual de matrices.*

*Demostración.* Dada  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , sea  $X \in \mathfrak{g}$  a quien le corresponde  $A = X_e$  y  $X_g = g \cdot A$  para todo  $g \in G$ . Por el teorema anterior, conocemos el álgebra de Lie de  $G$ , o sea, conocemos los campos invariantes a izquierda en  $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ . Hay que probar lo siguiente:

- Buena definición de  $e^{tA}$ : la convergencia de la exponencial se basa en las desigualdades  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$  y la convergencia absoluta de la serie de números reales positivos  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|A\|^n$ , como se vio en la proposición 3.1.
- $c(t) := e^{tA}$  es la única curva integral del campo  $X$  asociado a una matriz dada  $A$  y tal que  $c(0) = \text{Id}$ , lo cual es evidente. Calculemos  $c'(t) = \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A = X_{c(t)}$ . Identificando a  $T_e \text{GL}(n, \mathbb{C})$  con  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , la fórmula anterior nos dice que la curva  $e^{tA}$  es la curva integral del (único) campo invariante a izquierda que tiene valor  $A$  en la identidad.

□

**Corolario 3.5.** *La exponencial abstracta de cualquier grupo de Lie de matrices coincide con la exponencial usual de matrices.*

**Proposición 3.6.** (a) *Sea  $G$  un subgrupo de Lie cerrado de  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie, entonces*

$$\mathfrak{g} = \{ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : e^{tA} \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \}$$

- (b) *Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (o en particular en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ), entonces  $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$ ;  $\det e^{tA} = 1$  para todo  $t$  si y sólo si  $\text{tr}A = 0$ .*
- (c)  *$(e^{tA})^{-1} = (e^{tA})^t$  para todo real  $t$  si y sólo si  $A + A^t = 0$ .*
- (d)  *$(e^{tA})^{-1} = (\overline{e^{tA}})^t$  para todo real  $t$  si y sólo si  $A + \overline{A}^t = 0$ .*

*Demostración.* (b) Si  $A$  es triangular inferior el lema es claro. En el caso general podemos reemplazar a  $A$  por su forma de Jordan. En efecto, sea  $J$  la forma de Jordan de  $A$  y sea  $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  tal que  $A = CJC^{-1}$ . Aplicando el caso especial a  $J$  y usando que el determinante y la traza son invariantes por conjugación obtenemos

$$\det(e^A) = \det(e^{CJC^{-1}}) = \det(Ce^J C^{-1}) = \det(e^J) = e^{\text{tr}J} = e^{\text{tr}C^{-1}AC} = e^{\text{tr}A}$$

$$(c) (e^{tA})^{-1} = (e^{tA})^t \Leftrightarrow e^{t(A+A^t)} = \text{Id} \forall t.$$

Derivando con respecto a  $t$ :  $0 = \frac{d}{dt}(e^{tA}e^{tA^t}) = Ae^{tA}e^{tA^t} + e^{tA}e^{tA^t}A^t = A + A^t$ .

(d) es análogo a (c).

□

**Corolario 3.7.** *El álgebra de Lie del grupo de Lie  $SL(n, \mathbb{K})$  de las matrices de determinante uno es  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ , el espacio de las matrices de traza cero.*

### 3.4. Ejemplos de exponenciales y espacios tangentes

**Ejemplo 3.8.** Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  y  $A \in \mathfrak{g}$ , entonces  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)} > 0$ , por lo tanto

$$\exp(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \subseteq \{g \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(g) > 0\} = \text{GL}(n, \mathbb{R})_0,$$

donde  $\text{GL}(n, \mathbb{R})_0$  es la componente conexa de la identidad. En cambio,  $\exp(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})) = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ .

**Ejemplo 3.9.** Determinemos el grupo de Lie conexo tal que su álgebra de Lie sea  $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Dado que

$$\exp \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y  $e^t > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se obtiene que  $\exp(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda > 0 \right\}$ .

**Ejemplo 3.10.** Determinemos el grupo de Lie conexo tal que su álgebra de Lie sea  $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & x \\ -t & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$ . Dado que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\ &= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que  $\exp(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & * \\ -\sin(t) & \cos(t) & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Teorema 3.11.** Sea  $A$  un subgrupo abstracto de un grupo de Lie  $G$  y sea  $\mathfrak{a}$  un subespacio de  $\mathfrak{g}$ . Sean  $U$  y  $V$  entornos abiertos de  $0 \in \mathfrak{g}$  y de  $e \in G$ , respectivamente, difeomorfos vía la función exponencial, tales que

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A$$

entonces  $A$  es un subgrupo de Lie de  $G$  con la topología relativa,  $\mathfrak{a}$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  y es el álgebra de Lie de  $A$ . Es decir, la exponencial es un difeomorfismo local.

Como consecuencia,  $\exp(\mathfrak{g})$  contiene un entorno de la identidad de  $G_0$ .

**Proposición 3.12.** *Sea  $G$  un grupo de Lie conexo y  $H$  un subgrupo. Si  $H$  contiene un abierto no vacío, entonces  $H = G$ .*

*Demostración.* Mostraremos que  $H$  es abierto y cerrado, como  $G$  es conexo, el resultado se sigue de esto.

Veamos primero que es abierto: sea  $U \subseteq H$  un abierto no vacío y  $h_0 \in U$ . Si  $h \in H$ , entonces  $Uh_0^{-1}h$  es un abierto, y contiene a  $h$ .

Veamos ahora que es cerrado: si  $g \in \overline{H}$ , como  $H$  es abierto que contiene al neutro, entonces  $Hg$  es un abierto que contiene a  $g$ , y por lo tanto  $Hg \cap H \neq \emptyset$  (pues  $g \in \overline{H}$ ). Esto significa que existen  $h, h' \in H$  con  $hg = h'$ , por lo tanto  $g \in H$ .  $\square$

**Corolario 3.13.** *El subgrupo generado por la imagen de la exponencial coincide con la componente conexa de la identidad.*

**Observación 3.14.** En general,  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G_0$  no es sobreyectiva. Ver ejercicios 5 y 6 al final de esta sección.

### 3.5. Correspondencia subgrupos-subálgebras en grupos de Lie clásicos.

La siguiente es una lista de ciertos grupos de Lie de matrices con sus correspondientes álgebras de Lie. Todos estos grupos se obtienen "exponenciando" subálgebras de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  ó de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . El primer ejemplo de este procedimiento está dado en el corolario 3.7. La estructura de grupo de Lie la obtienen como subgrupos cerrados de  $GL(n, \mathbb{C})$  ó  $GL(n, \mathbb{R})$ , como se estudió en el ejercicio 1.10 de la sección 1.3.

**Tabla de grupos de Lie con sus correspondientes álgebras de Lie**

<p>a) Grupo lineal general real                  b) Grupo lineal general complejo                  c) Grupo lineal especial real                  d) Grupo lineal especial complejo                  e) Grupo ortogonal real                  f) Grupo ortogonal especial real                  g) Grupo ortogonal complejo                  h) Grupo ortogonal especial complejo                  i) Grupo unitario                  j) Grupo unitario especial</p>	<p><math>GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det \neq 0\}</math>  <math>GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\}</math>  <math>SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}</math>  <math>SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}</math>  <math>O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}</math>  <math>SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})</math>  <math>O(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = A^t\}</math>  <math>SO(n, \mathbb{C}) = SL(n, \mathbb{C}) \cap O(n, \mathbb{C})</math>  <math>U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \bar{A}^t\}</math>  <math>SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})</math></p>
<p>a') álgebra de Lie general real                  b') álgebra de Lie general compleja                  c') álgebra de Lie de matrices reales de traza cero                  d') álgebra de Lie de matrices complejas de traza cero                  e', f') álgebra de Lie ortogonal especial real = matrices reales antisimétricas                  g', h') álgebra de Lie ortogonal especial compleja = matrices complejas antisimétricas                  i') álgebra de Lie de matrices antiherméticas                  j') álgebra de Lie de matrices antiherméticas de traza cero</p>	<p><math>\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n \times n}</math>  <math>\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) := \mathbb{C}^{n \times n}</math>  <math>\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}</math>  <math>\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}</math>  <math>\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : A + A^t = 0\}</math>  <math>\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A + A^t = 0\}</math>  <math>\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A + \bar{A}^t = 0\}</math>  <math>\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A + \bar{A}^t = 0, \text{tr}(A) = 0\}</math></p>

**Información adicional sobre los grupos que aparecen en la tabla anterior**

- Los grupos  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $O(n, \mathbb{C})$  y  $SO(n, \mathbb{C})$  son grupos complejos, mientras  $U(n)$  y  $SU(n)$  son grupos reales. Pero se los puede ver también como subgrupos reales de  $GL(n, \mathbb{C})$  que a la vez es un subgrupo real de  $GL(2n, \mathbb{R})$ .
- Si  $d = \det A$ ,  $A^{-1} = A^t \Rightarrow d^{-1} = d \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1$ , tanto para  $d \in \mathbb{R}$  como para  $d \in \mathbb{C}$ . En cambio, si  $A^{-1} = \bar{A}^t \Rightarrow d^{-1} = \bar{d} \Rightarrow |d|^2 = 1$ .
- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  y  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . Ambas son reductivas:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  es compleja simple de tipo  $A_{n-1}$ ,  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  y  $\mathfrak{su}(n, \mathbb{R})$  son reales de tipo  $A_{n-1}$ , ambas formas reales de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .
- $\mathfrak{u}(n) \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(n) = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$  es reductiva, no semisimple.
- $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$  es simple, su tipo depende de la paridad de  $n$ :  $\mathfrak{so}(2k+1, \mathbb{C})$  es de tipo  $B_k$  y  $\mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$  es de tipo  $D_k$ .

- Los grupos  $O(n, \mathbb{R})$ ,  $SO(n, \mathbb{R})$ ,  $U(n)$  y  $SU(n)$  son compactos, los demás no lo son.
- Los grupos  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SO(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $SO(n, \mathbb{R})$ , y  $SU(n)$  son conexos mientras que  $O(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n, \mathbb{C})$  y  $GL(n, \mathbb{R})$ , no lo son. Los grupos  $O(n, \mathbb{R})$  y  $O(n, \mathbb{C})$  tienen dos componentes conexas: la componente de los elementos de determinante 1 y la de los de determinante -1. El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  también tiene dos componentes conexas, la componente formada por las matrices de determinante positivo y la de las de determinante negativo. Probemos por ejemplo que  $GL(n, \mathbb{C})$  es conexo.

**Proposición 3.15.** *El grupo  $GL(n, \mathbb{C})$  es conexo.*

*Demostración.* Veamos que  $GL(n, \mathbb{C})$  es arcoconexo. Sea  $M$  una matriz compleja invertible; como toda matriz invertible, es un producto finito de matrices elementales  $E_1 E_n \dots E_k$  donde cada matriz elemental puede ser de alguno de los tres tipos siguientes:

- $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1)$  con  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ,
- $\text{Id} + \lambda E_{ij}$  con  $i \neq j$ ,
- $\text{Id} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ , es decir, la matriz de la transposición  $(ij)$ .

Para la matriz del primer tipo, dado que  $\lambda \neq 0$ , existe un número complejo  $z$  tal que  $\lambda = e^z$  y podemos considerar  $\sigma : [0, 1] \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  definida por

$$\sigma(t) = \text{diag}(1, \dots, 1, e^{tz}, 1, \dots, 1).$$

Esta curva verifica  $\sigma(0) = \text{Id}$  y  $\sigma(1)$  es la matriz elemental que uno quería.

Para el segundo caso, tomamos  $\sigma(t) = \text{Id} + t\lambda$  y obtenemos otra curva con las propiedades análogas al punto anterior.

Para el tercer caso, podemos definir

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & 0 & \sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t) & 0 & -\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde los ceros y unos se entienden como bloques. El determinante de esta matriz es siempre  $-1$  (ejercicio!) por lo tanto es invertible. Para  $t = 0$  tenemos la matriz elemental  $E$  y para  $t = \pi/2$  obtenemos  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots)$ , la matriz diagonal con un único  $-1$ . Por el caso uno, existe otra curva  $\rho$  que une la matriz diagonal con la identidad. Concatenando y reparametrizando estas curvas, podemos encontrar una curva continua  $\sigma : [0, 1] \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  tal que  $\sigma(0) = \text{Id}$  y  $\sigma(1)$  sea la matriz elemental que uno desee.

En el caso general, si  $M = E_1 \dots E_k$ , con  $E_i$  elemental de alguno de los tres tipos, para cada  $i$  encontramos una curva  $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  tal que  $\sigma_i(0) = \text{Id}$  y  $\sigma_i(1) = E_i$ , entonces la curva

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) \dots \sigma_k(t)$$

es una curva continua que une la identidad con la matriz  $M$ . □

### 3.6. Grupos de Lie abelianos

Sea  $G$  un grupo de Lie abeliano y conexo y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Como  $\mathfrak{g}$  es abeliana entonces  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  es morfismo de grupos, y por lo tanto, sobreyectivo y en consecuencia  $G \cong \mathfrak{g}/\text{Ker}(\exp)$ . Al ser  $\exp$  un difeomorfismo local, el núcleo debe ser un subgrupo discreto.

**Ejercicio 3.16.** Sea  $H$  un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces existe una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $H = \langle v_1 \dots v_k \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Como consecuencia,  $\mathbb{R}^n/H \cong T_k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , el producto de un toro  $k$ -dimensional con  $\mathbb{R}^{n-k}$ .

### 3.7. Ejercicios

1. Calcular las exponenciales de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Realizar el álgebra real  $\mathfrak{g}$ , no abeliana de dimensión dos, como subálgebra de matrices reales de tamaño  $2 \times 2$ . ¿Qué subgrupo de  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  es  $\exp(\mathfrak{g})$ ?
3. Sea  $\mathfrak{h}_3$  el álgebra de Lie real de dimensión tres con base  $x, y, z$  y corchetes  $[x, y] = z$ ,  $[x, z] = [y, z] = 0$ . Realizar esta álgebra como subálgebra de Lie de matrices y exponenciarla.
4. **Lema de Hadamard.** Consideremos  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\text{ad}_A(B) = [A, B]$ ,  $\text{ad}_A : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Como endomorfismo lineal, podemos considerar su exponencial:

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}_A}(B) &= B + \text{ad}_A(B) + \frac{1}{2!}\text{ad}_A^2(B) + \frac{1}{3!}\text{ad}_A^3(B) + \dots \\ &= B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \end{aligned}$$

Demuestre que

$$e^{\text{ad}_A}(B) = e^A B e^{-A}$$

Sugerencia: considere por un lado  $e^{t \text{ad}_A}(B)$  y por otro  $e^{tA} B e^{-tA}$  y las derivadas sucesivas con respecto a  $t$  en el cero.

5. Mostrar que una matriz compleja que es un bloque de Jordan, con autovalor no nulo, admite un logaritmo. (Sugerencia: si  $J = \text{Id} + N$  con  $N$  nilpotente, utilizar la fórmula de la serie de Taylor de  $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$  para obtener un candidato a logaritmo, adaptar luego el resultado al caso  $J = \lambda \text{Id} + N$ .) Utilizar este resultado para probar que una matriz inversible en forma de bloques de Jordan es la exponencial de alguna matriz. Concluir a partir de  $\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A)C^{-1}$  que la función exponencial  $\mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  es suryectiva.
6. Si  $M \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , mostrar que  $M^2 = -\det(M)\text{Id}$  y por lo tanto

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\det M^k}{(2k)!} \text{Id} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\det M)^k}{(2k+1)!} M$$

y por lo tanto

$$\text{tr}(\exp M) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\det M)^k}{(2k)!}$$

Concluir que pueden suceder las dos posibilidades:

- a)  $\det M = \omega^2$  con  $\omega \in \mathbb{R}$ , en ese caso  $\text{tr}(\exp M) = 2 \cos \omega$ .
- b)  $\det M < 0$ ,  $\det M = -\omega^2$  con  $\omega \in \mathbb{R}$ , en ese caso  $\text{tr}(\exp M) = 2 \cosh \omega$ .

En cualquiera de los dos casos es válida la desigualdad  $\text{tr}(\exp M) \geq -2$ , y por lo tanto la exponencial  $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$  no puede ser sobreyectiva.

7. **Descomposición polar.** Denotemos por  $\mathfrak{p}(n)$  al conjunto de las matrices hermíticas  $n \times n$ , es decir  $\mathfrak{p}(n) = \{p \in \mathbb{C}^{n \times n} : p = p^*\}$ . Recordemos que una matriz hermítica  $P$  se dice *positiva* si  $\langle Pv, v \rangle > 0$  para todo  $v \neq 0$ .

- a) Demostrar que una matriz positiva (necesariamente diagonalizable) tiene todos sus autovalores positivos y que existe un función biyectiva y continua  $\log : \{\text{matrices positivas}\} \rightarrow \{\text{matrices hermíticas}\}$  tal que  $\exp(\log P) = P$  para toda matriz positiva  $P$ . *Sugerencia: diagonalizar.*
- b) Sea  $M \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  y consideremos  $M^*M$ . Demostrar que  $M^*M$  es hermítica y positiva, por lo tanto admite una única raíz cuadrada positiva que es un polinomio en  $M^*M$ ; denotemos  $P = \sqrt{M^*M}$  y  $U = MP^{-1}$ .
- c) Demostrar que  $U$  es unitaria.
- d) \* [Chevalley] Demostrar que existe una biyección, que de hecho es un homeomorfismo de espacios topológicos, cuya inversa es la descomposición polar,

$$\begin{aligned} \text{U}(n) \times \mathfrak{p}(n) &\cong \text{GL}(n, \mathbb{C}) \\ (U, p) &\mapsto Ue^p \end{aligned}$$

8. [Proposición 1.143 de [Kn], pag. 116.]

Sea  $G \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{C})$  un subgrupo cerrado definido por ceros de polinomios reales en las partes reales e imaginarias de los coeficientes de las matrices y sea  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Supongamos que  $G$  es estable por la operación que a cada matriz le asigna su adjunta, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} (G \cap \text{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) &\cong G \\ (U, p) &\mapsto Ue^p \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Utilizar este hecho para concluir que la cantidad de componentes conexas (más generalmente, el tipo de homotopía) de  $G$  está en biyección con la cantidad de componentes conexas de  $G \cap \text{U}(n)$ . Comprobar la siguiente tabla de intersecciones:

- a)  $\text{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \text{U}(n) = \text{SO}(n, \mathbb{R})$
- b)  $\text{O}(p, q, \mathbb{R}) \cap \text{U}(n) = \text{O}(p, \mathbb{R}) \times \text{O}(q, \mathbb{R})$ , en particular, por ejemplo  $\text{O}(1, 3, \mathbb{R})$  tiene cuatro componentes conexas.
- c)  $\text{SO}(p, q, \mathbb{R}) \cap \text{U}(n) = \text{S}(\text{O}(p, \mathbb{R}) \times \text{O}(q, \mathbb{R}))$
- d)  $\text{SU}(p, q) \cap \text{U}(n) = \text{S}(\text{U}(p) \times \text{U}(q))$ , donde  $\text{S}(G)$  denota el subgrupo de  $G$  de los elementos de determinante 1.

## 4. Representaciones, la representación adjunta y la forma de Killing

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $V$  una representación de  $G$ , es decir, un par  $(V, \rho)$  tal que  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  es un homomorfismo de grupos de Lie. Si  $G$  es conexo, entonces  $G = \exp(\mathfrak{g})$ , cabe preguntarse el rol de  $\mathfrak{g}$  en  $V$ , como transformaciones "infinitesimales" del grupo, es decir, como endomorfismos de  $V$  tales que sus exponenciales corresponden a automorfismos dados por elementos de  $G$ .

La manera concreta de construir una acción de  $\mathfrak{g}$  es considerar el diferencial en la identidad (recordar que  $\rho(1_G) = \text{Id}_V$ ):

$$\mathfrak{g} \cong T_1 G \xrightarrow{\rho_*} T_{\text{Id}} GL(V) \cong \mathfrak{gl}(V) \cong \text{End}(V)$$

De esta manera obtenemos una transformación lineal  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ . La propiedad que hereda esta transformación lineal por el hecho de ser el diferencial de un morfismo de grupos (y no simplemente de una función diferenciable) proviene de un hecho general:

**Proposición 4.1.** *Sea  $\rho : G \rightarrow H$  un morfismo de grupos de Lie, entonces su diferencial  $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un morfismo de álgebras de Lie.*

*Demostración.* Sean  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\sigma, \tau$  dos curvas en  $G$  que pasan por  $e_G$  en  $t = 0$  con derivada  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Luego,  $\rho \circ \sigma$  y  $\rho \circ \tau$  son dos curvas en  $H$ , sus derivadas son, por definición,  $\rho_*(X)$  y  $\rho_*(Y)$ .

Si consideramos, para cada  $t$ , la curva  $C_t(s) = \sigma(t)\tau(s)\sigma(t)^{-1}$ , la derivada con respecto a  $s$  en  $s = 0$  es

$$\left. \frac{dC_t(s)}{ds} \right|_{s=0} = \sigma(t)\tau'(0)\sigma(t)^{-1} = \sigma(t)Y\sigma(t)^{-1}$$

entonces podemos pensar en una nueva curva

$$c(t) = \sigma(t)Y\sigma(t)^{-1}$$

que toma valores en el espacio tangente de  $G$ , es decir,  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$  y  $\rho_* \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{h}$ . Como  $\rho$  es morfismo de grupos,

$$\rho(C_t(s)) = \rho(\sigma(t)\tau(s)\sigma(t)^{-1}) = \rho(\sigma(t))\rho(\tau(s))\rho(\sigma(t))^{-1}$$

y su derivada con respecto a  $s$  en  $s = 0$  es

$$\rho_* \left( \left. \frac{dC_t(s)}{ds} \right|_{s=0} \right) = \rho_*(c(t)) = \rho(\sigma(t))\rho(Y)\rho(\sigma(t))^{-1}$$

Si derivamos  $c(t)$  respecto de  $t$  en cero obtenemos

$$c'(0) = \sigma'(0)Y\sigma(0)^{-1} + \sigma(0)Y\sigma^{-1'}(0) = XY - YX$$

como ya habíamos calculado en algún momento; si derivamos  $\rho_*(c(t))$  obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_*([X, Y]) &= \rho_*(c'(0)) = \rho_*(c(t))'|_{t=0} \\ &= \rho(\sigma(t))'|_{t=0} \rho(Y)\rho(\sigma(0))^{-1} + \rho(\sigma(0))\rho(Y)\rho(\sigma(t))^{-1'}|_{t=0} \\ &= \rho_*(X)\rho_*(Y) - \rho_*(Y)\rho_*(X) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)] \end{aligned}$$

□

## 4.1. Representaciones de álgebras de Lie

Para un álgebra de Lie abstracta  $\mathfrak{g}$  (no necesariamente el espacio tangente de ningún grupo) y un espacio vectorial cualquiera  $V$  (no necesariamente el espacio subyacente a la representación de ningún grupo), se puede dar la definición siguiente.

**Definición 4.2.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $V$  un espacio vectorial, diremos que  $V$  es una representación de  $\mathfrak{g}$  o un  $\mathfrak{g}$ -módulo si se tiene un morfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

En otras palabras, una representación de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es una transformación lineal  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  con la propiedad adicional

$$\rho([X, Y]) = \rho X \rho Y - \rho Y \rho X$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ; así definida, una representación de  $\mathfrak{g}$  se denota por  $V$  o por  $(V, \rho)$ . Dada una representación  $(V, \rho)$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , una subrepresentación de  $\mathfrak{g}$  es  $(W, \rho)$  con  $W$  un subespacio de  $V$  tal que  $\rho(\mathfrak{g})(W) \subset W$ . Notar que de este modo,  $(W, \rho)$  resulta ella misma una representación de  $\mathfrak{g}$ .

**Ejemplo 4.3.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ .

1. El espacio vectorial  $V = \mathbb{K}$ , con  $\rho = 0$ , se denomina la representación trivial:  $X(\lambda) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}$ . Notar que si  $V$  es una representación donde  $X(v) = 0 \forall v$ , exponenciando a  $X$  obtenemos  $e^X(v) = v \forall v \in V$ .
2. Sea  $V = \mathfrak{g}$  como espacio vectorial y  $X(v) := \text{ad}_X(v) = [X, v]$ . La condición de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

$$\Leftrightarrow [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z]$$

$$\Leftrightarrow \text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_Y \text{ad}_X = \text{ad}_{[X, Y]}$$

dice que  $\text{ad}$  convierte a  $V = \mathfrak{g}$  en una representación de la misma  $\mathfrak{g}$ , que se denota por  $\mathfrak{g}^{\text{ad}}$  y se llama la representación adjunta de  $\mathfrak{g}$ , como vimos en la sección 2.8.

3. Si  $V$  y  $W$  son dos representaciones,  $V \oplus W$  es una representación de manera via

$$X(v, w) = (X(v), X(w))$$

De esta forma, la suma directa es asociativa (con isomorfismos de  $\mathfrak{g}$ -módulos).

4. Un morfismo de representaciones  $f : V \rightarrow W$  es una transformación lineal tal que  $X(f(v)) = f(X(v))$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  y  $v \in V$ . Si  $f$  es un morfismo de representaciones, entonces  $\text{Ker}(f)$  e  $\text{Im}(f)$  son subrepresentaciones de  $V$  y  $W$  respectivamente.
5. Si  $S$  es una subrepresentación de  $V$ , entonces  $V/S$  admite una estructura de  $\mathfrak{g}$ -módulo natural, de hecho es la única que hace de la proyección  $V \rightarrow V/S$  un morfismo de representaciones.

6. Si  $V$  y  $W$  son dos representaciones, entonces  $\text{Hom}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  es una representación a través de

$$(X(f))(v) = X(f(v)) - f(X(v))$$

*Ejercicio: ;Verificar que efectivamente es una representación!*

7. Si  $V$  es una representación, entonces  $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : X(v) = 0 \forall X \in \mathfrak{g}\}$  es una subrepresentación, denominada el espacio de los *invariantes*. En el ejemplo anterior,  $\text{Hom}(V, W)^{\mathfrak{g}} = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ , o sea, los invariantes son los morfismos de  $\mathfrak{g}$ -módulos.
8. Como caso particular del Hom, si  $V$  es una representación y tomamos  $\mathbb{K}$  como la representación trivial, entonces  $V^*$  es una representación y la acción está dada por

$$(X.\phi)(v) = -\phi(X.v)$$

9. Si  $V$  y  $W$  son dos espacios vectoriales, entonces  $V \otimes W = V \otimes_k W$  es una representación con la acción

$$X(v \otimes w) = X(v) \otimes w + v \otimes X(w)$$

*Ejercicio: Exponenciar esta acción y probar que  $e^X(v \otimes w) = e^X(v) \otimes e^X(w)$ .*

10. Con las acciones definidas antes, demostrar que si  $V$  y  $W$  son dos representaciones y  $\dim V < \infty$ , entonces

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$$

es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos.

11. Si  $V$  es una representación, entonces  $S^n(V)$ , los  $n$ -tensores simétricos y  $\Lambda^n V$  los  $n$ -tensores antisimétricos, son subrepresentaciones de  $V^{\otimes n}$ .
12. Si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  es un subespacio, entonces  $\mathfrak{h}$  es un ideal si y sólo si es una subrepresentación de  $\mathfrak{g}^{\text{ad}}$ .
13. Demuestre que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}^{\text{ad}})^{\mathfrak{g}}$ .

## 4.2. La forma de Killing

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo cualquiera  $\mathbb{K}$  y consideremos  $V = \mathfrak{g}^{\text{ad}}$  la representación adjunta como se definió en la sección 2.8, es decir, para cada  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}_x = [x, -] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es un endomorfismo de  $\mathfrak{g}$ .

Recordemos que para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  tenemos

$$(\text{ad}_x \text{ad}_y - \text{ad}_y \text{ad}_x)(z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

que por la identidad de Jacobi es igual a

$$[[x, y], z] = \text{ad}_{[x, y]}(z)$$

Por lo tanto,  $\text{ad}_x \text{ad}_y - \text{ad}_y \text{ad}_x = \text{ad}_{[x, y]}$ , es decir que  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  es un homomorfismo de álgebras de Lie. En otras palabras,  $\text{ad}$  define efectivamente una representación, la representación adjunta de  $\mathfrak{g}$ , definida en la sección 2.8, que denotamos por  $V = \mathfrak{g}^{\text{ad}}$ .

Definimos la *forma de Killing* de  $\mathfrak{g}$  como la forma bilineal  $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  dada por

$$\kappa(x, y) := \text{tr}(\text{ad}_x \cdot \text{ad}_y)$$

donde  $\text{ad}_x, \text{ad}_y$  están pensados como endomorfismos de  $\mathfrak{g}$  y la traza se calcula de la manera usual.

**Ejemplo 4.4.** Sea el álgebra de Lie  $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ , con  $\lambda = 1$ , dada por

$$\mathfrak{r}_{3,\lambda=1} := \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Si llamamos

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces  $B = \{x, y, z\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$ , los corchetes están determinados por  $[z, x] = x, [z, y] = y, [x, y] = 0$ . En la base  $B$ , la transformación lineal  $[z, -] = \text{ad}_z$  tiene matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la transformación lineal  $\text{ad}_x = [x, -]$  tiene matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y finalmente

$\text{ad}_y = [y, -]$  tiene matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . De esto se sigue

$$\kappa(z, z) = 2,$$

$$0 = \kappa(z, x) = \kappa(x, z) = \kappa(z, y) = \kappa(y, z) = \kappa(x, x) = \kappa(x, y) = \kappa(y, x) = \kappa(y, y)$$

#### 4.2.1. Propiedades de la forma de Killing

**Proposición 4.5.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y sea  $\kappa$  la forma de Killing de  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\kappa$  verifica las siguientes propiedades:

1. Es simétrica:  $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ .
2. Es invariante por la acción adjunta:  $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .
3. Es invariante por isomorfismos de álgebras de Lie, es decir, si  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un isomorfismo de álgebras de Lie, entonces  $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{h}}(\phi(x), \phi(y))$ , donde escribimos  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  y  $\kappa_{\mathfrak{h}}$  las formas de Killing de las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$ , respectivamente.
4. Extiende escalares: Si  $\mathbb{E}$  es una extensión de cuerpos de  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{u}$  un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{K}$ , consideremos  $\mathfrak{g} = \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{u}$  como álgebra de Lie sobre  $\mathbb{E}$  con el corchete definido por

$$[\lambda \otimes x, \mu \otimes y] = \lambda\mu \otimes [x, y]$$

para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{E}$ ,  $x, y \in \mathfrak{u}$  y se extiende  $\mathbb{K}$ -bilinealmente, entonces  $\kappa_{\mathfrak{g}}(\lambda \otimes x, \mu \otimes y) = \lambda\mu \otimes \kappa_{\mathfrak{u}}(x, y)$ , donde escribimos  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  y  $\kappa_{\mathfrak{u}}$  las formas de Killing de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{u}$ , respectivamente.

*Demostración.* 1. Para cualquier par de endomorfismos  $f, g : V \rightarrow V$  vale  $\text{tr}(fg) = \text{tr}(gf)$ ; en particular

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) = \text{tr}(\text{ad}_y \text{ad}_x) = \kappa(y, x)$$

2. Calculemos ambos miembros de la igualdad a demostrar: el miembro izquierdo es

$$\kappa([x, y], z) = \text{tr}(\text{ad}_{[x,y]} \text{ad}_z) = \text{tr}((\text{ad}_x \text{ad}_y - \text{ad}_y \text{ad}_x) \text{ad}_z) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y \text{ad}_z) - \text{tr}(\text{ad}_y \text{ad}_x \text{ad}_z)$$

Por otra parte, el miembro derecho es

$$\kappa(x, [y, z]) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_{[y,z]}) = \text{tr}(\text{ad}_x (\text{ad}_y \text{ad}_z - \text{ad}_z \text{ad}_y)) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y \text{ad}_z) - \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_z \text{ad}_y)$$

Si comparamos las dos expresiones, los términos que suman son idénticos; para los términos que restan utilizamos la propiedad cíclica de la traza:

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$$

Por lo tanto, vale la igualdad.

3. Tomemos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $\mathfrak{g}$  y para  $\mathfrak{h}$  tomemos la base  $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$ . Si calculamos  $[x_i, x_j] = \sum_k a_{ij}^k x_k$ , dado que  $\phi$  es un morfismo de Lie

$$\phi([x_i, x_j]) = [\phi(x_i), \phi(x_j)]$$

por lo tanto

$$[\phi(x_i), \phi(x_j)] = \sum_k a_{ij}^k \phi(x_k)$$

Es decir, las constantes de estructura son *idénticas* para esa elección de bases, luego la matriz de  $\text{ad}_x$  en la base  $B$  coincide con la matriz de  $\text{ad}_{\phi(x)}$  en la base  $\phi(B)$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ , de lo cual se obtiene que las trazas  $\text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y)$  y  $\text{tr}(\text{ad}_{\phi(x)} \text{ad}_{\phi(y)})$  son iguales, pues son trazas de productos de matrices iguales.

4. Aquí notemos que si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es una base de  $\mathfrak{u}$  como  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, entonces  $\{1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n\}$  es una base de  $\mathfrak{g} = E \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{u}$  como  $E$ -espacio vectorial. La cuenta es similar a (3), utilizando estas bases.  $\square$

#### 4.2.2. La forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y otros ejemplos

**Ejemplo 4.6.**  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  es el álgebra de Lie *real* con generadores

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

los corchetes están dados por  $[h, x] = 2x$ ,  $[h, y] = -2y$ ,  $[x, y] = h$ . Las matrices en la base  $\{x, h, y\}$  de  $\text{ad}_x, \text{ad}_h, \text{ad}_y$  son

$$\text{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La tabla para la forma de Killing es

$$\kappa(h, h) = 8, \quad \kappa(x, x) = 0, \quad \kappa(y, y) = 0$$

$$\kappa(h, x) = 0, \quad \kappa(h, y) = 0, \quad \kappa(x, y) = 4$$

Es decir, la matriz de la forma bilineal en esta base es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  admite el automorfismo  $x \leftrightarrow y, h \leftrightarrow -h$ , por lo tanto de antemano sabemos que tiene que valer  $\kappa(x, x) = \kappa(y, y)$  y  $\kappa(h, x) = -\kappa(h, y)$ , lo que reduce un poco los cálculos. También vemos en la matriz que  $\text{ad}_x$  (y por lo tanto  $\text{ad}_y$ ) es nilpotente y en consecuencia su cuadrado también lo es; por lo tanto tienen traza cero, es decir  $\kappa(x, x) = 0$ . Resulta claro de la expresión matricial de  $\text{ad}_h$  que  $\kappa(h, h) = 8$ . Queda entonces de ejercicio calcular efectivamente  $\kappa(h, x)$  y  $\kappa(x, y)$ .

Si calculamos la forma de Killing de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  como álgebra de Lie compleja, podemos utilizar nuevamente la base  $\{x, h, y\}$  y obtenemos el mismo resultado.

### 4.3. Ejercicios

1. Calcular la forma de Killing para el álgebra de Lie no abeliana de dimensión dos.

2. Calcular la forma de Killing de  $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & a \\ -t & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t, a, b \in \mathbb{R} \right\}$  y ver que es semi-definida negativa.

Calcular la forma de Killing de  $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Utilizar este cálculo

para demostrar que éstas dos álgebras son no isomorfas. ¿Sus complexificaciones son isomorfas? (es decir, considerando a  $t, a, b \in \mathbb{C}$ ).

3. Calcular la forma de Killing para las dos álgebras de Lie reales siguientes: el álgebra de Heisenberg de dimensión tres definida por  $\mathfrak{h}_3 = \mathbb{R}\langle x, y, z \rangle$  con corchetes en elementos de la base dados por  $[x, y] = z, [x, z] = [y, z] = 0$ ; y el álgebra  $\mathfrak{g}_\lambda = \mathbb{R}\langle h, x, y \rangle$  con  $[x, y] = 0, [h, x] = \lambda x, [h, y] = y$ .
4. Sea  $\mathfrak{su}(2)$  el álgebra de Lie real con base  $u, v, w$  tal que  $[u, v] = w, [v, w] = u, [w, u] = v$ . Mostrar que la permutación cíclica  $u \mapsto v \mapsto w \mapsto u$  es un automorfismo del álgebra de Lie. Calcular sólo  $\kappa(u, u)$  y despejar los demás valores de  $\kappa$  a partir de sus propiedades de invarianza. Mostrar que  $\kappa$  es definida negativa y por lo tanto  $\mathfrak{su}(2)$  no puede ser isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Sin embargo, sus complexificaciones son isomorfas.
5. Sea  $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$  definida por  $\Theta(x, y, z) := \kappa([x, y], z)$ . Mostrar que es alternada, i.e.  $\Theta(x_1, x_2, x_3) = (-1)^\sigma \Theta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ , e invariante, i.e.  $\Theta([t, x], y, z) + \Theta(x, [t, y], z) + \Theta(x, y, [t, z]) = 0$  para todo  $t, x, y, z \in \mathfrak{g}$ .
6. **El Casimir.** Supongamos que  $\mathfrak{g}$  es tal que su forma de Killing es no degenerada. Sea  $x_1, \dots, x_n$  una base de  $\mathfrak{g}$  y sea  $x^1, \dots, x^n$  la base dual con respecto a Killing, es decir,

$x^1, \dots, x^n$  son elementos de  $\mathfrak{g}$  que verifican  $\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$  (¿por qué están bien definidos? ¿por qué forman una base de  $\mathfrak{g}$ ?). Sea  $V$  una representación de  $\mathfrak{g}$  y consideremos la transformación lineal  $\omega : V \rightarrow V$  dada por

$$v \mapsto \omega(v) := \sum_i x_i \cdot x^i \cdot v$$

- a) Demuestre que  $\omega$  no depende de la base elegida. Este endomorfismo se denomina *Casimir*.
  - b) Demuestre que  $\omega$  es un morfismo de representaciones, es decir, para todo  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\omega(x.v) = x.\omega(v)$ .
  - c) Calcule el Casimir para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  y para  $\mathfrak{su}(2)$ .
  - d) Sea  $D_x = x\partial_y$ ,  $D_y = y\partial_x$  vistos como endomorfismos de  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Calcular  $D_h = [D_x, D_y]$ . Verificar que  $[D_h, D_x] = 2D_x$  y  $[D_h, D_y] = -2D_y$ . Concluir que  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  es una representación de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  con  $\rho = D$ . Calcular el operador diferencial asociado al Casimir.
  - e) Sean  $D_1 = y\partial_z - z\partial_y$ ,  $D_2 = z\partial_x - x\partial_z$  y  $D_3 = x\partial_y - y\partial_x$ , vistos como endomorfismos de  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Calcular  $[D_i, D_j]$  y verificar que  $D$  es una representación de un álgebra de Lie de dimensión tres conocida, ¿de qué álgebra de Lie se trata? Calcular el operador de Casimir asociado.
7. **Lema de Schur.** Sea  $V$  una representación **simple** de dimensión finita de  $\mathfrak{g}$ , es decir, si  $S \subseteq V$  es una subrepresentación, entonces  $S = 0$  ó  $S = V$ . Muestre que si  $f : V \rightarrow V$  es un morfismo de representación, entonces  $f = 0$  ó  $f$  es un isomorfismo. Si además el álgebra de Lie es compleja y la representación es compleja, entonces  $f$  es un múltiplo de la identidad. *Sugerencia: considerar  $S$  el subespacio de autovectores de algún autovalor de  $f$ .* Concluir que el Casimir actúa por múltiplos escalares en representaciones simples complejas, donde el escalar depende de la representación.

## 5. Álgebras de Lie nilpotentes y solubles

### 5.1. Sucesión de conmutadores de $\mathfrak{g}$ : serie derivada y serie central

La *sucesión de conmutadores de  $\mathfrak{g}$*  o *serie derivada* de  $\mathfrak{g}$  es la sucesión de ideales definidos recursivamente por

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ y para cada } j \geq 1, \quad \mathfrak{g}^{j+1} := [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j].$$

Se obtiene la sucesión descendente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{j-1} \supseteq \mathfrak{g}^j \supseteq \dots$$

Por inducción se prueba que cada  $\mathfrak{g}^j$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$  como consecuencia de la proposición 2.14. Se dice que  $\mathfrak{g}$  es **soluble** si  $\mathfrak{g}^j = 0$  para algún  $j$ .

Notar que, si  $0 \neq \mathfrak{g}$  es soluble, entonces admite un ideal abeliano no nulo, a saber, el último  $\mathfrak{g}^j$  no nulo de la cadena de conmutadores.

La *sucesión central descendente de  $\mathfrak{g}$*  es la sucesión de ideales definidos recursivamente por

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ y para cada } j \geq 1, \quad \mathfrak{g}_{j+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j].$$

Se obtiene la sucesión descendente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{j-1} \supseteq \mathfrak{g}_j \supseteq \dots$$

Por inducción se prueba que cada  $\mathfrak{g}_j$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$  como consecuencia de la proposición 2.14. Se dice que  $\mathfrak{g}$  es **nilpotente** si  $\mathfrak{g}_j = 0$  para algún  $j$ .

Notar que, si  $0 \neq \mathfrak{g}$  es nilpotente, entonces el centro de  $\mathfrak{g}$  es no trivial; en efecto, el último  $\mathfrak{g}_j$  no nulo de la cadena central está contenido en el centro de  $\mathfrak{g}$ .

Por inducción se ve que para todo  $j$ ,  $\mathfrak{g}^j \subseteq \mathfrak{g}_j$ ; entonces si  $\mathfrak{g}$  es nilpotente,  $\mathfrak{g}$  es soluble.

**Ejemplo 5.1.** El álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión tres,

$$\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

está generada por elementos  $z, x, y$  donde

$$z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con la estructura  $[z, x] = [z, y] = 0$ ;  $[x, y] = z$ ;  $\mathfrak{h}_3$  es un álgebra de Lie real de dimensión tres, nilpotente, no abeliana. En efecto,  $[\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3] = \mathbb{R} \cdot z = \mathcal{Z}(\mathfrak{h}_3)$ .

El álgebra de Lie de dimensión tres  $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ , con  $\lambda = 1$ , definida en el ejemplo 4.4 es soluble, no nilpotente. En efecto, en este caso  $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle x, y \rangle$ ;  $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] = 0$ . Sin embargo,  $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle x, y \rangle$  pero  $\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] = \langle x, y \rangle = \mathfrak{g}_1$ , de decir que la cadena central descendente se estabiliza y nunca llega a cero.

**Ejemplo 5.2.** El álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores

$$\mathfrak{s} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : A_{ij} = 0 \text{ para todo } i > j\}$$

es soluble. El álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores *estrictas*

$$\mathfrak{n} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : A_{ij} = 0 \text{ para todo } i \geq j\}$$

es nilpotente. En efecto, esto se prueba observando que

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{i < j} E_{ij} \cdot \mathbb{K} = \bigoplus_{\ell=1}^{n-1} \left( \bigoplus_{j-i=\ell} E_{ij} \cdot \mathbb{K} \right) = \bigoplus_{\ell=1}^{n-1} \mathfrak{g}_\ell$$

donde  $\mathfrak{g}_\ell = \bigoplus_{j-i=\ell} E_{ij} \cdot \mathbb{K}$  y  $[\mathfrak{g}_\ell, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{\ell+k}$ .

**Proposición 5.3.** *Toda subálgebra y todo cociente de un álgebra de Lie soluble (respectivamente, nilpotente) es soluble (respectivamente, nilpotente).*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie soluble  $\mathfrak{g}$ , entonces para los ideales de la cadena de conmutadores obtenemos por inducción que  $\mathfrak{h}^j \subseteq \mathfrak{g}^j$  para todo  $j$ . Dado que  $\mathfrak{g}$  es soluble, existe un  $j$  tal que  $\mathfrak{g}^j = 0$ , pero entonces  $\mathfrak{h}^j \subseteq \mathfrak{g}^j = 0$ , es decir que  $\mathfrak{h}$  es soluble.

Sea  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{l}$  un epimorfismo de álgebras de Lie, entonces  $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{l}$  y  $\pi(\mathfrak{g}^j) = \mathfrak{l}^j$  para todo  $j$ ; en efecto, es claro que  $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{l} = \mathfrak{l}^0$  y si, por hipótesis inductiva,  $\pi(\mathfrak{g}^j) = \mathfrak{l}^j$ , entonces

$$\mathfrak{l}^{j+1} = [\mathfrak{l}^j, \mathfrak{l}^j] = [\pi(\mathfrak{g}^j), \pi(\mathfrak{g}^j)] = \pi[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j] = \pi(\mathfrak{g}^{j+1})$$

Por lo tanto, si  $\mathfrak{g}^j = 0$  para algún  $j$ , entonces  $\mathfrak{l}^j = 0$ , es decir que  $\mathfrak{l}$  es soluble. En particular, si  $\mathfrak{I}$  es un ideal de un álgebra de Lie soluble  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{l} := \mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ , lo anterior implica que  $\mathfrak{l}$  es soluble.

Las demostraciones para el caso nilpotente son completamente análogas y se dejan como ejercicio. □

**Proposición 5.4.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{K}$  y  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{a}$  son solubles, entonces  $\mathfrak{g}$  es soluble.*

*Demostración.* Dado que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  es soluble, existe un  $j$  tal que  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^j = 0$ . Sea  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  la proyección al cociente, sabemos que

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^j = \pi(\mathfrak{g})^j = \pi(\mathfrak{g}^j)$$

luego  $\mathfrak{g}^j \subseteq \ker(\pi) = \mathfrak{a}$ . Por otra parte, dado que  $\mathfrak{a}$  es soluble,  $\mathfrak{a}^k = 0$  para algún  $k$ , entonces  $\mathfrak{g}^{j+k} = (\mathfrak{g}^j)^k \subseteq \mathfrak{a}^k = 0$ . Por lo tanto,  $\mathfrak{g}$  es soluble. □

Para el caso nilpotente, se tiene la siguiente proposición, cuya demostración se deja como ejercicio:

**Proposición 5.5.** *Si  $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$  es nilpotente, con  $\mathfrak{n}$  un subespacio de  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , entonces  $\mathfrak{g}$  nilpotente.*

## 5.2. El radical

**Proposición 5.6.** *Toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{K}$  admite un único ideal soluble maximal. Este ideal se llama el radical soluble de  $\mathfrak{g}$  y se denota por  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ .*

*Demostración.* Es suficiente demostrar que si  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  son ideales solubles de  $\mathfrak{g}$  entonces  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  es un ideal soluble: se define

$$\text{rad}(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{J} \text{ soluble}} \mathfrak{J}.$$

Sean  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  ideales solubles de  $\mathfrak{g}$  y sea  $\mathfrak{J} := \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ; sabemos que  $\mathfrak{J}$  es un ideal en virtud de la proposición 2.14. Veamos que es soluble. Por el *Segundo Teorema de Isomorfismos*

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

En virtud de la proposición 5.4, concluimos que  $\mathfrak{J}$  es soluble pues  $\mathfrak{a}$  es soluble y  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  es soluble por la proposición 5.3.  $\square$

**Definición 5.7.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  se dice simple si  $\mathfrak{g} \neq 0$ ,  $\mathfrak{g}$  es no abeliana y  $\mathfrak{g}$  no admite ideales propios (es decir que los únicos ideales de  $\mathfrak{g}$  son el ideal nulo y  $\mathfrak{g}$ ).

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  se dice semisimple si  $\mathfrak{g} \neq 0$  no admite ideales solubles no nulos, es decir, si  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ .

**Proposición 5.8.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , entonces*

1. Si  $\mathfrak{g}$  es simple,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .
2. Si  $\mathfrak{g}$  es simple,  $\mathfrak{g}$  es semisimple.
3. Si  $\mathfrak{g}$  es semisimple, su centro es trivial.

*Demostración.* 1. Sea  $\mathfrak{g}$  simple, entonces  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$  pues  $\mathfrak{g}$  es no abeliana; pero  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ , luego  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .

2. Si  $\mathfrak{g}$  es simple, el  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  es un ideal que es cero o bien igual a todo  $\mathfrak{g}$ . Si  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ ,  $\mathfrak{g}$  es semisimple. Si  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{g}$  es soluble y necesariamente la cadena de conmutadores de  $\mathfrak{g}$  debe descender; por lo tanto,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ , lo cual contradice la simplicidad de  $\mathfrak{g}$ . Concluimos que debe ser  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ .

3. El centro de  $\mathfrak{g}$  es un ideal abeliano, en particular, soluble. Por lo tanto,  $\mathfrak{z} \subset \text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$  si  $\mathfrak{g}$  es semisimple.  $\square$

**Proposición 5.9.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , entonces  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  es semisimple.*

*Demostración.* Sea  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  la proyección al cociente; si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  es un ideal soluble, entonces  $\mathfrak{a} := \pi^{-1}(\mathfrak{h})$  es un ideal soluble de  $\mathfrak{g}$  pues  $\mathfrak{a}/\text{rad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}$  (proposición 5.4). Por lo tanto,  $\mathfrak{a} \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$  y concluimos que  $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{a}) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 5.10.** Toda álgebra de Lie de dimensión 1 ó 2 es soluble. Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión 3 entonces  $\mathfrak{g}$  es o bien simple o bien soluble.

*Demostración.* Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión 1,  $\mathfrak{g}$  es abeliana, en particular es soluble. Si  $\dim \mathfrak{g} = 2$  y  $\mathfrak{g}$  no es abeliana, entonces es isomorfa al álgebra de Lie con generadores  $x$  e  $y$  y corchete  $[x, y] = x$ , que es soluble.

Si  $\dim \mathfrak{g} = 3$  y  $\mathfrak{g}$  no es simple, entonces existe un ideal propio  $\mathfrak{h}$ . La dimensión de  $\mathfrak{h}$  es 1 ó 2, luego  $\mathfrak{h}$  es soluble y  $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  también es 1 ó 2, por lo tanto  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  también es soluble. Por la proposición 5.4 concluimos que  $\mathfrak{g}$  es soluble.  $\square$

**Ejemplo 5.11.**  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  y  $\mathfrak{su}(2)$  son álgebras de Lie reales simples de dimensión 3, no isomorfas entre sí. Sobre  $\mathbb{C}$  se tiene  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , la única álgebra de Lie simple compleja de dimensión 3, salvo isomorfismo.

**Ejercicio 5.12.** Probar que  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  es simple para todo cuerpo de característica distinta de 2. Si  $\text{ch}(\mathbb{K}) = 2$ ,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  es nilpotente.

**Teorema 5.13.** *Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión  $n$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  es soluble si y sólo si existe una sucesión de subálgebras de Lie de la forma*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_{n-1} \supseteq \mathfrak{a}_n = 0$$

tal que cada  $\mathfrak{a}_{i+1}$  es un ideal en  $\mathfrak{a}_i$  y  $\dim(\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}) = 1$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ) Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie soluble, existe una sucesión de subálgebras de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{j-1} \supseteq \mathfrak{g}^j = 0$$

Para cada par  $\mathfrak{g}^k \supseteq \mathfrak{g}^{k+1}$  tal que  $\dim(\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}) \geq 2$  interpolamos subespacios  $\mathfrak{a}_i^k$  en la sucesión de modo tal que

$$\mathfrak{g}^k \supseteq \mathfrak{a}_1^k \supseteq \mathfrak{a}_2^k \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{k+1}$$

y  $\dim(\mathfrak{a}_i^k/\mathfrak{a}_{i+1}^k) = 1$ . Los subespacios  $\mathfrak{a}_i$  resultan subálgebras pues  $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subseteq [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{a}_i$ ; además, cada  $\mathfrak{a}_{i+1}$  es un ideal en  $\mathfrak{a}_i$  pues  $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}] \subseteq [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$ .

( $\impliedby$ ) Supongamos que en  $\mathfrak{g}$  existe una sucesión de subálgebras de Lie de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_{n-1} \supseteq \mathfrak{a}_n = 0$$

con las propiedades del enunciado. Consideremos la sucesión de conmutadores de  $\mathfrak{g}$ ; veamos por inducción que  $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{a}_k$  para cada  $k$ .

Sea  $x_k \in \mathfrak{a}_k$  tal que  $\mathfrak{a}_k = \mathbb{K}x_k \oplus \mathfrak{a}_{k+1}$ ; por construcción,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0$ , luego

$$\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0] = [\mathbb{K}x_0 \oplus \mathfrak{a}_1, \mathbb{K}x_0 \oplus \mathfrak{a}_1] = [\mathbb{K}x_0, \mathfrak{a}_1] + [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1] \subseteq \mathfrak{a}_1$$

Por inducción, se prueba que cada  $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{a}_k$  para cada  $0 \leq k \leq n$ . Finalmente, dado que  $\mathfrak{a}_n = 0$ , obtenemos que  $\mathfrak{g}^n = 0$ ; por lo tanto,  $\mathfrak{g}$  es soluble.  $\square$

### 5.3. Teorema de Lie

**Teorema 5.14.** [*Lie*] *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie soluble,  $0 \neq V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}V$  una representación de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathbb{K}$  es algebraicamente cerrado, entonces existe un autovector común  $0 \neq v \in V$  a todo  $\pi(x)$  con  $x \in \mathfrak{g}$ . Más generalmente, si  $\mathbb{K}$  no es algebraicamente cerrado pero para todo  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\pi(x)$  tiene todos sus autovalores en  $\mathbb{K}$ , la misma conclusión es válida.*

*Demostración.* Cambiando  $\mathfrak{g}$  por  $\rho(g)$  podemos suponer (y supondremos) que  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra de Lie de matrices.

La demostración procede por inducción en la dimensión de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\dim \mathfrak{g} = 0$  ó  $1$  el teorema es claramente válido.

Sea  $\mathfrak{h}$  un ideal de codimensión 1. Tal ideal existe porque  $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] < \dim \mathfrak{g}$ ; si  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  tuviera codimensión uno, serviría como  $\mathfrak{h}$ ; si no, dado que todo subespacio que contiene a  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  es un ideal, tomemos uno cualquiera de codimensión 1. Escribamos  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus kx$  para algún  $x \in \mathfrak{g}$ ; por hipótesis inductiva, existe  $0 \neq v_0 \in V$  tal que  $hv_0 = \lambda(h)v_0$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ . Sea  $S = \{v \in V : hv = \lambda(h)v \forall h \in \mathfrak{h}\}$ , entonces  $S$  es un subespacio no nulo pues  $v_0 \in S$ .

Dado que  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $[x, h] \in \mathfrak{h}$ , luego, si  $v \in S$ ,

$$h(xv) = hxv - xhv + xhv = [h, x]v + xhv = \lambda([h, x])v + x(\lambda(h)v) = \lambda([h, x])v + \lambda(h)x(v)$$

Si probamos que  $\lambda([h, x]) = 0$ , habremos demostrado que  $xv \in S$ . Supongamos por un instante demostrado ésto. En ese caso, como  $x|_S$  es un endomorfismo de  $S$ , tiene por lo menos un autovector  $v_1 \in S$ ; este autovector sirve.

Probemos ahora que  $\lambda([h, x]) = 0$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ . Sea  $0 \neq v \in S$  fijo y  $n$  el menor entero tal que  $\{v, xv, x^2v, \dots, x^{n-1}v\}$  es linealmente independiente. Sea  $W_i$  el subespacio generado por  $\{v, xv, x^2v, \dots, x^i v\}$ . Para todo  $h \in \mathfrak{h}$ ,

$$hx^i v = hxx^{i-1}v - xhx^{i-1}v + xhx^{i-1}v = [h, x]x^{i-1}v + xhx^{i-1}v$$

Un argumento inductivo nos muestra que  $hx^i v = \lambda(h)x^i v +$  combinaciones lineales de los  $x^j v$  con  $j < i$ . Si escribimos la matriz de la acción de  $h$  en  $W = \langle v \rangle_x$  obtenemos

$$(h) = \begin{pmatrix} \lambda(h) & * & * & * \\ 0 & \lambda(h) & * & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda(h) \end{pmatrix}$$

Tomando traza:

$$n\lambda(h) = \text{tr}_W(h|_W)$$

Como  $[h, x] \in \mathfrak{h}$ , también vale la formula para  $[h, x]$ . Dado que tanto  $h$  como  $x$  actúan en  $W$ , tenemos que

$$n\lambda([h, x]) = \text{tr}_W([h, x]|_W) = \text{tr}_W([h|_W, x|_W]) = 0$$

pues  $\text{tr}(AB - BA) = 0$ . Concluimos que  $\lambda([h, x]) = 0$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$  como queríamos.  $\square$

**Corolario 5.15.** Sean  $\mathfrak{g}$ ,  $V$ ,  $\pi$  y  $\mathbb{K}$  como en el teorema de Lie, entonces existe una base de  $V$  tal que todas las matrices de  $\pi(x)$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , son triangulares superiores.

*Demostración.* Por inducción en la dimensión, usando el teorema de Lie. Si  $0 \neq v_1$  un autovector común a todos los  $\pi(x)$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , entonces  $\mathbb{K}v_1$  es una subrepresentación. Consideremos la representación  $V/\mathbb{K}v_1$  y apliquémosle la hipótesis inductiva. Tomemos una base  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$  de  $V/\mathbb{K}v_1$ , de la cual se obtiene una base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $V$  que tiene las propiedades requeridas.  $\square$

El siguiente resultado se enuncia por la importancia que reviste, aunque omitiremos su demostración, que se puede encontrar en [Kn].

**Teorema 5.16. Descomposición de Levi.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero, entonces existe una subálgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{s}$  tal que  $\mathfrak{g} \cong \text{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{s}$ .

## 5.4. Teorema de Engel

Para álgebras de Lie nilpotentes se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 5.17.** [Engel] Sea  $0 \neq V$  un  $\mathbb{K}$  espacio vectorial y sea  $\mathfrak{g} \subset \text{End}_K(V)$  una subálgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de  $V$ , entonces

1.  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie nilpotente.
2. Existe  $0 \neq v \in V$  tal que  $xv = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .
3. Existe una base  $B$  de  $V$  tal que la matriz de  $x$  en la base  $B$  es triangular superior estricta para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .

Antes de demostrar el teorema, demostraremos algunos resultados previos, que tienen interés en sí mismos.

**Observación 5.18.** El recíproco es fácilmente cierto, pues si  $\mathfrak{g}^n = 0$  entonces  $[x_1, [x_2, [\dots [x_n - 1, x_n] \dots]] = 0$  para toda upla  $x_1, \dots, x_n$ , en particular para  $x, x, x, x, \dots, x, y$  para todo  $x, y$ , es decir  $\text{ad}_x^n(y) = 0$  para todo  $y$ .

**Lema 5.19.** Si  $x \in \mathfrak{gl}(V)$  es un endomorfismo nilpotente, entonces  $[x, -] : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  es nilpotente.

*Demostración.* Si en un anillo  $A$  dos elementos  $a$  y  $b$  son nilpotentes y  $ab = ba$  entonces  $a - b$  es nilpotente ya que vale la fórmula del binomio de Newton. Podemos considerar  $A = \text{End}(\mathfrak{gl}(V))$ ,  $a : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  dada por  $a(f) = xf$  y  $b : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  dada por  $b(f) = fx$ . Es claro que  $a$  y  $b$  son nilpotentes y que  $ab = ba$ .  $\square$

**Teorema 5.20.** Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ ,  $V$  de dimensión finita y  $\mathfrak{g}$  consiste de endomorfismos nilpotentes, entonces existe  $v \in V$  tal que  $xv = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .

*Demostración.* Es similar al teorema de Lie; la demostración procede por inducción en la dimensión de  $\mathfrak{g}$ . Busquemos primero un ideal de codimensión uno. Sea  $\mathfrak{h}$  una subálgebra propia cualquiera (por ejemplo, ¡de dimensión uno!),  $\mathfrak{h}$  actúa de manera nilpotente vía  $\text{ad}$ , en  $\mathfrak{g}$  y también en  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . Por hipótesis inductiva, existe  $\bar{x} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  tal que  $\text{ad}_h(\bar{x}) = 0$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ . Es decir, existe  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  tal que  $[h, x] \in \mathfrak{h}$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ .

Lo que acabamos de probar muestra que podemos encontrar una subálgebra más grande  $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus kx$  de manera que  $\mathfrak{h}$  es un ideal en  $\tilde{\mathfrak{h}}$ . Si repetimos este proceso una cantidad suficiente de veces, terminamos con  $\mathfrak{g}$  y la etapa anterior provee de un ideal de codimensión uno, que llamamos  $\mathfrak{h}$ . Escribamos  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus kx$ .

Ahora consideremos  $S = \{v \in V : hv = 0 \forall h \in \mathfrak{h}\}$ , que por hipótesis inductiva es no nulo. Por otra parte, si  $v \in V$

$$h xv = h xv - 0 = h xv - x hv = [h, x]v = 0$$

pues  $[h, x] \in \mathfrak{h}$ . Por lo tanto  $xS \subseteq S$ . Dado que  $x$  es nilpotente en  $S$ , tiene núcleo no trivial; sea  $s \neq 0$  un vector de  $S$  en el núcleo de  $x$ , entonces  $s$  satisface la propiedad del enunciado.  $\square$

**Corolario 5.21.** Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra de Lie de  $\text{End}(V)$ , con  $\dim V < \infty$ , y  $\mathfrak{g}$  consistente de endomorfismos nilpotentes, entonces existe una base de  $V$  tal que las matrices de los elementos de  $\mathfrak{g}$  son triangulares superiores estrictas. En particular,  $\mathfrak{g}$  resulta nilpotente como álgebra de Lie.

*Demostración.* Sea  $0 \neq v_1 \in V$  tal que  $xv_1 = 0$  para todo elemento  $x \in \mathfrak{g}$  y  $V_1$  el subespacio generado por  $v_1$ ; Entonces  $\mathfrak{g}V_1 \subseteq V_1$ , es decir,  $V_1$  es una subrepresentación. Consideremos  $\pi : V \rightarrow V/V_1 =: \tilde{V}$  y  $\mathfrak{g}$  actuando en  $\tilde{V}$ . Por hipótesis inductiva en la dimensión de  $V$ , existe una base  $\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n$  de  $\tilde{V}$  con la propiedad requerida. Si tomamos el conjunto  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  tal que  $\pi(v_i) = \tilde{v}_i$ , para  $i = 2, \dots, n$ , entonces  $B$  funciona como la base requerida.  $\square$

**Teorema 5.22 (Engel).** *Si todo elemento  $\text{ad}_x \in \text{End}(\mathfrak{g})$  es nilpotente, entonces  $\mathfrak{g}$  es nilpotente.*

*Demostración.* Consideremos  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  definida por  $x \mapsto \text{ad}_x = [x, -]$ , que es un morfismo de álgebras de Lie y, por hipótesis, su imagen consiste de endomorfismos nilpotentes; por el teorema anterior resulta isomorfa a una subálgebra de Lie de matrices triangulares estrictas, luego es nilpotente como álgebra de Lie. Pero  $\text{Im}(\text{ad}) \cong \mathfrak{g}/\text{Ker}(\text{ad}) = \mathfrak{g}/(\mathfrak{z}\mathfrak{g})$ , luego  $\mathfrak{g}$  es nilpotente, como consecuencia de la proposición 5.5.  $\square$

## 5.5. Criterios de Cartan

**Teorema 5.23.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .*

- a) *Criterio de solubilidad de Cartan:  $\mathfrak{g}$  es soluble si y sólo si  $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \equiv 0$ .*
- b) *Criterio de semisimplicidad de Cartan:  $\mathfrak{g}$  es semisimple si y sólo si  $\kappa$  es no degenerada.*

*Demostración.* Omitimos la prueba del ítem a, que se encuentra por ejemplo en [Kn].

Probaremos b utilizando a. Veamos primero que el  $\text{rad}(\kappa) \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$ , donde  $\text{rad}(\kappa) = \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}$  es el radical de la forma de Killing.

Dado que  $\kappa$  es invariante por ad,  $\text{rad}(\kappa)$  es un ideal; en efecto, para todo  $x \in \text{rad}(\kappa)$  y para todo  $y, z \in \mathfrak{g}$

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

entonces  $[x, y] \in \text{rad}(\kappa)$ . Más aún, la cuenta anterior para  $x, y, z \in \text{rad}(\kappa)$  muestra que  $\text{rad}(\kappa)$  es un ideal soluble por el criterio de solubilidad de la parte a. En particular, obtenemos que  $\text{rad}(\kappa) \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$ . A continuación, comprobemos la equivalencia.

( $\Rightarrow$ ) Si  $\mathfrak{g}$  es semisimple,  $0 = \text{rad}(\mathfrak{g}) \supseteq \text{rad}(\kappa)$ , por lo tanto  $\kappa$  es no degenerada.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\mathfrak{g}$  no fuera semisimple,  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$  y  $\mathfrak{g}$  admitiría un ideal abeliano  $\mathfrak{a} \neq 0$ . En efecto, la cadena descendente de conmutadores del radical  $\text{rad}(\mathfrak{g})^i$  consiste de ideales de  $\mathfrak{g}$  (dado que  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$  si  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  lo son) y el último  $\text{rad}(\mathfrak{g})^j$  no nulo es un ideal abeliano de  $\text{rad}(\mathfrak{g})^j$  y también de  $\mathfrak{g}$ ; llamémoslo  $\mathfrak{a}$ . Veamos que  $\mathfrak{a} \subseteq \text{rad}(\kappa)$ . Sean  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $y \in \mathfrak{g}$  y consideremos el endomorfismo  $T = \text{ad}_x \text{ad}_y$ .

Dado que  $\mathfrak{a}$  es ideal y  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $T(z) = [x, [y, z]] \in \mathfrak{a}$  para todo  $z \in \mathfrak{g}$ ; como además  $\mathfrak{a}$  es abeliano,  $T^2(z) = [x, [y, T(z)]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$  para todo  $z \in \mathfrak{g}$ . Es decir

$$T^2(\mathfrak{g}) = T(T(\mathfrak{g})) \subset T(\mathfrak{a}) \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0.$$

Obtenemos que  $T$  es nilpotente; en consecuencia su traza es cero y esto dice que  $0 = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) = \kappa(x, y)$  para todo  $x \in \mathfrak{a}$  e  $y \in \mathfrak{g}$ ; por lo tanto,  $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \text{rad}(\kappa)$  lo cual implica que  $\kappa$  es degenerada.  $\square$

**Corolario 5.24.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja.*

- a) *Si  $\mathfrak{g}_0$  es una forma real de  $\mathfrak{g}$  entonces  $\mathfrak{g}_0$  es semisimple si y sólo si  $\mathfrak{g}$  es semisimple.*
- b)  *$\mathfrak{g}$  es semisimple si y sólo si  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  es semisimple, donde  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  es la realificación de  $\mathfrak{g}$ , es decir,  $\mathfrak{g}$  considerada como álgebra de Lie real.*

*Demostración.* a) es consecuencia inmediata del criterio de semisimplicidad de Cartan.

b) se obtiene luego de probar que  $\kappa_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}} = 2\text{Re } \kappa_{\mathfrak{g}}$ . □

**Teorema 5.25.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , entonces  $\mathfrak{g}$  es semisimple si y sólo si*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$$

*donde cada componente es una subálgebra de Lie simple y un ideal en  $\mathfrak{g}$ . En este caso, la descomposición es única, salvo isomorfismo y el orden de las componentes simples, y los únicos ideales de  $\mathfrak{g}$  son suma de algunos de los  $\mathfrak{g}_j$ .*

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ . Sea  $p_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$  la proyección; sea  $\mathfrak{J}$  un ideal de  $\mathfrak{g}$  y sea  $\mathfrak{J}_i := p_i(\mathfrak{J})$  entonces  $\mathfrak{J}_i$  es un ideal de  $\mathfrak{g}_i$  pues para todo  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $x_i \in \mathfrak{g}_i$

$$[p_i x, x_i] = p_i[x, x_i] \in p_i(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}_i$$

Dado que  $\mathfrak{g}_i$  es simple,  $\mathfrak{J}_i$  es o bien el ideal nulo o bien  $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{g}_i$ . En el último caso,  $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{J}$  dado que  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ ; en efecto

$$\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = [\mathfrak{g}_i, p_i(\mathfrak{J})] \subset [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{J}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J}$$

Por lo tanto, dado que  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{J} \cap \left( \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i \right) = \bigoplus_{i=1}^m (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{g}_i) = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{J}} \mathfrak{g}_i$$

con lo cual queda probada la unicidad y la estructura de los ideales. Además,

$$[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}] = \left[ \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{J}} \mathfrak{g}_i, \bigoplus_{\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{J}} \mathfrak{g}_j \right] = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{J}} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{J}} \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{J}$$

por lo cual el ideal  $\mathfrak{J}$  no es un ideal soluble, salvo que sea cero. Por lo tanto,  $\mathfrak{g}$  es semisimple.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple; si  $\mathfrak{g}$  no es simple, admite un ideal propio minimal  $0 \neq \mathfrak{J} \subset \mathfrak{g}$ . Este ideal no es abeliano pues  $\mathfrak{g}$  no contiene ideales solubles. La prueba procede por inducción global en la dimensión. Debemos probar que  $\mathfrak{J}$  es simple y que admite un complemento directo semisimple. Sea  $\mathfrak{J}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{J}\}$ ; este subespacio es un ideal porque  $\mathfrak{J}$  es un ideal y  $\kappa$  es ad-invariante. Dado que  $\kappa$  es no degenerada,

$$\dim(\mathfrak{J}) + \dim(\mathfrak{J}^\perp) = \dim(\mathfrak{g})$$

Por lo tanto, para probar que  $\mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}^\perp = \mathfrak{g}$ , es suficiente demostrar que  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp = 0$ . Para ésto, necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 5.26.** Sea  $\mathfrak{J}$  un ideal en un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\kappa_{\mathfrak{J}} \equiv \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B}_{\mathfrak{J}} = \{v_1, \dots, v_k\}$  una base de  $\mathfrak{J}$  que extendemos a una base de  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Dado que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J}$ , para cada  $x \in \mathfrak{J}$  la matriz de  $\text{ad}_x$  en la base  $\mathcal{B}$  es de la forma

$$\text{ad}_x = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \text{ad}_x|_{\mathfrak{J}} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es decir, una matriz en bloques. Si  $y$  es otro elemento del ideal, su matriz es de la misma forma y el producto puede realizarse en bloques:

$$\text{ad}_x \text{ad}_y = \left( \begin{array}{c|c} \text{ad}_x|_{\mathfrak{J}} \text{ad}_y|_{\mathfrak{J}} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

En consecuencia, la traza de  $\text{ad}_x \text{ad}_y$  coincide con la traza de  $\text{ad}_x|_{\mathfrak{J}} \text{ad}_y|_{\mathfrak{J}}$ , que es por definición  $\kappa_{\mathfrak{J}}(x, y)$ .  $\square$

Volviendo a la demostración del teorema, el ideal  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp$  verifica  $\kappa(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp, \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp) \equiv 0$ , por lo tanto  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp$  es soluble. Dado que  $\mathfrak{g}$  semisimple, su único ideal soluble es el ideal nulo, por lo tanto  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp = 0$  como queríamos probar.

Para concluir con la inducción debemos mostrar que  $\mathfrak{J}$  es simple y que  $\mathfrak{J}^\perp$  es semisimple. Dado que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}^\perp$ , si  $\mathfrak{a}$  es un ideal de  $\mathfrak{J}$  entonces también es un ideal de  $\mathfrak{g}$ . Por minimalidad  $\mathfrak{J}$  no tiene ideales propios, luego  $\mathfrak{J}$  es simple. Por el mismo argumento, todo ideal de  $\mathfrak{J}^\perp$  resulta ideal de  $\mathfrak{g}$ . Más aún, si  $\mathfrak{a}$  es un ideal soluble de  $\mathfrak{J}^\perp$  entonces  $\mathfrak{a}$  es un ideal soluble de  $\mathfrak{g}$ . Por lo tanto,  $\mathfrak{a} = 0$  y el ideal  $\mathfrak{J}^\perp$  resulta semisimple.  $\square$

**Corolario 5.27.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple, entonces  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Si  $\mathfrak{J}$  es un ideal cualquiera de  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{J}^\perp$  también es un ideal de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}^\perp$ .

**Teorema 5.28.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple, entonces  $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})$ , es decir, toda derivación de  $\mathfrak{g}$  es interior.

*Demostración.* Dado que  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ , y dado que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \text{InDer}(\mathfrak{g})$  (ejercicio 2.19), y que  $\text{InDer}(\mathfrak{g})$  es una subálgebra de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ , la aplicación  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$  es inyectiva y su imagen  $\mathfrak{m} := \text{ad}(\mathfrak{g})$  es isomorfa a  $\mathfrak{g}$ . En particular, la forma de Killing de  $\mathfrak{m}$  es no degenerada. Por otra parte, las derivaciones interiores forman un ideal dentro del álgebra de todas las derivaciones de  $\mathfrak{g}$ , como se prueba en el ejercicio 2.21, por lo cual,  $\kappa_{\mathfrak{m}} = \kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}|_{\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}}$  como vimos en el lema 5.26. Consideremos  $\mathfrak{m}^\perp$  el subespacio ortogonal a  $\mathfrak{m}$  en  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  respecto de  $\kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}$ , que, en particular es un ideal de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ . La no degeneración de  $\kappa_{\mathfrak{m}}$  fuerza que  $\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{m} = 0$ . Dado que tanto  $\mathfrak{m}^\perp$  como  $\mathfrak{m}$  son ideales de la misma álgebra  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ , necesariamente  $[\mathfrak{m}^\perp, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{m} = 0$ . Notar que  $\dim \mathfrak{m}^\perp \geq \dim \text{Der}(\mathfrak{g}) - \dim \mathfrak{m}$ , y, en consecuencia,  $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^\perp$ .

Queremos probar que  $\mathfrak{m}^\perp = 0$ . Para ésto, consideremos un elemento  $\delta \in \mathfrak{m}^\perp$ ; dado que  $[\mathfrak{m}^\perp, \mathfrak{m}] = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{g}$  tenemos que, en virtud del ejercicio 2.21,

$$\text{ad}_{\delta(x)} = [\delta, \text{ad}_x] = 0$$

Concluimos que  $\delta(x) \in \text{Ker}(\text{ad}) = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , por lo cual,  $\delta = 0$ . Por lo tanto,  $0 = \mathfrak{m}^\perp$  y  $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{m} = \text{InDer}(\mathfrak{g})$ . □

## 5.6. Teorema de Weyl

Una representación  $(V, \pi)$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se dice **irreducible** si  $0 \neq V$  y sus únicas subrepresentaciones son  $0$  y  $V$ . Una representación  $(V, \pi)$  se dice **completamente reducible** si  $V$  se descompone en suma directa de representaciones irreducibles.

**Teorema 5.29 (Weyl).** *Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie semisimple, toda representación de dimensión finita de  $\mathfrak{g}$  es completamente reducible.*

La demostración se encuentra en las secciones 9.2 de representaciones de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y 13.1 de representaciones en general.

## 6. Información sobre álgebras de Lie compactas y álgebras de Lie reductivas

### 6.1. Álgebras de Lie compactas

Para un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , consideremos  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  el grupo de automorfismos del álgebra de Lie; es un grupo de Lie por ser cerrado en  $\text{GL}(\mathfrak{g})$ , el grupo de Lie de todos los automorfismos lineales de  $\mathfrak{g}$ .

El álgebra de Lie de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  es  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ ; el espacio  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  es una subálgebra de Lie de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ . Se define  $\text{Int}(\mathfrak{g})$ , el grupo de automorfismos interiores de  $\mathfrak{g}$ , como el subgrupo de Lie conexo de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  con álgebra de Lie  $\text{ad}(\mathfrak{g})$ .

**Definición 6.1.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{u}$  se dice **compacta** si el grupo  $\text{Int}(\mathfrak{u})$  es compacto.

El nombre proviene del hecho de que el tangente a la identidad de Lie de un grupo de Lie compacto resulta un álgebra de Lie compacta ([Kn] pp. 248-249). Resumimos a continuación, sin demostración, más información sobre las álgebras de Lie compactas.

Las clases de isomorfismo de

1. grupos de Lie semisimples, compactos, conexos y simplemente conexos *reales*,
2. álgebras de Lie semisimples, compactas *reales*,
3. álgebras de Lie semisimples, complejas,
4. sistemas de raíces abstractos, reducidos,
5. matrices de Cartan abstractas y sus diagramas de Dynkin asociados

están en correspondencia biunívoca al pasar del grupo de Lie a su álgebra de Lie (1→2), de ella a la complejificación del álgebra de Lie (2→3), de ésta al sistema de raíces subyacente (3→4). En los capítulos siguientes profundizaremos más esta correspondencia.

**Proposición 6.2.** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto y  $\mathfrak{u}$  su álgebra de Lie. Entonces  $\mathfrak{u}$  admite un producto interno  $G$ -invariante. En consecuencia  $G$  actúa de forma ortogonal con respecto a ese producto interno, y el conjunto de endomorfismos  $\{\text{ad}_x : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u} : x \in \mathfrak{u}\}$  consiste de matrices antisimétricas, tomando una base ortonormal con respecto a ese producto interno.

*Demostración.* Sea  $((-, -))$  un producto interno arbitrario en  $\mathfrak{u}$  y definamos, para  $x, y \in \mathfrak{u}$ :

$$(x, y) := \int_G ((g.x, g.y)) dg$$

donde  $g.x$  es la acción adjunta del grupo  $G$  en  $\mathfrak{u}$ , y  $dg$  es una medida en  $G$  invariante por traslación a izquierda. Dejamos como ejercicio chequear que la nueva forma bilineal  $((-, -))$  sigue siendo definida positiva y  $G$ -invariante.  $\square$

**Corolario 6.3.** La forma de Killing del álgebra de Lie tangente a un grupo de Lie compacto es semidefinida negativa.

*Demostración.* De la proposición anterior sabemos que podemos representar los elementos  $\text{ad}_x \in \text{End}(\mathfrak{u})$ ,  $x \in \mathfrak{u}$  como matrices antisimétricas (reales), por lo tanto sus autovalores son imaginarios puros, y la suma de los cuadrados de los autovalores, que calcula  $k(x, x)$ , resulta menor o igual que cero.  $\square$

A modo de constatación empírica, proponemos el siguiente ejercicio:

**Ejercicio 6.4.** La forma de killing de  $\mathfrak{su}(2)$  es definida negativa, mientras que la forma de Killing de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  es no definida. Notar que el grupo  $SU(2)$  es compacto, mientras que  $SL(2, \mathbb{R})$  no lo es.

## 6.2. Álgebras de Lie reductivas

**Definición 6.5.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se dice **reductiva** si a todo ideal  $\mathfrak{a}$  en  $\mathfrak{g}$  le corresponde un ideal  $\mathfrak{b}$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ .

Resulta (ver proposición más adelante) que  $\mathfrak{g}$  es reductiva si y sólo si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , donde  $\mathfrak{z}$  es el centro de  $\mathfrak{g}$  y  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  es semisimple.

El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de un grupo de Lie compacto  $G$  es reductiva, por lo cual el estudio de los grupos compactos se reduce en gran medida al estudio de las álgebras semisimples. Los subgrupos de  $G$  correspondientes a éstas subálgebras de  $\mathfrak{g}$  son cerrados.

**Proposición 6.6.** Un álgebra de Lie de dimensión finita  $\mathfrak{g}$  es reductiva si y sólo si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$  con  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  el centro de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{s}$  es semisimple.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $\mathfrak{g}$  reductiva; si  $\mathfrak{g}$  no admite ideales propios, entonces  $\mathfrak{g}$  es simple o abeliana de dimensión uno, en cualquiera de los dos casos, es de la forma del enunciado. Si  $\mathfrak{g}$  admite un ideal propio, argumentamos por inducción en la dimensión. Sea  $\mathfrak{a}$  un ideal propio, entonces  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ . Veamos que  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  son reductivas, con lo cual, descomponemos tanto a  $\mathfrak{a}$  como a  $\mathfrak{b}$  y el enunciado queda demostrado. Sea  $\mathfrak{K}$  es un ideal de  $\mathfrak{a}$ , entonces es un ideal de  $\mathfrak{g}$  y, por lo tanto, admite un ideal complementario  $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{J}$ . Si tomamos  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{a}$ , resulta un ideal de  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{K} \oplus (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{a})$ . Además, si  $x \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{J}$  entonces existen únicos  $x_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{K}$  y  $x_{\mathfrak{J}} \in \mathfrak{J}$  tales que  $x = x_{\mathfrak{K}} + x_{\mathfrak{J}}$ , pero como  $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{a}$ , entonces  $x_{\mathfrak{J}} = x - x_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{a}$ , luego  $x_{\mathfrak{J}} \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{a}$  y por lo tanto  $\mathfrak{a} = \mathfrak{K} \oplus (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{J})$ .

$\Leftarrow$ ) Es corolario del teorema 5.25. En efecto, toda álgebra de Lie de la forma  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$ , con  $\mathfrak{z}$  abeliana y  $\mathfrak{s}$  semisimple, es reductiva (ejercicio).  $\square$

Notar que en la proposición anterior, la subálgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{s}$  es en realidad  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

**Proposición 6.7.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie real de matrices reales, complejas o cuaterniónicas. Si  $\mathfrak{g}$  es estable por la operación de transponer y conjugar, entonces  $\mathfrak{g}$  es reductiva.

*Demostración.* Sean  $X$  e  $Y$  en  $\mathfrak{g}$ , entonces

$$\langle X, Y \rangle := \text{Re tr}(XY^*)$$

es un producto interno real en  $\mathfrak{gl}(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ , y por restricción, un producto interno en  $\mathfrak{g}$ . Sea  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $\mathfrak{g}$  y sea  $\mathfrak{a}^\perp$  el ortogonal respecto del producto interno, entonces  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$  como espacio vectorial. La prueba concluye con la comprobación de que  $\mathfrak{a}^\perp$  es

un ideal; en efecto, si  $X \in \mathfrak{a}^\perp$ ,  $Y$  es una matriz de  $\mathfrak{g}$  cualquiera y  $Z$  es un elemento de  $\mathfrak{a}$ , entonces  $[Z, Y^*] \in \mathfrak{a}$  por ser un ideal; por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z \rangle &= \operatorname{Re} \operatorname{tr}(XYZ^* - YXZ^*) \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{tr}(XYZ^* - XZ^*Y) = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(X(ZY^*)^* - X(Y^*Z)^*) \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{tr}(X([Z, Y^*])^*) = \langle X, [Z, Y^*] \rangle = 0 \end{aligned}$$

□

**Corolario 6.8.** *Las álgebras de Lie “clásicas” son reductivas.*

## 7. Descomposición de un álgebra de Lie a partir de una subálgebra de Cartan

### 7.1. Introducción

El estudio de las álgebras de Lie semisimples complejas continúa a través del siguiente proceso. Dada un álgebra de Lie semisimple se encuentra un *sistema de raíces* abstracto vía la elección de una *subálgebra de Cartan*  $\mathfrak{h}$ , a partir de este sistema, se obtiene una *matriz de Cartan* abstracta y a un *diagrama de Dynkin* abstracto vía la elección de un orden.

El capítulo comienza con el estudio de la descomposición de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  como consecuencia de la acción adjunta de una subálgebra de Cartan, dada en este caso por su subálgebra abeliana de matrices diagonales; a partir de ella, se enuncian propiedades generales para un álgebra de Lie semisimple compleja, que a continuación verificamos explícitamente en las álgebras de Lie clásicas; la demostración de estas propiedades se encuentra en el capítulo 8 y subsiguientes.

Si  $\mathfrak{g}$  es semisimple entonces toda subálgebra de Cartan es abeliana. La acción adjunta de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}$  conduce a una descomposición de  $\mathfrak{g}$  en espacios raíces y el conjunto de raíces forma un sistema de raíces reducidos.

La imposición de un orden y de una noción de positividad en el conjunto de raíces permite definir raíz simple como aquella que no es suma de dos raíces positivas. Las simples forman una base especial, con buenas propiedades, del conjunto de todas las raíces y, a partir de ella, se define la matriz de Cartan y el diagrama de Dynkin. Las propiedades del *grupo de Weyl* implican que la elección anterior no depende del orden. Se prueba la correspondencia 1-1 anterior entre items (3), (4) y (5).

La relación entre álgebras de Lie sobre  $\mathbb{C}$  y sistemas de raíces abstractas es más profunda. Además del isomorfismo, la correspondencia no depende de la elección de la subálgebra de Cartan, como consecuencia de que son únicas salvo conjugación. Parte de este estudio conduce a encontrar un sistema de generadores y relaciones.

A partir de la correspondencia, en lugar de clasificar álgebras de Lie semisimples sobre  $\mathbb{C}$ , se clasifican los diagramas de Dynkin. Las series de tipos  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  y  $D_n$  corresponden a álgebras de Lie clásicas que ya eran conocidas con anterioridad a la clasificación. Para los excepcionales se comprobó que efectivamente existían álgebras de Lie cuyos diagramas eran estos y más tarde se obtuvieron diversas realizaciones.

### 7.2. Descomposición en espacios raíces

#### Subálgebras de Cartan

Sea  $\mathfrak{l}$  un álgebra de Lie de dimensión finita, una subálgebra  $\mathfrak{h}$  se dice una **subálgebra de Cartan** si  $\mathfrak{h}$  es nilpotente y coincide con su normalizador, es decir,  $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{l} : [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$ .

Toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una subálgebra de Cartan (proposición 8.6). Si  $\mathfrak{g}$  es semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan entonces  $\mathfrak{h}$  es abeliana (proposición 8.9). Más aún, si  $\mathfrak{g}$  es semisimple sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  es una subálgebra de Cartan si y sólo si  $\mathfrak{h}$  es abeliana maximal y  $\{\text{ad}_H : H \in \mathfrak{h}\}$  es simultáneamente diagonalizable.

Por otra parte, las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie compleja de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  son *únicas salvo conjugación* por un automorfismo interior de  $\mathfrak{g}$ . Es decir, dadas  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}'$  subálgebras de Cartan de  $\mathfrak{l}$ , existe un automorfismo interior  $a : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$  tal que  $a(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ .

Se define el **rango** de un álgebra de Lie  $\mathfrak{l}$ , denotado por  $\text{rank } \mathfrak{l}$ , como  $\text{rank } \mathfrak{l} = \dim \mathfrak{h}$ , donde  $\mathfrak{h}$  es cualquier subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{l}$ . Estas afirmaciones se estudian en el capítulo 8.

Sea  $\mathfrak{g}$  es semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan; como consecuencia de que  $\{\text{ad}_H : H \in \mathfrak{h}\}$  es simultáneamente diagonalizable,  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

donde  $\mathfrak{g}_\alpha$  es al autoespacio correspondiente al autovalor  $\alpha$  y  $\Phi$  es el conjunto de todos estos *autovalores simultáneos* llamados *raíces*. Antes de abordar la teoría general, resulta útil la evidencia recolectada en los ejemplos clásicos.

### 7.3. El ejemplo $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Consideremos el álgebra de Lie compleja  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , para cada  $n \geq 2$ . Sea la subálgebra

$$\mathfrak{h} = \{ \text{matrices diagonales de traza cero} \} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

entonces  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan. En efecto, dejamos como ejercicio probar que si  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  es una matriz tal que  $[H, X]$  es diagonal para toda  $H \in \mathfrak{h}$  entonces  $X$  es necesariamente diagonal. Sea

$$\mathfrak{h}_0 = \{ H \in \mathfrak{h} : H_{ii} \in \mathbb{R} \}$$

entonces  $\mathfrak{h}_0$  es una subálgebra de Lie *real* de  $\mathfrak{h}$  (en particular, también es subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ ) que verifica  $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{h}$ , lo cual dice que  $\mathfrak{h}_0$  es una forma real de  $\mathfrak{h}$ .

Sean  $E_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  las matrices con un *uno* en el lugar  $ij$  y *ceros* en el resto, para  $i \neq j$  (ver sección 2.3)

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sean  $e_i \in \mathfrak{h}^*$  las funcionales lineales que toman la coordenada  $i$ -ésima de la diagonal:

$$e_i \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix} = h_i$$

Calculemos  $\text{ad}_H(E_{ij})$  para cada  $H \in \mathfrak{h}$ . Dada  $H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$  obtenemos

$$\text{ad}_H(E_{ij}) = HE_{ij} - E_{ij}H = h_i E_{ij} - h_j E_{ij} = (h_i - h_j)E_{ij} = ((e_i - e_j)(H)) E_{ij}$$

Concluimos que  $E_{ij}$  es un autovector común de  $\text{ad}_H$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ , con autovalor  $(e_i - e_j)(H)$ . Notar que la dependencia en  $H$  del autovalor es lineal. En otras palabras,  $(e_i - e_j) : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  es una funcional lineal,  $(e_i - e_j) \in \mathfrak{h}^*$ . Para  $i = j$  es, evidentemente, la funcional nula.

Para  $i \neq j$ , las funcionales  $\{(e_i - e_j) : i \neq j\} =: \Phi$  se llaman raíces.

El cardinal de  $\Phi$  es  $n^2 - n = n(n - 1)$ . Como se estudió en la sección 2.4, el conjunto

$$\{E_{ij} : i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1, i+1} : 1 \leq i \leq n\}$$

forma una base de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , con  $\{E_{ii} - E_{i+1, i+1} : 1 \leq i \leq n\}$  una base de  $\mathfrak{h}$ , entonces el álgebra de Lie admite una descomposición como suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij} \right) = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} \right) = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

donde

$$\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \{x \in \mathfrak{g} : \text{ad}_H(x) = (h_i - h_j)x, \forall H \in \mathfrak{h}\} = \{x \in \mathfrak{g} : \text{ad}_H(x) = (e_i - e_j)(H)x, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

**Definición 7.1.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ; para cada  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , se define  $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [H, x] = \alpha(H)x \forall H \in \mathfrak{h}\}$ ; la funcional lineal  $\alpha$  se dice una **raíz** si  $\alpha \neq 0$  y  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ ; en este caso,  $\mathfrak{g}_\alpha$  se denomina el subespacio raíz correspondiente a la raíz  $\alpha$ . El conjunto de todas las raíces se denota por  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ó, para abreviar, por  $\Phi$ , si es clara quién es la subálgebra  $\mathfrak{h}$  de la cual depende  $\Phi$ .

Notar que  $\Phi$  genera todo  $\mathfrak{h}^*$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial; pero  $\Phi$  no es una base de  $\mathfrak{h}^*$ , pues si  $\alpha \in \Phi$ , entonces  $-\alpha \in \Phi$ , pero aún así, hay buenas elecciones posibles de subconjuntos de  $\Phi$  para bases de  $\mathfrak{h}^*$ . En el caso de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\Delta = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\}$  es una base de  $\mathfrak{h}^*$ .

Recordemos de la sección 2.3 el cálculo de los corchetes en la descomposición anterior. Por ejemplo,  $[E_{12}, E_{23}] = E_{13}$ . Observemos que  $(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_1 - e_3 \in \Phi$ ; la cuenta anterior nos dice que  $[\mathfrak{g}_{e_1 - e_2}, \mathfrak{g}_{e_2 - e_3}] \subset \mathfrak{g}_{e_1 - e_3}$ .

En general, se comprueba fácilmente que  $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$ . Salvo  $(k, l) = (j, i)$ , el corchete de dos elementos de un espacio raíz queda dentro del espacio raíz suma:

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha + \beta}$$

y  $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{h}$ . Además, si  $[H, x] = \alpha(H)x$  y  $[H, y] = \beta(H)y$ , entonces

$$[H, [x, y]] = [[H, x], y] + [x, [H, y]] = [\alpha(H)x, y] + [x, \beta(H)y] = (\alpha + \beta)(H)[x, y]$$

Más precisamente, se observan tres casos:  $\alpha + \beta$  es raíz,  $\alpha = -\beta$ , ó  $\alpha \neq -\beta$  pero  $\alpha + \beta$  no es raíz y se obtiene

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha + \beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es raíz} \\ \subset \mathfrak{h} & \text{si } \alpha = -\beta \\ = 0 & \text{si } 0 \neq \alpha + \beta \text{ no es raíz} \end{cases}$$

Notar que todas las raíces son reales en  $\mathfrak{h}_0$  y, entonces, por restricción, pueden ser consideradas elementos del espacio vectorial real  $\mathfrak{h}_0^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_0, \mathbb{R})$ .

El próximo paso es introducir una noción de positividad en  $\mathfrak{h}_0^*$  compatible con la estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, *i.e.* tal que

- (i)  $\forall \varphi \in \mathfrak{h}_0^*$ , exactamente una de las dos  $\varphi$  ó  $-\varphi$  es positiva.
- (ii)  $\sum_{\varphi > 0} \varphi$  y  $\lambda \varphi > 0$  para todo  $\varphi > 0, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es decir, la suma de elementos positivos es positiva y todo múltiplo positivo de un elemento positivo es positivo.

Se puede demostrar que la estructura (y, en consecuencia, la clasificación de las álgebras de Lie) no depende del orden.

Notar que en el ejemplo  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , el conjunto  $e_1, \dots, e_n$  no es una base de  $\mathfrak{h}_0^*$ , pues  $e_1 + e_2 + \dots + e_n = \text{tr}$ , la funcional lineal traza, que se anula en  $\mathfrak{h}$ ; la dimensión (real) de  $\mathfrak{h}_0^*$  es  $n - 1$ . No todo elemento de  $\mathfrak{h}_0^*$  se escribe de manera única como  $\sum_i c_i e_i$ , pero esta escritura sí es única si se agrega la condición adicional  $\sum_i c_i = 0$ .

Se dice que una funcional  $0 \neq \varphi \in \mathfrak{h}_0^*, \varphi = \sum_i c_i e_i$  con  $\sum_i c_i = 0$ , es **positiva**, y se escribe  $\phi > 0$ , si el primer coeficiente no nulo  $c_i$  verifica  $c_i > 0$ .

Es claro que esta noción de positividad satisface (i) y (ii). Se dice que

$$\varphi > \psi \text{ si } \varphi - \psi > 0$$

Se obtiene una relación de *orden* parcial en  $\mathfrak{h}_0^*$ , compatible con la suma y la multiplicación por  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Para las raíces positivas de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  el orden es el siguiente:

$$\begin{aligned} e_1 - e_n &> e_1 - e_{n-1} > \dots > e_1 - e_2 > \\ e_2 - e_n &> e_2 - e_{n-1} > \dots > e_2 - e_3 > \\ e_3 - e_n &> e_3 - e_{n-1} > \dots > e_3 - e_4 > \\ \dots &> e_{n-2} - e_n > e_{n-2} - e_{n-1} > e_{n-1} - e_n > 0 \end{aligned}$$

luego siguen todas las raíces negativas.

En particular,  $\Phi = \Phi^+ \amalg \Phi^-$  donde  $\Phi^+ = \{e_i - e_j : i < j\}$  y  $\Phi^- = \{-\alpha : \alpha \in \Phi^+\}$ .

### 7.4. Propiedades para $\mathfrak{g}$ semisimple sobre $\mathbb{C}$

Enunciamos a continuación propiedades para  $\mathfrak{g}$  semisimple sobre  $\mathbb{C}$  que se demuestran en el capítulo siguiente. Muchas de ellas fueron observadas en el caso de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ; un análisis similar se realiza en los demás ejemplos clásicos, antes de pasar a la demostración en general.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\Phi$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  con respecto a  $\mathfrak{h}$ , entonces:

1. Existe una subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{h}$  tal que  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición simultánea en autoespacios relativos a  $\text{ad}_H$ , para todo  $H \in \mathfrak{h}$ , tal que
  - a) el autoespacio asociado al autovalor cero es  $\mathfrak{h}$ ,
  - b)  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  para todo  $\alpha \in \Phi$ , es decir, el subespacio correspondiente a un autovalor  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  es cero o de dimensión uno y, en este caso,  $\alpha$  es por definición una raíz.

c) Para todo  $\alpha, \beta \in \Phi$ , vale la relación

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es raíz} \\ \subset \mathfrak{h} & \text{si } \alpha = -\beta \\ = 0 & \text{si } 0 \neq \alpha + \beta \text{ no es raíz} \end{cases}$$

d) Existe una forma real  $\mathfrak{h}_0$  de  $\mathfrak{h}$  tal que para todo  $\alpha \in \Phi$ ,  $\alpha(H) \in \mathbb{R} \forall H \in \mathfrak{h}_0$ .

2. El conjunto  $\Phi$  de todas las raíces genera  $\mathfrak{h}^*$ .
3. Si  $\alpha$  es raíz,  $-\alpha$  también es raíz.
4. La subálgebra abeliana maximal se descompone como  $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \Phi} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ .
5.  $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ , la forma de Killing restringida a  $\mathfrak{h}$ , es no degenerada, en consecuencia, para cada  $\alpha \in \Phi$  existe  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha(H) = \kappa(H, H_\alpha)$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ .
6. Fijemos un elemento  $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  tal que  $[H, x_\alpha] = \alpha(H)x_\alpha$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ ; entonces para todo  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $[x_\alpha, y] = \kappa(x_\alpha, y)H_\alpha$ .
7. Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , el número

$$\frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$$

8. Para cada par  $\alpha \neq \pm\beta \in \Phi$ , se define la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  como el subconjunto de  $\Phi$  de los elementos de la forma  $\beta + m\alpha$  con  $m \in \mathbb{Z}$  i.e.

$$\Phi \cap \{\beta + m\alpha : m \in \mathbb{Z}\}$$

Observación: empezando de la izquierda en la sucesión anterior, toda subsuma es raíz, pero no cualquier subsuma ni cualquier término de ella es raíz; en particular,  $\alpha$  no pertenece a ninguna  $\alpha$ -cuerda, dado que ningún múltiplo de  $\alpha \in \Phi$ , salvo  $\pm\alpha$ .

**Ejercicio 7.2.** En  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  sean  $\alpha = e_2 - e_3$  y  $\beta = e_1 - e_2 \in \Phi$ ; la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  es el conjunto  $\{\beta = e_1 - e_2, \beta + \alpha = e_1 - e_3\}$ ; tiene longitud dos.

En virtud de los cálculos de la sección 7.5, se obtiene que en  $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ , la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  para  $\alpha = -e_2$  y  $\beta = e_1 + e_2$  es el conjunto  $\{\beta = e_1 + e_2, \beta + \alpha = e_1, \beta + 2\alpha = e_1 - e_2\}$ , una cuerda de longitud tres.

En un ejemplo análogo en  $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ , la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  para  $\alpha = e_2 - e_1$  y  $\beta = 2e_1$  es el conjunto  $\{\beta = 2e_1, \beta + \alpha = e_1 + e_2, \beta + 2\alpha = 2e_2\}$ , una cuerda de longitud tres.

### 7.5. El ejemplo $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ ,

Recordemos que  $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{(2n+1) \times (2n+1)} : A + A^t = 0\}$  es un álgebra de Lie compleja, simple, de tipo  $B_n$ , de rango  $n$ , para todo  $n \geq 2$ , como se vio en la sección 2.4. No hace falta considerar el caso  $n = 1$  por el isomorfismo siguiente:

**Ejercicio 7.3.** Para  $n = 1$  probar que  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Consideremos la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h} := \{H \in \mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C}) \text{ de la forma } (*)\}$

$$(*) \quad H = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|c} 0 & ih_1 & & & & & \\ -ih_1 & 0 & & & & & \\ \hline & & 0 & ih_2 & & & \\ & & -ih_2 & 0 & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & ih_n \\ & & & & & -ih_n & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

Sean las funcionales lineales  $e_j(H) = h_j, 1 \leq j \leq n$ . Consideremos la siguiente forma real de  $\mathfrak{h}$  dada por

$$\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h} : \text{entradas} \in i\mathbb{R}\} = \{H \in \mathfrak{h} : e_j(H) \in \mathbb{R} \text{ para todo } j = 1, \dots, n\}$$

El sistema de raíces forma el conjunto  $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_k : k = 1, \dots, n\}$ . Para la descomposición  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha)$ , los espacios raíces tienen los generadores  $E_\alpha$  dados a continuación. Para cada  $\alpha = \pm e_i \pm e_j$  con  $i < j$ , definamos

$$x_{e_i - e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{e_i + e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad x_{-e_i + e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-e_i - e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

y finalmente sea

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_\alpha^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2n+1) \times (2n+1)}$$

la matriz en bloques de tamaño  $2 \times 2$  donde  $x_\alpha^t$  se ubica en el lugar del bloque  $ij$  y  $x_\alpha$  en el lugar  $ji$ . Es decir,  $E_\alpha$  tiene todas sus entradas iguales a cero salvo las 8 entradas correspondientes a los bloques  $2 \times 2$  de pares de índices indicados.

Para  $\alpha \pm e_k$ , sean

$$x_{e_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad x_{-e_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$$

y

$$E_\alpha = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -x_\alpha^t & 0 & 0 \end{array} \right)$$

donde  $x_\alpha$  y  $x_\alpha^t$  se ubican en los respectivos lugares  $k$ -ésimos.

### 7.6. El ejemplo $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ ,

Recordemos que  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} : A^t J + J A^t = 0\}$  donde  $J = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \text{Id}_n \\ \hline -\text{Id}_n & 0 \end{array} \right)$  es un álgebra de Lie compleja, simple, de tipo  $C_n$ , de rango  $n$ , para  $n \geq 3$ , como vimos en la sección 2.4. No hace falta considerar los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  dados los isomorfismos siguientes:



Consideremos la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  como en  $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$  pero a cada matriz se le elimina la última fila y la última columna. Explícitamente,  $\mathfrak{h} := \{H \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \text{ de la forma (***)}\}$

$$(***) \quad H = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & ih_1 & & & & & & \\ -ih_1 & 0 & & & & & & \\ \hline & & 0 & ih_2 & & & & \\ & & -ih_2 & 0 & & & & \\ \hline & & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & & & 0 & ih_2 \\ & & & & & & -ih_2 & 0 \end{array} \right)$$

Se definen las funcionales lineales  $e_j(H) = h_j, 1 \leq j \leq n$  y la forma real como en el caso  $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ :

$$\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h} : \text{entradas} \in i\mathbb{R}\} = \{H \in \mathfrak{h} : e_j(H) \in \mathbb{R} \text{ para todo } j = 1, \dots, n\}$$

Respecto de  $\mathfrak{h}$ , las raíces forman el conjunto  $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\}$ .

La descomposición en espacios raíces  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha)$  se obtienen de manera similar al caso  $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ , eliminando la última fila y columna y considerando sólo  $\alpha = \pm e_i \pm e_j$ .

Explícitamente, para  $\alpha = \pm e_i \pm e_j, i < j$ , sean como antes

$$x_{e_i - e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, x_{e_i + e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, x_{-e_i + e_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, x_{-e_i - e_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos como generador del espacio raíz correspondiente a la raíz  $\alpha$

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_\alpha^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$$

la matriz de bloques donde  $x_\alpha^t$  se ubica en el lugar  $ij$  y  $x_\alpha$  en el lugar  $ji$ . Es decir,  $E_\alpha$  tiene todas sus entradas iguales a cero salvo las 8 entradas correspondientes a los pares de índices indicados.

## 8. Subálgebras de Cartan abstractas

### 8.1. Espacios de pesos generalizados

En este capítulo, consideramos sólo álgebras de Lie sobre  $\mathbf{k} = \mathbb{C}$  salvo que se indique expresamente otra cosa; además, las álgebras de Lie y las representaciones de ellas son todas de dimensión finita.

Sea  $\mathfrak{h}$  un álgebra de Lie y  $V$  una representación de  $\mathfrak{h}$ . Si  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , podemos considerar el subespacio

$$V_\alpha^0 = \{v \in V : H(v) = \alpha(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

y más generalmente

$$V_\alpha = \{v \in V : (H - \alpha(H)\text{Id})^n(v) = 0 \text{ para algún } n \geq 0, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Si  $V_\alpha \neq 0$ , diremos que  $\alpha$  es un **peso** y que  $V_\alpha$  es un **espacio de peso generalizado**. Los elementos de  $V_\alpha$  se llaman vectores de peso generalizado.

**Proposición 8.1.** *Sea  $\mathfrak{h}$  un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y  $V$  una representación de dimensión finita de  $\mathfrak{h}$ , entonces existe una cantidad finita de pesos, los espacios de peso son estables por  $\mathfrak{h}$  y  $V$  es suma directa de espacios de peso.*

*Demostración.* Sea  $\alpha$  un peso, veamos que es invariante por  $\mathfrak{h}$ . Dado que

$$V_\alpha = \bigcap_{H \in \mathfrak{h}} V_{\alpha, H}$$

donde  $V_{\alpha, H} = \{v \in V : (H - \alpha(H)\text{Id})^n(v) = 0, n \gg 0\}$  para  $H$  fijo, basta ver que cada  $V_{\alpha, H}$  es estable por  $\mathfrak{h}$ . Como  $\mathfrak{h}$  es nilpotente,  $\text{ad}_H$  es nilpotente. Consideremos

$$\mathfrak{h}_{(m)} = \{Y \in \mathfrak{h} : \text{ad}_H^m(Y) = 0\}$$

Por ejemplo,  $\mathfrak{h}_{(1)}$  son los elementos que conmutan con  $H$ . Dado que  $\mathfrak{h}$  es nilpotente, la unión de los  $\mathfrak{h}_{(m)}$  es todo  $\mathfrak{h}$ . Veamos por inducción en  $m$  que  $V_{\alpha, H}$  es estable por  $\mathfrak{h}_{(m)}$ :

Para  $m = 1$ , si  $Y$  conmuta con  $H$ , entonces

$$(H - \alpha(H)\text{Id})^n Y(v) = Y(H - \alpha(H)\text{Id})^n(v) = 0$$

Supongamos ahora que  $V_{\alpha, H}$  es estable por  $\mathfrak{h}_{(m-1)}$ . Si  $Y \in \mathfrak{h}_{(m)}$  entonces  $[H, Y] \in \mathfrak{h}_{(m-1)}$  y

$$(H - \alpha(H)\text{Id})Y = [H, Y] + YH - Y\alpha(H)\text{Id} = [H, Y] + Y(H - \alpha(H)\text{Id})$$

Sea  $v$  es tal que  $(H - \lambda(H)\text{Id})^n v = 0$ . Como  $[Y, -]$  es una derivación del álgebra asociativa de endomorfismos, entonces

$$\begin{aligned} [(H - \alpha(H)\text{Id})^n, Y] &= \sum_{i+j=n-1} (H - \alpha(H)\text{Id})^i [(H - \alpha(H)\text{Id}), Y] (H - \alpha(H)\text{Id})^j \\ &= \sum_{i+j=n-1} (H - \alpha(H)\text{Id})^i [H, Y] (H - \alpha(H)\text{Id})^j \end{aligned}$$

Luego

$$(H - \lambda(H)\text{Id})^n Yv = [(H - \lambda(H)\text{Id})^n, Y]v + Y(H - \lambda(H)\text{Id})^n v$$

Por hipótesis inductiva,  $V_{\alpha, H}$  es estable por  $[H, Y]$ , luego la sumatoria correspondiente al corchete, en virtud de la fórmula anterior, es un elemento de  $V_{\alpha, H}$  y el último término es cero.

Sea ahora  $\{H_1, \dots, H_n\}$  una base de  $\mathfrak{h}$ . Para  $H_1$ , tenemos que  $V = \bigoplus V_{\alpha, H_1}$  es la descomposición en bloques de Jordan, reunidos los de mismo autovalor. En particular, la suma es directa. Como cada  $V_{\alpha, H}$  es estable, podemos considerar  $H_2$  actuando en cada  $V_{\alpha, H_1}$  y así sucesivamente en  $n$  pasos se concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 8.2.** *Sea  $\mathfrak{h}$  una subálgebra nilpotente de un álgebra de Lie compleja de dimensión finita  $\mathfrak{g}$ , entonces los espacios de pesos generalizados de  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$  en  $\mathfrak{g}$  satisfacen:*

1.  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$  con  $\Phi$  el conjunto de todos los pesos.
2. Si  $\mathfrak{g}_0$  denota el subespacio correspondiente al peso cero, entonces  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ .
3.  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , donde la inclusión se entiende por  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] = 0$  si  $\alpha + \beta$  no es un peso generalizado.

*Demostración.* La primera parte es la proposición anterior. La segunda, como  $\mathfrak{h}$  es nilpotente,  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$  es nilpotente en  $\mathfrak{h}$ . Para la última, primero verifiquemos la fórmula

$$(\text{ad}_H - (\alpha H + \beta H)\text{Id})[X, Y] = [(\text{ad}_H - \alpha H\text{Id})X, Y] + [X, (\text{ad}_H - \beta H\text{Id})Y]$$

y luego, por inducción

$$(\text{ad}_H - (\alpha H + \beta H)\text{Id})^n[X, Y] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\text{ad}_H - \alpha H\text{Id})^k X, (\text{ad}_H - \beta H\text{Id})^{n-k} Y]$$

$\square$

**Corolario 8.3.** *El espacio correspondiente al peso cero  $\mathfrak{g}_0$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ .*

## 8.2. Subálgebras de Cartan y elementos regulares

**Definición 8.4.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita, una **subálgebra de Cartan** es una subálgebra nilpotente  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ .

Si  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  es una subálgebra cualquiera, se define el **normalizador** de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}$  como

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

Es claro que siempre vale

$$\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_0$$

La primera inclusión es clara, la segunda es porque  $\text{ad}_H^n(X) = \text{ad}_H^{n-1}([H, X])$  y  $[H, X] \in \mathfrak{h}$ .

La cualidad de ser de Cartan está regulada exactamente por el normalizador, como se prueba a continuación.

**Proposición 8.5.** *Sea  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  una subálgebra de Lie nilpotente de  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan si y sólo si coincide con su normalizador.*

*Demostración.* Como siempre vale  $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_0$ , si  $\mathfrak{h}$  es de Cartan, la igualdad  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$  fuerza  $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .

Supongamos ahora  $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  pero  $\mathfrak{h}$  no es de Cartan, es decir  $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{h}$ ; entonces  $\mathfrak{h}$  actúa por  $\text{ad}$  en el espacio no nulo  $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$ . Como  $\mathfrak{h}$  es soluble, por el teorema de Lie sabemos que hay un vector no nulo  $\bar{x}$  que es autovector simultáneo para todo  $\mathfrak{h}$ . Dado que este elemento  $\bar{x} \in \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$ , el autovalor debe ser cero. Luego  $\text{ad}_H(\bar{x}) = 0$  módulo  $\mathfrak{h}$ , es decir, existe  $x \in \mathfrak{g}_0 \setminus \mathfrak{h}$  tal que  $[H, x] \in \mathfrak{h}$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ , luego  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ , lo cual es absurdo, porque  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  por hipótesis.  $\square$

**Teorema 8.6.** *Toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una subálgebra de Cartan.*

Para la demostración, necesitamos introducir la noción de *elemento regular*. Sea  $V$  una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $x \in \mathfrak{g}$ , recordemos que  $V_{0,x} = \{v \in V : x^n v = 0 \text{ para } n \gg 0\} = \{v \in V : x^{\dim V} v = 0\}$ . Por ejemplo, si  $x = 0$ ,  $V_{0,x} = V$ . Si en cambio  $x$  actúa en forma diagonal, sin autovalores nulos,  $V_{0,x} = 0$ . Si tomamos  $V = \mathfrak{g}^{\text{ad}}$  entonces  $x \in \mathfrak{g}_{0,x}$  luego en este caso  $\dim V_{0,x} \geq 1$  para todo  $x$ .

Consideremos

$$\ell_{\mathfrak{g}}(V) = \min_{x \in \mathfrak{g}} \dim V_{0,x};$$

como los valores  $\dim V_{0,x}$  son discretos, ese mínimo es alcanzado por algún elemento; a estos elementos los denominaremos regulares:

**Definición 8.7.** Con las notaciones del párrafo anterior, decimos que  $x \in \mathfrak{g}$  es **regular** con respecto a la representación  $V$  si

$$\dim V_{0,x} = \ell_{\mathfrak{g}}(V)$$

Denotemos por  $R_{\mathfrak{g}}(V)$  al conjunto de elementos regulares.

Dada una representación, es claro que *existen elementos regulares* y, en particular, existen para la representación adjunta. El teorema de existencia de subálgebras de Cartan se seguirá como corolario del siguiente teorema:

**Teorema 8.8.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja de dimensión finita y  $x$  un elemento regular de  $\mathfrak{g}$  con respecto a la representación adjunta, entonces  $\mathfrak{g}_{0,x}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .*

*Demostración.* Probemos primero que  $\mathfrak{g}_{0,x}$  es un álgebra de Lie nilpotente. Si  $\mathfrak{g}_{0,x}$  no fuera nilpotente,  $\mathfrak{g}_{0,x}$  no podría actuar nilpotentemente en sí misma por la adjunta, entonces el conjunto

$$\mathfrak{g}_{0,x} \supseteq Z = \{H \in \mathfrak{g}_{0,x} : ([H, -]|_{\mathfrak{g}_{0,x}})^n \neq 0, n = \dim \mathfrak{g}_{0,x}\}$$

es no vacío; además,  $Z$  es un abierto en la topología de Zariski.

Consideremos a la vez “fuera” de  $\mathfrak{g}_{0,x}$  el conjunto

$$\mathfrak{g}_{0,x} \supseteq W = \{H \in \mathfrak{g}_{0,x} : [H, -] : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,x} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,x}\}$$

que también es un abierto Zariski y es no vacío, pues  $x \in W$ . Concluimos que  $Z \cap W \neq \emptyset$ . Si tomamos  $y \in Z \cap W$  entonces

$$\dim V_{0,y} < \dim \mathfrak{g}_{0,x}$$

lo cual es absurdo porque  $x$  era un elemento regular; por lo tanto,  $\mathfrak{g}_{0,x}$  debe ser nilpotente.

Sabiendo que  $\mathfrak{g}_{0,x}$  es nilpotente, podemos descomponer  $\mathfrak{g}$  en espacios de pesos generalizados. Es claro que  $\mathfrak{g}_{0,x} \subseteq \mathfrak{g}_0$ , pero a la vez

$$\mathfrak{g}_0 = \bigcap_{y \in \mathfrak{g}_{0,x}} \mathfrak{g}_{0,y} \subseteq \mathfrak{g}_{0,x}$$

por lo tanto,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,x}$ . □

**Proposición 8.9.** *Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{h}$  es abeliana.*

*Demostración.* Demostaremos que  $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}) = 0$ , por lo tanto  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$  porque la forma de Killing es no degenerada en  $\mathfrak{g}$ .

Consideremos la acción adjunta de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}$ ; llamemos  $\Phi$  al conjunto de todos los pesos y descompongamos a  $\mathfrak{g}$  como suma de espacios de peso, para la cual sabemos en particular que  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  i.e.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right) = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

Como  $\mathfrak{h}$  es nilpotente, en particular es soluble, luego en alguna base  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$  actúa como matrices triangulares en  $\mathfrak{g}^{\text{ad}}$ . Si  $A, B, C$  son matrices triangulares, entonces  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ , lo cual implica que  $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{h}) = 0$ .

Por otra parte, si  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$  y  $H \in \mathfrak{h}$  entonces  $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  y  $[H, [x, y]] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ . Esto dice que  $\text{ad}_{H \text{ad}_x}(\mathfrak{g}_\beta) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ; además,  $\text{ad}_{H \text{ad}_x}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$ , luego la matriz de  $\text{ad}_{H \text{ad}_x}$  en alguna base tiene estructura de bloques fuera de la diagonal, por lo tanto su traza es cero, es decir  $\kappa(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ ; en particular  $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ , por lo tanto  $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}) = 0$ . □

**Teorema 8.10.** *Si  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  son dos subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie compleja  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita, entonces existe un automorfismo interior  $\psi \in \text{Int} \mathfrak{g}$  tal que  $\psi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ .*

Para la demostración de este enunciado, ver, por ejemplo, página 92 de [Kn].

Como corolario, todas las subálgebras de Cartan de  $\mathfrak{g}$  son isomorfas entre sí, en particular tienen la misma dimensión, que se denomina **rango** de  $\mathfrak{g}$ . Por ejemplo, el rango de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  es  $n - 1$ .

### 8.3. Sistemas de raíces

En esta sección, sea  $\mathfrak{g}$  semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Los pesos generalizados no nulos de la acción  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$  en  $\mathfrak{g}$  se denominan **raíces** de  $\mathfrak{g}$  con respecto a  $\mathfrak{h}$ . El conjunto de todas las raíces se denota por  $\Phi = \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ . La descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

se denomina descomposición en espacios de raíces de  $\mathfrak{g}$  y los elementos de  $\mathfrak{g}_\alpha$  se denominan vectores raíces. A continuación, enunciaremos propiedades de estos objetos, ya mencionadas en la sección 7.4 para los ejemplos clásicos.

**Proposición 8.11.** 1. Sean  $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$  y  $\alpha + \beta \neq 0$ , entonces  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ .

2. Si  $\alpha \in \Phi \cup \{0\}$ , entonces  $\kappa$  es no singular en  $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ .

3. Si  $\alpha \in \Phi$  entonces  $-\alpha \in \Phi$ .
4.  $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ , la forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  restringida a  $\mathfrak{h}$ , es no degenerada; como consecuencia, a cada  $\alpha \in \Phi$  le corresponde un único  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha(H) = \kappa(H, H_\alpha)$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ .
5. El conjunto  $\Phi$  de todas las raíces genera  $\mathfrak{h}^*$ .

*Demostración.* 1. Dado que  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  se sigue que, para  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $y \in \mathfrak{g}_\beta$ ,  $\text{ad}_x \text{ad}_y(\mathfrak{g}_\gamma) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$  si  $\gamma$  es raíz, y  $\text{ad}_x \text{ad}_y(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , por lo tanto, si  $\alpha + \beta \neq 0$ , la traza de la matriz de  $\text{ad}_x \text{ad}_y$  en cualquier base es siempre cero. (Por ejemplo, si se elige una base de  $\mathfrak{g}$  a partir de una base de  $\mathfrak{h}$  y vectores raíces, entonces las entradas diagonales de  $\text{ad}_x \text{ad}_y$  en esta base son todas cero).

2. Sea  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  no nulo; como  $\kappa$  es no degenerada, sabemos que debe existir  $x' \in \mathfrak{g}$  tal que  $\kappa(x, x') \neq 0$ . Utilizando la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

podemos escribir  $x' = \sum_{\beta \in \Phi \cup \{0\}} x'_\beta$ . Dado que  $\kappa(x, y) = 0$  para todo  $y \in \mathfrak{g}_\beta$  con  $\beta \neq -\alpha$ , si calculamos la forma de Killing a partir de esta descomposición, obtenemos

$$0 \neq \kappa(x, x') = \sum_{\beta \in \Phi \cup \{0\}} \kappa(x, x'_\beta) = \kappa(x, x'_{-\alpha})$$

i.e. el único término no nulo en la sumatoria anterior es  $\kappa(x, x'_{-\alpha})$ ; en particular,  $x'$  puede ser tomado en  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ .

3. Este ítem es consecuencia del ítem 2, pues no puede ser  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  y  $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$ .

4. Este ítem se obtiene también del ítem 2 para  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ .

5. Comprobar que  $\Phi$  genera  $\mathfrak{h}^*$  equivale a verificar que  $\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in \Phi$  implica  $H = 0$ . Sea  $H \in \mathfrak{h}^*$  tal que  $\alpha(H) = 0$  para todo  $\alpha \in \Phi$ . Como consecuencia de la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

obtenemos que  $\text{ad}_H$  es nilpotente. Dado que  $\mathfrak{h}$  es abeliana,  $\text{ad}_H \text{ad}_{H'}$  también es nilpotente para todo  $H' \in \mathfrak{h}$ , luego tiene traza cero, es decir,  $\kappa(H, H') = 0 \forall H' \in \mathfrak{h}$ . Pero como la forma de Killing restringida a  $\mathfrak{h}$  es no degenerada, esto implica que  $H = 0$ .  $\square$

A continuación, nos interesa comprobar que  $\mathfrak{g}_\alpha$  tiene dimensión uno, para cada  $\alpha \in \Phi$ . Con esta propiedad, además de verificar que en un álgebra de Lie semisimple sucede lo mismo que lo observado en  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , también nos libramos de la molesta noción de peso generalizado y tendremos simplemente

$$\boxed{\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [H, x] = \alpha(H)x\}}$$

Para ésto necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 8.12.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .

1. Para cada  $\alpha \in \Phi$ , existe  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  no nulo tal que  $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ .

2. Si  $\alpha \in \Phi$  y  $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  entonces  $[E_\alpha, x] = \kappa(E_\alpha, x)H_\alpha$ , donde  $E_\alpha$  es el del ítem 1.
3. Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , entonces  $\beta(H_\alpha)$  es un múltiplo racional de  $\alpha(H_\alpha)$ .
4. Si  $\alpha \in \Phi$ , entonces  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ .

*Demostración.* 1. Para cada raíz  $\alpha$ , consideremos la acción adjunta de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}_\alpha$ , entonces, por el teorema de Lie, existe un elemento no nulo  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  tal que  $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ .

2. Sabemos que  $[E_\alpha, x] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ . Como la forma de Killing restringida a  $\mathfrak{h}$  es no degenerada, por el ítem 4 de la proposición 8.11, tenemos la equivalencia

$$[E_\alpha, x] = \kappa(E_\alpha, x)H_\alpha \iff \kappa([E_\alpha, x], H) = \kappa(E_\alpha, x)\kappa(H_\alpha, H) \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

En el lado derecho de la igualdad, tenemos  $\kappa(E_\alpha, x)\kappa(H_\alpha, H) = \kappa(E_\alpha, x)\alpha(H)$  y en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \kappa([E_\alpha, x], H) &= -\kappa([x, E_\alpha], H) = -\kappa(x, [E_\alpha, H]) \\ &= \kappa(x, [H, E_\alpha]) = \kappa(x, \alpha(H)E_\alpha) = \kappa(x, E_\alpha)\alpha(H) \end{aligned}$$

3. Dado que la forma de Killing es no singular en  $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , podemos tomar  $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $\kappa(x_{-\alpha}, E_\alpha) = 1$ , esto dice que

$$[E_\alpha, x_{-\alpha}] = H_\alpha$$

Fijemos  $\beta \in \Phi$  y consideremos  $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ . Este subespacio es invariante por  $\text{ad}_{H_\alpha}$ , por  $\text{ad}_{x_{-\alpha}}$  y por  $E_\alpha$ . Calcularemos la traza de  $\text{ad}_{H_\alpha}$  en  $\mathfrak{g}'$  de dos maneras distintas. Por un lado, tiene que dar cero porque  $[E_\alpha, x_{-\alpha}] = H_\alpha$ , entonces

$$\text{tr}(\text{ad}_{H_\alpha}) = \text{tr}(\text{ad}_{E_\alpha} \text{ad}_{x_{-\alpha}} - \text{ad}_{x_{-\alpha}} \text{ad}_{E_\alpha}) = 0$$

y  $\mathfrak{g}'$  es estable por la acción de todos los elementos involucrados.

Por otra parte,  $H_\alpha$  actúa en  $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$  como endomorfismo con autovalor generalizado  $\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)$  (más eventualmente una parte nilpotente, que no contribuye a la traza), por lo tanto

$$0 = \text{tr}(\text{ad}_{H_\alpha})|_{\mathfrak{g}'} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)) \dim \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

Notar que en esta fórmula hay por lo menos un término, pues cuando  $n = 0$  tenemos  $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$ . Podemos reunir todos los términos con  $\beta(H_\alpha)$  y despejarlo a partir de  $\alpha(H_\alpha)$ , lo cual demuestra 3.

4. Si  $\alpha(H_\alpha) = 0$  entonces, por 3,  $\beta(H_\alpha) = 0 \quad \forall \beta \in \Phi$ , luego  $H_\alpha = 0$ , absurdo, porque  $\alpha \neq 0$ .  $\square$

**Proposición 8.13.** Si  $\alpha \in \Phi$ , entonces  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  y  $n\alpha \notin \Phi$  para ningún entero  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Como antes, tomemos  $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $\kappa(x_{-\alpha}, E_\alpha) = 1$ , por lo cual

$$[x_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

Consideremos el subespacio de  $\mathfrak{g}$  definido por

$$\mathfrak{g}'' = \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \left( \bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_{-n\alpha} \right)$$

Este subespacio es invariante por  $\text{ad}_{H_\alpha}$ , por  $\text{ad}_{E_\alpha}$  y por  $\text{ad}_{x_{-\alpha}}$ , por lo tanto, la traza de  $\text{ad}_{H_\alpha}$  en  $\mathfrak{g}''$  es cero como en la prueba del ítem 3 del lema 8.12.

Por otra parte,  $H_\alpha$  actúa por cero en  $\mathbb{C}H_\alpha$ , por  $\alpha(H_\alpha)$  en  $\mathbb{C}E_\alpha$  y por autovalor generalizado  $-n\alpha(H_\alpha)$  en  $\mathfrak{g}_{-n\alpha}$ , por lo tanto, tomando traza tenemos

$$0 = \text{tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}''}) = \alpha(H_\alpha) + 0 + \sum_{n \geq 1} -n\alpha(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha}$$

Como  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ , si dividimos todos los términos por este número, obtenemos

$$\sum_{n \geq 1} n \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 1$$

Dado que, en la sumatoria todos los términos son naturales o cero, esto dice que  $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$  y  $\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 0$  si  $n \geq 2$ . Intercambiando  $\alpha$  y  $-\alpha$  obtenemos el enunciado.  $\square$

### 8.4. Ejercicios

*Todas las álgebras de Lie que consideramos en esta sección de ejercicios son complejas.*

1. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra semisimple de dimensión tres. Probar que su subálgebra de Cartan tiene dimensión uno y, fija una subálgebra tal, demuestre que sólo hay dos raíces:  $\alpha$  y  $-\alpha$ . Concluya que  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .
2. Demuestre que toda álgebra de Lie semisimple con subálgebra de Cartan de dimensión uno es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .
3. Demuestre que no existen álgebras de Lie semisimples de dimensión 4 ni 5 ni 7.
4. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple de dimensión 6. Demuestre que una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  no puede tener dimensión 1, ni tampoco dimensión mayor que 3. ¿Cuántas raíces tiene entonces? ¿Hay alguna posibilidad aparte de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ?
5. Recordemos que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$  es un álgebra de Lie de dimensión 10. Sabiendo que  $\mathfrak{g}$  es semisimple (porque es reductiva), demuestre que  $\mathfrak{g}$  es simple.
6. Consideremos  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} : Xw + wX = 0\}$  donde  $w = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$ . Para  $n = 2$ , si escribimos un elemento como bloques de matrices dos por dos, tenemos  $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} : B = B^t, C = C^t \right\}$ . Sea  $\mathfrak{h}$  la subálgebra de matrices diagonales. Demuestre que es una subálgebra de Cartan, encuentre los subespacios raíz (recuerde que  $E_{ij}$  es autovector de  $\text{ad}_H$  si  $H$  es diagonal). ¿Cuántas raíces hay? ¿Existe alguna raíz de la forma  $\alpha + \beta$ ?

7. Considere la subálgebra  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$  generada por  $H_1 = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y

$$H_2 = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \text{ Demuestre que } \mathfrak{h} \text{ es una subálgebra de}$$

Cartan. ¿Cuántas raíces tiene? Compruebe que  $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ .

## 9. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Sea  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  el algebra de Lie compleja generada como espacio vectorial por las matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Sabemos que los elementos de esta base verifican las relaciones

$$[X, Y] = H, [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y$$

**Teorema 9.1.** *Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe una única clase de isomorfismo de representación compleja de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  de dimensión  $m$ . Si  $V$  es una representación tal, entonces existe una base  $v_0, \dots, v_{m-1}$  de  $V$  tal que la acción de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  está dada por*

$$\begin{aligned} H v_i &= (m - 1 - 2i)v_i, \quad 0 \leq i \leq m - 1, \\ X v_0 &= 0, \\ X v_i &= i(m - i)v_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ Y v_i &= v_{i+1}, \quad \text{donde } 0 \leq i \leq m - 1 \text{ y } v_m = 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $V$  una representación simple de dimensión  $m$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y sea  $v \neq 0$  un autovector de  $H$  de autovalor  $\lambda$ :

$$H v = \lambda v$$

de la relación  $[H, X] = 2X$  se sigue que

$$H(Xv) = [H, X]v + X(Hv) = 2Xv + X(\lambda v) = (2 + \lambda)Xv$$

*i.e.*  $Xv$  es autovector de  $H$  de autovalor  $\lambda + 2$  y siguiendo con este proceso,  $X^2v, X^3v, \dots$  son todos autovectores de respectivos autovalores  $\lambda + 4, \lambda + 6, \dots$  etc. Pero como  $V$  tiene dimensión finita, no pueden ser  $X^i v$  todos no nulos, porque al tener autovalores diferentes, serían todos linealmente independientes. Concluimos que existe algún  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $X^{k_0}v = 0$  y  $X^{k_0-1}v \neq 0$ .

Por lo tanto, hemos encontrado un  $v_0 \neq 0$ , (por ejemplo,  $v_0 := X^{k_0-1}v$  de antes) autovector de  $H$ , tal que  $Xv_0 = 0$ . Llamemos nuevamente  $\lambda$  al autovalor de  $v_0$  con respecto a  $H$ .

Ahora bien, el mismo procedimiento que hicimos con  $X$ , podemos hacerlo con  $Y$ , es decir,  $Yv_0$  es autovector de  $H$  con autovalor  $\lambda - 2$ ,  $Y^2v_0$  es autovector de  $H$  con autovalor  $\lambda - 4$ , etc. Como antes, existe un primer  $n_0$  tal que  $Y^{n_0}v_0 = 0$ .

Sea  $S$  el subespacio generado por  $v_0, v_1 = Yv_0, v_2 = Y^2v_0, \dots, v_{n_0-1} = Y^{n_0-1}v_0$ , entonces  $S$  es claramente estable por la acción de  $H$ , más aún,  $H$  actúa diagonalmente por

$$H v_i = (\lambda - 2i)v_i$$

y  $S$  también es estable por  $Y$ ; en efecto,  $Y v_i = Y^{i+1}v_0 = v_{i+1} \in S$  para todo  $0 \leq i \leq n_0 - 2$  e  $Y v_{n_0-1} = Y^{n_0}v_0 = 0$ . Si mostráramos que  $S$  es estable por  $X$ , entonces resultaría una subrepresentación y, como  $v_0 \neq 0$ , sería no nula. Dado que  $V$  es simple, deberá ser  $S = V$ .

Tenemos  $Xv_0 = 0$ . Si  $i \geq 0$ ,

$$X v_{i+1} = X(Y v_i) = [X, Y]v_i + Y(X v_i) = H v_i + Y(X v_i) = (\lambda - 2i)v_i + Y(X v_i)$$

si asumimos inductivamente que  $Xv_i \in S$ , entonces lo anterior dice que  $Xv_{i+1} \in S$ . Por lo tanto,  $S = V$ ; en particular,  $n_0 = \dim(S) = \dim(V) = m$ .

Para demostrar la fórmula de la acción, por construcción es claro que  $Xv_0 = 0$  y que  $Yv_i = v_{i+1}$  para todo  $0 \leq i \leq m-1$  si definimos  $v_m = 0$ . Comprobemos que  $Xv_i = i(m-i)v_{i-1}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  por inducción en  $i$ . Definamos  $v_{-1} = 0$ , entonces

$$Xv_0 = 0 = 0(m-0)v_{-1}$$

Ahora inductivamente, para  $i+1$ ,

$$\begin{aligned} Xv_{i+1} &= XYv_i = [X, Y]v_i + YXv_i = Hv_i + Yi(m-i)v_{i-1} = (\lambda - 2i)v_i + i(m-i)v_i \\ &= (\lambda - 2i + i(m-i))v_i \end{aligned}$$

Si  $\lambda$  fuera igual a  $m-1$ , tendríamos

$$\begin{aligned} \lambda - 2i + i(m-i) &= \lambda - 2i + i(\lambda - i + 1) = \lambda - i + i(\lambda - i) \\ &= (\lambda - i)(i + 1) = (i + 1)(m - (i + 1)) \end{aligned}$$

Para ver que  $\lambda = m-1$ , calculemos la traza de  $H|_V$  de dos maneras distintas. Sabemos que  $H|_V = X|_V Y|_V - Y|_V X|_V$ , luego su traza es cero. Por otra parte, como  $H$  es diagonal, su traza es la suma de sus autovalores:

$$0 = \text{tr}(H|_V) = \sum_{i=0}^{m-1} (\lambda - 2i) = m\lambda - 2 \sum_{i=0}^{m-1} i = m\lambda - 2 \frac{(m-1)m}{2} = m(\lambda - (m-1))$$

por lo tanto  $\lambda = m-1$ . □

## 9.1. El Casimir

**Proposición 9.2.** *En cada representación  $V$  de dimensión compleja  $m \in \mathbb{N}$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , el Casimir  $\omega = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}H^2 + XY + YX)$  actúa por  $\frac{(m-1)(m+1)}{8}$ .*

*Demostración.* Sabemos que el Casimir actúa por un escalar; por lo tanto, podemos tomar cualquier vector, y evaluar la acción allí. Elijamos por conveniencia el vector  $v_0$  de la base dada en la proposición 9.1.

El Casimir en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  está dado por  $\omega = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}H^2 + XY + YX)$ , entonces

$$\begin{aligned} \omega v_0 &= \frac{1}{8}H^2 v_0 + \frac{1}{4}(XY v_0 + YX v_0) \\ &= \frac{(m-1)^2}{8} v_0 + \frac{1}{4} Xv_1 \\ &= \frac{(m-1)^2}{8} v_0 + \frac{m-1}{4} v_0 \\ &= \left( \frac{(m-1)^2 + 2(m-1)}{8} \right) v_0 = \left( \frac{(m-1)(m+1)}{8} \right) v_0 \end{aligned}$$

□

**Corolario 9.3.** Sea  $V \neq \mathbb{C}$  una representación simple de dimensión finita de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , entonces  $\omega|_V = c_V \text{Id}$  con  $0 \neq c_V \in \mathbb{C}$ .

**Corolario 9.4.** Sea  $V$  una representación compleja de dimensión finita de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ; si  $\omega$  actúa por cero, entonces  $V = V^{\mathfrak{g}}$ .

*Demostración.* Por inducción en la dimensión de  $V$ . Si  $V$  es simple, es claro. Si  $V$  no es simple, entonces contiene una subrepresentación simple  $S \subseteq V$  y entonces  $\mathfrak{g}$  actúa trivialmente en  $S$ . Notar que entonces  $S \cong \mathbb{C}$  i.e.  $\dim S = 1$ .

También el Casimir actúa por cero en  $V/S$  y, por hipótesis inductiva,  $\mathfrak{g}$  actúa trivialmente en  $V/S$ . Sea  $\bar{v} \in V/S$ , entonces  $x.\bar{v} = 0$ , es decir que para todo  $v \in V$  y  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $x.v \in S$ . Sea  $\{s\}$  una base de  $S$ . Para cada  $v \in V$ , tenemos que  $x.v$  es un múltiplo de  $s$ , que denotamos por  $D(x) \in \mathbb{C}$ , o sea  $x.v = D(x)s$ .

Dado que  $\mathfrak{g}$  actúa trivialmente en  $S$ , para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$  tenemos que

$$y.(x.v) = y.D(x)s = 0$$

Simétricamente:

$$x.(y.v) = x.D(y)s = 0$$

entonces

$$x.(y.v) - y.(x.v) = [x, y].v = D([x, y])s = 0, \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Por lo tanto,  $D$  se anula en los conmutadores. Pero  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ , luego  $D \equiv 0$  y  $x.v = 0 \forall x \in \mathfrak{g}$ .  $\square$

**Corolario 9.5.** Si  $V$  es una representación compleja de dimensión finita de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , entonces  $\text{Ker}(\omega : V \rightarrow V) = V^{\mathfrak{g}}$ .

*Demostración.* Es claro que  $V^{\mathfrak{g}} \subseteq \text{Ker}(\omega|_V)$ . Por otra parte,  $\text{Ker}(\omega)$  es una subrepresentación, donde  $\omega$  actúa por cero; por lo tanto  $\text{Ker}(\omega|_V) = \text{Ker}(\omega|_V)^{\mathfrak{g}} \subseteq V^{\mathfrak{g}}$ .  $\square$

## 9.2. Lema de Whitehead y teorema de Weyl

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema 9.8, una de cuyas formulaciones es conocida como lema de Whitehead.

**Definición 9.6.** Sea  $V$  una representación simple de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Definimos el espacio de todas las derivaciones de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  como

$$\text{Der}(\mathfrak{g}, V) = \{D : \mathfrak{g} \rightarrow V : D([x, y]) = x.D(y) - y.D(x)\}$$

y el espacio de las derivaciones interiores de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  como

$$\text{InDer}(\mathfrak{g}, V) = \{D : \mathfrak{g} \rightarrow V : \exists v_0 \in V / D(x) = x.v_0\}.$$

**Observación 9.7.**  $\text{InDer}(\mathfrak{g}, V) \subseteq \text{Der}(\mathfrak{g}, V)$

En efecto, si  $D(x) = x.v_0$  entonces

$$D([x, y]) = [x, y].v_0 = x.(y.v_0) - y.(x.v_0) = x.D(y) - y.D(x)$$

**Teorema 9.8.** [Lema de Whitehead] Sea  $V$  una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\text{Der}(\mathfrak{g}, V) = \text{InDer}(\mathfrak{g}, V)$ .

El hecho clave es que el Casimir actúa por un escalar no nulo cuando la representación es simple y no trivial. Esto ya fue probado para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y también es cierto para cualquier semisimple  $\mathfrak{g}$ , hecho que se demuestra en el capítulo 13. Por lo tanto, daremos la demostración utilizando sólo ese hecho de la teoría de representaciones de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ; de esta manera, tendremos demostrado el teorema para una  $\mathfrak{g}$  semisimple cuando hayamos probado esta propiedad del Casimir para un álgebra de Lie semisimple cualquiera.

**Observación 9.9.** El Lema de Whitehead generaliza el teorema 5.28.

Empecemos con algunos lemas; el primero sólo utiliza el hecho de que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .

**Lema 9.10.** Sea  $V$  la representación trivial de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\text{Der}(\mathfrak{g}, V) = \text{InDer}(\mathfrak{g}, V)$ , i.e. vale el lema Whitehead para la representación trivial.

*Demostración.* Si  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  es una derivación, entonces para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$

$$f([x, y]) = xf(y) - yf(x) = 0$$

pues  $f(\mathfrak{g}) \subset V$  en donde  $\mathfrak{g}$  actúa trivialmente. Esto dice que  $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ , pero  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ , luego  $f \equiv 0$ .  $\square$

Supongamos demostrado que el Casimir de un álgebra de Lie semisimple actúa por un escalar no nulo en una representación simple no trivial, hecho que se demuestra en el capítulo 13.

**Lema 9.11.** Sea  $V \neq \mathbb{K}$  una representación simple de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\text{Der}(\mathfrak{g}, V) = \text{InDer}(\mathfrak{g}, V)$  (i.e. vale el lema de Whitehead para  $V$  simple,  $V \neq \mathbb{K}$ ).

*Demostración.* Sea  $f : \mathfrak{g} \rightarrow V$  una derivación. Sean  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq \dim(\mathfrak{g})}$  y  $\{x^i\}_{1 \leq i \leq \dim(\mathfrak{g})}$  bases de  $\mathfrak{g}$ , duales con respecto a la forma de Killing. Dado que el Casimir es invariante i.e.  $\omega \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ , vale la siguiente fórmula en  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , con  $y \in \mathfrak{g}$  cualquiera:

$$\sum_i [y, x_i] \otimes x^i + x_i \otimes [y, x^i] = 0$$

que, para cualquier transformación lineal  $f : \mathfrak{g} \rightarrow V$ , implica

$$\sum_i (yx_i - x_iy)f(x^i) + x_i f([y, x^i]) = 0$$

Si además  $f$  es una derivación,  $f[y, x] = yf(x) - xf(y)$ , entonces

$$0 = \sum_i (yx_i f(x^i) - x_i y f(x^i) + x_i y f(x^i) - x_i x^i f(y)) = y \left( \sum_i x_i f(x^i) \right) - \left( \sum_i x_i x^i \right) f(y)$$

Luego, como  $f(y) \in V$  y el Casimir actúa por un múltiplo no nulo  $c_V$ , tenemos

$$c_V f(y) = \left( \sum_i x_i x^i \right) f(y) = y \left( \sum_i x_i f(x^i) \right)$$

por lo tanto

$$f(y) = \frac{1}{c_V} y \cdot \left( \sum_i x_i f(x^i) \right)$$

es decir,  $f$  es una derivación interior.  $\square$

A continuación, finalizamos la demostración del Lema de Whitehead para una representación cualquiera de dimensión finita  $V$ .

*Demostración del teorema 9.8 en el caso general.* Sea  $V$  una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  y  $D : \mathfrak{g} \rightarrow V$  una derivación. Si  $V$  es simple, vale el lema de Whitehead para  $V$  y no hay nada que probar. La prueba en el caso no simple procede por inducción en la dimensión de  $V$ . Si  $V$  no es simple, admite una subrepresentación simple  $S$  y la dimensión de  $V/S$  es estrictamente menor que la dimensión de  $V$ , por lo tanto, vale el lema de Whitehead para  $V/S$  por hipótesis inductiva. Esto significa que si consideramos

$$\begin{aligned}\tilde{D} : \mathfrak{g} &\rightarrow V/S \\ x &\mapsto \pi(D(x))\end{aligned}$$

dado que  $\pi : V \rightarrow V/S$  es morfismo de representación,  $\tilde{D}$  es una derivación y, por hipótesis inductiva, es interior. Luego existe  $\bar{v}_0 \in V/S$  tal que

$$\tilde{D}(x) = x.\bar{v}_0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

Si tomamos  $v_0 \in V$  tal que  $\pi(v_0) = \bar{v}_0$ , tenemos entonces que la clase de  $D(x) - xv_0$  módulo  $S$  es cero, luego

$$D'(x) := D(x) - xv_0$$

es una derivación a valores en  $S$ . Sabemos que las derivaciones a valores en  $S$  son interiores, por lo tanto existe  $s_0 \in S$  tal que  $D'(x) = x.s_0$ . Como consecuencia de esta igualdad y de la anterior, obtenemos

$$x.s_0 = D(x) - xv_0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

o bien

$$D(x) = x.(s_0 + v_0), \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

Es decir,  $D$  es interior y el teorema queda demostrado.

**Observación 9.12.** De la teoría de representaciones de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  hemos deducido que en una representación simple de dimensión finita distinta a la trivial, el Casimir actúa por un escalar no nulo. Esto es cierto para cualquier álgebra de Lie semisimple, por lo tanto, cuando hayamos probado este hecho en el capítulo 13, quedará demostrado el lema de Whitehead para un álgebra de Lie semisimple cualquiera, y así también el siguiente corolario importantísimo de completa reducibilidad de las representaciones de dimensión finita.

**Teorema 9.13.** [Weyl: *Semisimplicidad o completa reducibilidad de las representaciones de dimensión finita*]. Sea  $V$  una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$ , entonces  $V \cong \bigoplus_i S_i$  con  $S_i$  subrepresentaciones simples.

*Demostración.* Si  $V$  es simple, no hay nada que probar. La prueba en el caso no simple procede por inducción en la dimensión de  $V$ . Si  $V$  no es simple, sea  $S \subset V$  una subrepresentación simple.

Sea  $p_0 : V \rightarrow S$  es una transformación lineal cualquiera tal que  $p_0|_S = \text{Id}_S$  entonces  $\text{Ker}(p_0)$  es un complemento directo de  $S$  en  $V$  como espacio vectorial, aunque no necesariamente  $\text{Ker}(p_0)$  es estable por la acción de  $\mathfrak{g}$ . Si  $p_0 : V \rightarrow S$  tuviera la propiedad adicional

de que para todo  $x \in \mathfrak{g}$   $p_0(x.v) = xp_0(v)$  para todo  $v \in V$ , entonces  $\text{Ker}(p_0)$  sería un complemento  $\mathfrak{g}$ -estable de  $S$  en  $V$  i.e.  $V = S \oplus \text{Ker}(p_0)$  suma directa de subrepresentaciones; y, por hipótesis inductiva,  $\text{Ker}(p_0)$  se descompondría como suma de subrepresentaciones simples, y la prueba concluiría.

Para encontrar una aplicación con las propiedades requeridas, fijemos  $p_0 : V \rightarrow S$  tal que  $p_0|_S = \text{Id}_S$  y consideremos transformaciones lineales de la forma

$$p = p_0 + q$$

con  $q : V \rightarrow S$  verificando que  $q(S) = 0$ . Sea entonces  $W = \{q : V \rightarrow S/q(S) = 0\}$ , que es una subrepresentación de  $\text{Hom}(V, S)$ . Definamos  $D : \mathfrak{g} \rightarrow W$  dada por

$$D(x)(v) = xp_0(v) - p_0(x.v)$$

Efectivamente la imagen de  $D$  está contenida en  $W$  pues, si  $s \in S$ ,

$$D(x)(s) = x.p_0(s) - p_0(x.s) = x.s - x.s = 0$$

Afirmamos que la transformación lineal  $D$  resulta una derivación; en efecto, notar que  $D(x) = [\rho(x), p_0]$  donde  $\rho(x)$  es la acción de  $x$  en la representación  $V$ , luego

$$\begin{aligned} D([x, y]) &= [\rho([x, y]), p_0] = [[\rho(x), \rho(y)], p_0] \\ &= [\rho(x), p_0], \rho(y) + [\rho(x), [\rho(y), p_0]] = [D(x), \rho(y)] + [\rho(x), D(y)] = x(D(y)) - y(D(x)) \end{aligned}$$

Por el lema de Whitehead, existe  $f \in W$  tal que  $D(x) = x.f$ , es decir, existe  $f : V \rightarrow S$  tal que  $f(S) = 0$  y

$$D(x)v = xp_0(v) - p_0(x.v) = xf(v) - f(x.v) \forall x \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$$

Si definimos  $p_1 = p_0 - f$ , y pasamos de miembro, obtenemos que

$$p_1(x.v) = x.p_1(v)$$

es decir,  $p_1 : V \rightarrow S$  es morfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos y como  $f$  se anula en  $S$ , también verifica  $p_1|_S = \text{Id}_S$ , por lo tanto  $\text{Ker}(p_1)$  es una subrepresentación que complementa a  $S$  en  $V$ .  $\square$

### 9.3. Construcción natural

Consideremos  $V = \mathbb{C}[X, Y]$ , el anillo de polinomios en dos variables y la aplicación

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Der}(\mathbb{C}[X, Y])$$

$$x \mapsto D_x = X\partial_Y$$

$$y \mapsto D_y = Y\partial_X$$

$$h \mapsto D_h = X\partial_X - Y\partial_Y$$

Resulta  $\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}[x, y]_m$ , suma directa de espacios de polinomios homogéneos de grado  $m$ . Esta es la descomposición de  $\mathbb{C}[x, y]$  como suma directa de subrepresentaciones simples, donde cada una de las representaciones simples de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  aparece una y solo una vez.

Por ejemplo  $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cdot 1$  es la representación trivial,  $V = \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$  es la representación standard de dimensión 2 de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . El espacio de polinomios homogéneos de grado dos:  $\mathbb{C}X^2 \oplus \mathbb{C}XY \oplus \mathbb{C}Y^2$  tiene dimensión 3 y es isomorfo a la representación adjunta, con el isomorfismo dado por  $XY \leftrightarrow h, X^2 \leftrightarrow x, Y^2 \leftrightarrow y$ .

## 9.4. Ejercicios

1. Sea  $V = \mathbb{C}^2$  la representación de definición de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , es decir, viendo a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \text{End}(\mathbb{C}^2)$ . Encuentre un isomorfismo explícito entre esta representación y  $V_2$ , donde  $V_2$  es la representación de dimensión dos dada en el Teorema 9.1.
2. Sea  $V_3$  la representación simple de dimensión 3 de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Encuentre un isomorfismo explícito entre esta representación (dada en la base del teorema 9.1) y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\text{ad}}$ . Mostrar de dos maneras distintas que  $V_3^* \cong V_3$  (isomorfismo de representaciones).
3. Hallar una base de  $\mathbb{C}[X, Y]_{m-1}$  = polinomios homogéneos de grado  $m - 1$  en donde la acción de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  coincida con las fórmulas del teorema 9.1.
4. Sea  $V_2$  la representación simple de dimensión 2 de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , ¿es  $V_2 \otimes V_2$  una representación simple? Si no ¿qué representaciones aparecen?
5. Considerar  $V_3 \otimes V_2$ . Por cuestiones dimensionales ¿cuáles son las posibles subrepresentaciones? ¿Cuáles son los posibles autovalores del Casimir?
6. Si  $V$  es un espacio vectorial, denotemos por  $\Lambda^2 V$  al subespacio vectorial de  $V \otimes V$  formado por los tensores antisimétricos, es decir, al subespacio generado por los tensores de la forma  $v \otimes w - w \otimes v$ . Muestre que si  $V$  es una representación de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\Lambda^2 V$  es una subrepresentación. ¿Se complementa?
7. Denotemos por  $\Lambda^3 V$  al subespacio vectorial de  $V \otimes V \otimes V$  formado por los tensores antisimétricos, es decir, al subespacio generado por los tensores de la forma

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma v_{\sigma 1} \otimes v_{\sigma 2} \otimes v_{\sigma 3}.$$

¿Qué dimensión tiene  $\Lambda^3 V$ ? (en términos de  $\dim V$ ). Muestre que si  $V$  es una representación de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , entonces  $\Lambda^3 V$  es subrepresentación de  $V \otimes V \otimes V$ . Muestre que para  $V = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ,  $\Lambda^3 \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ , es isomorfa a la representación trivial.

8. Denotemos por  $S^2(V)$  al subespacio de  $V \otimes V$  formado por tensores simétricos, es decir, el subespacio generado por tensores de la forma  $v \otimes w + w \otimes v$ . Mostrar que  $S^2(V^*)$  se identifica naturalmente con las formas bilineales simétricas en  $V$ . Para  $V = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , descomponga  $S^2(\mathfrak{g}^*)$  ( $\cong S^2(\mathfrak{g})$ ) como suma directa de simples. Concluya que  $\dim(S^2(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) = 1$ , por lo tanto, toda forma bilineal simétrica *invariante* es un múltiplo de la forma de Killing y todo 2-tensor simétrico es un múltiplo del Casimir.

## 10. Propiedades del sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple

### 10.1. Corolarios de $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  el sistema de raíces correspondiente a la acción de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}$ . Recordemos del capítulo 8 que  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición como suma de espacios raíces de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

Además, por la proposición 8.13, sabemos que  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ . Como consecuencia, obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 10.1.** *En  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  la forma de Killing está dada por*

$$\kappa(H, H') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)\alpha(H')$$

es decir,  $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha \otimes \alpha$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\text{ad}_H$  es diagonalizable y actúa por 0 en  $\mathfrak{h}$  y por  $\alpha(H)$  en  $\mathfrak{g}_\alpha$ . De la descomposición  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha)$ , obtenemos entonces que  $\text{ad}_H \text{ad}_{H'}$  también actúa por 0 en  $\mathfrak{h}$  y por  $\alpha(H)\alpha(H')$  en  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Tomando traza, dado que cada  $\mathfrak{g}_\alpha$  tiene dimensión uno, obtenemos

$$\kappa(H, H') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)\alpha(H')$$

□

Otra consecuencia del hecho de que  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  es el siguiente resultado.

**Corolario 10.2.** *Para toda  $\alpha \in \Phi$ , los vectores  $0 \neq E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  tales que  $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$  pueden ser elegidos de manera tal que  $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ . La subálgebra  $\mathfrak{sl}_\alpha$  generada por  $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha\}$  es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .*

*Demostración.* Como  $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  es no degenerada, si tomamos  $0 \neq E_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ , debe ser  $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) \neq 0$ , así que podemos modificar uno de los dos para obtener la normalización deseada.

Con la normalización anterior, tenemos

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

$$[H_\alpha, E_\alpha] = \alpha(H_\alpha)E_\alpha$$

$$[H_\alpha, E_{-\alpha}] = -\alpha(H_\alpha)E_{-\alpha}.$$

Ésta subálgebra de dimensión tres es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , normalizando convenientemente una vez más los vectores, por ejemplo sean

$$E'_\alpha = E_\alpha, \quad E'_{-\alpha} = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}E_{-\alpha}, \quad H'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha$$

entonces obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} [E'_\alpha, E'_{-\alpha}] &= H'_\alpha \\ [H'_\alpha, E'_\alpha] &= 2E'_\alpha \\ [H'_\alpha, E'_{-\alpha}] &= -2E'_\alpha. \end{aligned}$$

□

## 10.2. Corolarios de las acciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Integralidad

Utilizaremos ahora el conocimiento sobre las representaciones de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  para obtener aún más restricciones en los sistemas de raíces. Consideremos la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$ , es decir, a las raíces del tipo  $\beta + n\alpha$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 10.3.** *Sea  $\alpha \in \Phi$ ,  $\beta \in \Phi \cup \{0\}$ .*

1. *La  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  tiene la forma  $\beta + n\alpha$  donde  $-p \leq n \leq q$ , con  $p, q \geq 0$ , sin huecos; más aún,*

$$p - q = \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)}$$

*y en particular  $\frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ .*

2. *Si  $\beta + n\alpha$  nunca es cero, definimos  $\mathfrak{sl}_\alpha$  la copia isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  generada por  $H'_\alpha, E'_\alpha, E'_{-\alpha}$  y  $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ , entonces  $\mathfrak{g}'$  es una representación irreducible de  $\mathfrak{sl}_\alpha$ .*

*Demostración.* Si  $\beta + n\alpha = 0$  para algún  $n$ , el resultado ya lo sabíamos, pues los únicos múltiplos de  $\beta$  que pueden ser raíces son  $\pm\beta$ , así que supondremos  $\beta + n\alpha$  nunca cero y mostraremos 1 y 2 simultáneamente.

Sabemos que  $\text{ad}_{H'}$  se diagonaliza en  $\mathfrak{g}'$  y los autovalores son

$$(\beta + n\alpha)(H') = \frac{2}{\kappa(\alpha, \alpha)}(\beta + n\alpha)(H_\alpha) = \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} + 2n$$

que sabemos que son enteros. Como para distintos  $n \in \mathbb{Z}$ , los autovalores son diferentes, cualquier subespacio  $H'$ -invariante es suma directa de ciertos  $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$  y lo mismo para los  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -invariantes. Sea  $V$  un subespacio  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -invariante e irreducible y sean  $-p$  y  $q$ , respectivamente, el mínimo y el máximo  $n$  que aparece en  $V$ , es decir que los elementos de la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  correspondientes a elementos de  $V$  son

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta + 0, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

aunque toda la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  consiste eventualmente de

$$\dots, \beta - p\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta + 0, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + q\alpha, \dots$$

Sabemos que los autovalores de  $\text{ad}_{H'}$  en cualquier representación irreducible de dimensión finita son de la forma  $\lambda - 2i$  con  $\lambda = \dim V - 1, i = 0, \dots, \lambda$ . Como esos autovalores saltan de a dos, entonces el  $n$  que aparece en  $V$  salta de a uno. Por lo tanto

$$\lambda = \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} + 2q$$

$$-\lambda = \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} - 2p$$

Sumando miembro a miembro, dividiendo por dos y pasando de término, obtenemos:

$$\frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} = p - q$$

Si ahora  $V'$  es otra componente irreducible de  $\mathfrak{g}'$ , entonces, el argumento anterior aplicado a  $V'$  nos dice que

$$\frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} = p' - q'$$

donde  $-p'$  y  $q'$  son, respectivamente, el mínimo y el máximo  $n$  tal que  $0 \neq \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$  aparece en  $\mathfrak{g}'$ . Notar entonces que  $p - q = p' - q'$ . Como en la cuerda no hay huecos y  $V$  y  $V'$  están en suma directa, necesariamente  $-p' > q$  o  $q' < -p$ . Por simetría, es suficiente considerar sólo uno de los dos casos, digamos

$$-p' > q$$

luego  $p' < -q$  y

$$q' \geq -p' > q \geq -p$$

pero entonces

$$q' - p' > q - p$$

lo cual contradice el hecho de que deberían ser iguales.  $\square$

**Corolario 10.4.** Si  $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$  y  $\alpha \neq -\beta$ , entonces  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

*Demostración.* Ya sabemos que  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , queremos ver que vale la igualdad. Si  $\alpha = 0$  es claro, supongamos entonces que  $\alpha \neq 0$ .

Si  $\alpha = \beta$ , entonces  $2\alpha$  no es raíz y  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = 0 = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ . Lo mismo si  $\beta \neq 0$  y es un múltiplo entero de  $\alpha$  distinto de  $-\alpha$ . Si  $\beta = 0$ , tenemos que  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_0] = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}] = \mathfrak{g}_{\alpha+0}$ .

Si  $\beta + n\alpha$  nunca es cero, consideramos  $\mathfrak{sl}_\alpha$  actuando en  $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ . Vemos que los vectores raíces  $E_{\beta+n\alpha}$  corresponden, excepto eventualmente por un múltiplo escalar, a los vectores  $v_i$  del teorema 9.1. El único  $v_i$  donde  $E_\alpha$  actúa como cero es  $v_0$ , que corresponde a  $E_{\beta+q\alpha}$ . Si fuera  $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ , entonces  $q = 0$  y esto implica que  $\alpha + \beta$  no es raíz.  $\square$

**Corolario 10.5.** Sean  $\alpha, \beta$  raíces tales que  $\beta + n\alpha$  nunca es cero,  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $E_\alpha, E_{-\alpha}$  y  $E_\beta$  son vectores raíces de  $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$  y  $\mathfrak{g}_\beta$  respectivamente y  $p$  y  $q$  son los enteros de la proposición anterior, entonces

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]] = \frac{q(1+p)}{2} \alpha(H_\alpha) \kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) E_\beta$$

*Demostración.* Por conveniencia, dado que ambos miembros de la igualdad son lineales en  $E_\alpha$  y en  $E_{-\alpha}$ , podemos renormalizarlos de manera tal que  $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ . Si llamamos  $e = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} E_\alpha$ ,  $f = E_{-\alpha}$ ,  $h = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$ , entonces  $e, f, h$  son los generadores que nos dan el isomorfismo entre  $\mathfrak{sl}_\alpha$  y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y la fórmula que queremos probar es equivalente a

$$\frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} [f, [e, E_\beta]] = \frac{q(1+p)}{2} \kappa(\alpha, \alpha) E_\beta$$

o bien

$$[f, [e, E_\beta]] = q(1 + p)E_\beta$$

Sabemos que  $\mathfrak{g}'$  es un  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -módulo irreducible y que el vector  $E_{\beta+q\alpha}$  corresponde, a menos de múltiplo, a  $v_0$ . Como  $E_\beta$  es un múltiplo de  $(\text{ad}_f)^q(E_{\beta+q\alpha})$  entonces  $E_\beta$  es un múltiplo de  $v_q$ . Pero el Teorema 9.1 nos dice exactamente cómo actúan los generadores de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  en los  $v_i$ , tenemos entonces

$$[f, [e, E_\beta]] = q(\lambda - q + 1)E_\beta$$

donde  $\lambda = \dim \mathfrak{g}' - 1 = p + q$ , luego  $q(\lambda - q + 1) = q(p + 1)$ . □

### 10.3. Geometría en el espacio real generado por las raíces

**Corolario 10.6.** *Sea  $V$  el subespacio real generado por todas las raíces  $\alpha$  en  $\mathfrak{h}^*$ , entonces la restricción de la forma de Killing a  $V \times V$  es un producto interno. Más aún, si  $\mathfrak{h}_0$  denota el subespacio real generado por los  $H_\alpha$ , entonces  $\mathfrak{h}_0$  es una forma real de  $\mathfrak{h}$  y los elementos de  $V$  son exactamente las funciones lineales en  $\mathfrak{h}$  que toman valores reales en  $\mathfrak{h}_0$ , es decir,  $V \cong \mathfrak{h}_0^*$ , el dual real.*

*Demostración.* Sean  $\phi, \psi \in \mathfrak{h}^*$ , veamos entonces que

$$\kappa(\phi, \psi) = \kappa(H_\phi, H_\psi) = \sum_{\beta \in \Phi} \beta(H_\phi)\beta(H_\psi) = \sum_{\beta \in \Phi} \kappa(\beta, \phi)\kappa(\beta, \psi)$$

La primera y la última igualdad son por definición, la igualdad del medio es por el corolario 10.1 Como consecuencia,  $\kappa(\phi, \phi) = \sum_{\beta \in \Phi} \beta(H_\phi)^2$  para cualquier  $\phi \in \mathfrak{h}^*$ . Más en particular, si  $\alpha$  es raíz,

$$\kappa(\alpha, \alpha) = \sum_{\beta \in \Phi} \kappa(\beta, \alpha)^2$$

Utilizando, para cada  $\beta$ , la fórmula  $p_\beta - q_\beta = \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \alpha)}$ , obtenemos

$$\kappa(\alpha, \alpha) = \sum_{\beta \in \Phi} \left( (p_\beta - q_\beta) \frac{1}{2} \kappa(\alpha, \alpha) \right)^2$$

entonces, dado que  $\kappa(\alpha, \alpha) \neq 0$  (item 4 del lema 8.12), podemos despejar

$$\kappa(\alpha, \alpha) = \frac{4}{\sum_{\beta \in \Phi} (p_\beta - q_\beta)^2}$$

y por lo tanto  $\kappa(\alpha, \alpha)$  es un número racional no nulo. Esto implica primero que  $\kappa(\alpha, \beta)$ , que es un múltiplo racional de  $\kappa(\alpha, \alpha)$  es a su vez racional, en particular es real, y como consecuencia, si  $\phi \in \mathfrak{h}^*$  es una combinación real de raíces, digamos  $\phi = \sum_{\alpha \in \tilde{\Phi}} c_\alpha \alpha$  con  $c_\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\kappa(\phi, \phi) = \sum_{\beta \in \Phi} \kappa(\beta, \phi)^2 = \sum_{\beta \in \Phi} \left( \sum_{\alpha \in \tilde{\Phi}} c_\alpha \kappa(\beta, \alpha) \right)^2 \geq 0$$

por ser suma de números reales al cuadrado. A su vez, esa suma da cero si y sólo si cada cuadrado es cero, y en ese caso se tendría  $0 = \kappa(\beta, \phi)$  para todo  $\beta$ , y como  $\kappa$  es no degenerada se tiene que la única posibilidad es  $\phi = 0$ . Con esto hemos demostrado que  $\kappa$  restringida a las combinaciones lineales reales de raíces, es definida positiva.

El resto de la proposición es standard, se deja como ejercicio al lector. □

Dado un vector  $\alpha$  en un espacio con producto interno  $(-, -)$ , se puede considerar la reflexión con respecto a un vector  $\alpha$  a la transformación lineal que deja fijo el hiperplano ortogonal a  $\alpha$  y manda  $\alpha$  en  $-\alpha$ . Se puede ver fácilmente que la transformación lineal

$$\psi \mapsto s_\alpha(\psi) = \psi - \frac{2(\alpha, \psi)}{|\alpha|^2} \alpha$$

tiene esas propiedades, luego ésta es la fórmula de la reflexión con respecto a  $\alpha$ .

**Proposición 10.7.** *Para toda raíz  $\alpha$ , la reflexión  $s_\alpha$  con respecto a  $\alpha$  preserva  $\Phi$ .*

*Demostración.* Sea  $\beta$  una raíz, entonces

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2} \alpha = \beta - (p - q)\alpha = \beta + (q - p)\alpha$$

Como  $-p \leq q - p \leq q$ , entonces  $\beta + (q - p)\alpha$  está en la  $\alpha$ -cuerda que pasa por  $\beta$ , y no puede ser cero porque las reflexiones preservan la norma, por lo tanto  $s_\alpha(\beta)$  es una raíz.  $\square$

## 11. Axiomática de los sistemas de raíces

### 11.1. Reflexiones en el espacio euclídeo

Sea  $E$  un espacio euclídeo de dimensión finita, es decir, un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  munido de una forma bilineal, simétrica, definida positiva  $\kappa(-, -)$ , i.e. *un espacio producto interno real*.

Una reflexión es una transformación lineal que deja fijo un hiperplano y transforma al vector normal al hiperplano en su negativo. Toda reflexión es una transformación lineal ortogonal, es decir, preserva el producto interno. Todo vector no nulo  $\alpha$  determina una reflexión  $\sigma_\alpha$ : la reflexión con respecto al hiperplano ortogonal  $P = \{\beta : \kappa(\alpha, \beta) = 0\}$ . Dado que el número  $2 \frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)}$  ocurre frecuentemente, se abreviará por  $\langle \beta, \alpha \rangle$ . Notar que  $\langle -, - \rangle$  es lineal sólo en la primera variable.

Recordemos que la fórmula explícita de la reflexión con respecto al hiperplano  $P$  es

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

pues es claro que esta transformación lineal deja fijo a  $\beta$  si  $\kappa(\beta, \alpha) = 0$  y  $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ .

### 11.2. Sistemas de raíces

Un subconjunto  $\Phi$  de un espacio euclídeo  $E$  se llama un **sistema de raíces** en  $E$  si satisface los siguientes axiomas:

- (R1) es finito, genera  $E$  y no contiene al 0.
- (R2) Si  $\alpha \in \Phi$ , los únicos múltiplos de  $\alpha$  en  $\Phi$  son  $\pm\alpha$ .
- (R3) Si  $\alpha \in \Phi$ , la reflexión  $\sigma_\alpha$  deja  $\Phi$  invariante.
- (R4) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , entonces  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ .

Para un sistema de raíces  $\Phi$ , se define el **grupo de Weyl**  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Phi)$  como el subgrupo del grupo ortogonal de  $E$  generado por  $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \Phi\}$ . Notar que  $\mathcal{W}$  puede considerarse como un subgrupo de las permutaciones del conjunto de raíces y, por lo tanto, es finito.

*Ejemplos de sistemas de raíces con  $V = \mathbb{R}^2$*

Son los correspondientes a las álgebras de Lie semisimples compleja de rango 2:

$$A_1 \oplus A_1; A_2; B_2 \cong C_2; G_2.$$

En esta lista, las álgebras de Lie son todas simples, excepto la de tipo  $A_1 \oplus A_1$ .

**Teorema 11.1.** *El conjunto de raíces de un álgebra de Lie semisimple compleja respecto de una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  es un sistema de raíces en  $\mathfrak{h}_0^*$ .*

El siguiente lema resume las propiedades de sistemas de raíces.

**Lema 11.2.** *Sea  $\Phi$  un sistema de raíces en un espacio euclídeo  $E$ , sean  $\alpha, \beta \in \Phi$  entonces*

1.  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ .
2. Si  $\beta \neq \pm \alpha$  y  $|\alpha| \geq |\beta|$  entonces  $\langle \beta, \alpha \rangle = 0, \pm 1$ .
3. Si  $\kappa(\alpha, \beta) > 0$  entonces  $\alpha - \beta \in \Phi$ . Si  $\kappa(\alpha, \beta) < 0$  entonces  $\alpha + \beta \in \Phi$ .
4. Si  $\alpha, \beta \in \Phi$  pero  $\alpha \pm \beta \notin \Phi$  entonces  $\kappa(\alpha, \beta) = 0$ .
5. La  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  tiene a lo sumo 4 elementos. Más precisamente consiste de  $\{\beta + m\alpha : -p \leq m \leq q\} \subset \Phi$  donde  $p, q \geq 0$  y  $p - q = \langle \beta, \alpha \rangle$ .

*Demostración.* 1. Sean  $0 \neq \alpha, \beta \in \Phi \subset E$ . Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|\kappa(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$$

entonces

$$|r \cdot s| = \left| \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\beta, \beta)} \cdot \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \right| \leq 4$$

y vale la igualdad si y sólo si  $\beta = c\alpha$  con  $c = \pm 1$  pues  $\alpha$  y  $\beta$  son raíces. En caso de igualdad, obtenemos  $|r| = |s| = 2$ . En el otro caso,  $|r \cdot s| < 4$ , es decir  $|r| \cdot |s| \leq 3$  y la conclusión es obvia.

2. Si  $\beta \neq \pm \alpha$  y  $|\alpha| \geq |\beta|$  entonces

$$s = |\langle \alpha, \beta \rangle| = \left| \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\beta, \beta)} \right| \geq \left| \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \right| = |\langle \beta, \alpha \rangle| = r$$

desigualdad de enteros cuyo producto es menor ó igual que tres y no son ambos iguales a dos (este caso ocurriría sólo si  $\beta = \pm \alpha$ ); en consecuencia el más chico es menor ó igual que uno.

3. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\alpha$  y  $\beta$  son raíces no proporcionales, y que  $|\alpha| \leq |\beta|$ . La hipótesis  $\kappa(\alpha, \beta) > 0$  y el ítem 2 implican

$$\frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\beta, \beta)} = \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\beta|^2} = 1$$

Por lo tanto

$$\alpha - \beta = \alpha - \left( \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\beta|^2} \right) \beta = s_\beta(\alpha) \in \Phi$$

El caso  $|\alpha| \leq |\beta|$  se obtiene reemplazando a  $\beta$  por  $-\beta$ .

4. Se obtiene como consecuencia directa del ítem 3.

5. Sean  $-p$  y  $q$ , respectivamente, el mínimo y el máximo  $n$  tal que  $\beta + n\alpha \in \Phi \cup \{0\}$ . Si la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  tuviera huecos existirían  $r, s \in \mathbb{Z}$  con  $r < s - 1$  tales que  $\beta + r\alpha \in \Phi \cup \{0\}$  pero  $\beta + (r+1)\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$  y  $\beta + s\alpha \in \Phi \cup \{0\}$  pero  $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ . El ítem 3 implica

$$\kappa(\beta + r\alpha, \alpha) \geq 0 \quad \text{y} \quad \kappa(\beta + s\alpha, \alpha) \leq 0$$

Restando la segunda desigualdad de la primera, obtenemos

$$(r - s)|\alpha|^2 \geq 0$$

lo cual implica  $r \geq s$  que es absurdo. Concluimos que la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  no tiene huecos; en particular, la longitud de la cuerda es igual a  $p + q + 1$ .

A continuación,

$$s_\alpha(\beta + n\alpha) = s_\alpha(\beta) + ns_\alpha(\alpha) = \beta - \left( \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2} \right) \alpha - n\alpha = \beta - \left( n + \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2} \right) \alpha$$

Esto dice que la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  es estable por la reflexión  $s_\alpha$ . Además, el hecho  $-p \leq n \leq q$  implica  $-q \leq n + \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2} \leq p$ . Tomando  $n = q$  se obtiene  $\frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2} \leq p - q$ ; por otra parte, tomando  $n = -p$  se obtiene  $\frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2} \geq p - q$ .

Finalmente, calculemos el largo de la cuerda. Sea el elemento  $\tilde{\beta} := \beta + q\alpha$ , la raíz de la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  que se encuentra "más a la derecha". Consideremos la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\tilde{\beta}$ , que coincide con la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$ , pero con  $\tilde{q} = 0$  y  $\tilde{p} + 1$  igual a la longitud de la cuerda; por lo tanto, esta longitud es igual a

$$\tilde{p} + 1 = \tilde{p} - \tilde{q} + 1 = \frac{2\kappa(\alpha, \tilde{\beta})}{|\alpha|^2} + 1 \leq 3 + 1 = 4$$

□

### 11.3. Raíces simples

Un subconjunto  $\Delta \subset \Phi \subset E$  se dice un **sistema de raíces simples**, si

1.  $\Delta$  es una base de  $E$  como espacio vectorial
2. Cada raíz  $\beta \in \Phi$  se escribe como  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$  con todos los coeficientes  $c_\alpha$  enteros, todos  $\geq 0$  ó todos  $\leq 0$ .

Notar que la escritura  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$  es única pues  $\Delta$  es una base. Además, el cardinal de  $\Delta$  es  $|\Delta| = \ell = \dim E$ ; en el caso de  $E = \mathfrak{h}_0^*$  y  $\Phi$  el sistema de raíces asociado,  $|\Delta| = \text{rank } \mathfrak{g}$ . Se define el **nivel** o **altura** de una raíz  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ , relativa a  $\Delta$ , al número entero  $\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha$ .

**Teorema 11.3.** *Todo sistema de raíces  $\Phi$  admite un sistema de raíces simples.*

La demostración se obtendrá como corolario de la proposición 11.5.

**Observación 11.4.** Si  $\Delta$  es un sistema de raíces simples,  $\alpha, \beta \in \Delta$ , entonces  $\kappa(\alpha, \beta) \leq 0$  y  $\alpha - \beta$  no es raíz.

*Demostración.* En efecto, si ocurriera que  $\kappa(\alpha, \beta) > 0$  entonces  $\alpha - \beta$  sería raíz y tendríamos una raíz que se escribe como combinación lineal con coeficientes que son enteros, pero de signos diferentes. □

Volviendo al teorema, para determinar las raíces positivas y las negativas hacemos la siguiente construcción. Sea  $E$  un espacio euclídeo que contiene al sistema de raíces  $\Phi$ . Para  $\gamma \in E$  definimos

$$\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi : \kappa(\alpha, \gamma) > 0\}$$

es decir,  $\Phi^+(\gamma)$  consiste de aquellas raíces que quedan del “lado positivo” *i.e.* del mismo lado que  $\gamma$ , con respecto al hiperplano ortogonal a  $\gamma$ .

Para cada  $\alpha \in \Phi$ , llamemos  $P_\alpha$  al hiperplano ortogonal a  $\alpha$ . Sabemos que una unión finita de hiperplanos no puede cubrir a todo el espacio, luego

$$E \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \right) \neq \emptyset$$

Tomemos  $\gamma \in E \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \right)$ , entonces es claro que si  $\alpha$  es raíz, entonces  $\kappa(\gamma, \alpha) > 0$  ó bien  $\kappa(\gamma, \alpha) < 0$ , en el segundo caso tendremos  $\kappa(\gamma, -\alpha) > 0$ , es decir:

$$\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg -\Phi^+(\gamma)$$

Decimos entonces que  $\Phi^+(\gamma)$  es una elección de **raíces positivas** y que  $\Phi^-(\gamma) := -\Phi^+(\gamma)$  es el conjunto de **raíces negativas**.

Dentro del conjunto de raíces positivas, decimos que una raíz  $\alpha$  es **descomponible** si existen  $\beta_1, \beta_2$  raíces positivas con  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ , en caso contrario, diremos que  $\alpha$  es **indescomponible**. El teorema 11.3 quedará demostrado luego de probar el siguiente resultado

**Proposición 11.5.** *Sea  $\gamma \in E \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \right)$ , entonces el conjunto  $\Delta(\gamma)$  de raíces positivas indescomponibles es un sistema de raíces simples y todo sistema de raíces simples es de esta forma.*

*Demostración.* En cuatro pasos:

1. *Cada raíz positiva es combinación lineal entera no negativa de raíces simples.* En efecto, fijemos  $\gamma \in E \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \right)$  y consideremos todos los valores  $\kappa(\gamma, \alpha)$  donde  $\alpha$  es una raíz positiva que no se pueda escribir como combinación entera no negativa de raíces indescomponibles. Tomemos  $\alpha$  tal que ese valor sea mínimo. Si  $\alpha$  fuera indescomponible, tendríamos un absurdo pues  $\alpha = 1 \cdot \alpha$  es combinación lineal entera no negativa de raíces simples. Si  $\alpha$  se descompone, supongamos  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  con  $\beta_i$  positivas, entonces

$$\kappa(\gamma, \alpha) = \kappa(\gamma, \beta_1) + \kappa(\gamma, \beta_2)$$

donde cada término es estrictamente positivo, luego  $\kappa(\gamma, \beta_i) < \kappa(\gamma, \alpha)$ ; la minimalidad de  $\kappa(\gamma, \alpha)$  implica que  $\beta_i$  es combinación lineal entera no negativa de raíces simples, y, por lo tanto,  $\alpha$  también, absurdo. Concluimos que no hay raíces positivas que no sean combinación lineal entera no negativa de raíces simples.

2. *Si  $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$  entonces  $\kappa(\alpha, \beta) \leq 0$  salvo cuando  $\alpha = \beta$ .* En efecto, si  $\kappa(\alpha, \beta) > 0$ , entonces  $\alpha - \beta$  sería raíz. Hay dos posibilidades,  $\alpha - \beta$  es positiva ó  $\beta - \alpha$  es positiva. En el primer caso,  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ , luego  $\alpha$  se descompondría, absurdo. El otro caso es análogo.

3.  $\Delta(\gamma)$  es un conjunto linealmente independiente. Si no lo fuera, supongamos

$$0 = \sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha$$

con  $r_\alpha \in \mathbb{R}$ . Separando los índices entre los  $\alpha$  tales que  $r_\alpha > 0$  y los  $\alpha$  donde  $r_\alpha < 0$  podemos escribir

$$\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$$

con  $s_\alpha, t_\beta > 0$  y el conjunto  $\{\alpha \text{ tales que } s_\alpha := r_\alpha > 0\}$  disjunto de  $\{\beta \text{ tales que } t_\beta := -r_\beta > 0\}$ . Llamemos  $\epsilon := \sum s_\alpha \alpha$ , luego

$$\kappa(\epsilon, \epsilon) = \sum_{\alpha, \beta} s_\alpha t_\beta \kappa(\alpha, \beta)$$

y  $\kappa(\alpha, \beta) \leq 0$  pues son raíces indescomponibles diferentes, por lo tanto  $\epsilon$  tiene norma al cuadrado menor o igual que cero, luego  $\epsilon = 0$ . Pero entonces

$$0 = \kappa(\gamma, \epsilon) = \sum_{\alpha} s_\alpha \kappa(\gamma, \alpha)$$

y como  $\kappa(\gamma, \alpha) > 0$  obtenemos  $s_\alpha = 0$  para todo  $\alpha$  que aparece en la suma. De manera similar los  $t_\beta$  deben ser cero para todo  $\beta$ .

Notar que  $\Delta(\gamma)$  es un sistema de generadores, pues genera  $\Phi$ , que, a la vez, por (R1), genera a  $E$ ; por lo tanto hemos demostrado que es una base de  $E$ .

4. Todo sistema de raíces simples  $\Delta$  es de la forma  $\Delta(\gamma)$ .

Dado  $\Delta$  un sistema de raíces simples, tomemos  $\gamma$  tal que  $\kappa(\gamma, \alpha) > 0$  para todo  $\alpha \in \Delta$ . Del hecho de que la intersección de semiespacios dados por una base es un conjunto no vacío (ejercicio!) sabemos que un  $\gamma$  tal debe existir. Es claro que  $\Phi^+ \subseteq \Phi^+(\gamma)$ , pero como también debe valer  $\Phi^- \subseteq \Phi^-(\gamma)$  entonces vale la igualdad. Es claro también que  $\Delta$  consiste de elementos indescomponibles, por lo tanto  $\Delta \subseteq \Delta(\gamma)$ , pero como ambas son base de  $E$ , tienen el mismo cardinal, y por lo tanto, coinciden.

□

**Proposición 11.6.** Sea  $E$  un espacio euclídeo con sistema de raíces  $\Phi$  y  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  un sistema de raíces simples, entonces  $\mathcal{W}(\Delta)$  está generado por las reflexiones  $s_{\alpha_i}$  con  $\alpha_i \in \Delta$ . Además, si  $\beta \in \Phi$  existen  $\alpha_j \in \Delta$  y  $w \in \mathcal{W}(\Delta)$  tales que  $\beta = w(\alpha_j)$ .

*Demostración:* [Kn], proposición 2.62.

## 11.4. Matriz de Cartan

Sea  $E$  un espacio euclídeo,  $\Phi$  un conjunto de raíces y  $\Delta$  un sistema de raíces simples, que enumeramos  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ; la matriz  $A$  de coeficientes

$$A_{ij} := \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

se denomina la **matriz de Cartan** de  $\Phi$ . Sus coeficientes  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)}$  son enteros y se denominan enteros de Cartan.

**Ejemplo 11.7.** Para rango 2, las matrices de Cartan son las de los siguientes tipos

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cada matriz de Cartan depende de  $\Delta$  y de una enumeración; distintas enumeraciones producen matrices de Cartan conjugadas por matrices de permutación. Recordemos que toda matriz de permutación  $P$  es la matriz correspondiente a una transformación lineal que permuta los elementos de una base; en particular, es inversible y consiste de coeficientes 0 y 1; al conjugar por  $P$  se obtiene la matriz de la transformación lineal en la nueva base que no es más que una reordenación de la base anterior.

**Propiedades de las matrices de Cartan:**

1.  $A_{ij} \in \mathbb{Z}$  para todo  $ij$ .
2.  $A_{ii} = 2$ , i.e. los coeficientes de la diagonal son todos iguales a 2 pues  $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} = 2$ .
3.  $A_{ij} \leq 0$  para todo  $i \neq j$ .
4.  $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$
5. Existe una matriz diagonal  $D$  tal que  $D_{ii} > 0$  y  $DAD^{-1}$  es simétrica definida positiva, en particular  $A$  es no singular. Más precisamente,  $D_{ii} = |\alpha_i| = \kappa(\alpha_i, \alpha_i)^{\frac{1}{2}}$  y  $(DAD^{-1})_{ij} = 2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)$ , que son los coeficientes de la matriz del producto interno en  $E$ .

**Proposición 11.8.** La matriz de Cartan determina  $\Phi$  a menos de isomorfismo.

Un enunciado equivalente a la proposición anterior es el siguiente.

**Proposición 11.9.** Sean  $(E, \Phi)$  y  $(E', \Phi')$  dos espacios euclídeos con sistemas de raíces  $\Phi$  y  $\Phi'$ , respectivamente. Si  $\Delta$  es un sistema de raíces simples de  $\Phi$ ,  $\Delta'$  es un sistema de raíces simples de  $\Phi'$  y existe una función biyectiva  $\tau : \Delta \rightarrow \Delta'$  que verifica

$$\frac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{2\kappa(\tau\alpha_i, \tau\alpha_j)}{\kappa(\tau\alpha_i, \tau\alpha_i)}$$

entonces  $\tau$  se extiende a un isomorfismo entre  $E$  y  $E'$  induciendo un isomorfismo entre  $\Phi$  y  $\Phi'$ .

*Demostración.* Es claro que una biyección entre las bases provee un único isomorfismo lineal entre los espacio vectoriales  $E$  y  $E'$ , que seguiremos llamando  $\tau$ . Queremos probar que  $\tau\Phi = \Phi'$ .

La hipótesis de preservar los enteros de Cartan asegura que, para  $\alpha, \beta \in \Delta$

$$\sigma_{\tau\alpha}(\tau\beta) = \tau\beta - \frac{2\kappa(\tau\alpha, \tau\beta)}{\kappa(\tau\alpha, \tau\alpha)}\tau\alpha = \tau\beta - \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \alpha)}\tau\alpha = \tau\left(\beta - \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \alpha)}\alpha\right) = \tau(\sigma_\alpha(\beta))$$

Esta igualdad dice que la imagen por  $\tau$  de  $\sigma_\alpha(\beta)$  pertenece a  $\Phi'$ , pues es el reflejado de una raíz. Además, toda  $\gamma \in \Phi$  se puede escribir en la forma  $\gamma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}(\beta)$ , con  $\alpha_i, \beta \in \Delta$  (proposición 11.6), entonces

$$\tau\gamma = \sigma_{\tau\alpha_1} \cdots \sigma_{\tau\alpha_k}(\tau\beta) \in \Phi'$$

Por lo tanto,  $\tau\Phi \subset \Phi'$ .

Para la contención  $\tau\Phi \supset \Phi'$ , podemos argumentar del mismo modo para  $\tau^{-1}$  o bien utilizar un razonamiento análogo en  $\Phi'$ . Es decir, si  $\gamma' \in \Phi'$  existe  $w \in W$  tal que  $w\gamma'$  es una raíz simple; escribamos  $w^{-1} = \sigma_{\alpha'_1} \cdots \sigma_{\alpha'_k}$ , producto de reflexiones con respecto a raíces simples, entonces

$$\gamma' = \sigma_{\alpha'_1} \cdots \sigma_{\alpha'_k}(\beta')$$

donde  $\beta' \in \Delta'$ . Por otra parte,  $\alpha'_i = \tau(\alpha_i)$  y  $\beta' = \tau(\beta)$ , con  $\alpha_i, \beta \in \Delta$ , entonces

$$\gamma' = \sigma_{\tau\alpha_1} \cdots \sigma_{\tau\alpha_k}(\tau\beta) = \tau(\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}(\beta))$$

Sabiendo que  $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}(\beta) \in \Phi$ , concluimos que  $\gamma' \in \tau(\Phi)$ . □

### 11.5. Diagrama de Dynkin

Si  $\Delta$  un sistema de raíces simples correspondiente a un sistema de raíces abstracto  $\Phi$  en un espacio euclídeo  $E$ , sean  $\alpha \neq \beta \in \Delta$ ; sabemos que  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2, 3$ .

Se define el **diagrama de Dynkin** de  $\Delta$  como el grafo múltiple con tantos vértices como elementos de  $\Delta$  y tantas aristas uniendo  $\alpha$  con  $\beta$  como el número natural  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ . En caso de haber más de una arista entre dos vértices, se coloca un signo de desigualdad señalando la raíz de mayor longitud.

**Ejemplos:**

$A_1 \times A_1$	
$A_2$	
$B_2$	
$G_2$	

**Ejercicio 11.10.** En cada caso, deducir las matrices de Cartan a partir de los diagramas de Dynkin, dados en el teorema 11.11; en particular:

a) Probar que la matriz de Cartan correspondiente al diagrama de Dynkin de tipo

$A_4$  : es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Probar que la matriz de Cartan del diagrama de Dynkin  $F_4$  : es

la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Probar que la matriz de Cartan del diagrama de Dynkin de tipo  $E_6$  es la siguiente

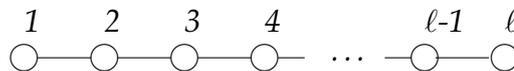
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un sistema de raíces abstracto  $\Phi$  se dice **irreducible** si no se descompone como unión disjunta de dos subconjuntos propios (componentes) mutuamente ortogonales. Si  $\Delta$  es un sistema de raíces simples de  $\Phi$ , se obtiene que  $\Phi$  es irreducible si y sólo  $\Delta$  es irreducible.

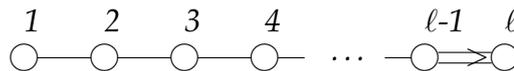
Más aún, resulta que  $\Delta$  es irreducible si y sólo si el diagrama de Dynkin correspondiente es conexo, si y sólo si el álgebra de Lie semisimple, compleja es *simple*. La clasificación de álgebras de Lie simples se desprenderá entonces de la clasificación de los diagramas de Dynkin conexos, junto a los teoremas de reconstrucción de un álgebra a partir de su diagrama de Dynkin. Enunciamos ahora los teoremas pertinentes que demostraremos más adelante.

**Teorema 11.11.** 1. Si  $\Phi$  es un sistema irreducible de raíces de rango  $\ell$ , entonces el diagrama de Dynkin correspondiente es alguno de los siguientes:

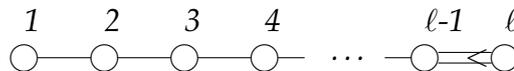
- $A_\ell, \ell \geq 1$



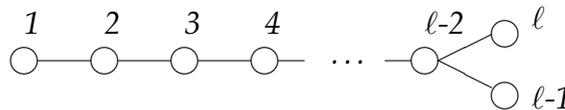
- $B_\ell, \ell \geq 2$



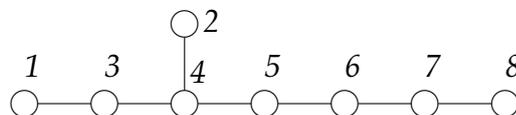
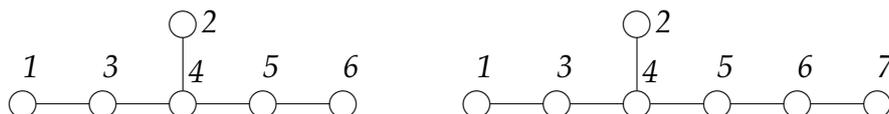
- $C_\ell, \ell \geq 3$



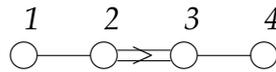
- $D_\ell, \ell \geq 4$



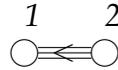
- $E_6, E_7, E_8$



- $F_4$



- $G_2$



El subíndice es exactamente igual al rango del álgebra de Lie, a la cantidad de vértices del diagrama de Dynkin y al cardinal de todo sistema de raíces simples correspondiente a  $\Phi$ . Los diagramas anteriores son todos no isomorfos.

2. Para cada diagrama de Dynkin (o matriz de Cartan) de tipos  $A_\ell$  a  $G_2$  de la lista anterior, existe un sistema irreducible de raíces  $\Phi$  de rango  $\ell$  tal que su diagrama de Dynkin es el dado.

Para las álgebras de Lie simples clásicas  $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$  y  $\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$  hemos dado explícitamente el sistema de raíces y a éstos les corresponde un diagrama de Dynkin de tipo  $A_\ell$ ,  $B_\ell$ ,  $C_\ell$  y  $D_\ell$ , respectivamente, vía la matriz de Cartan.

Para los diagramas de Dynkin de tipos  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$  y  $G_2$ , llamados *excepcionales*, se construyen sistemas de raíces, y más tarde, como consecuencia del teorema de Serre, se obtiene un álgebra de Lie abstracta correspondiente a cada tipo.

La clasificación de las álgebras de Lie semisimples se obtiene de la de los Dynkin

La clasificación de los diagramas de Dynkin será hecha más adelante, ver teorema 11.22.

**Teorema 11.12.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja, sea  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\Phi$  el sistema de raíces correspondiente. Si  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^t \mathfrak{g}_i$  es su descomposición en subálgebras de Lie simples, entonces  $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_i$ ; el correspondiente sistema de raíces  $\Phi_i$  se incluye canónicamente en  $\Phi$  de manera tal que  $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_t$  es la descomposición de  $\Phi$  en componentes irreducibles.

El teorema reduce el problema de clasificación a las simples.

**Teorema 11.13.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja, sea  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\Phi$  el sistema de raíces correspondiente; Fijemos una base  $\Delta$  de  $\Phi$  entonces  $\mathfrak{g}$  está generada como álgebra de Lie por  $\{0 \neq x_\alpha, 0 \neq x_{-\alpha} : x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$

La demostración de este teorema está contenida en la proposición 12.4 del próximo capítulo.

Un conjunto  $\{0 \neq x_\alpha, 0 \neq x_{-\alpha} : x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$  es un conjunto *standard* de generadores de  $\mathfrak{g}$  si  $h_\alpha := [x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$  satisface  $\alpha(h_\alpha) = 2$ ; notar que  $h_\alpha$  queda así unívocamente determinado a partir de  $\alpha$ .

### 11.6. Clasificación de las matrices de Cartan y los diagramas de Dynkin

Consideremos una matriz de Cartan abstracta de tamaño dos:  $A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$ . Como existe una matriz diagonal  $D$  tal que  $DAD^{-1}$  es simétrica y definida positiva, en particular  $\det(A) > 0$ , es decir

$$4 - ab > 0$$

Como  $a$  y  $b$  son enteros no negativos, esto dice que  $ab = 0, 1, 2, 3$ , por lo tanto las posibles matrices de Cartan  $2 \times 2$  (a menos de transponer) son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

que vemos que corresponden a  $A_1 \times A_1, A_2, B_2$  y  $G_2$  respectivamente.

Si  $A$  es una matriz de Cartan de cierto tamaño  $\ell$  y elegimos un índice  $1 \leq i \leq \ell$ , podemos formar una matriz  $\tilde{A}$  de tamaño  $\ell - 1$  a partir de  $A$  borrando la fila y columna  $i$ . Es obvio que esta matriz cumple con los requisitos de integralidad tanto como  $A$  y si  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_\ell)$  es una matriz diagonal tal que  $DAD^{-1}$  es simétrica y definida positiva, entonces también  $\tilde{D}\tilde{A}\tilde{D}^{-1}$  es simétrica y definida positiva, donde  $\tilde{D} = \text{diag}(d_1, \dots, \hat{d}_i, \dots, d_\ell)$  se obtiene de  $D$  al quitar la fila y columna  $i$ . Por lo tanto  $\tilde{A}$  es una matriz de Cartan.

**Corolario 11.14.** *Sea  $A$  una matriz de Cartan abstracta, entonces, para todo  $i \neq j, A_{ij}A_{ji} = 0, 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Utilizando el procedimiento de eliminar una fila y columna, podemos repetir hasta eliminar todas las filas y columnas distintas de la  $i$  y la  $j$  y así lograr una matriz  $2$  por  $2$ . El resultado se sigue del cálculo en  $2$  por  $2$ . □

Dada una matriz de Cartan, recordemos que el Diagrama de Dynkin es un grafo orientado; si nos olvidamos de la orientación, este grafo está determinado por la siguiente regla:

*“Si  $A \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$ , entonces el diagrama de Dynkin que le corresponde tiene  $\ell$  vértices y, entre un vértice  $i$  y otro  $j$ , hay tantas aristas como  $A_{ij}A_{ji}$ .”*

**Ejemplo 11.15.** Podemos verificar fácilmente la correspondencia entre cada matriz de Cartan y el diagrama de Dynkin:

*Matriz de Cartan      Diagrama de Dynkin*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \circ \quad \circ$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \circ \text{---} \circ$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \circ \text{=} \circ$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \circ \text{=} \circ$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad \begin{array}{c} \text{O}_1 \text{ --- } \text{O}_2 \text{ --- } \text{O}_3 \\ | \\ \text{O}_4 \end{array}$$

Es claro que una reenumeración de los vértices del diagrama de Dynkin conduce a diferentes matrices de Cartan, pero éstas difieren entre sí por la conjugación de una matriz de permutación. Por lo tanto la clase de permutación de una matriz de Cartan abstracta está completamente determinada por su diagrama de Dynkin.

### 11.7. Restricciones

En esta sección mostraremos otra lista de restricciones que tienen los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan abstractas:

**Proposición 11.16.** *Los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan abstractas tienen las propiedades que se enuncian a continuación. Sea  $\ell$  el tamaño de una matriz de Cartan dada, igual a la cantidad de vértices de su diagrama de Dynkin asociado, entonces*

- a) *La cantidad de pares  $i < j$  que tienen por lo menos una arista uniendo  $i$  con  $j$  es menor estricta que  $\ell$ .*
- b) *No contienen lazos.*
- c) *A lo sumo 3 aristas llegan a cada vértice.*

*Demostración.* Sabiendo a), si el diagrama tuviera un lazo, podríamos eliminar todos los vértices que no estuvieran en el lazo y entonces tendríamos un diagrama circular que provendría de una matriz de Cartan, digamos de  $r$  vértices, que tendría por lo menos  $r$  aristas, lo cual sería una contradicción con a); esto prueba b).

Para demostrar a) introduciremos vectores en  $\mathbb{R}^\ell$  que nos mostrarán cómo recomponer un sistema de raíces a partir de una matriz de Cartan.

Sea  $A$  de Cartan y  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ,  $d_i > 0$ , tal que  $DAD^{-1}$  es simétrica y definida positiva. Sea  $Q$  la matriz dada por

$$DAD^{-1} = 2Q$$

el factor 2 está a propósito para que  $Q$  tenga unos en la diagonal. La matriz  $Q$  es simétrica y definida positiva, luego tiene una raíz cuadrada simétrica y definida positiva, que llamaremos  $Q^{1/2}$ . Sean  $\phi_i \in \mathbb{R}^\ell$  los vectores columna de  $Q^{1/2}$ , es decir,  $\phi_i = Q^{1/2}e_i$  para  $1 \leq i \leq \ell$ , entonces

$$\kappa(\phi_i, \phi_j) = \kappa(Q^{1/2}e_i, Q^{1/2}e_j) = \kappa(Qe_i, e_j) = Q_{ij}$$

Notar que  $\kappa(\phi_i, \phi_i) = 1$ , entonces si  $\alpha_i = d_i\phi_i$ , la norma de estos vectores es  $|\alpha_i| = d_i$ , el conjunto  $\{\alpha_i\}$  es un sistema linealmente independiente y se obtiene

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2(D^{-1}QD)_{ij} = 2d_i^{-1}Q_{ij}d_j = 2d_i^{-1}d_j\kappa(\phi_i, \phi_j) \\ &= 2d_i^{-1}d_j\kappa\left(\frac{\alpha_i}{d_i}, \frac{\alpha_j}{d_j}\right) = 2\frac{1}{d_i^2}\kappa(\alpha_i, \alpha_j) \\ &= 2\frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i|^2} \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$A_{ij} \cdot A_{ji} = 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i|^2} 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_j|^2} = 4 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)^2}{|\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2}$$

entonces, si recordamos que  $\kappa(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$  para todo  $i \neq j$ , obtenemos

$$\sqrt{A_{ij} \cdot A_{ji}} = -2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i| |\alpha_j|}$$

Para concluir la prueba del item *a*), consideremos el vector

$$\alpha := \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} = \sum_{i=1}^{\ell} \phi_i$$

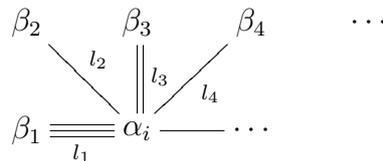
entonces

$$\begin{aligned} 0 < |\alpha|^2 &= \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i| |\alpha_j|} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)}{|\alpha_i| |\alpha_i|} + 2 \sum_{i < j} \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i| |\alpha_j|} \\ &= \ell + \sum_{i < j} 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i| |\alpha_j|} \\ &= \ell - \sum_{i < j} \sqrt{A_{ij} A_{ji}} \end{aligned}$$

Dado que  $A_{ij} A_{ji} = 0, 1, 2, 3$ , si eliminamos los casos en que da cero, que ocurren exactamente entre vértices no conectados por ninguna arista, tenemos  $\sqrt{A_{ij} A_{ji}} = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ , que, en cualquiera de los casos, es mayor o igual que uno. Por lo tanto

$$0 < \ell - \sum_{i < j} \sqrt{A_{ij} A_{ji}} \leq \ell - \#\{\text{pares } i < j \text{ conectados}\}$$

Para demostrar *c*), consideremos un vértice  $i$  cualquiera, al cual, en la notación anterior, le asignamos el vector  $\alpha_i$ ; a la vez, sean  $\beta_1, \dots, \beta_n$  los elementos correspondientes a los vértices conectados con el vértice  $i$  a través de  $l_r$  vértices cada uno. Notar que el diagrama correspondiente a esta situación es de la forma



Como el diagrama no tiene lazos, tenemos que  $(\beta_j, \beta_r) = 0$ , es decir,  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  es un conjunto ortogonal y, renombrando  $\alpha := \alpha_i$ , el conjunto  $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha\}$  es linealmente independiente. Sea  $U$  el subespacio generado por  $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha\}$  y sea  $\delta \in U$  un vector de norma 1 ortogonal a todos los  $\beta_r$ , de manera que  $U$  también está generado por  $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \delta\}$ . Sabemos que  $(\alpha, \delta) \neq 0$  porque  $\alpha$  no es combinación de los  $\beta_r$ .

Como  $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \delta\}$  es un sistema ortogonal, tenemos

$$|\alpha|^2 = \sum_{r=1}^n \kappa \left( \alpha, \frac{\beta_r}{|\beta_r|} \right)^2 + \kappa(\alpha, \delta)^2 > \sum_{r=1}^n \kappa \left( \alpha, \frac{\beta_r}{|\beta_r|} \right)^2$$

Recordemos que  $l_r$ , la cantidad de aristas que conectan  $\alpha$  y  $\beta_r$ , es igual a  $\langle \alpha, \beta_r \rangle \cdot \langle \beta_r, \alpha \rangle$ , por lo tanto

$$1 > \sum_{r=1}^n \frac{1}{|\alpha|^2} \kappa \left( \alpha, \frac{\beta_r}{|\beta_r|} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n 2 \frac{\kappa(\alpha, \beta_r)}{|\alpha|^2} \cdot 2 \frac{\kappa(\beta_r, \alpha)}{|\beta_r|^2} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n l_r$$

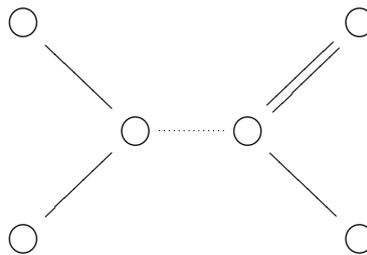
es decir que  $\sum_{r=1}^n l_r < 4$ . □

### Colapso de aristas

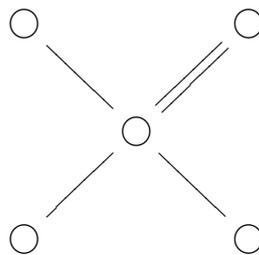
Consideremos la siguiente operación entre diagramas de Dynkin:

(\*) Si dos vértices están unidos por exactamente una arista, contraemos dicha arista e identificamos los vértices.

**Ejemplo 11.17.** Contrayendo la arista punteada de



obtenemos



**Proposición 11.18.** La operación en matrices de Cartan correspondiente a la operación anterior (\*) en los diagramas de Dynkin preserva la propiedad de ser de Cartan.

*Demostración.* Las condiciones de integralidad son claras, veamos la parte de simetrización y definición positiva. Primero, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los dos vértices que están unidos por una única arista son exactamente los dos últimos vértices del diagrama, por lo cual la matriz de Cartan inicial es de la forma:

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} A_{\ell-2} & \vdots & \vdots \\ \cdots & 2 & -1 \\ \cdots & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Cuando contraemos la arista  $e$  e identificamos los dos vértices, la matriz que queda es del tipo

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & \vdots \\ \dots & & & & 2 \end{array} \right)$$

donde el bloque de tamaño  $\ell - 2$  no se alteró, porque no se agregan ni se quitan aristas entre los demás vértices  $y$ , si había un vértice unido al último, o al anteúltimo, entonces queda la misma arista unida al vértice nuevo, por lo tanto, lo que tenemos en la fila y columna punteada no es otra cosa que la suma de las dos columnas (respectivamente, filas) punteadas originales. Si denotamos por  $E$  a la matriz

$$E = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(\ell-1) \times \ell}$$

es claro que

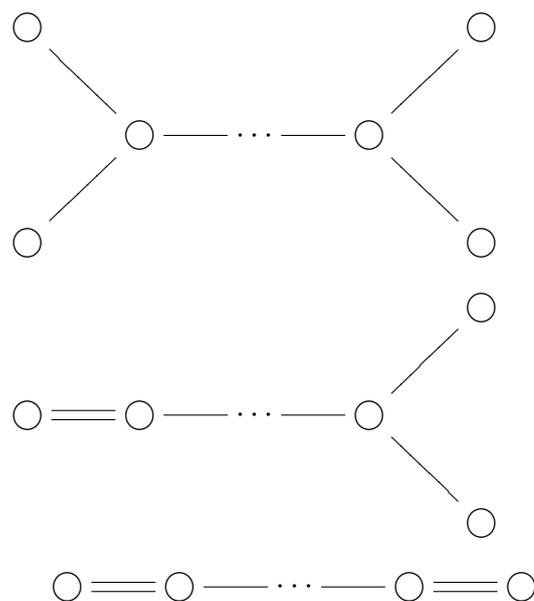
$$\tilde{A} = EAE^t$$

Si antes teníamos una matriz diagonal  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_\ell)$  tal que  $DAD^1$  era simétrica y definida positiva, dado que el vértice  $\ell - 1$  y el vértice  $\ell$  estaban unidos por una única arista, tenemos que  $d_{\ell-1} = d_\ell = d$  (ver lista de ejercicios), es decir,  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_{\ell-2}, d, d)$ . Tomemos ahora la matriz diagonal  $\tilde{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_{\ell-2}, d)$ . Dejamos como ejercicio comprobar que

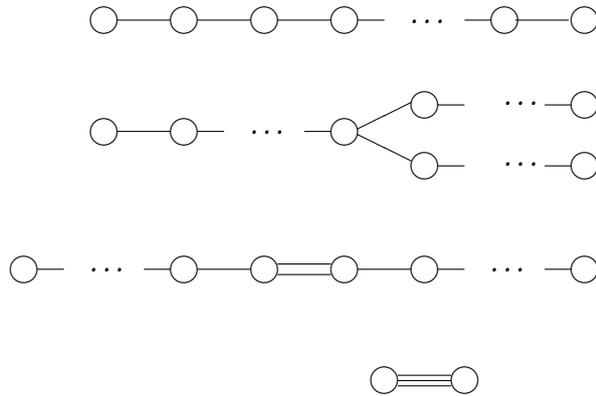
$$\tilde{D}\tilde{A}\tilde{D}^{-1} = EDAD^{-1}E^t$$

y por lo tanto, es definida positiva (ejercicio!). □

**Corolario 11.19.** *Los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan no contienen subgrafos de la forma*



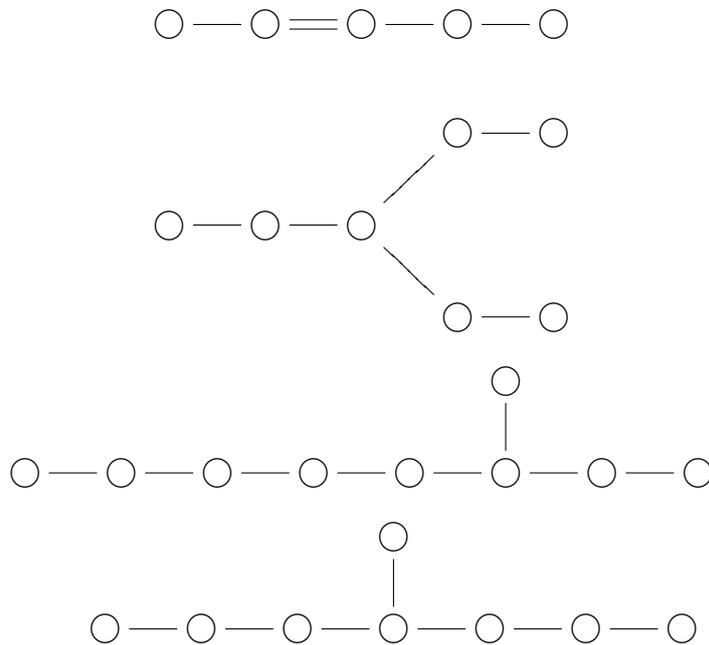
**Corolario 11.20.** *Las posibilidades obtenidas hasta ahora para los diagramas de Dynkin conexos que provienen de matrices de Cartan son de las formas siguientes:*



### 11.8. Clasificación de los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan

Para finalizar la clasificación, un cálculo adicional de determinantes nos llevará a la demostración de la siguiente proposición:

**Proposición 11.21.** *Los diagramas*

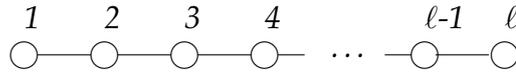


*no corresponden a matrices de Cartan.*

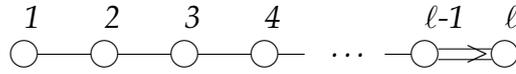
Antes de demostrar esta proposición, enunciemos como corolario el siguiente teorema de clasificación:

**Teorema 11.22.** *Los diagramas de Dynkin conexos que provienen de matrices de Cartan son:*

- $A_\ell, \ell \geq 1$



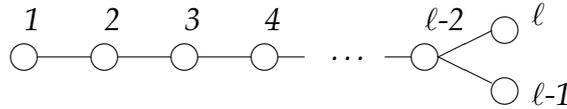
- $B_\ell, \ell \geq 2$



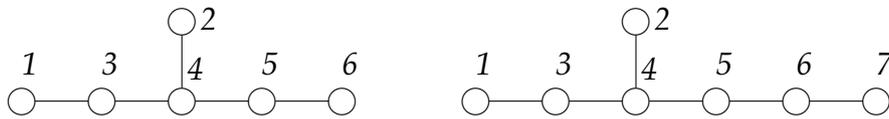
- $C_\ell, \ell \geq 3$



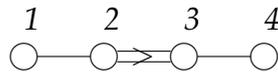
- $D_\ell, \ell \geq 4$



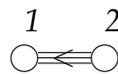
- $E_6, E_7, E_8$



- $F_4$



- $G_2$



Para demostrar la proposición 11.21, conviene primero realizar el siguiente cálculo de determinantes.

**Lema 11.23.** *El determinante de la matriz  $A_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  es  $\ell + 1$ .*

*Demostración.* El lema es evidente para  $\det A_1 = 2$  y también es claro que

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Para el caso general  $\ell > 2$ , si desarrollamos el determinante por la primera columna, obtenemos

$$\det A_\ell = 2 \det A_{\ell-1} - \det A_{\ell-2}.$$

Consideremos la sucesión de números  $d_\ell = \ell + 1$ , que verifica  $d_1 = 2, d_2 = 3$  y la misma fórmula de recurrencia  $d_\ell = 2d_{\ell-1} - d_{\ell-2}$  que la que verifica  $\det A_\ell$ , por lo tanto  $\det A_\ell = d_\ell = \ell + 1$  para todo  $\ell \geq 1$ .  $\square$

*Demostración de la proposición 11.21.* Consideraremos la matriz de números enteros asociada a cada uno de los diagramas y calcularemos su determinante. Si la matriz fuera de Cartan, debería dar un número positivo, pero veremos que en todos los casos da cero.

El primer diagrama a considerar es:



Si enumeramos los vértices de izquierda a derecha, la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante, desarrollemos por la primera fila:

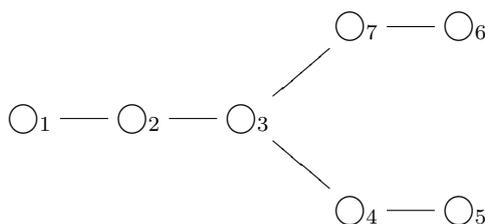
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

El segundo determinante es claramente igual a  $-\det A_3 = -4$ . Para el primer determinante, desarrollamos nuevamente por la primera fila y obtenemos

$$= 2 \left( 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right) - 4$$

$$= 2(2 \det A_3 + 2(-1) \det A_2) - 4 = 2(2 \times 4 - 2 \times 3) - 4 = 2 \times 2 - 4 = 0$$

Para el segundo diagrama



enumeramos los vértices como lo indica la figura, la matriz asociada a este diagrama es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última fila, obtenemos

$$- \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Considerando la estructura de bloques como lo indicado por las líneas,

$$= -\det A_2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} - \det A_5 + 2 \times 2 \det A_5$$

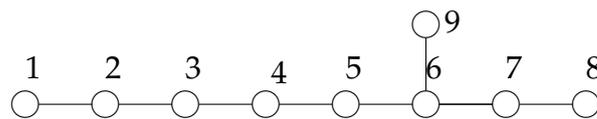
$$= -3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times 6$$

Si el determinante que falta calcular diera 6, finalizaríamos este caso. En efecto, esto es así pues, si lo desarrollamos por la tercera fila, obtenemos

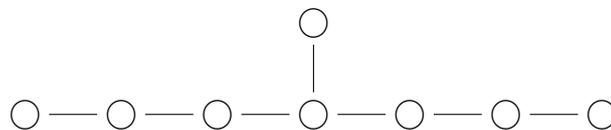
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 = 6$$

como queríamos.

Restan calcular los determinantes de la matrices asociadas a los diagramas



y



Calcularemos el determinante de la matriz asociada al primer diagrama, y veremos que es cero. Para el último diagrama el procedimiento es el mismo, por lo que lo dejamos como ejercicio. La matriz asociada al diagrama anterior (con los vértices numerados) es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última fila, tenemos que el determinante es igual a

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aprovechando la estructura en bloques en el primer caso y el caso de tipo  $A_8$ , obtenemos

$$= \det A_5(-1) \det A_2 + 2 \det A_8 = -6 \times 3 + 2 \times 9 = -18 + 18 = 0$$

Esto concluye la prueba de la proposición 11.21.

**Observación 11.24.** El álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(\ell + 1)$  tiene sistema de raíces simples con matriz de Cartan de tipo  $A_\ell$ . Las otras álgebras de Lie clásicas aparecen como  $\mathfrak{so}(2\ell)$  de tipo  $B_\ell$ ,  $\mathfrak{sp}(\ell)$  de tipo  $C_\ell$ ,  $\mathfrak{so}(2\ell + 1)$  de tipo  $D_\ell$ . Es decir que álgebras de Lie clásicas cubren todas las series infinitas. Faltaría ver que los diagramas de Dynkin excepcionales de tipos  $E_{6,7,8}$ ,  $F_4$  y  $G_2$  también corresponden a álgebras de Lie simples (con lo cual también corresponderían esas matrices a sistemas de raíces simples). La respuesta afirmativa a esta última pregunta no se conocía en el momento de la clasificación de las matrices de Cartan, pero las álgebras de Lie correspondientes (hasta ese entonces desconocidas) se encontraron rápidamente, con la motivación de este resultado de clasificación.

### 11.9. Ejercicios

1. Calcular los determinantes de las matrices de Cartan de tipos  $B_\ell, C_\ell, D_\ell, E_{6,7,8}, F_4$  y  $G_2$ ; debería obtener, respectivamente, 2, 2, 4, 3, 2, 1, 1, 1.
2. Sea  $E$  un espacio Euclídeo,  $\Phi$  un sistema de raíces en  $E$  y  $\Delta$  una elección de raíces simples.
  - a) Si  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  con  $(\alpha, \beta) = 0$  si  $\alpha \in \Delta_1$  y  $\beta \in \Delta_2$ , muestre entonces que  $\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2$  con  $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ .

- b) Muestre que  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  equivale a decir que el diagrama de Dynkin tiene por lo menos dos componentes conexas y que a la vez esto equivale a que la matriz de Cartan (eventualmente conjugada por una matriz de permutación) es una matriz con (por lo menos) dos bloques.
3. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan,  $\Phi$  un sistema de raíces,  $\Delta$  un subconjunto de raíces simples. Supongamos que  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  con  $(\alpha, \beta) = 0$  si  $\alpha \in \Delta_1$  y  $\beta \in \Delta_2$ . Muestre entonces que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  con  $\Delta_i \subset \mathfrak{h}_i^*$  ( $i = 1, 2$ ), y que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  es suma directa de dos álgebras de Lie semisimples, con  $\mathfrak{h}_i$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_i$ .
4. Sea  $A$  una matriz de Cartan y  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_\ell)$  una matriz diagonal con  $d_i > 0$  tal que  $DAD^{-1}$  es simétrica y definida positiva.
- a) Si hay un par de índices  $i \neq j$  tales que  $A_{ij} = A_{ji}$ , muestre que  $d_i = d_j$ .
- b) Demuestre que si el diagrama de Dynkin es *conexo*, la matriz  $D$  con las propiedades requeridas ( $D$  es diagonal positiva y  $DAD^{-1}$  es simétrica y definida positiva) está unívocamente determinada a menos de un factor global.

## 12. Relaciones de Serre

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ , sistema de raíces  $\Phi$ , elección de raíces simples  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  y matriz de Cartan  $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$ .

Definimos

$$h_i = \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i}$$

$e_i =$  vector no nulo en  $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$

$f_i =$  vector (necesariamente no nulo) en  $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$  tal que  $\kappa(e_i, f_i) = \frac{2}{|\alpha_i|^2}$

**Proposición 12.1.** El conjunto  $\mathcal{B}_S = \{h_i, e_i, f_i : i = 1, \dots, \ell\}$  genera  $\mathfrak{g}$  como álgebra de Lie.

**Proposición 12.2** (Relaciones de Serre). El conjunto  $\mathcal{B}_S = \{h_i, e_i, f_i : i = 1, \dots, \ell\}$  satisface las siguientes relaciones:

$$(S1) \quad [h_i, h_j] = 0, \quad \text{para todo } i, j$$

$$(S2) \quad [e_i, f_i] = h_i, \quad [e_i, f_j] = 0, \quad \text{para } i \neq j$$

$$(S3) \quad [h_i, e_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle e_j = A_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle f_j = -A_{ij} f_j, \text{ para todo } i, j$$

$$(S_{ij}^+) \quad (\text{ad}_{e_i})^{1-A_{ij}}(e_j) = 0, \quad \text{para } i \neq j$$

$$(S_{ij}^-) \quad (\text{ad}_{f_i})^{1-A_{ij}}(f_j) = 0, \quad \text{para } i \neq j$$

*Demostración.*  $[h_i, h_j] = 0$  es claro. También sabemos que si  $i \neq j$ ,  $[e_i, f_j] = 0$  pues  $\alpha_i - \alpha_j$  no es raíz (porque no es ni positiva ni negativa) y si  $i = j$  entonces

$$[e_i, f_i] = \kappa(e_i, f_i) H_{\alpha_i} = \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i} = h_i$$

Para las relaciones entre los  $h_i$  y los  $e_j$ :

$$[h_i, e_j] = \alpha_j(h_i) e_j = \alpha_j \left( \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i} \right) e_j = \kappa \left( H_{\alpha_j}, \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i} \right) e_j = \frac{2}{|\alpha_i|^2} \kappa(\alpha_j, \alpha_i) e_j = A_{ij} e_j$$

Análogamente

$$[h_i, f_j] = -\alpha_j(h_i) f_j = -A_{ij} f_j$$

Para las relaciones *no cuadráticas*, utilizemos las longitudes de las  $\alpha$ -cuerdas. Sabemos que

$$e_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j}, \quad \text{ad}_{e_i}(e_j) \in \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j}, \quad \text{ad}_{e_i}^2(e_j) \in \mathfrak{g}_{\alpha_i+2\alpha_j}, \quad \text{ad}_{e_i}^3(e_j) \in \mathfrak{g}_{\alpha_i+2\alpha_j}, \dots$$

Si  $\alpha_i + q\alpha_j$  es raíz pero  $\alpha_i + (q+1)\alpha_j$  no es raíz, entonces  $\text{ad}_{e_i}^q(e_j) \neq 0$  y  $\text{ad}_{e_i}^{q+1}(e_j) = 0$ . Notar que  $\alpha_j - \alpha_i$  no es raíz. Obtenemos la igualdad para  $p = 0$  y  $q$  como en el lema 11.2.

$$p - q = -q = 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} = A_{ij}$$

La relación con los  $f_i$  es completamente análoga. □

**Observación 12.3. Base de Chevalley.** Los elementos  $e_i, f_i, h_i$  con  $1 \leq i \leq \ell$  tienen buenas propiedades pero no son una base de  $\mathfrak{g}$ . Es posible, sin embargo, construir una base de  $\mathfrak{g}$  con la propiedad que todas las constantes de estructura sean números enteros, la denominada *base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$* . Una base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$  es de la forma

$$\{x_\alpha : \alpha \in \Phi; h_i : 1 \leq i \leq \ell\}$$

con  $h_i := h_{\alpha_i}$  para algún sistema de raíces simples  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  de  $\Phi$ , tal que satisface

- Para toda  $\alpha \in \Phi$ ,  $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$  y  $h_\alpha$  es combinación lineal entera de los  $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ .
- Si  $\alpha, \beta \in \Phi$  son independientes y  $\beta - p\alpha, \dots, \beta + q\alpha$  es la  $\alpha$ -cuerda que contiene a  $\beta$  entonces

$$[x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} \pm(p+1)x_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \Phi, \\ 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Phi \end{cases}$$

- Para todo  $\alpha \in \Phi$  y para todo  $1 \leq i \leq \ell$ ,  $[h_i, x_\alpha] = 2 \frac{\kappa(\alpha, \alpha_i)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} x_\alpha$ .

La comprobación de la existencia de una base de Chevalley se encuentra en [Hu].

Enunciamos sin demostración el siguiente resultado de reconstrucción:

**Proposición 12.4.** *Sea  $A$  una matriz de Cartan abstracta, entonces el álgebra de Lie libre con generadores el conjunto  $\mathcal{B}_S = \{h_1, \dots, h_\ell, e_i, \dots, e_\ell, f_1, \dots, f_\ell\}$  y sujeta a las relaciones de Serre es un álgebra de Lie semisimple. El subespacio generado por las clases de  $h_i$  forma una subálgebra de Cartan. Para cada  $1 \leq i \leq \ell$ , el subespacio generado por  $e_i$  es un espacio raíz; eligiendo éstas raíces como positivas, los  $e_i$  corresponden a espacios de raíces simples. Los subespacios generados por los  $f_i$  forman subespacios de raíces negativas. La matriz de Cartan asociada a esta álgebra con elección de subálgebra de Cartan y raíces simples anteriores coincide con la matriz de Cartan abstracta original.*

**Corolario 12.5.** *Dos álgebras de Lie semisimples con misma matriz de Cartan son isomorfas.*

### 12.1. Teoremas de isomorfismo

Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  álgebras de Lie simples complejas, sean  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}'$  subálgebras de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  respectivamente, y  $\Phi$  y  $\Phi'$  los sistemas de raíces correspondientes. Se prueba que un isomorfismo entre  $\Phi$  y  $\Phi'$  induce un isomorfismo de álgebras de Lie entre  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  que hace corresponder  $\mathfrak{h}$  con  $\mathfrak{h}'$ .

Esto dice    que    la aplicación:

$\{\text{clases de isom. de ál. de Lie s.s. } / \mathbb{C}\} \rightarrow \{\text{clases de isom. de sist. de raíces abstractos}\}$   
 es    inyectiva

Por definición, un isomorfismo  $\pi : \Phi \rightarrow \Phi'$  induce un isomorfismo entre los correspondientes espacios ambientes,  $\mathfrak{h}_0^*$  en  $\mathfrak{h}'_0^*$ , que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

es una *isometría*, dado que los axiomas de sistema de raíces siguen valiendo si se cambia el producto interno original por un múltiplo positivo.

Complexificando, obtenemos un isomorfismo  $\pi : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}'^*$ . Vía Killing identificamos a  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}'$  con sus duales. Explícitamente, para cada  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  existe un único  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha = \kappa(H_\alpha, -)$ . Dado que el isomorfismo entre  $\Phi$  y  $\Phi'$  viene de una isometría, y dado que  $h_\alpha = 2 \frac{H_\alpha}{\kappa(\alpha, \alpha)}$  entonces  $\pi(h_\alpha) = h_{\pi(\alpha)}$  i.e.  $h_\alpha \mapsto h'_{\alpha'}$ .

Dado que  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}'$  son abelianas,  $\pi$  es un isomorfismo de álgebras de Lie. Queremos extender a un isomorfismo  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ . Sea  $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  una elección arbitraria de un elemento no nulo para cada  $\alpha \in \Delta$ , idem  $0 \neq x'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{\alpha'}$  para cada  $\alpha' \in \Delta'$ .

Dada esta elección, afirmamos que existe un único isomorfismo de álgebras de Lie  $x_\alpha \mapsto x'_{\alpha'}$  para todo  $\alpha \in \Delta$ .

La parte de unicidad es clara pues una vez determinado su valor en  $\mathfrak{h}$ , un morfismo de álgebras de Lie debe preservar los pesos con respecto a  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}'$  respectivamente. Como consecuencia, los valores de un morfismo tal en  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Delta$  quedan determinados a menos de múltiplos. Una vez hecha esta elección, los valores en  $x_{-\alpha}$  quedan unívocamente determinados por la condición de preservar el corchete  $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ . Notemos que el conjunto  $\{x_{\pm\alpha} : \alpha \in \Delta\}$  es un sistema de generadores como álgebra de Lie, de donde se sigue la unicidad. La existencia se sigue del teorema de reconstrucción de Serre, que enunciamos en la sección siguiente.

### 12.2. Teorema de reconstrucción

**Teorema 12.6.** [Serre]. *Dado un sistema de raíces abstracto  $\Phi$  con una elección de raíces simples  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ , sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie libre generada por los  $3\ell$  elementos  $\{x_i, y_i, h_i : 1 \leq i \leq \ell\}$  sujetos a las relaciones (S1), (S2), (S3),  $(S_{ij}^+)$  y  $(S_{ij}^-)$ . Entonces  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita, semisimple, el subespacio vectorial generado por los  $h_i$  es una subálgebra de Cartan, y su correspondiente sistema de raíces es  $\Phi$ .*

El teorema de Serre dice que la aplicación:  
 $\{ \text{clases de isom. de \(\mathfrak{alg. de Lie s.s. / \mathbb{C}\} \} \rightarrow \{ \text{clases de isom. de sist. de raíces abstractos} \}$   
 es suryectiva.

### 12.3. Reconstrucción de $\mathfrak{g}$ a partir de su matriz de Cartan: Ejemplos

Reconstruiremos  $\mathfrak{g}$  para algunos casos de rango 2 a partir de su matriz de Cartan  $A$  y las relaciones de Serre.

#### 12.3.1. Matriz de Cartan de tipo $A_1 \times A_1$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  la matriz de Cartan de tipo  $A_1 \times A_1$ . Las relaciones de Serre para este caso son:

$$[h_1, h_2] = 0, [e_1, f_1] = h_1, [e_2, f_2] = h_2, [e_1, f_2] = 0 = [e_2, f_1]$$

$$[h_1, e_1] = 2e_1, [h_2, e_2] = 2e_2,$$

$$\begin{aligned} [h_1, e_2] &= 0 = [h_2, e_1] \\ [h_1, f_1] &= -2f_1, [h_2, f_2] = 2f_2, \\ [h_1, f_2] &= 0 = [h_2, f_1] \end{aligned}$$

y las últimas relaciones, como para  $i \neq j$   $A_{ij} = 0$ , tenemos

$$[e_1, e_2] = 0 = [f_1, f_2]$$

Vemos claramente que los índices 1 conmutan con los índices 2, por lo tanto

$$\mathfrak{g} = \langle f_1, h_1, e_1 \rangle \oplus \langle f_2, h_2, e_2 \rangle \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

### 12.3.2. Matriz de Cartan de tipo $A_2$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  la matriz de Cartan de tipo  $A_2$ . Las relaciones de Serre en este caso son:

$$\begin{aligned} [h_1, h_2] &= 0, [e_1, f_1] = h_1, [e_2, f_2] = h_2, [e_1, f_2] = 0 = [e_2, f_1], \\ [h_1, e_1] &= 2e_1, [h_2, e_2] = 2e_2, \\ [h_1, e_2] &= -2e_2, [h_2, e_1] = -e_1, \\ [h_1, f_1] &= -2f_1, [h_2, f_2] = 2f_2, \\ [h_1, f_2] &= f_2, [h_2, f_1] = f_1 \end{aligned}$$

y las últimas relaciones, como para  $i \neq j$   $A_{ij} = -1$ ,

$$0 = [e_1, [e_1, e_2]] = [e_2, [e_2, e_1]] = [f_1, [f_1, f_2]] = [f_2, [f_2, f_1]]$$

Notar que

$$[f_1, [e_1, e_2]] = [[f_1, e_1], e_2] + [e_1, [f_1, e_2]] = [h_1, e_2] + [e_1, 0] = -e_1 \neq 0$$

por lo tanto  $[e_1, e_2] \neq 0$ , y análogamente  $[f_1, f_2] \neq 0$ . Más aún, calculando los pesos con respecto a  $h_1$  y  $h_2$  podemos ver que  $\{h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2, [e_1, e_2], [f_1, f_2]\}$  es un conjunto linealmente independiente, y cerrado por la operación corchete. Concluimos que  $\dim \mathfrak{g} = 8$  y podemos verificar sin dificultad que las reglas de conmutación son las de  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ .

### 12.3.3. Matriz de Cartan de tipo $B_2$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  la matriz de Cartan de tipo  $A_2$ . Las relaciones de Serre en este caso son:

$$\begin{aligned} [h_1, h_2] &= 0, [e_1, f_1] = h_1, [e_2, f_2] = h_2, [e_1, f_2] = 0 = [e_2, f_1], \\ [h_1, e_1] &= 2e_1, [h_2, e_2] = 2e_2, \\ [h_1, e_2] &= -e_2, [h_2, e_1] = -2e_1, \\ [h_1, f_1] &= -2f_1, [h_2, f_2] = -2f_2, \\ [h_1, f_2] &= f_2, [h_2, f_1] = 2f_1 \end{aligned}$$

y las últimas relaciones, como  $A_{12} = -1$  y  $A_{21} = -2$ , tenemos

$$0 = [e_1, [e_1, e_2]] = [f_1, [f_1, f_2]] = 0$$

$$0 = [e_2, [e_2, [e_2, e_1]]] = [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]] = 0$$

Ésto nos dice que los elementos  $[e_1, e_2]$  y  $[f_1, f_2]$  son no nulos, así como también  $[e_2[e_1, e_2]]$  y  $[f_2, [f_1, f_2]]$ .

Consideremos la subálgebra generada por  $e_1$  y  $e_2$ ; llamemos  $e_3 := [e_1, e_2]$  y  $e_4 := [e_2, e_3]$ , tenemos la tabla de corchetes dada por:

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	$e_3$		
$e_2$	$-e_3$	0	$e_4$	
$e_3$		$-e_4$	0	
$e_4$				0

también las relaciones

$$0 = [e_1, [e_1, e_2]] = [e_2, [e_2, [e_2, e_1]]]$$

nos dicen que  $[e_1, e_3] = 0 = [e_2, e_4]$ , por lo tanto, podemos completar un poco la tabla

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	$e_3$	0	
$e_2$	$-e_3$	0	$e_4$	0
$e_3$	0	$-e_4$	0	
$e_4$		0		0

Para calcular  $[e_1, e_4]$  usemos la condición de Jacobi:

$$[e_1, e_4] = [e_1, [e_2, e_3]] = [[e_1, e_2], e_3] + [e_2, [e_1, e_3]] = [e_3, e_3] + [e_2, 0] = 0 + 0 = 0$$

y análogamente

$$[e_3, e_4] = [[e_1, e_2], e_4] = [[e_1, e_4], e_2] + [e_1, [e_2, e_4]] = [0, e_2] + [e_1, 0] = 0$$

por lo tanto la tabla resulta

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	$e_3$	0	0
$e_2$	$-e_3$	0	$e_4$	0
$e_3$	0	$-e_4$	0	0
$e_4$	0	0	0	0

**Ejercicio 12.7.** Definir de manera análoga  $f_3$  y  $f_4$ , y calcular explícitamente  $[e_i, f_j]$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$  y  $[h_i, e_j], [h_i, f_j]$  para  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Obtenemos que  $\dim(\mathfrak{g}) = 4 \cdot 2 + 2 = 10$  y las relaciones implican que se trata del álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ .

### 12.4. Existencia de la forma real compacta

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple sobre  $\mathbb{C}$  y consideremos un sistema de generadores de Chevalley - Serre  $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ . Se denota  $i := \sqrt{-1}$ . Se define la forma real  $\mathfrak{u}$  como el álgebra de Lie real generada por

$$\{ih_\alpha, (e_\alpha - f_\alpha), i(e_\alpha + f_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$$

Se prueba explícitamente que la forma de Killing de  $\mathfrak{u}$  es definida negativa, luego  $\mathfrak{u}$  es un álgebra de Lie compacta.

Las formas reales de las álgebras de Lie clásicas se dan en la siguiente tabla:

tipo	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{u}$
$A_n$	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(n)$
$B_n$	$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{R})$
$C_n$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
$D_n$	$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{R})$

### 12.5. Ejercicios

1. Determinar la matriz de Cartan de  $G_2$ . Sea el álgebra de Lie libre con conjunto de generadores  $\{h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2\}$ , módulo las relaciones de Serre asociada a  $G_2$ . Escriba las relaciones correspondientes a la subálgebra generada por  $\{e_i : 1 \leq i \leq 2\}$ . ¿Qué dimensión tiene la subálgebra generada por  $\{e_i : 1 \leq i \leq 2\}$ ? ¿Qué dimensión tiene toda el álgebra?
2. Determinar la matriz de Cartan de  $F_4$ . Sea el álgebra de Lie libre con conjunto de generadores  $\{h_1, h_2, h_3, h_4, e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ , módulo las relaciones de Serre asociada a  $F_4$ . Escriba las relaciones correspondientes a la subálgebra generada por  $\{e_i : 1 \leq i \leq 4\}$ . ¿Qué dimensión tiene la subálgebra generada por  $\{e_i : 1 \leq i \leq 4\}$ ? ¿Qué dimensión tiene toda el álgebra? ("es grande")
3. Para  $\ell = 2$  las matrices de Cartan de tipo  $B_2$  ( $\mathfrak{so}(2\ell + 1)$ ) y  $C_2$  ( $\mathfrak{sp}(\ell)$ ) son conjugadas por una permutación, luego, la clasificación predice un isomorfismo  $\mathfrak{so}(2 \times 2 + 1) = \mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2)$ . Encuentre explícitamente el isomorfismo.
4. Para  $\ell = 3$ , el diagrama  $D_3$  ( $\mathfrak{so}(2\ell)$ ) es el mismo que  $A_3$ , por lo tanto debe existir un isomorfismo  $\mathfrak{so}(2 \times 3) = \mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{sl}(4)$ . Descríbalo explícitamente.

## 13. Representaciones

### 13.1. Acción del Casimir: Lema de Whitehead y Teorema de Weyl

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  y  $\Phi$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  relativo a  $\mathfrak{h}$ . Sea  $\Phi^+$  una elección de raíces positivas. Sabiendo que  $\Phi = \Phi^+ \amalg \Phi^-$  obtenemos los siguientes resultados:

**Corolario 13.1.** Sea  $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$  y  $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$ , entonces

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$  como espacio vectorial,  $\mathfrak{n}^+$ ,  $\mathfrak{n}^-$  y  $\mathfrak{h}$  son subálgebras de Lie, también  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$  son subálgebras de Lie, con  $\mathfrak{n}^+$  y  $\mathfrak{n}^-$  ideales respectivos.
2. Los subespacios  $\mathfrak{n}^+$  y  $\mathfrak{n}^-$  son subálgebras nilpotentes y actúan ad-nilpotentemente en  $\mathfrak{g}$ .
3. Los subespacios  $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$  son subálgebras de Lie solubles.
4. Sea  $V$  una representación de  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita, entonces existe  $0 \neq v_0 \in V$  tal que  $E_\alpha.v_0 = 0$  para toda  $\alpha \in \Phi^+$ .
5. Sea  $S$  una representación de dimensión finita simple de  $\mathfrak{g}$ , entonces el Casimir actúa en  $S$  como escalar y este escalar es nulo sólo en la representación trivial.
6. Vale el Lema de Whitehead para  $\mathfrak{g}$ , es decir, para cualquier representación de dimensión finita  $V$ , se verifica la igualdad  $\text{Der}(\mathfrak{g}, V) = \text{InDer}(\mathfrak{g}, V)$ .
7. Vale el Teorema de Weyl para  $\mathfrak{g}$ , es decir, toda representación de dimensión finita de  $\mathfrak{g}$  se descompone como suma directa de subrepresentaciones simples.

*Demostración.* Las pruebas de 1, 2 y 3 son claras.

4. Sea  $V$  una representación de  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita; por restricción, es una representación de  $\mathfrak{n}^+$ . Fijado  $E_\alpha$ , con  $\alpha \in \Phi^+$ , consideremos la subálgebra  $\mathfrak{sl}_\alpha$  de  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , generada por  $\{H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ . Dado que es de dimensión finita,  $V$  es suma directa de representaciones  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -simples y, como en cada representación simple la acción de  $E_\alpha$  es nilpotente, entonces  $E_\alpha$  es nilpotente en  $V$ .

Si consideramos  $\mathfrak{n}^+$  actuando en  $V$ , su imagen en  $\text{End}(V)$  es una subálgebra de Lie soluble, luego es isomorfa a una subálgebra de matrices triangulares superiores. Pero además se tiene un sistema de generadores nilpotentes, (los  $E_\alpha$  actuando en  $V$ ), luego, en la diagonal, tienen que tener ceros. Por lo tanto, combinaciones lineales de triangulares estrictas da triangulares estrictas. Es decir, la imagen de  $\mathfrak{n}^+$  en la representación consiste de endomorfismos nilpotentes. Por el Teorema de Engel, existe  $0 \neq v_0 \in V$  con  $E_\alpha.v_0 = 0$  para todo  $\alpha \in \Phi^+$ .

5. Dada una representación simple  $S$ , sabemos por el *Lema de Schur* que el Casimir debe actuar por un escalar; se quiere probar que si la representación no trivial, entonces el escalar es no nulo.

Elijamos  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  de manera tal que  $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ . Luego, el Casimir es de la forma

$$\omega = \sum_{\alpha \in \Phi^+} (E_\alpha \otimes E_{-\alpha} + E_{-\alpha} \otimes E_\alpha) + \sum_i H_i \otimes H^i$$

donde  $\{H_i : 1 \leq i \leq \ell\}$  recorre una base de  $\mathfrak{h}$  y  $\{H^i : 1 \leq i \leq \ell\}$  es la base dual respecto de Killing. Para cada  $\alpha$ , consideremos el número  $m_\alpha$  igual a la dimensión de la  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -subrepresentación de  $S$  generada por  $v_0$ .

Si  $m_\alpha = 1$  para todo  $\alpha$ , entonces  $E_{-\alpha}$  también actúa por cero en  $v_0$  y en consecuencia  $H_\alpha$  actúa por cero en  $v_0$ , por lo tanto  $\mathbb{C}v_0$  es una subrepresentación de  $S$  con respecto a  $\mathfrak{g}$  y dado que  $S$  es simple, debe ser  $S = \mathbb{C}v_0$ . Concluimos que si  $S$  no es la representación trivial, entonces debe existir al menos un  $m_\alpha > 1$ .

Si consideramos la componente del Casimir en  $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathfrak{g}_{-\alpha}$  actuando en  $v_0$ , la caracterización de las representaciones de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  dada en el teorema 9.1 aplicada a cada  $\mathfrak{sl}_\alpha$  implica

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Phi^+} (E_\alpha \otimes E_{-\alpha} + E_{-\alpha} \otimes E_\alpha)v_0 &= \sum_{\alpha \in \Phi^+} E_\alpha E_{-\alpha}v_0 \\ &= \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} \frac{2}{\kappa(\alpha, \alpha)} E_\alpha E_{-\alpha}v_0 = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} X_\alpha Y_\alpha v_0 \\ &= \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} X_\alpha v_1^{(\alpha)} = \left( \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} (m_\alpha - 1) \right) v_0 \end{aligned}$$

Tenemos que  $m_\alpha - 1 \geq 0$  y, además, debe existir al menos un  $\alpha_0$  tal que  $m_{\alpha_0} - 1 > 0$  y que la forma de Killing es definida positiva en el subespacio real generado por las raíces, por lo tanto, estos términos de la suma contribuyen con un número positivo.

A continuación consideremos la componente de  $\omega$  en  $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ . Tomemos un subconjunto de raíces  $\Delta$  de manera tal que  $\{H_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  sea base de  $\mathfrak{h}$ . Debemos calcular  $\{H^\alpha : \alpha \in \Delta\}$ , la base dual con respecto a la forma de Killing. Sabemos que la matriz  $K$  con coeficientes  $\kappa_{\alpha, \beta} := \kappa(\alpha, \beta)_{\alpha, \beta \in \Delta}$  es definida positiva y, por lo tanto, su inversa también es definida positiva. Si denotamos  $\kappa^{\alpha, \beta} := (K^{-1})_{\alpha, \beta}$  a los coeficientes de la matriz inversa, afirmamos que

$$H^\beta = \sum_{\alpha} \kappa^{\alpha, \beta} H_\alpha$$

En efecto,

$$\kappa(H_\alpha, H^\beta) = \kappa(H_\alpha, \sum_{\gamma} \kappa^{\beta, \gamma} H_\gamma) = \sum_{\gamma} \kappa^{\beta, \gamma} \kappa(H_\alpha, H_\gamma) = \sum_{\gamma} \kappa^{\beta, \gamma} \kappa_{\alpha, \gamma} = \delta_\alpha^\beta$$

Denotemos por  $\omega_{\mathfrak{h}}$  a la parte del Casimir en  $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ , que resulta

$$\omega_{\mathfrak{h}} = \sum_{\alpha} H_\alpha \otimes H^\alpha = \sum_{\alpha, \beta} \kappa^{\alpha, \beta} H_\alpha \otimes H_\beta$$

Ahora hacemos actuar  $\omega_{\mathfrak{h}}$  en  $v_0$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_{\mathfrak{h}} \cdot v_0 &= \sum_{\alpha, \beta} \kappa^{\alpha, \beta} H_\alpha H_\beta v_0 = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} \frac{\kappa(\beta, \beta)}{2} \kappa^{\alpha, \beta} \frac{2H_\alpha}{\kappa(\alpha, \alpha)} \frac{2H_\beta}{\kappa(\beta, \beta)} v_0 \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} \frac{\kappa(\beta, \beta)}{2} \kappa^{\alpha, \beta} (m_\alpha - 1)(m_\beta - 1)v_0 \end{aligned}$$

$$= \left( \sum_{\alpha, \beta} \left( \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} (m_\alpha - 1) \right) \kappa^{\alpha, \beta} \left( \frac{\kappa(\beta, \beta)}{2} (m_\beta - 1) \right) \right) v_0 =: c_{\mathfrak{h}} v_0$$

Veamos que  $c_{\mathfrak{h}} \in \mathbb{R}_{>0}$ . Al igual que antes, algún  $m_\alpha - 1$  es positivo, en particular no nulo. Fijemos una numeración de los elementos de  $\Delta$  y llamemos  $\kappa_{ij} = \kappa(\alpha_i, \alpha_j)$ , y análogamente  $\kappa^{ij}$ , entonces el vector

$$\left( \frac{\kappa(\alpha, \alpha)}{2} (m_\alpha - 1) \right)_{\alpha \in \Delta} = \left( \frac{\kappa_{11}(m_{\alpha_1} - 1)}{2}, \dots, \frac{\kappa_{\ell\ell}(m_{\alpha_\ell} - 1)}{2} \right) \in \mathbb{R}^\ell$$

es no nulo, con coeficientes reales, luego la forma bilineal con matriz  $K^{-1}$ , siendo definida positiva, premultiplicada y aplicada al mismo vector, da un número real positivo. Explícitamente, calculado en términos matriciales, el número  $c_{\mathfrak{h}}$  es:

$$c_{\mathfrak{h}} = \left( \frac{\kappa_{11}(m_{\alpha_1} - 1)}{2}, \dots, \frac{\kappa_{\ell\ell}(m_{\alpha_\ell} - 1)}{2} \right) \begin{pmatrix} \kappa^{11} & \dots & \kappa^{1\ell} \\ \vdots & \kappa^{ij} & \vdots \\ \kappa^{\ell 1} & \dots & \kappa^{\ell\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\kappa_{11}(m_{\alpha_1} - 1)}{2} \\ \vdots \\ \frac{\kappa_{\ell\ell}(m_{\alpha_\ell} - 1)}{2} \end{pmatrix} > 0$$

En consecuencia, el Casimir actuando en  $v_0$  es la suma de dos números positivos, multiplicados por  $v_0$ .

Los items 6 y 7 ya han sido demostrados en los teoremas 9.8 y 9.13 respectivamente, suponiendo la validez del item 5.  $\square$

### 13.2. Representaciones de peso máximo

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja semisimple y fijemos  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan,  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  un sistema de raíces simples, y llamemos  $h_i := \frac{2}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} H_{\alpha_i}$ .

### 13.3. Representaciones de dimensión finita

Para cada  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , construiremos una representación  $V_\lambda$ , que en general resultará de dimensión infinita, pero mostraremos que  $V_\lambda$  es de dimensión finita si y sólo si  $\lambda(h_i)$  es un entero no negativo,  $i = 1, \dots, \ell$ . Veremos también que con este procedimiento, se obtienen *todas* las representaciones de dimensión finita de  $\mathfrak{g}$ .

Primero recolectemos lo que sabemos hasta ahora de representaciones:

**Lema 13.2.** *Sea  $V$  una representación de dimensión finita de  $\mathfrak{g}$ , entonces*

- $V$  es suma directa de subrepresentaciones simples  $V = \bigoplus S_i$ .
- Todos los  $h_i$  son simultáneamente diagonalizables en  $V$  y sus autovalores son números enteros.
- Existe  $0 \neq v_0 \in V$  tal que  $x.v_0 = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha > 0$ .

En efecto, la primera parte es el Teorema de Weyl, que fue demostrada luego de estudiar la acción del Casimir en las representaciones simples. La segunda parte fue demostrada específicamente para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , y dado  $h_i$ , tomamos  $0 \neq e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$  y  $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$  los generadores de Chevalley, que nos proveen de una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y por

restricción,  $V$  es un  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -módulo con respecto a esta subálgebra y por lo tanto  $h_i$  se diagonaliza con autovalores enteros. La tercera parte se demostró luego de ver que una elección de orden en las raíces implica una descomposición triangular de la forma  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ .

Hemos visto que en las representaciones simples de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  los autovalores de  $H$  van de  $-m - 1$  a  $m + 1$ , saltando de dos en dos y que  $v_0$  tiene autovalor máximo; si  $v_0$  es de peso máximo para todos los  $h_i$  entonces los autovalores de  $h_i$  en  $v_0$  son todos no negativos. Recordemos la definición de espacio de peso:

**Definición 13.3.** Sea  $V$  un  $\mathfrak{h}$ -módulo y  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ , llamamos espacio de peso  $\mu$ , que denotamos por  $V_\mu$ , al subespacio de  $V$  definido por

$$V_\mu = \{v \in V : h.v = \mu(h)v\}$$

**Proposición 13.4.** Sea  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo de dimensión finita, entonces

1. Existe una cantidad finita de elementos  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  tales que  $V_\mu \neq 0$  y  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ .
2. Para todo  $\alpha \in \Phi$  se verifica  $\mathfrak{g}_\alpha \cdot V_\mu \subseteq V_{\mu+\alpha}$ .
3. Si  $V$  es simple, entonces  $\dim\{v \in V : x.v = 0 \forall x \in \mathfrak{n}^+\} = 1$ . Además,  $\{v \in V : x.v = 0 \forall x \in \mathfrak{n}^*\}$  es de la forma  $V_\lambda$  y todo  $V_\mu$  que aparece en  $V$  es de la forma  $V_\mu = V_{\lambda - \sum_i n_i \alpha_i}$  con  $n_i$  enteros no negativos.

*Demostración.* El ítem 1 es consecuencia de la segunda parte del lema anterior.

2. Sea  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  y  $v \in V_\mu$ , entonces

$$\begin{aligned} h(x.v) &= h(x.v) - x(h.v) + x(h.v) = [h, x].v + x.(h.v) \\ &= (\alpha(h)x).v + x.(\mu(h).v) = (\alpha(h) + \lambda(h))(x.v) \end{aligned}$$

3. Supongamos ahora que  $V$  es simple y sea  $v_0 \in V$  tal que  $\mathfrak{g}_\alpha \cdot v = 0$  para todo  $\alpha > 0$ . Si consideramos la acción de cada  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ , sabemos que la acción de cada  $h_i$  es diagonal, por lo tanto, es de la forma  $V_\lambda$ .

Para el resto, conviene utilizar el álgebra envolvente, que veremos un poco más adelante (ver proposición 13.20). □

### 13.4. El Álgebra envolvente universal

Dado un espacio vectorial  $W$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , se define el álgebra tensorial en  $W$ , que denotamos por  $T_{\mathbb{K}}W$ , o  $TW$  si sobrentendemos el cuerpo  $\mathbb{K}$ , como

$$TW = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W^{\otimes n} = \mathbb{K} \oplus W \oplus W^{\otimes 2} \oplus W^{\otimes 3} \oplus \dots$$

con el producto asociativo dado por la yuxtaposición, es decir,

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_m) := v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m$$

Esta álgebra tiene la propiedad de ser libre en  $W$  en el siguiente sentido:

**Proposición 13.5.** *Sea  $A$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa y  $f : TW \rightarrow A$  un morfismo de álgebras, entonces la restricción de  $f$  a  $W$  determina una biyección*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(TW, A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, A)$$

*Es decir, para definir un morfismo de álgebras con dominio en  $TW$  basta definir una transformación lineal en  $W$ .*

*Demostración.* Es claro que  $W$  es un sistema de generadores como álgebra de  $TW$ , y si dos morfismos de álgebras coinciden en un sistema de generadores, entonces deben ser iguales. Esto dice que la restricción a  $W$  de morfismos de álgebras  $TW \rightarrow A$  es inyectiva. Para ver que es suryectiva, construiremos un morfismo de álgebras  $\hat{g} : TW \rightarrow A$  a partir de una transformación lineal  $g : W \rightarrow A$ . Para esto definimos  $\hat{g}(1) = 1_A$ ,  $\hat{g}(w) = g(w)$  si  $w \in W$ , y  $\hat{g}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_r) := g(w_1) \cdots g(w_r)$ . Resulta bastante sencillo probar que  $\hat{g}$  está bien definido, y es también bastante claro que resulta un morfismo de álgebras.  $\square$

Si tenemos un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y nos interesamos en sus representaciones, nos importan transformaciones lineales  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  que verifican  $\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = \rho([x, y])$ . Definimos entonces para un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  su *álgebra envolvente universal*, denotada por  $U(\mathfrak{g})$  como

$$U(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g} / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle$$

Dejamos como ejercicio mostrar que la propiedad universal del cociente de un anillo por un ideal, junto con la propiedad universal de  $T\mathfrak{g}$ , se traduce en lo siguiente:

**Proposición 13.6.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $A$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa. Denotemos por  $\text{Lie}(A)$  al álgebra de Lie con espacio vectorial subyacente igual a  $A$  y operación de corchete de Lie dada por el conmutador, entonces la biyección*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(T\mathfrak{g}, A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, A)$$

*induce una biyección*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(U(\mathfrak{g}), A) \cong \text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, \text{Lie}(A))$$

Como corolario, dado un espacio vectorial  $V$ , las posibles estructuras de  $\mathfrak{g}$ -módulo en  $V$  están dadas por

$$\text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)) \cong \text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, \text{Lie}(\text{End}(V))) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(U(\mathfrak{g}), \text{End}(V))$$

Este punto de vista permite estudiar las representaciones de un álgebra de Lie a partir de la teoría de anillos. Notemos que en  $U(\mathfrak{g})$  podemos *reordenar* los productos para escribir los elementos como sumas de monomios en los generadores, en el orden que deseemos. Por ejemplo, si  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ , entonces en  $U(\mathfrak{g})$  es cierta la igualdad

$$xzy = xzy - xyz + xyz = [x, z]y + xyz$$

Podemos considerar que el monomio  $xzy$  no está "ordenado", pero lo podemos escribir como  $xyz$  (que está "ordenado") más términos de menor grado. Notar que  $[x, z] \in \mathfrak{g}$ , luego  $[x, z]y$  es un monomio de grado dos. El resultado que ordena y generaliza este argumento es el siguiente teorema:

**Teorema 13.7.** [Poincaré - Birkhoff - Witt.] Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{K}$ , entonces el conjunto de monomios  $\{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} : (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$  es una  $\mathbb{K}$ -base de  $U(\mathfrak{g})$ . Es decir,  $U(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  como  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

*Demostración:* Ver [Hu], sección 17.4.

**Definición 13.8.** Sea  $A$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra; una sucesión de subespacios  $\mathcal{F}$ :

$$0 = F_{-1} \subseteq F_0 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \dots$$

tales que  $A = \cup_{n \geq 0} F_n$  y  $F_p \cdot F_q \subseteq F_{p+q}$  para todo  $p, q \geq 0$  se dice una **filtración** de  $A$ . En este caso,  $A$  se dice filtrada por  $\mathcal{F}$ .

**Ejemplos 13.9.** 1. Si  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , tiene la filtración por grado total:

$$F_d = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{\leq d},$$
 los polinomios de grado total menor o igual que  $d$ .

2. Si  $V$  es un espacio vectorial, el álgebra tensorial  $TV$  está filtrada por la cantidad máxima de tensores que aparecen en una suma.

3. Si  $\pi : B \rightarrow A$  es un morfismo de álgebras *surjectivo* y  $B$  está filtrada por subespacios  $F_n$ , entonces los subespacios  $\pi(F_n)$  filtran a  $A$ . Como consecuencia,  $U(\mathfrak{g})$  es naturalmente un álgebra filtrada a partir del epimorfismo  $T\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ .

**Definición 13.10.** Sea  $A$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra, diremos que es **graduada** si  $A$  se descompone en suma directa de subespacios

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

tales que  $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}_0$ .

**Definición 13.11.** Sea  $A$  un álgebra filtrada por  $\mathcal{F}$ , se define el graduado asociado a  $(A, \mathcal{F})$ , denotado por  $\text{gr}_{\mathcal{F}}A$ , a través de:

$$\text{gr}_{\mathcal{F}}(A)_n = F_n/F_{n-1}$$

$$\text{gr}_{\mathcal{F}}A = \bigoplus_n \text{gr}_{\mathcal{F}}(A)_n$$

**Proposición 13.12.** Sea  $A$  filtrada por  $\mathcal{F}$ , entonces hay un producto graduado natural en  $\text{gr}_{\mathcal{F}}A = \bigoplus_{n \geq 0} (\text{gr}_{\mathcal{F}}A)_n = \bigoplus_{n \geq 0} (F_n/F_{n-1})$  definido por:

$$(\text{gr}_{\mathcal{F}}A)_n \times (\text{gr}_{\mathcal{F}}A)_m \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}}A$$

$$(\bar{x} \text{ mod } F_{n-1}, \bar{y} \text{ mod } F_{m-1}) \mapsto \overline{xy} \text{ mod } F_{n+m-1}$$

**Proposición 13.13.** Sea  $A$  un álgebra filtrada por  $\mathcal{F}$  y para cada  $n$ ,  $\mathcal{B}_n$  una  $\mathbb{K}$ -base de  $\text{gr}_{\mathcal{F}}(A)_n = F_n/F_{n-1}$ , entonces  $\mathcal{B} = \coprod_n \mathcal{B}_n$  es una base de  $\text{gr}_{\mathcal{F}}A$  y si para cada  $n$ ,  $\mathcal{B}_n = \{\bar{a}_1^n, \dots, \bar{a}_s^n(n)\}$  elegimos  $a_i^n \in F_n$  tales que  $a_i^n = \bar{a}_i^n \text{ mod } F_{n-1}$  y  $\hat{\mathcal{B}}_n = \{a_1^n, \dots, a_s^n(n)\}$  entonces  $\hat{\mathcal{B}} = \coprod_n \hat{\mathcal{B}}_n$  es una base de  $A$ .

Teniendo en cuenta la estructura multiplicativa de  $\text{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$ , el teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt se puede enunciar como

**Teorema 13.14.** [Poincaré - Birkhoff - Witt.] Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una  $\mathbb{K}$ -base, entonces  $\text{gr}U(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , es decir, el graduado asociado al álgebra envolvente es isomorfo al anillo de polinomios en  $n$ -variables. En particular, el conjunto de monomios  $\{x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} : (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$  es una  $\mathbb{K}$ -base de  $U(\mathfrak{g})$ .

### 13.5. Módulos de peso

En toda esta sección, sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja semisimple y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Si  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo, no necesariamente de dimensión finita, definimos

$$V' = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu \subseteq V$$

donde  $V_\mu = \{v \in V : H \cdot v = \mu(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$ . Notar que los  $V_\mu$  son subespacios que están en suma directa, pues autovectores de autovalores distintos son linealmente independientes.

Se dice que  $V$  es un módulo o representación **de peso** si  $V = V'$ . Observar que si  $\dim V < \infty$ , entonces  $V$  es de peso, por la parte 1 de la proposición 13.4.

**Lema 13.15.** *Si  $f : V \rightarrow W$  es un morfismo de representaciones, entonces  $f(V_\mu) \subseteq W_\mu \forall \mu \in \mathfrak{h}^*$ .*

*Demostración.* Sea  $v \in V_\mu$ ; dado que  $f$  es morfismo de representaciones, obtenemos, para todo  $H \in \mathfrak{h}$ :

$$H \cdot f(v) = f(H \cdot v) = f(\mu(H)v) = \mu(H)f(v)$$

por lo tanto  $f(v) \in W_\mu$ . □

**Observación 13.16.** En la prueba anterior sólo hemos utilizado el hecho de que  $V$  sea un  $\mathfrak{h}$ -módulo. Lo mismo ocurre en el próximo lema.

**Lema 13.17.** *Sea  $V$  un módulo de pesos y  $v \in S \subset V$ , con  $S$  una subrepresentación; escribamos  $v = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} v_\mu$ , entonces cada  $v_\mu \in S$ .*

*Demostración.* La suma  $v = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} v_\mu$  es finita; numeremos los términos no nulos que aparecen y escribamos

$$v = \sum_{i=1}^n v_{\mu_i}$$

con  $v_{\mu_i} \neq 0$ . Como los  $\mu_i$  son todos distintos, en particular  $\mu_1 \neq \mu_2$ , tomemos  $H \in \mathfrak{h}$  tal que  $\mu_1(H) \neq \mu_2(H)$ , entonces

$$H \cdot v = \sum_{i=1}^n \mu_i(H)v_{\mu_i}$$

por otro lado

$$\mu_1(H)v = \sum_{i=1}^n \mu_1(H)v_{\mu_i}$$

luego la diferencia

$$H \cdot v - \mu_1(H)v = \sum_{i=2}^n (\mu_i(H) - \mu_1(H))v_{\mu_i}$$

es un elemento de  $S$ . Notar que el coeficiente de  $v_{\mu_2}$  es  $\mu_2(H) - \mu_1(H) \neq 0$ . Si argumentamos por inducción en el soporte de la descomposición de  $v$ , cada uno de los sumandos que aparecen en la descomposición de  $H \cdot v - \mu_1(H)v$  están en  $S$ , en particular  $v_{\mu_2}$ .

Si razonamos de la misma forma con  $\mu_1$  y  $\mu_j$  obtenemos que todos los  $v_{\mu_j} \in S$  con  $j \geq 2$ , entonces también  $v_{\mu_1} \in S$ . □

**Corolario 13.18.** *La categoría de módulos de pesos es cerrada por submódulos y cocientes. Es decir, si  $V$  es un módulo de pesos y  $S$  es un submódulo, entonces  $S$  es un módulo de pesos y  $V/S$  también.*

*Demostración. Ejercicio.* □

**Definición 13.19.** Sea  $\Phi = \Phi(\mathfrak{h})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto de  $\mathfrak{h}$  y sea  $\Phi^+$  una elección de raíces positivas con sistema de raíces simples  $\Delta$ . Sea  $V$  una representación de  $\mathfrak{g}$ . Se dice que  $V$  es un **módulo cíclico de peso máximo** si  $V$  es una representación de pesos y  $V$  está generado, como representación, por un vector  $v_0 \in V_\lambda$ , para cierto  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , con la propiedad  $xv_0 = 0 \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Phi^+$ . En estas condiciones,  $v_0$  se dice un vector cíclico de peso máximo  $\lambda$ .

**Proposición 13.20.** *Sea  $V$  una representación de peso máximo con vector cíclico  $v_0$  de peso  $\lambda$ , entonces, los pesos  $\mu$  que aparecen en  $V$  son de la forma  $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y para cada peso  $\mu$ ,  $\dim V_\mu < \infty$ . En particular, la dimensión de  $V$  es a lo sumo numerable.*

**Observación 13.21.** Esta proposición justifica el nombre de "peso máximo". También demuestra la parte 3 de la proposición 13.4, que habíamos dejado para más adelante.

*Demostración.* Consideremos el subespacio  $V' = U(\mathfrak{g}) \cdot v_0$ , que por la simplicidad de  $V$ , debe ser  $V' = V$ . Por otro lado,  $\mathfrak{h} \cdot V_\lambda \subseteq V_\lambda$  y  $\mathfrak{n}^+ V_\lambda = 0$ , es decir,

$$V = V' = U(\mathfrak{g}) \cdot v_0 = U(\mathfrak{n}^-) \cdot U(\mathfrak{h}) \cdot U(\mathfrak{n}^+) v_0 = U(\mathfrak{n}^-) \cdot v_0$$

Como  $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ , entonces

$$\mathfrak{g}_{\beta_{i_1}} \mathfrak{g}_{\beta_{i_2}} \cdots \mathfrak{g}_{\beta_{i_s}} V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\beta_{i_1}+\beta_{i_2}+\cdots+\beta_{i_s}}$$

Esto muestra que el resto de los sumandos en la descomposición de pesos no puede contribuir a  $V_\lambda$  y también que, si escribimos a cada  $\beta$  como combinación lineal entera de raíces de simples, como las  $\beta$  son raíces negativas, tendremos que los  $V_\mu$  que aparecen son de la forma  $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . □

Como ejemplo, sabemos que todas las representaciones de dimensión finita son de peso máximo. Surge la pregunta acerca de, dado  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , cómo construir una representación de peso máximo  $\lambda$ . Los módulos de Verma sirven para responder esta pregunta. Luego veremos cómo construir módulos simples y podremos decidir cuándo estos módulos son de dimensión finita.

### 13.6. Módulos de Verma

Como aplicación directa del teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt sobre el álgebra envolvente tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 13.22.** *Sea  $\mathfrak{g}$  semisimple, con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  y raíces positivas  $\Phi^+$ . Si  $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$  y  $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha<0} \mathfrak{g}_\alpha$  entonces  $U(\mathfrak{h})$ ,  $U(\mathfrak{n}^+)$  y  $U(\mathfrak{n}^-)$  son subálgebras de  $U(\mathfrak{g})$  y*

$$U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^+)$$

como espacio vectorial; más aún, si  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$  entonces

$$U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{b})$$

como  $U(\mathfrak{n}^-)$ -módulo a izquierda y como  $U(\mathfrak{b})$ -módulo a derecha.

Sea  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , en  $V = \mathbb{C}$  definamos la siguiente estructura de  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ -módulo:

$$x \cdot 1 = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{n}^+, \quad H \cdot 1 = \lambda(H), \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

Denotemos este  $\mathfrak{b}$ -módulo por  $\mathbb{C}(\lambda)$ . Definamos ahora

$$V(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}(\lambda)$$

**Proposición 13.23.** *El elemento  $1 \otimes 1 \in V(\lambda)$  es un vector de peso máximo (igual a  $\lambda$ ) que genera  $V(\lambda)$ ; más aún,  $V(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-) \otimes 1$  como espacio vectorial y como  $U(\mathfrak{n}^-)$ -módulo.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}(\lambda) \\ &\cong (U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{b})) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}(\lambda) \\ &\cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes (U(\mathfrak{b}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}(\lambda)) \\ &\cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}(\lambda) \end{aligned}$$

□

**Corolario 13.24.** *Sea  $\{y_1, \dots, y_m\}$  una base de  $\mathfrak{n}^-$  como espacio vectorial, entonces el conjunto  $\{y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_m^{n_m} \otimes 1 : (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}_0^m\}$  es una base de  $V(\lambda)$  como espacio vectorial.*

**Corolario 13.25.** *Sea  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  y  $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$ , con  $n_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha_i \in \Delta$  entonces la dimensión de  $V(\lambda)_{\mu+\beta}$  es finita; además, la dimensión de  $V(\lambda)_{\lambda}$  es igual a 1.*

**Observación 13.26.** Otra manera de definir a  $V(\lambda)$  es considerar  $J$  el ideal a izquierda de  $U(\mathfrak{g})$  generado por los elementos  $\{x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  con  $\alpha > 0$  y  $(H - \lambda(H)) : H \in \mathfrak{h}\}$ . De esta manera,  $V(\lambda) \cong U(\mathfrak{g})/J$ , donde el vector  $v_0 = 1 \otimes 1$  corresponde a la clase de 1 en  $U(\mathfrak{g})/J$ .

**Proposición 13.27.** *Si denotamos  $V(\lambda)_+ := \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V(\lambda)_{\mu} = \bigoplus_{\mu < \lambda} V(\lambda)_{\mu}$ , entonces todo submódulo propio de  $V(\lambda)$  está contenido en  $V(\lambda)_+$ , en consecuencia, si  $M$  es la suma de todos los submódulos propios,  $M$  es también propio y maximal,  $L(\lambda) := V(\lambda)/M$  es simple y tiene un vector de peso máximo  $\lambda$ .*

*Demostración.* Sea  $W$  un submódulo propio de  $V(\lambda)$  y  $0 \neq v \in W$ , si escribimos  $v = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} v_{\mu}$ , entonces sabemos que cada  $v_{\mu} \in W$ . Si llegara a ocurrir que  $v_{\lambda} \neq 0$  entonces  $W$  contendría al generador de  $V(\lambda)$ , con lo cual  $W$  no sería propio.

Ahora es claro que  $L(\lambda)$  es simple y que tiene como vector de peso máximo a la clase módulo  $M$  del vector de peso máximo de  $V(\lambda)$ . □

**Proposición 13.28.** *Si  $V$  es una representación simple de peso máximo  $\lambda$ , entonces  $V \cong L(\lambda)$ .*

*Demostración.* Sea  $V$  una representación simple con vector de peso máximo  $v_0$  y peso  $\lambda$ , es decir,  $Hv_0 = \lambda(H)v_0$ . Como el peso  $\lambda$  es máximo,  $\lambda + \alpha$  no es peso de  $V$  si  $\alpha$  es raíz positiva y  $x_{\alpha}v_0 = 0$  para todo  $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  con  $\alpha \in \Phi^+$ .

Si consideramos el submódulo generado por  $v_0$ , como  $V$  es simple, debe ser igual a  $V$ , por lo tanto se tiene un epimorfismo

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}) &\rightarrow V \\ u &\mapsto uv_0 \end{aligned}$$

Este es un morfismo de módulos a izquierda, el núcleo es un ideal a izquierda y como  $x_\alpha v_0 = 0$  para todo  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi^+$  y  $Hv_0 = \lambda(H)v_0$ , se tiene que el núcleo contiene a  $x_\alpha$  y a  $H - \lambda(H) \cdot 1$ , por lo tanto, este epimorfismo induce un epimorfismo del módulo de Verma

$$V(\lambda) \cong U(\mathfrak{g})/_{U(\mathfrak{g})} \langle x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha : \alpha \in \Phi^+, (H - \lambda(H)) : H \in \mathfrak{h} \rangle \rightarrow V$$

Como la imagen es simple, el núcleo debe ser una subrepresentación maximal propia de  $V(\lambda)$ , de las cuales hay sólo una; por lo tanto, este epimorfismo induce a la vez otro epimorfismo

$$V(\lambda)/(\text{submódulo propio maximal}) = L(\lambda) \rightarrow V$$

Dado que  $L(\lambda)$  es simple, el núcleo de este epimorfismo debe ser 0 ó bien igual a todo  $L(\lambda)$ , pero no puede ser  $L(\lambda)$  porque no es el morfismo nulo; por lo tanto, es un isomorfismo.  $\square$

La siguiente proposición es de interés en sí misma:

**Proposición 13.29.** [Dixmier]. Sea  $S$  una representación simple, entonces  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(S) = \mathbb{C} \cdot \text{Id}$ .

Sabíamos el resultado para  $\dim S < \infty$  y una manera de demostrarlo es considerar  $f : S \rightarrow S$  un endomorfismo, que en dimensión finita tiene con seguridad un autovalor y el subespacio de autovectores de ese autovalor es un submódulo no nulo, que por lo tanto coincide con  $S$ .

Para el caso  $\dim S = \infty$  daremos otra demostración, que también se puede aplicar para el caso de dimensión finita.

*Demostración.* Sea  $0 \neq v \in S$ , consideremos  $U(\mathfrak{g})v$  la subrepresentación generada por  $v$ , que es no nula, por lo tanto coincide con  $S$ . Como consecuencia, la dimensión de  $S$  es a lo sumo numerable.

A la vez, sabemos que  $E = \text{End}_{\mathfrak{g}}(S)$  es un álgebra de división y como  $v$  genera  $S$ , todo endomorfismo  $f \in E$  queda unívocamente determinado por su valor en  $v$ , pues si  $f$  y  $g$  coinciden en  $v$ , coinciden en un sistema de generadores, son iguales. Esto dice que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} E &\rightarrow S \\ f &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

es inyectiva, luego la dimensión de  $E$  también es a lo sumo numerable.

Consideremos ahora  $f \in E$  un elemento cualquiera y  $\mathbb{C}(f)$  el menor cuerpo contenido en  $E$  que contiene a  $f$ . Si  $f$  fuera algebraico sobre  $\mathbb{C}$ , entonces  $f$  debe ser un elemento de  $\mathbb{C}$ , es decir, como endomorfismo es la multiplicación por un número complejo. Si por el contrario  $f$  fuera trascendente, entonces  $E$  contendría un subcuerpo isomorfo al cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{C}(x)$ . Pero en  $\mathbb{C}(x)$ , el conjunto  $\{\frac{1}{x-c} : c \in \mathbb{C}\}$  es linealmente independiente, luego  $\mathbb{C}(x)$  no puede tener dimensión numerable y en consecuencia  $E$  no contiene elementos trascendentes sobre  $\mathbb{C}$ , por lo tanto  $E = \mathbb{C} \cdot \text{Id}$ .  $\square$

**Teorema 13.30.** Sea  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  tal que  $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}_0$  para todo  $i = 1, \dots, \ell$ , entonces  $L(\lambda)$  es una representación simple de dimensión finita de peso máximo  $\lambda$ .

**Observación 13.31.** Este teorema, junto con la proposición 13.28 provee de una parametrización de todas las representaciones simples de dimensión finita, caracterizando cada una de ellas por una  $\ell$ -upla de números enteros no negativos  $(m_1, \dots, m_\ell)$  que son los autovalores del vector de peso máximo  $v_0$  con respecto a los elementos  $h_1, \dots, h_\ell$  de la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , donde  $\ell$  es el rango de  $\mathfrak{g}$  y  $h_i = \frac{2}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} H_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i \in \Delta$ , corresponden a una base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ .

Para demostrar el teorema, lo único que tenemos que ver es que  $\dim L(\lambda) < \infty$ ; sin embargo, la demostración es larga, y la dividiremos en varias etapas.

Necesitaremos algunas fórmulas de conmutación, que listamos en el siguiente lema. Recordemos la notación dada en la sección 12. Para un álgebra de Lie dada  $\mathfrak{g}$ , con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  y sistema de raíces  $\Phi$ , sea  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  un sistema de raíces simples de  $\mathfrak{g}$ ; se denota por  $e_i, h_i, f_i, i = 1, \dots, \ell$ , a los siguientes elementos:

$$h_i = \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i}$$

$e_i =$  vector no nulo en  $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$

$f_i =$  vector (necesariamente no nulo) en  $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$  tal que  $\kappa(e_i, f_i) = \frac{2}{|\alpha_i|^2}$

**Lema 13.32.** *Valen las siguientes reglas de conmutación en  $U(\mathfrak{g})$ , para  $k \geq 0, i, j = 1, \dots, \ell$ :*

1.  $[e_i, f_j^{k+1}] = 0$  si  $i \neq j$ .
2.  $[h_j, f_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)f_i^{k+1}$
3.  $[e_i, f_i^{k+1}] = -(k+1)f_i^k(k-h_i)$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Lema 13.33.** *Con las mismas hipótesis que en el teorema 13.30:  $v_0 \in L(\lambda)$  el vector de peso  $\lambda$ , con  $h_i \cdot v = \lambda(h_i)v = m_i v, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  con  $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , entonces*

1. *Si  $\alpha$  es una raíz positiva y  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ , entonces  $x$  actúa localmente nilpotentemente en  $V$ , es decir, para cada  $v \in V$ , existe  $N_0(v) \in \mathbb{N}$  tal que  $x^{N_0(v)} \cdot v = 0$ . La palabra "local" se refiere a la dependencia en  $v$  del  $N_0$ .*
2. *Si  $i = 1, \dots, \ell$  entonces  $f_i^{m_i+1} \cdot v_0 = 0$ .*
3. *Los vectores  $f_i$  actúan de manera localmente nilpotente.*

Para la demostración del teorema, también necesitaremos que los  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi^-$  cualquiera (y no necesariamente de la forma  $-\alpha_i$  con  $\alpha_i$  simple) actúen localmente nilpotentemente, pero esto es más largo de probar y necesitaremos un resultado intermedio.

*Demostración.* 1. Los vectores  $e_i$  actúan de manera localmente nilpotente en  $L(\lambda)$ .

Sabemos que los pesos que aparecen en  $L(\lambda)$  son de la forma  $\lambda - \sum_{i=1}^n n_i \alpha_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , por lo tanto si  $v \in V$  es homogéneo de cierto peso  $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^n n_i \alpha_i$ , entonces  $e_i^{n_i+1} \cdot v = 0$  pues tendría un peso que no aparece en  $L(\lambda)$ . Es decir,  $e_i$  es localmente nilpotente en  $L(\lambda)$  para cualquier  $i$  (en realidad esto vale incluso en el módulo de Verma  $V(\lambda)$ ).

Notar que este argumento también demuestra que si  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi^+$ , aunque no necesariamente una raíz simple, entonces  $x$  actúa localmente de manera nilpotente en  $V$ .

2. Si  $i = 1, \dots, \ell$  entonces  $f_i^{m_i+1} \cdot v_0 = 0$ .

En efecto, sea  $w := f^{m_i+1} \cdot v_0$ , sabemos que para  $j \neq i$ ,  $e_j \cdot w = 0$ , pues  $e_j$  conmuta con  $f_i$ . Además, para  $j = i$ ,

$$\begin{aligned} e_i \cdot w &= e_i f^{m_i+1} \cdot v_0 = e_i f^{m_i+1} \cdot v_0 - f^{m_i+1} e_i \cdot v_0 \\ &= [e_i, f^{m_i+1}] \cdot v_0 = -(m_i + 1) f_i^{m_i} (m_i - h_i) \cdot v_0 = 0 \end{aligned}$$

pues  $(m_i - h_i) \cdot v_0 = (m_i - m_i) v_0 = 0$ . Esto dice que  $w$  debería ser un vector de peso máximo, pero los vectores de peso máximo en un módulo simple tienen dimensión uno, con lo que  $w$  es un múltiplo de  $v_0$ , pero  $w \in V_{\lambda - (m_i+1)\alpha_i}$ , por lo tanto  $w = 0$ .

### 3. Los $f_i$ actúan de manera localmente nilpotente.

Para ésto consideremos  $V \subseteq L(\lambda)$  el subespacio definido por  $V = \{v \in L(\lambda) : f_i^N \cdot v = 0, N \gg 0, \forall i\}$ . Sabemos que  $v_0 \in V$  pues  $f_i^{m_i+1} \cdot v_0 = 0$  para todo  $i$ . Si mostramos que  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -submódulo, entonces debe ser  $V = L(\lambda)$ .

Es claro que  $V$  es  $\mathfrak{h}$ -estable, pues si  $v$  es tal que  $f_i^N \cdot v = 0$ ,

$$\begin{aligned} f_i^N H \cdot v &= f_i^N H \cdot v - H f_i^N \cdot v = [f_i^N, H] \cdot v \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} f_i^j [f_i, H] f_i^{N-j-1} \cdot v = \sum_{j=1}^{N-1} f_i^j \alpha_i(H) f_i f_i^{N-j-1} \cdot v \\ &= N \alpha_i(H) f_i^N \cdot v = 0 \end{aligned}$$

Notar que la acción de  $\mathfrak{h}$  no aumenta el grado de nilpotencia de cada  $f_i$ .

Si  $j \neq i$ ,  $f_i^N e_j \cdot v = e_j f_i^N \cdot v$ . Para  $i = j$ , si  $f_i^N \cdot v = 0$ ,

$$f_i^{N+1} e_i \cdot v = f_i^{N+1} e_i \cdot v - e_i f_i^{N+1} \cdot v = [f_i^{N+1}, e_i] \cdot v = (N+1) f_i^N (N - h_i) \cdot v = 0$$

pues el  $h_i$  no aumenta el grado de nilpotencia de  $v$  con respecto a  $f_i$ .

Veamos ahora que  $V$  es estable por multiplicación por los  $f_i$ . Recordemos las relaciones de Serre, para  $i \neq j$ ,

$$0 = \text{ad}_{f_i}^{1-A_{ij}}(f_j)$$

Además sabemos que  $A_{ij} = 0, -1, -2, -3$ , por lo tanto, sin importar de qué álgebra semi-simple se trate, vale la relación

$$\begin{aligned} 0 &= \text{ad}_{f_i}^4(f_j) = [f_i, [f_i, [f_i, [f_i, f_j]]]] \\ &= f_i^4 f_j - 4 f_i^3 f_j f_i + 6 f_i^2 f_j f_i^2 - 4 f_i f_j f_i^3 + f_j f_i^4 \end{aligned}$$

equivalentemente

$$f_i^4 f_j = (4 f_i^3 f_j - 6 f_i^2 f_j f_i + 4 f_i f_j f_i^2 - f_j f_i^3) f_i$$

Esto dice que

$$f_i^4 (f_i^{n'} f_j f_i^{m'} v) \in \langle f_i^{n'} f_j f_i^{m'} v : n', m' \in \mathbb{N}_0, m' \geq m+1 \rangle$$

y por lo tanto

$$f_i^{4N} f_j v \in \langle (f_i^n f_j f_i^m) f_i^N v : n, m \in \mathbb{N}_0 \rangle$$

En consecuencia, la multiplicación por  $f_j$  asigna elementos  $f_i$ -nilpotentes en elementos  $f_i$ -nilpotentes.

Notar que el grado de nilpotencia puede aumentar, pero la cota que hemos utilizado puede mejorarse pues depende de  $1 - A_{ij}$ , que hemos tomado como menor o igual que 4.

El hecho de que  $V = L(\lambda)$  se debe a que  $V$  es  $\mathfrak{g}$ -estable y no nulo, y  $L(\lambda)$  es simple, por lo tanto, debe ser igual a  $V$ .  $\square$

La siguiente proposición es la clave para comprobar la nilpotencia de la parte negativa, pero tiene interés en sí misma:

**Proposición 13.34.** *Sea  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  tal que  $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , entonces, los pesos que aparecen en  $L(\lambda)$  son permutados por la acción del grupo de Weyl.*

Para demostrar esta proposición, encontraremos la forma de hacer actuar al grupo de Weyl en  $L(\lambda)$ , acción que se obtiene a partir de la exponencial de endomorfismos localmente nilpotentes, para lo cual conviene tener a mano la siguiente fórmula:

**Lema 13.35.** *Sean  $x$  y  $h$  dos elementos de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  tales que  $\text{ad}_x^N(h) = 0$  para  $N \gg 0$ ,  $V$  una representación del álgebra de Lie donde  $x$  actúa de manera localmente nilpotente y sea  $v \in V$ ; entonces*

$$h \exp(x)v = \exp(x)(\exp(-\text{ad}_x)(h))v$$

*Demostración.* Observemos que, como  $\text{ad}_x^N(h) = 0$ , se tiene que  $\exp(-\text{ad}_x)(h)$  es una suma finita y da un elemento bien definido del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Además,  $(\exp(-\text{ad}_x)(h))v$  es un elemento de la representación, donde  $x$  actúa nilpotentemente; por lo tanto, de nuevo  $\exp(x)(\exp(-\text{ad}_x)(h))v$  es una suma finita y lo mismo para  $\exp(x)v$ , i.e. en esta fórmula no hay problemas de convergencia.

Observemos primero las siguientes igualdades en potencias bajas en  $U(\mathfrak{g})$ :

$$\begin{aligned} hx &= [h, x]v + xh = -[x, h] + xh \\ hx^2 &= (hx)x = (-[x, h] + xh)x = [-x, -[x, h] + xh] + x(-[x, h] + xh) \\ &= [-x, -[x, h]] + x[-x, h] - x[x, h] + x^2h = \text{ad}_{-x}^2(h) + 2x\text{ad}_{-x}(h) + x^2h \end{aligned}$$

Inductivamente se prueba que

$$hx^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \text{ad}_{-x}^{n-k}(h)$$

y, en consecuencia, para todo elemento  $v$  de la representación  $V$ , vale

$$hx^n v = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \text{ad}_{-x}^k(h)v$$

Dividamos por  $n!$  y efectuemos la sumatoria sobre  $n \in \mathbb{N}_0$  en la igualdad anterior; obtenemos

$$h \exp(x)v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \text{ad}_{-x}^k(h)v \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\text{ad}_{-x}^k(h)}{k!} v \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{ad}_{-x}^n(h)}{n!} v \right) \\
&= \exp(x) \cdot (\exp(-\text{ad}_x)(h)v)
\end{aligned}$$

□

*Demostración de la Proposición 13.34.* Sea  $v \in L(\lambda)$ ; dado que la acción de  $e_i$  y de  $f_i$  es localmente nilpotente en  $L(\lambda)$ , están bien definidas las transformaciones lineales  $\exp(e_i)$  y  $\exp(f_i)$ . Definamos entonces  $S_i := \exp(e_i) \exp(-f_i) \exp(e_i)$ , que resulta un automorfismo lineal, con inverso  $S_i^{-1} = \exp(-e_i) \exp(f_i) \exp(-e_i)$ .

Sea  $\mu$  un peso de  $L(\lambda)$  y  $v \in L(\lambda)_\mu$ ; afirmamos que  $S_i(v) \in L(\lambda)_{s_i(\mu)}$ . En efecto, utilizando el lema anterior, obtenemos

$$HS_i v = S_i(e^{-\text{ad}_{e_i}} e^{\text{ad}_{f_i}} e^{-\text{ad}_{e_i}}(H))v$$

Ahora bien, afirmamos que  $(e^{-\text{ad}_{e_i}} e^{\text{ad}_{f_i}} e^{-\text{ad}_{e_i}}(H))$  coincide con la acción de la reflexión con respecto a  $H_i$ , llamémosla  $\sigma_i(H)$ . Si por un momento suponemos válida la afirmación, obtenemos que

$$HS_i v = S_i \sigma_i(H) v = S_i \mu(\sigma_i(H)) v = \mu(\sigma_i(H)) S_i v$$

es decir,  $S_i v$  es un vector de peso  $\mu \sigma_i$ , como queríamos ver.

La proposición termina observando que todo elemento del grupo de Weyl está generado por reflexiones con respecto a raíces simples y demostrando la igualdad

$$(\dagger) \quad (e^{-\text{ad}_{e_i}} e^{\text{ad}_{f_i}} e^{-\text{ad}_{e_i}}(H)) = \sigma_i(H)$$

Si  $H$  es tal que  $\alpha_i(H) = 0$ , tenemos que  $\text{ad}_{e_i}(H) = [e_i, H] = -\alpha_i(H)e_i = 0$ ; análogamente,  $\text{ad}_{f_i}(H) = 0$  y por lo tanto  $S_i(H) = H$ .

Llamemos  $h = H_i$ ,  $x = e_i$ ,  $y = f_i$ ; la fórmula  $(\dagger)$  anterior es una fórmula en  $U(\mathfrak{sl}(2))$ . Notar que en este caso  $[x, [x, h]] = 0$ , entonces la primera exponencial se reduce a

$$\exp(-\text{ad}_x)(h) = h - [x, h] = h + 2x$$

y por lo tanto

$$\exp(-\text{ad}_x) \exp(\text{ad}_y) \exp(-\text{ad}_x)(h) = \exp(-\text{ad}_x) \exp(\text{ad}_y)(h + 2x)$$

También sabemos que  $[y, x] = -h$ ,  $[y, [y, x]] = [y, -h] = -2y$ ,  $[y, [y, [y, x]]] = [y, -2y] = 0$ , por lo tanto la segunda exponencial se calcula como

$$\begin{aligned}
\exp(-\text{ad}_x) \exp(\text{ad}_y)(h + 2x) &= \exp(-\text{ad}_x)(h + 2x + [y, h + 2x] + \frac{1}{2}[y, [y, h + 2x]]) \\
&= \exp(-\text{ad}_x)(h + 2x + 2y - 2h - 2y) = \exp(-\text{ad}_x)(-h + 2x)
\end{aligned}$$

y finalmente esta exponencial es igual a

$$\exp(-\text{ad}_x)(-h + 2x) = -h + 2x - [x, -h + 2x] = -h + 2x - 2x = -h$$

En conclusión

$$(e^{-\text{ad}_{e_i}} e^{\text{ad}_{f_i}} e^{-\text{ad}_{e_i}})(H_i) = -H_i$$

Por lo tanto, esta transformación lineal cambia de signo a  $H_i$  y deja fijo el espacio ortogonal a  $H_i$ , del mismo modo que lo hace la reflexión con respecto a  $H_i$ . Esto finaliza la demostración de la proposición 13.34. □

**Corolario 13.36.** Con las mismas hipótesis que la proposición anterior, sea  $\alpha$  una raíz positiva e  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , entonces la acción de  $y$  en  $L(\lambda)$  es localmente nilpotente.

*Demostración.* Sea  $\sigma_\alpha \in W$  la reflexión con respecto a la raíz  $\alpha$ . Si  $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha_{i_1}} \cdots \sigma_{\alpha_{i_s}}$  con  $\alpha_{i_j}$  raíces simples, consideremos el isomorfismo lineal de  $L(\lambda)$  dado por  $S_\alpha := S_{i_1} \cdots S_{i_s}$ , donde  $S_i$  es como en la demostración anterior,  $S_i = \exp(e_i) \exp(-f_i) \exp(e_i)$ . Este isomorfismo lineal verifica

$$S_\alpha(V_\mu) \subset V_{\sigma_{\alpha_{i_1}} \cdots \sigma_{\alpha_{i_s}}(\mu)} = V_{\sigma_\alpha(\mu)},$$

y por lo tanto el endomorfismo

$$\tilde{Y} = S_\alpha y S_\alpha^{-1} : L \rightarrow L$$

verifica, para cada peso  $\mu$ ,

$$\tilde{Y}(V_\mu) = S_\alpha y S_\alpha^{-1}(V_\mu) \subseteq S_\alpha y(V_{\sigma_\alpha(\mu)}) \subseteq S_\alpha(V_{\sigma_\alpha(\mu) - \alpha}) \subseteq V_{\sigma_\alpha(\sigma_\alpha(\mu) - \alpha)} = V_{\mu + \alpha}$$

Utilizando el mismo argumento con el que probamos que los  $e_i$  actúan nilpotentemente, resulta que  $\tilde{Y}$  es localmente nilpotente. Pero entonces  $y$  debe ser localmente nilpotente, pues es conjugado de  $\tilde{Y}$ .  $\square$

Ahora podemos demostrar el teorema de finitud de la dimensión de  $L(\lambda)$  de la siguiente forma: comenzamos con

$$L(\lambda) = U(\mathfrak{g})v_0 = U(\mathfrak{n}^-)v_0$$

Sea  $\{\beta_1, \dots, \beta_r\} = \Phi^- = -\Phi^+$  una numeración de las raíces negativas, y  $0 \neq y_i \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$  una elección de vectores raíces. Por el teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt, tenemos que un sistema de generadores de  $L(\lambda)$ , como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, está dado por elementos de la forma

$$\sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r} y_1^{n_1} \cdots y_r^{n_r} v_0$$

Como  $y_r$  es localmente nilpotente, existe  $N_r = N_r(y_r, v_0) \in \mathbb{N}$  tal que

$$y_r^{N_r} v_0 = 0$$

por lo tanto, podemos considerar expresiones de la forma

$$\sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r} y_1^{n_1} \cdots y_r^{n_r} v_0$$

con  $n_r \leq N_r$ .

Si consideramos ahora  $y_{r-1}$ , como también actúa nilpotentemente, para cada potencia  $k = 0, 1, 2, \dots, N_r$  existe  $N_{r-1}(k)$  tal que

$$y_{r-1}^{N_{r-1}(k)} y_r^k v_0 = 0$$

Si llamamos  $N_{r-1}$  al máximo de los  $N_{r-1}(k)$ ,  $k = 0, \dots, N_r$ , tenemos que

$$y_{r-1}^{N_{r-1}(k)} y_r^k v_0 = 0 \quad \forall k$$

y en consecuencia es suficiente considerar expresiones de la forma

$$\sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r} y_1^{n_1} \cdots y_r^{n_r} v_0$$

con  $n_r \leq N_r$  y  $n_{r-1} \leq N_{r-1}$ .

Continuando este proceso, resulta claro que las potencias de los  $y_i$  que aparecen en los monomios están globalmente acotadas y por lo tanto  $L(\lambda)$  admite una cantidad finita de generadores.

### 13.7. Ejercicios

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie arbitraria

1. Si  $V$  y  $W$  son dos representaciones, entonces  $V \otimes W, V^*, \text{Hom}(V, W)$  son representaciones. Escriba las acciones de  $\mathfrak{g}$  en cada uno de los casos. Demuestre que si  $\dim V < \infty$ ,  $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$  (isomorfismo de representaciones). Si  $f : V \rightarrow W$  es morfismo de representaciones, entonces  $f^* : W^* \rightarrow V^*$  es morfismo de representaciones.
2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V^{\otimes n}$  es una representación. Escriba la fórmula de la acción. Si  $S_n$  es el grupo simétrico y  $\sigma \in S_n$ , demuestre que la aplicación  $V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$  dada por

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

es un morfismo de representaciones. Concluya que  $S^n V$ , los  $n$ -tensores simétricos, y  $\Lambda^n V$ , los  $n$ -tensores anisimétricos, son dos subrepresentaciones de  $V^{\otimes n}$ .

3. Demuestre que para  $n = 2$  vale  $V^{\otimes 2} = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$  pero que para  $n > 2$ ,  $S^n V \oplus \Lambda^n V \subset V^{\otimes n}$  es una subrepresentación propia.
4. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja, con  $\mathfrak{h}$  subálgebra de Cartan y  $\Delta$  un sistema de raíces simples. Sea  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  y  $V = L(\lambda)$  el módulo simple de peso máximo  $\lambda$ . Demuestre que  $L(n\lambda) \subset L(\lambda)^{\otimes n}$ , más aún, es una subrepresentación de la potencia simétrica, es decir  $L(n\lambda) \subset S^n L(\lambda) \subset L(\lambda)^{\otimes n}$ .
5. Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior, muestre que si  $d = \dim(L(\lambda))$  entonces  $\Lambda^d L(\lambda)$  es la representación trivial.
6. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra simple y  $V$  una representación de dimensión menor que  $\sqrt{\dim \mathfrak{g}}$ , demuestre entonces que la acción de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  es necesariamente trivial. Haga una tabla con los valores de  $\sqrt{\dim \mathfrak{g}}$  y de su parte entera para  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$  con  $n = 2, 3, 4, 5, n$ ; haga lo mismo para  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$  con  $n = 4, 5, 6$ , y para  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n)$  con  $n = 4, 5, 6$ .
7. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie sobre un cuerpo  $F$  de característica cero tal que  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  (por ejemplo si  $\mathfrak{g}$  es semisimple) y  $V$  una representación finita de dimensión  $d$ . Demuestre que la multiplicación en el álgebra exterior induce, para cada  $1 \leq k \leq d$ , una función bilineal no degenerada  $\mathfrak{g}$ -invariante

$$\Lambda^k V \times \Lambda^{d-k} V \rightarrow \Lambda^d V \cong F$$

donde  $F$  es la representación trivial de dimensión uno. Concluya que  $\Lambda^k V \cong \Lambda^{d-k} V^*$  (isomorfismo de representaciones).

**En los ejercicios 8 al 11,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ :**

Consideremos  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  generada por  $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Llamemos  $V_m$  a la representación simple de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  de dimensión  $m$ . Sabemos que debe ser de peso máximo  $\lambda$  y caracterizada de manera única por el entero  $m_1 = \lambda(h)$ .

8. Demuestre que  $V_m$  corresponde a  $L(\lambda)$  con  $\lambda(h) = m - 1$ . Llamemos  $V(n)$  a  $V_{n+1}$ .
9. Demuestre que  $V(1) \otimes V(1) = V(2) \oplus V(0)$ .
10. Demuestre que  $V(2) \otimes V(1)$  contiene a la representación trivial.  
*Sugerencia: considere  $V(2) \otimes V(1) \subset (V(1) \otimes V(1)) \otimes V(1) = (V(2) \oplus V(0)) \otimes V(1)$ . Dado que también debe contener a  $V(3)$ , concluya  $V(2) \otimes V(1) \cong V(3) \oplus V(0) \oplus V(0)$ .*
11. Para una representación cualquiera  $V$ , sabemos que  $V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$ , suma de los subespacios de tensores simétricos y antisimétricos, respectivamente. Para  $V = V(2)$ ,  $V(2) \otimes V(2) = S^2V(2) \oplus \Lambda^2V(2)$ , demuestre que  $\dim S^2V(2) = 6$ ,  $\dim \Lambda^2V(2) = 3$  y que  $V(4) \subset S^2V(2)$ . ¿Cómo se descompone  $V(2) \otimes V(2)$  como suma de representaciones de tipo  $V(n)$ ?

**En los ejercicios 12 al 20,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ :**

Llamemos  $V(n, m)$  a la representación simple  $L(\lambda)$  con  $\lambda(h_1) = n$  y  $\lambda(h_2) = m$ .

12. Consideremos la *representación de definición*  $\mathbb{C}^3$  dada por  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{3 \times 3} = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ , es decir, si  $v \in \mathbb{C}^3$  y  $A \in \mathfrak{g}$ ,  $A \cdot v$  es la multiplicación usual de matrices por vectores. Probar que esta representación es isomorfa a  $V(1, 0)$  y su dual es isomorfa a  $V(0, 1)$ .
13. Sea  $V$  la representación adjunta, con base  $\{f_1, f_2, f_3, h_1, h_2, e_1, e_2, e_3\}$  donde  $e_3 = [e_1, e_2]$  y  $f_3 = -[f_1, f_2]$ . Demuestre que  $e_3$  es un vector de peso máximo. ¿A qué  $V(m, n)$  es isomorfa?
14. Demuestre que  $V(1, 0) \otimes V(0, 1) = V(1, 0) \otimes V(1, 0)^* = \text{End}_{\mathbb{C}}(V(1, 0)) = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})^{\text{ad}} \oplus \mathbb{C}$ . Notar que esto da otra manera de responder al ejercicio anterior.
15. Demuestre que  $V(1, 0) \otimes V(1, 0) \otimes V(1, 0)$  contiene a la representación trivial. Concluya que existe una forma trilineal invariante  $V(1, 0) \times V(1, 0) \times V(1, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  no nula. Concluya que  $V(1, 0) \otimes V(1, 0)$  contiene a  $V(0, 1)$  como subrepresentación y que  $V(0, 1) \otimes V(0, 1)$  contiene a  $V(1, 0)$ .
16. A partir de  $V(1, 0) \otimes V(1, 0) = S^2(V(1, 0)) \oplus \Lambda^2(V(1, 0))$ , concluya que  $V(1, 0) \otimes V(1, 0)$  contiene a  $V(0, 1)$  pues  $\Lambda^2V(1, 0) \cong V(0, 1)$ ; ¿por qué?
17. Sabiendo que  $V(2, 0) \subseteq S^2(V(1, 0))$  demuestre que  $\dim V(2, 0) \leq 6$ . Calcule la subrepresentación generada por  $E_1 \otimes E_1$ , donde  $E_1$  es el vector de peso máximo de  $V(1, 0)$ . ¿Es cierto que  $\dim V(3, 0) = 6$ ?
18. Exhiba una base de  $S^3(V(1, 0))$ ; concluya que  $\dim V(3, 0) \leq 10$ . Calcule la subrepresentación generada por  $E_1 \otimes E_1 \otimes E_1$ . ¿Es cierto que  $\dim V(3, 0) = 10$ ?

19. Descomponga  $V(1, 0) \otimes V(1, 0) \otimes V(1, 0)$  como suma de subrepresentaciones simples.  
*Sugerencia: parta de la descomposición de  $V(1, 0) \otimes V(1, 0)$  y de lo que sepa del ejercicio anterior.*
20. Descomponga  $V(1, 0)^{\otimes 4}$  como suma de representaciones simples. ¿Puede contener a la representación trivial? Idem para  $V(1, 0)^{\otimes 5}$  y  $V(1, 0)^{\otimes 6}$ .

## 14. Álgebras de Clifford

### 14.1. Definición

Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo de característica distinta de dos,  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal simétrica. Buscamos una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa y unitaria donde valga la igualdad

$$"v^2 = B(v, v)1"$$

Este problema se resuelve formalmente de manera sencilla, definiendo

$$\text{Cliff}(V, B) := TV / \langle v \otimes v - B(v, v)1_{TV} : v \in V \rangle$$

donde  $TV$  es el álgebra tensorial en  $V$  y  $\langle v \otimes v - B(v, v)1_{TV} \rangle$  es el ideal bilátero de  $TV$  generado por los elementos de la forma  $v \otimes v - B(v, v)1_{TV}$  para todo  $v \in V$  y  $1_{TV}$  es la unidad de  $TV$ . El álgebra  $\text{Cliff}(V, B)$  así definida se denomina el **álgebra de Clifford** asociada al par  $(V, B)$ .

Notar que hay una inclusión canónica de espacios vectoriales  $V \rightarrow TV$  y, componiendo con la proyección al cociente, obtenemos una aplicación lineal

$$\iota : V \rightarrow \text{Cliff}(V, B)$$

que verifica  $\iota(v)^2 = B(v, v)$ .

La propiedad de libertad de  $TV$  junto con la propiedad universal del cociente implica que el álgebra de Clifford es universal con respecto a la propiedad requerida; el enunciado preciso es el siguiente.

**Proposición 14.1.** *Sea  $A$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa y  $f : V \rightarrow A$  una transformación lineal tal que  $f(v)^2 = B(v, v)1_A$  para todo  $v \in V$ , entonces existe un único morfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras  $\tilde{f} : \text{Cliff}(V, B) \rightarrow A$  con  $\tilde{f}(\iota(v)) = f(v)$ .*

$$\begin{array}{ccc} (V, B) & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ \text{Cliff}(V, B) & & \end{array}$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Observación 14.2.**  $TV$  es graduada, pero los elementos  $v \otimes v - B(v, v)1$  no son homogéneos, por lo tanto  $\text{Cliff}(V, B)$  no es graduada, aunque sí es filtrada. Notemos además que, aunque  $v \otimes v - B(v, v)1$  no es homogéneo en  $\mathbb{N}_0$ , sí tiene paridad; en efecto,  $v \otimes v$  tiene grado dos y  $B(v, v)1$  tiene grado cero en  $TV$ . En consecuencia, la paridad de un tensor elemental de grado  $r$ , que es la paridad del número natural  $r$ , queda bien definida en el cociente. Por lo tanto, las álgebras de Clifford son naturalmente  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas con la paridad de productos de sus generadores. Por ejemplo, la clase de  $u \otimes v \otimes w \in \text{Cliff}(V, B)$  es impar y la clase de  $u \otimes v \otimes w \otimes w = B(w, w)u \otimes v \in \text{Cliff}(V, B)$  es par.

**Observación 14.3.** Supongamos que tenemos  $v, w \in V$ , entonces sus imágenes en el álgebra de Clifford verifican

$$\iota(v+w)^2 = B(v+w, v+w)$$

donde el miembro izquierdo es igual a

$$\begin{aligned} \iota(v+w)^2 &= (\iota(v) + \iota(w))^2 = \iota(v)^2 + \iota(v)\iota(w) + \iota(w)\iota(v) + \iota(w)^2 \\ &= B(v, v) + \iota(v)\iota(w) + \iota(w)\iota(v) + B(w, w) \end{aligned}$$

mientras que el derecho es

$$B(v+w, v+w) = B(v, v) + 2B(v, w) + B(w, w)$$

Por lo tanto, para todo  $v, w \in V$

$$\iota(v)\iota(w) + \iota(w)\iota(v) = 2B(v, w)$$

Lo anterior permite definir

$$\text{Cliff}'(V, B) = TV / \langle v \otimes w + w \otimes v - 2B(v, w) \rangle$$

y obtenemos un epimorfismo canónico

$$\text{Cliff}'(V, B) \rightarrow \text{Cliff}(V, B)$$

A la vez, si vale la relación  $vw + wv = 2B(v, w)$  para todo  $v, w$ , entonces en particular, se verifica también para  $v = w$  i.e.  $2v^2 = 2B(v, v)$ , equivalentemente,  $v^2 = B(v, v)$ , que implica la existencia de un morfismo canónico

$$\text{Cliff}(V, B) \rightarrow \text{Cliff}'(V, B)$$

Es fácil comprobar que la composición de ambos morfismos de álgebras es la identidad. Por lo tanto, obtenemos que

$$\text{Cliff}(V, B) = \text{Cliff}'(V, B)$$

### Cálculo de la dimensión

**Ejemplo 14.4.** Sea  $B \equiv 0$  la forma bilineal nula, entonces

$$\text{Cliff}(V, 0) = TV / \langle v \otimes w + w \otimes v \rangle = \Lambda V$$

el álgebra de Clifford coincide con el álgebra exterior. Vemos fácilmente en este caso que  $\dim \text{Cliff}(V, 0) = 2^{\dim V}$ .

Dado que el álgebra de Clifford es filtrada, su dimensión es igual a la dimensión del graduado asociado,  $\text{gr}(\text{Cliff}(V, B))$ . Si consideramos el graduado asociado, la relación  $v \otimes w + w \otimes v - 2B(v, w)$  coincide, módulo tensores de longitud menor que dos, con  $v \otimes w + w \otimes v$ ; por lo tanto, el graduado asociado a  $\text{Cliff}(V, B)$  no es otra cosa que  $\text{Cliff}(V, 0)$ , que tiene dimensión finita, igual a  $2^{\dim V}$ . Concluimos que

$$\dim \text{Cliff}(V, B) = 2^{\dim V}$$

**Corolario 14.5.** *La aplicación natural  $\iota : V \rightarrow \text{Cliff}(V, B)$  es inyectiva, lo cual permite identificar a los elementos de  $V$  con su imagen por esta aplicación.*

**Observación 14.6.** Dado que el graduado asociado a  $\text{Cliff}(V, B)$  es  $\text{gr}(\text{Cliff}(V, B)) = \Lambda V$ , si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es una base de  $V$ , entonces

$$\{1\} \cup \{x_i : i = 1, \dots, n\} \cup \{x_i x_j : i < j\} \cup \{x_i x_j x_k : i < j < k\} \cup \dots \cup \{x_1 x_2 \dots x_n\}$$

es una base de  $\text{Cliff}(V, B)$ . Podemos pensar a  $\text{Cliff}(V, B) = \Lambda V$  como espacio vectorial, donde se ha cambiado el producto. Por ejemplo, si  $i < j$  entonces  $x_i x_j = x_i \wedge x_j$ , pero si  $i > j$  entonces  $x_i x_j = -x_j x_i + 2B(x_i, x_j) = -x_j \wedge x_i + 2B(x_i, x_j) = x_i \wedge x_j + 2B(x_i, x_j)$ .

## 14.2. Presentación del álgebra de Clifford por generadores y relaciones

Sea  $A$  un álgebra generada por un subespacio  $V$ . Dado que la identidad

$$vw + wv = 2B(v, w)$$

es lineal en  $v$  y en  $w$ , para verificar esta relación en  $A$  basta comprobarla en los elementos de una base de  $V$ , luego, si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es una base de  $B$  y  $B_{ij} = B(x_i, x_j)$ , el álgebra de Clifford asociada se puede describir como

$$\text{Cliff}(V, B) = T\{x_1, \dots, x_n\} / \langle x_i \otimes x_j + x_j \otimes x_i - 2B_{ij} \rangle$$

Dada una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial sobre un cuerpo cualquiera  $\mathbb{K}$ , existe una base respecto de la cual la matriz de la forma es diagonal y, si  $B(x_i, x_i) = d_i \in \mathbb{K}$ , el álgebra de Clifford es el álgebra con generadores  $\{x_1, \dots, x_n\}$  y relaciones

$$x_i^2 = d_i : 1 \leq i \leq n; \quad x_i x_j = -x_j x_i : i \neq j$$

**Ejemplo 14.7.** Sea  $V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$  y sea la forma bilineal  $B(a, b) = -ab$ . Consideremos  $e_1 = 1$  la base de  $\mathbb{R}$ , entonces el álgebra de Clifford es

$$\mathbb{R}[e_1] / \langle e_1^2 + 1 \rangle = \mathbb{C}$$

**Ejemplo 14.8.** Sea  $V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ , pero con la forma bilineal  $B(a, b) = +ab$ . Consideremos  $e_1 = 1$  la base de  $\mathbb{R}$ , entonces el álgebra de Clifford es

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[e_1] / \langle e_1^2 - 1 \rangle &\cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ a + be_1 &\mapsto (a + b, a - b) \end{aligned}$$

**Ejemplo 14.9.** Si  $V = \mathbb{K} = \mathbb{C}$ , las dos formas bilineales anteriores son equivalentes; sea por definición  $B(z, w) = zw$ , entonces el álgebra de Clifford es

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[e_1] / \langle e_1^2 + 1 \rangle &\cong \mathbb{C}[x] / \langle x^2 - 1 \rangle \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ e_1 &\leftrightarrow ix \end{aligned}$$

donde el isomorfismo  $\mathbb{C}[x] / \langle x^2 - 1 \rangle \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  se obtiene complexificando el del ejemplo anterior:  $a + bx \mapsto (a + b, a - b)$ . En particular, las dos anteriores son formas reales no isomorfas de esta álgebra de Clifford compleja.

**Proposición 14.10.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ ; sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal,  $B$  una forma bilineal simétrica en  $V$  y  $B'$  una forma bilineal simétrica en  $W$  tal que  $B'(fv, fv) = B(v, v)$  para todo  $v \in V$ , entonces  $f$  induce un morfismo de álgebras  $\text{Cliff}(f) : \text{Cliff}(V, B) \rightarrow \text{Cliff}(W, B')$ . De esta manera,  $\text{Cliff}$  es un functor de la categoría de espacios vectoriales con formas bilineales simétricas en la categoría de álgebras asociativas unitarias. En símbolos, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} (V, B) & \xrightarrow{f} & (W, B') \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota' \\ \text{Cliff}(V, B) & \xrightarrow{\exists! \tilde{f}} & \text{Cliff}(W, B') \end{array}$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Corolario 14.11.** Sea  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $V = \mathbb{C}^n$  y  $B$  una forma bilineal, simétrica, no degenerada en  $V$ , entonces existe una única clase de isomorfismo de álgebras de Clifford complejas asociada a tales formas bilineales. Dichas álgebras son todas isomorfas al álgebra de Clifford correspondiente a la forma bilineal que, en alguna base, admite una matriz diagonal con unos en la diagonal, que llamaremos  $\text{Cliff}(n)$  o  $\text{Cliff}^n$ .

**Corolario 14.12.** Sea  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $V = \mathbb{R}^n$ ; si  $B$  una forma bilineal, simétrica, no degenerada, entonces está determinada por la signatura, luego toda álgebra de Clifford asociada a una forma bilineal, simétrica, no degenerada, es isomorfa a una, y sólo una, de las álgebras  $\text{Cliff}^{p,q} := \text{Cliff}(\mathbb{R}^n, \eta_{p,q})$  donde  $\eta_{p,q}$  es la forma bilineal cuya matriz en la base canónica está dada por  $\text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$ , con  $p$  menos unos y  $q$  unos.

**Ejercicio 14.13. Extensión de escalares.** Sea  $E/\mathbb{K}$  una extensión de cuerpos,  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $B$  una forma bilineal simétrica en  $V$ , entonces  $E \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V, B) = \text{Cliff}(E \otimes_{\mathbb{K}} V, E \otimes_{\mathbb{K}} B)$ .

**Ejemplo 14.14.**  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^2, +, +) \cong \mathbb{H}$ . En efecto, en este caso, el álgebra de Clifford está generada como álgebra por elementos  $e_1, e_2$  tales que  $e_1^2 = -1 = e_2^2$  y  $e_1e_2 = -e_2e_1$ . Su dimensión es igual a  $2^2 = 4$  y tiene una base como espacio vectorial dada por  $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ . Consideremos el isomorfismo  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^2, +, +) \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $1 \mapsto 1, e_1 \mapsto i, e_2 \mapsto j, e_1e_2 \mapsto ij = k$ .

**Ejemplo 14.15.** Verificar el isomorfismo de álgebras  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^2, -, +) \cong \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Para ésto, sean  $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Se deja como ejercicio probar que  $e_1$  y  $e_2$  verifican las relaciones adecuadas y que el morfismo inducido en las álgebras por la propiedad universal es un isomorfismo.

**Ejercicio 14.16.** Análogamente, verificar el isomorfismo de álgebras  $\text{Cliff}(\mathbb{C}^2, +, +) \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . *Sugerencia:* considerar del ejemplo anterior las matrices  $e_1$  y  $e_2$  y tomar  $ie_1$  y  $e_2$ .

### 14.3. Álgebras de Clifford y representaciones de álgebras de Lie ortogonales

Volvamos ahora al caso general de  $\mathbb{K}$  un cuerpo cualquiera de característica distinta de dos,  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal simétrica. El objetivo de esta sección es, a partir del álgebra de Clifford  $\text{Cliff}(V, B)$ , construir representaciones naturales del álgebra de Lie ortogonal

$$\mathfrak{so}(V, B) = \{T : V \rightarrow V : B(Tv, w) + B(v, Tw) = 0, v, w \in V\}$$

**Ejemplo 14.17.** a. Probar que  $\mathfrak{so}(V, B) = \{T : V \rightarrow V : B(Tv, v) = 0, \forall v \in V\}$ .

b. Probar además que si  $V = \mathbb{K}^n$  y  $B$  está definida en la base canónica por  $B(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$  entonces  $\mathfrak{so}(V, B)$  consiste de todas las matrices antisimétricas.

c. Probar que si  $B$  es la forma nula entonces  $\mathfrak{so}(V, B) = \mathfrak{gl}(V)$ .

d. Describir matricialmente  $\mathfrak{so}(\mathbb{K}^n, \eta_{p,q})$ , donde  $\eta_{p,q}$  es la forma bilineal cuya matriz en la base canónica está dada por  $\text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$ , con  $p$  menos unos y  $q$  unos.

La proposición siguiente es el primer paso para identificar a  $\mathfrak{so}(V, B)$  con una subálgebra de Lie de  $\text{Cliff}(V, B)$ , donde consideramos la estructura de Lie en  $\text{Cliff}(V, B)$  dada por el conmutador.

**Proposición 14.18.** *Consideremos  $V$  como subespacio de  $\text{Cliff}(V, B)$  vía la inclusión natural, entonces el subespacio  $[V, V]$  es estable por conmutadores y resulta un álgebra de Lie. Además,  $[V, V] \cong \Lambda^2 V$  como espacio vectorial.*

*Demostración.* Queremos probar que  $[[V, V], [V, V]] \subset [V, V]$ . Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $V$  respecto de la cual  $B$  es una matriz diagonal y valen las relaciones  $x_i^2 = d_i$  para todo  $i$  y  $x_i x_j = -x_j x_i$  si  $i \neq j$ . En particular, el subespacio  $[V, V]$  está generado por elementos de la forma

$$\{[x_i, x_j] := x_i x_j - x_j x_i, i \neq j\}$$

Notar que para  $i \neq j$ , se tiene  $x_i x_j - x_j x_i = 2x_i x_j$ . Calculemos los corchetes

$$[x_i x_j, x_k x_l]$$

Consideremos las distintas posibilidades: Si  $i = k$  y  $j = l$ , evidentemente el corchete es cero. Si  $i = k$  y  $j \neq l$ :

$$[x_i x_j, x_i x_l] = x_i x_j x_i x_l - x_i x_l x_i x_j = -x_i^2 x_j x_l + x_i^2 x_l x_j = -d_i [x_j, x_l]$$

En general, si uno de los índices del primer producto coincide con uno de los índices del segundo, la cuenta es similar. Si  $i \neq k, l$  y  $j \neq k, l$  es fácil ver que el corchete también da cero. En cualquiera de los casos, el resultado pertenece a  $[V, V]$ .  $\square$

**Proposición 14.19.** *Con la estructura de álgebra de Lie en  $\text{Cliff}(V, B)$  dada por los conmutadores, y considerando la acción adjunta de la subálgebra de Lie  $[V, V]$  en  $\text{Cliff}(V, B)$ , resulta  $[[V, V], V] \subseteq V$ ; i.e.  $V$  es un  $[V, V]$ -módulo.*

*Demostración.* Consideremos la notación de la proposición anterior. Basta calcular los conmutadores  $[x_i x_j, x_k]$  con  $i \neq j$  y verificar que el resultado pertenezca a  $V$ . Hagamos la cuenta para todas las posibilidades:

Si  $k \neq i, k \neq j$ : utilizando  $x_i x_k = -x_k x_i$  y  $x_j x_k = -x_k x_j$ , obtenemos

$$[x_i x_j, x_k] = x_i x_j x_k - x_k x_i x_j = 0$$

Si  $k = i \neq j$ :

$$[x_i x_j, x_i] = x_i x_j x_i - x_i^2 x_j = -x_i^2 x_j - x_i^2 x_j = -2d_i x_j \in V$$

Análogamente, si  $k = j \neq i$ :

$$[x_i x_j, x_j] = 2d_j x_i \in V$$

□

**Proposición 14.20.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo de característica distinta de dos,  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal simétrica, entonces la acción de  $[V, V]$  en  $V$  preserva la forma bilineal  $B$ , i.e., la acción de  $[V, V]$  en  $V$  induce una aplicación  $[V, V] \rightarrow \mathfrak{so}(V, B)$ .

*Demostración.* Queremos demostrar que, para todo  $\xi \in [V, V]$  y  $v, w \in V$

$$B([\xi, v], w) + B(v, [\xi, w]) = 0$$

pero por la simetría de la forma bilineal (ver ejercicio 14.17), es suficiente probar que para todo  $\xi \in [V, V]$  y  $v \in V$

$$B([\xi, v], v) = 0$$

Dado que  $B(v, v) = v^2 \in \mathbb{K}$  y para todo  $a \in \text{Cliff}(V, B)$  vale  $[a, \mathbb{K}] = 0$ , en particular  $[\xi, v^2] = 0$ . Pero, además, en cualquier álgebra asociativa, para todo  $a, v$ , se verifica

$$[a, v^2] = v[a, v] + [a, v]v$$

entonces  $0 = v[\xi, v] + [\xi, v]v$ .

Por otra parte, si  $v, \tilde{v} \in V$  entonces  $v\tilde{v} + \tilde{v}v = 2B(v, \tilde{v})$ , en particular, para  $\tilde{v} = [\xi, v] \in V$ ; por lo tanto

$$0 = v[\xi, v] + [\xi, v]v = v\tilde{v} + \tilde{v}v = 2B(v, \tilde{v}) = 2B(v, [\xi, v])$$

como queríamos ver.

Finalmente, notemos que la aplicación

$$[V, V] \ni \xi \mapsto [\xi, -]|_V : V \rightarrow V$$

induce un morfismo de álgebras de Lie

$$[V, V] \rightarrow \mathfrak{so}(V, B) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$$

□

**Proposición 14.21.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo de característica distinta de dos,  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal simétrica y no degenerada, entonces la aplicación anterior  $[V, V] \rightarrow \mathfrak{so}(V, B)$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Notar que las dimensiones son iguales:  $\dim([V, V]) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(\mathfrak{so}(V, B))$ ; por lo tanto, basta verificar que la aplicación es inyectiva. Es decir, queremos probar que si  $\xi \in [V, V]$  es tal que  $[\xi, v] = 0$  para todo  $v \in V$ , entonces  $\xi = 0$ .

Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $V$  respecto de la cual  $B$  es una matriz diagonal y valen las relaciones  $x_i^2 = d_i$  para todo  $i$  y  $x_i x_j = -x_j x_i$  si  $i \neq j$ . Sea  $\xi = \sum_{i < j} c_{ij} x_i x_j$  tal que  $[\xi, v] = 0$  para todo  $v$ , entonces

$$0 = [\xi, x_k] = \sum_{i < j} c_{ij} [x_i x_j, x_k]$$

Por las reglas de conmutación, sabemos que  $[x_i x_j, x_k]$  es cero si  $k \neq i, j$ , por lo tanto la suma anterior se reduce a

$$0 = [\xi, x_k] = \sum_{k < j} c_{kj} [x_k x_j, x_k] + \sum_{i < k} c_{ik} [x_i x_k, x_k] = 2d_k \sum_{k < j} c_{kj} x_j - 2d_k \sum_{i < k} c_{ik} x_i$$

Como los  $x_i$  son linealmente independientes y los  $d_k \neq 0$ , dado que  $B$  es no degenerada, esto implica que, para todo  $k$  vale  $c_{ik} = 0$  si  $i < k$  y  $c_{kj} = 0$  si  $j > k$ ; por lo tanto,  $\xi = 0$ .  $\square$

**Observación 14.22.** Una alternativa a esta demostración es la siguiente: supongamos que estamos en el caso complejo, con todos unos en la diagonal. El álgebra ortogonal consiste de matrices antisimétricas y tiene como base a las matrices  $\{E_{ij} - E_{ji} : i < j\}$ . Consideremos la aplicación lineal  $E_{ij} - E_{ji} \mapsto \frac{1}{2} x_j x_i$ ; se deja como ejercicio verificar que es un morfismo de álgebras de Lie.

## 14.4. Representación Spin

Sabemos que  $[V, V]$  es una subálgebra de Lie de  $\text{Cliff}(V, B)$  con el corchete de Lie dado por el conmutador, isomorfa a  $\mathfrak{so}(V, B)$ , y que  $V \subset \text{Cliff}(V, B)$  es una subrepresentación de  $[V, V]$  con el conmutador. Pero también  $\text{Cliff}(V, B)$  es un módulo asociativo sobre sí mismo, luego  $\text{Cliff}(V, B)$  es un  $[V, V]$ -módulo de Lie con la multiplicación a izquierda, pues

$$\xi_1(\xi_2 u) - \xi_2(\xi_1 u) = (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1)u = [\xi_1, \xi_2]u$$

para toda terna  $\xi_1, \xi_2, u$  en  $\text{Cliff}(V, B)$ , en particular cuando  $\xi_1, \xi_2 \in [V, V]$ . Notar que con esta acción,  $V$  no es más una representación, sin embargo, toda el álgebra de Clifford sí lo es. A la vez, esta representación no es simple, pero es suma directa de simples. La representación Spin será un sumando directo de  $\text{Cliff}(V, B)$ .

Para encontrar la descomposición de  $\text{Cliff}(V, B)$  como suma directa de subrepresentaciones simples vamos a estudiar la estructura de  $\text{Cliff}(V, B)$  como álgebra asociativa. Consideraremos solamente el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $V = \mathbb{C}^n$  y  $B$  la forma bilineal diagonal standard, i.e.  $B$  la forma bilineal tal que su matriz en la base canónica es diagonal, con unos en la diagonal.

**Proposición 14.23.** Consideremos las álgebras de Clifford complejas  $\text{Cliff}^n = \text{Cliff}(\mathbb{C}^n, + \dots +)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ; se tienen los siguientes isomorfismos de álgebras asociativas:

- Si  $n$  es par,  $n = 2m$ , entonces  $\text{Cliff}^n \cong \mathbb{C}^{2^m \times 2^m}$ .
- Si  $n$  es impar,  $n = 2m + 1$ , entonces  $\text{Cliff}^n \cong \mathbb{C}^{2^m \times 2^m} \times \mathbb{C}^{2^m \times 2^m}$ .

*Demostración.* Recordemos el hecho general de que si  $A$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa, entonces  $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\ell \times \ell} \cong A^{\ell \times \ell}$ , matrices con coeficientes en  $A$ . Además, si  $A = \mathbb{K}^{r \times r}$  entonces  $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\ell \times \ell} \cong A^{\ell \times \ell} \cong \mathbb{K}^{r\ell \times r\ell}$ , donde el último isomorfismo se obtiene al organizar cada elemento de  $\mathbb{K}^{r\ell \times r\ell}$  en bloques de tamaño  $r \times r$ . Mostraremos que  $\text{Cliff}^{n+2} \cong \text{Cliff}^n \otimes \text{Cliff}^2$ , luego el resultado se sigue por inducción junto con el hecho de que  $\text{Cliff}^0 = \mathbb{C}$ ,  $\text{Cliff}^1 = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  y  $\text{Cliff}^2 = \mathbb{C}^{2 \times 2}$ .

Sea  $x_1, \dots, x_{n+2}$  una base de  $\mathbb{C}^{n+2}$  respecto de la cual  $B$  es diagonal con unos en la diagonal y sea  $\varepsilon = x_1 x_2 \in \text{Cliff}^2$ . Notar que valen las relaciones de anticonmutatividad

$$\varepsilon x_1 = -x_1 \varepsilon, \quad \varepsilon x_2 = -x_2 \varepsilon$$

y también

$$\varepsilon^2 = x_1 x_2 x_1 x_2 = -x_1^2 x_2^2 = -1$$

Sea  $V = \mathbb{C}^{n+2} = \bigoplus_{i=1}^{n+2} \mathbb{C} x_i$ , definimos entonces la aplicación lineal

$$\mathbf{j} : V \rightarrow \text{Cliff}^2(\mathbb{C}) \otimes \text{Cliff}^n$$

a través de la siguiente fórmula:

$$x_k \mapsto \mathbf{j}(x_k) = x_k \otimes 1 \quad : \quad k = 1, 2$$

$$x_j \mapsto \mathbf{j}(x_j) = i\varepsilon \otimes x_j \quad : \quad j > 2$$

Ahora verifiquemos las relaciones; recordemos que  $x_k^2 = B(x_k, x_k) = 1$  para todo  $k$ , y  $x_j x_k + x_k x_j = 0$  para todo  $j \neq k$ , entonces

Para  $k = 1, 2$ :

$$\mathbf{j}(x_k)^2 = (x_k \otimes 1)^2 = x_k^2 \otimes 1 = 1 \otimes 1$$

Para  $j > 2$ :

$$\mathbf{j}(x_j)^2 = (i\varepsilon \otimes x_j)^2 = -\varepsilon^2 \otimes x_j^2 = 1 \otimes 1$$

Para  $k = 1, 2, j > 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x_j)\mathbf{j}(x_k) + \mathbf{j}(x_k)\mathbf{j}(x_j) &= (i\varepsilon \otimes x_j)(x_k \otimes 1) + (x_k \otimes 1)(i\varepsilon \otimes x_j) \\ &= i\varepsilon x_k \otimes x_j + i x_k \varepsilon \otimes x_j = i(\varepsilon x_k + x_k \varepsilon) \otimes x_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

el resultado anterior es cero pues  $\varepsilon x_k + x_k \varepsilon = 0$  si  $k = 1$  ó  $k = 2$ .

Análogamente, se verifica sin dificultad que  $\mathbf{j}(x_j)\mathbf{j}(x_{j'}) + \mathbf{j}(x_{j'})\mathbf{j}(x_j) = 0$  para todo  $j, j' > 2$  y  $\mathbf{j}(x_{k'})\mathbf{j}(x_k) + \mathbf{j}(x_k)\mathbf{j}(x_{k'}) = 0$  para todo  $k, k' = 1, 2$ . Habiendo verificado estas relaciones, el morfismo anterior se extiende a un morfismo de álgebras del álgebra de Clifford

$$\text{Cliff}^{n+2} \rightarrow \text{Cliff}^2 \otimes \text{Cliff}^n$$

Notar que las dimensiones son las mismas, con lo cual, para ver que esta aplicación es un isomorfismo, basta ver que sea un epimorfismo. Pero es claro que la imagen contiene a  $x_k \otimes 1$  para  $k = 1, 2$ , por lo tanto contiene a  $\varepsilon \otimes 1$  y como contiene a  $i\varepsilon \otimes x_j$  para cada  $j = 2, \dots, n+2$ ; también contiene a  $1 \otimes x_j$ . Dado que contiene a los generadores como álgebra del codominio, resulta suryectivo.  $\square$

**Corolario 14.24.** Sea  $n = 2m$  y  $S = \mathbb{C}^{2m} = \mathbb{C}^{2m \times 1}$  el espacio vectorial de vectores columnas, entonces  $S$  es un  $\mathbb{C}^{2m \times 2m}$ -módulo, y, vía el isomorfismo anterior, es un  $\text{Cliff}^n$ -módulo asociativo, por lo tanto, un  $\mathfrak{so}(2m, \mathbb{C})$ -módulo de Lie. Si  $n$  es impar, consideremos  $S = \mathbb{C}^{2m} = \mathbb{C}^{2m \times 1}$  como un  $\mathbb{C}^{2m \times 2^m} \times \mathbb{C}^{2^m \times 2^m}$ -módulo de dos maneras diferentes: con la estructura usual del primer factor y actuando por cero con el segundo factor, o viceversa. Llamemos  $S^+$  a la representación con la primera acción y  $S^-$  a la representación con la segunda acción. Tenemos entonces dos representaciones, no isomorfas, de  $\text{Cliff}^n$ , que por restricción proveen de dos representaciones distintas de  $\mathfrak{so}(2m + 1, \mathbb{C})$ .

Las representaciones construídas de esta forma se denominan **representaciones spin**.

### 14.5. Ejemplos

**Ejemplo 14.25.** Para  $n = 2$ ,  $\mathfrak{so}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$  es el álgebra de Lie abeliana de dimensión uno. Su representación standard es  $\mathbb{C}^2$ , donde el generador de  $\mathfrak{so}(2, \mathbb{C})$  actúa por  $(x, y) \mapsto (y, -x)$ .

Si consideramos el álgebra de Clifford  $\text{Cliff}^2 \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$  con generadores  $e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , el conmutador resulta

$$[e_1, e_2] = \left[ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que en este caso,  $[V, V] \subset \text{Cliff}^2$  se identifica con  $\mathfrak{so}(2, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$  y la representación Spin coincide con la standard.

**Ejemplo 14.26.** Para  $n = 3$ ,  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ . La representación standard es de dimensión tres, al igual que la representación adjunta.

Sabemos que  $\text{Cliff}^3 \cong \text{Cliff}^2 \otimes \text{Cliff}^1 = \text{Cliff}^2 \otimes (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2 \times 2} \otimes (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2 \times 2} \times \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Exhibiremos un isomorfismo explícito: Sean  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \times \mathbb{C}^{2 \times 2}$  definidos como sigue:

$$e_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$e_2 = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$e_3 = \left( \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Se deja como ejercicio verificar las relaciones  $e_i^2 = 1, i = 1, 2, 3; e_i e_j = -e_j e_i$  si  $i \neq j$ . También es un ejercicio elemental verificar que el álgebra generada por  $e_1, e_2, e_3$  coincide con  $\mathbb{C}^{2 \times 2} \times \mathbb{C}^{2 \times 2}$ .

Si consideramos la matriz de la izquierda, obtenemos que la representación spin es de dimensión dos y, por lo tanto no es la standard. En este caso, sabemos que  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y, por cada dimensión, existe una única representación irreducible de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Obtenemos que la representación spin de  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$  se identifica con la representación standard de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

**Ejemplo 14.27.** Para  $n = 4$ ,  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{array} \right) : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ .

La representación standard es de dimensión cuatro, mientras que la adjunta es de dimensión seis.

**Ejercicio 14.28.** Por razones de interés para la física, suele considerarse  $\mathfrak{so}(1, 3)$  en lugar de  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ . Muestre que  $\mathfrak{so}(1, 3, \mathbb{C}) = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{array} \right) : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ .

Por convención, llamaremos  $\gamma_\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  a los generadores del álgebra  $\text{Cliff}^4$  con

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}$$

donde la matriz  $\eta$  es la matriz diagonal  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Sabemos que  $\text{Cliff}^4 = \mathbb{C}^{2 \times 2} \otimes \mathbb{C}^{2 \times 2} = (\mathbb{C}^{2 \times 2})^{2 \times 2} = \mathbb{C}^{4 \times 4}$  y estos isomorfismos nos permiten “descubrir” generadores de  $\text{Cliff}^4$  a partir de los generadores de  $\text{Cliff}^2$  colocándolos en bloques de tamaño  $2 \times 2$ . En otras palabras, es fácil verificar que las siguientes matrices verifican  $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ :

$$\gamma_0 = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad \gamma_1 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\gamma_2 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \gamma_3 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La representación Spin es de dimensión cuatro. ¿Es isomorfa a la standard? Notar que el subespacio generado por los corchetes  $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  nos proveen naturalmente de un isomorfismo con  $\mathfrak{so}(1, 3, \mathbb{C})$ . Para obtener un isomorfismo con  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  deberíamos considerar  $\gamma_0, i\gamma_1, i\gamma_2, i\gamma_3$ .

Para responder a la pregunta anterior, necesitamos estudiar los pesos de la acción de una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  en la representación spin, para poder compararla con la standard.

Comencemos encontrando una subálgebra de Cartan en  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  y luego, vía el isomorfismo de álgebras de Lie  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong [V, V] \subset \text{Cliff}^4$ , sabremos cómo es la acción de la subálgebra de Cartan en la representación spin, lo cual nos permitirá calcular sus pesos.

Comprobemos que  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ; para ésto, sean los elementos

$$h_1 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array} \right), \quad h_2 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{array} \right)$$

Dejamos como ejercicio verificar que generan una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ .

Consideremos  $M(A) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline -A^t & 0 \end{array} \right)$ , donde  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  y sea  $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  entonces  $JA + AJ = i \begin{pmatrix} c - b & d + a \\ -d - a & c - b \end{pmatrix}$  y en consecuencia

$$[h_1, M(A)] = \left( \begin{array}{c|c} 0 & JA + AJ \\ \hline -(JA + AJ)^t & 0 \end{array} \right)$$

Verifiquemos además que si

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow JA_1 + A_1J = 2A_1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow JA_2 + A_2J = 0$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow JA_3 + A_3J = -2A_3$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow JA_4 + A_4J = 0$$

Llamemos  $e_1 = M(A_1)$ ,  $f_1 = M(A_3)$ ,  $e_2 = M(A_2)$ ,  $f_2 = M(A_4)$ . Análogamente, calculemos a continuación los corchetes entre  $h_2$  y cada una de las matrices  $M$  anteriores:

$$[h_2, M(A)] = \left( \begin{array}{c|c} 0 & JA - AJ \\ \hline -(JA - AJ)^t & 0 \end{array} \right), \text{ donde } JA - AJ = i \begin{pmatrix} c + b & d - a \\ d - a & -c - b \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, obtenemos las reglas de conmutación:

$$[h_i, e_i] = 2e_i, [h_i, f_i] = -2f_i, [e_i, f_i] = h_i, \text{ para } i = 1, 2,$$

$$[x_1, y_2] = 0, \text{ para } x, y = e, f, h$$

y obtenemos así un isomorfismo  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

### Subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ y pesos de la representación standard

En el párrafo anterior consideramos la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2$ . Tomemos la representación standard  $\mathbb{C}^4$  y su base canónica  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ . Es claro que estos vectores no son autovectores de la acción de  $\mathfrak{h}$ , pues las matrices  $h_1$  y  $h_2$  no son diagonales. Sin embargo, se verifica fácilmente que

$$v_1 = E_1 - iE_2, v_2 = E_1 + iE_2, v_3 = E_3 - iE_4, v_4 = E_3 + iE_4$$

sí son autovectores, con los autovalores dados por:

$$h_1v_1 = v_1, h_1v_2 = -v_2, h_2v_3 = -v_3, h_2v_4 = v_4$$

$$h_2v_1 = v_1, h_2v_2 = -v_2, h_2v_3 = v_3, h_2v_4 = -v_4$$

Por lo tanto, los pesos que aparecen en la representación standard están listados por los pares de números enteros  $(\pm 1, \pm 1)$ . En particular, el peso máximo es  $(1, 1)$ , con vector de peso máximo  $v_1$ .

### Cálculo de $[V, V]$ en $\text{Cliff}^4$ y pesos de la representación Spin

Consideremos  $h_1$  y  $h_2$  como antes; necesitamos un isomorfismo  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong [V, V] \subset \text{Cliff}^4$  para estudiar así la acción de  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  en la representación Spin.

Recordemos que la matriz  $E_{ij} - E_{ji} \in \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  corresponde a  $\frac{1}{2}(e_j e_i) \in \text{Cliff}^4$  si  $e_i$  son tales que  $e_i^2 = 1$ ,  $e_i e_j = -e_j e_i$ . Sean entonces las matrices  $e_1 = \gamma_0, e_2 = i\gamma_1, e_3 = i\gamma_2, e_4 = i\gamma_3$  y calculemos los corchetes; obtenemos por ejemplo que

$$h_1 = i((E_{12} - E_{21}) - (E_{34} - E_{43})) \leftrightarrow i \left( \frac{1}{2}e_2 e_1 - \frac{1}{2}e_4 e_3 \right)$$

es decir, que bajo el isomorfismo  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \rightarrow [V, V]$ ,  $h_1$  se corresponde con

$$i \frac{1}{2}(i\gamma_1 \gamma_0 - i\gamma_3 i\gamma_2) = \frac{1}{2}(-\gamma_1 \gamma_0 + i\gamma_3 \gamma_2) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

que tiene autovalores 0, 1, -1. Esto ya muestra que la representación spin no es isomorfa a la standard, dado que la acción de  $h_1$  no tiene el autovalor cero en la representación standard.

Para terminar el cálculo de los pesos, consideremos

$$h_2 = i((E_{12} - E_{21}) + (E_{34} - E_{43}))$$

que corresponde a

$$i \frac{1}{2}(i\gamma_1 \gamma_0 + i\gamma_3 i\gamma_2) = \frac{1}{2}(-\gamma_1 \gamma_0 - i\gamma_3 \gamma_2) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

el cual tiene también autovalores 0, 1, -1.

En la base

$$B = \{v_1 = (1, 1, -1, -1), v_2 = (1, 1, 1, 1), v_3 = (-1, 1, -1, 1), v_4 = (1, 1, 1, 1)\}$$

estos vectores tienen autovalores (1, 0), (-1, 0), (0, 1) y (0, -1), con respecto a  $h_1$  y  $h_2$ , *i.e.*  $v_1$  tiene autovalor 1 con respecto a  $h_1$  y 0 con respecto a  $h_2$ , *etc.* Observamos que no hay un único peso máximo, sino dos, que son (1, 0) y (0, 1); por lo tanto esta representación no es simple, sino suma directa de dos simples:  $V_\ell$ , el subespacio generado por los vectores de autovalores  $(\pm 1, 0)$ , y  $V_r$ , el subespacio generado por los vectores de autovalores  $(0, \pm 1)$ .

Los pesos de esta representación no son los de la representación standard de  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ , por lo tanto, no es isomorfa a la standard. Además, la representación standard es simple, ¿por qué?

Si utilizamos el isomorfismo  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , dejamos como ejercicio demostrar que la representación Spin en este caso es isomorfa a la suma directa de las representaciones standard de cada una de las copias de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

## Referencias

- [B] Bourbaki, N., *Elements de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie*, Hermann, Paris 1960.
- [H] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978.
- [Hu] Humphreys, J., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [J] Jacobson, N., *Lie Algebras*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1962. Reprinted by Dover, 1979.
- [Kn] Knapp, A., *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
- [S] Serre, J.-P., *Lie Algebras and Lie Groups*. W A. Benjamin, New York 1965 .
- [W] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman, Glenview, III, 1971. Second ed. Springer-Verlag. New York 1982.

# Índice alfabético

- Álgebra
  - de Clifford, 136–140, 142
  - envolvente universal, 121, 122, 124, 125
  - filtrada, 123, 136
  - graduada, 123, 136
- Álgebra de Lie, 17
  - compacta, 26, 62, 117
  - de Heisenberg, 52
  - lineal, 20
  - nilpotente, 52, 53, 58
  - reductiva, 63
  - semisimple, 54, 63, 113
  - simple, 24, 54
  - soluble, 52, 54
- Álgebras de Lie clásicas, 21, 64, 65, 100, 110, 117
- Cartan
  - criterios de, 58
  - matriz de, 96, 97, 101, 106, 112–114
  - subálgebra de, 65, 75, 76, 79, 87
- Casimir, 50, 51, 81–84, 86, 118, 120
- Centro, 23, 28, 52–54, 63
- Chevalley
  - base de, 112, 113
- Derivación, 27, 28, 60, 82
  - interior, 28, 60
- Dynkin
  - diagrama de, 98–101, 106
- Elemento regular, 74, 75
- Espacio de peso, 121
  - generalizado, 73
- Espacio raíz, 76, 77, 89, 91, 92, 94
- Exponencial, 21, 34, 36–39, 43, 45, 130, 131
- Forma
  - compacta, 26, 117
  - real, 58, 66, 69–72, 117
- Forma de Killing, 45, 47, 48, 76, 77, 89, 91, 92, 94
- Graduado asociado, 123
- Grupo
  - compacto, 62
  - conexo, 8, 16, 21, 30, 36, 39, 42, 43, 45, 62
  - Continuo, 6
  - de Lie, 7
  - de Weyl, 91, 92, 96
  - simplemente conexo, 14, 21, 30, 36, 62
- Grupos de Lie clásicos, 11, 21, 40
- Ideal, 23
  - soluble, 60
  - derivado, 23, 63
- Módulo, 46
  - cíclico, 125
  - de Verma, 125
- Morfismo
  - de álgebras de Lie, 17
  - de grupos de Lie, 14
- Normalizador, 65, 74
- Peso generalizado, 73
- Producto
  - directo, 18
  - semidirecto de álgebras de Lie, 28, 33
  - semidirecto de grupos, 10
  - vectorial, 33
- Raíz, 67, 76, 77, 89, 91, 92, 94, 96
  - descomponible, 94
  - positiva, 94
- Radical, 54, 58
- Reflexión, 91, 92
- Representación, 118
  - Spin, 144, 147
  - adjunta, 27, 28, 45–47, 65, 75, 85, 134, 140, 144, 145
  - de álgebra de Lie, 46
  - de álgebras de Lie, 46
  - de álgebras de Lie ortogonales, 140
  - de dimensión finita, 120
  - de Grupos, 14
  - de peso máximo, 120
  - irreducible, 61, 88
  - Spin, 142
  - standard, 144, 146
  - trivial, 46, 133, 135

## Serre

- relaciones de, 112, 113

- Teorema de reconstrucción de, 114

Sistema de raíces, 76, 77, 89, 91, 92, 94, 96, 113

Sistema de raíces simples, 94, 96, 98

Sistema irreducible, 99

Soluble, 54, 58, 59

Subálgebra, 17

- de Cartan, 74–76, 79, 87

- nilpotente, 74

Sucesión

- central descendente, 52

- derivada, 52

Teorema

- de clasificación, 100, 101

- de Engel, 57, 58

- de isomorfismos, 26, 113

- de Levi, 56

- de Lie, 55

- de Poincaré - Birkhoff - Witt, 122, 123

- de reconstrucción de Serre, 114

- de Weyl, 61, 118

- Lema de Whitehead, 118

Vector

- de peso generalizado, 73

- de peso máximo, 125