UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS de ENSEÑANZA

Nº 3/2012

PROBLEMAS DE DIDÁCTICA DE LOS DECIMALES

Guy Brousseau

Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Rafael Soto

Editores: **Lorenzo M. Iparraguirre – Laura Buteler**

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA
REPÚBLICA ARGENTINA

PROBLEMAS DE DIDÁCTICA DE LOS DECIMALES*

NOTA PRELIMINAR

Este documento fue publicado en versión papel por la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (Fa.M.A.F.) en colaboración con el Centro de Estudios Avanzados de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Se incluyó en la Serie "B" de Trabajos de Matemática con el Nº 26/94. La traducción fue realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Rafael Soto.

Ya está disponible en el sitio de la Fa.M.A.F., como Serie "B" de Enseñanza la versión digital de la traducción que corresponde a "Problemas de la enseñanza de los decimales" **. Ambos artículos provienen de la publicación revisada y aumentada por el autor difundida en *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990*, (1998), La Pensée Sauvage.

La revisión y actualización de la traducción fue posible durante la estancia de Dilma Fregona en el Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática (CRDM) Guy Brousseau, del Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones de Castellón (IMAC), de la Universitat Jaume I (UJI) de Castellón de la Plana, España. Dicha estancia, por un período de tres meses, ha sido financiada por el Plan 2011 de Promoción de la Investigación (cod: INV-2011-2012) de la UJI y con el apoyo de la Fa.M.A.F. a través de una resolución de traslado en comisión a la ciudad de Castellón (HCD 315/2011).

* Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2 (1), 37-127.

** Brousseau G., (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 1 (1), 11-59, Editiones La Pensée Sauvage

INTERLUDIO[1]

El artículo anterior, *Problemas de la enseñanza de los decimales*, preparó el terreno para la presentación de las cuestiones centrales de la didáctica, por las cuales fue concebida la Teoría de las Situaciones y a las cuales dicha teoría propone medios de respuesta. Brousseau evoca así esas cuestiones:

"¿Cómo elaborar situaciones que hagan funcionar realmente una noción? Es decir, que no se puedan responder sin poner en funcionamiento esa noción y sin darle un sentido. ¿De qué parámetros dependen cualitativamente los procedimientos que dan cuenta del uso de esa noción? ¿Cómo hacer necesaria una asimilación (en el sentido de Piaget), cuando una acomodación (ídem) es indispensable? Estas son algunas de las preguntas específicas que se proponen acerca de la didáctica de los decimales y a las cuales intentaremos aportar elementos de respuesta."

El artículo, *Problemas de didáctica de los decimales*, propone algunas respuestas a estas cuestiones, y para ello pone en funcionamiento los conceptos fundamentales de la didáctica. De cierto modo este texto puede ser leído como una continuación de *Fundamentos y métodos de la didáctica*[2], donde se presentan los fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas, aunque ciertos conceptos de la teoría no están explícitamente mencionados. En particular, en 1981 los conceptos de devolución y de institucionalización no estaban formulados. Como lo observa Perrin-Glorian (1994), esos conceptos han aparecido en 1982 y 1986, respectivamente, en exposiciones realizadas durante las Escuelas de Verano de didáctica de las matemáticas. Sin embargo, un lector atento reconocerá los gérmenes de esos conceptos, podrá inclusive intentar hacer el ejercicio de reformular completamente el artículo que sigue en los términos de la teoría tal como la presenta *Fundamentos y métodos.*

Señalemos que, con respecto a la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, el estudio que sigue propone una presentación de los decimales que puede ser considerada como una alternativa real a las presentaciones clásicas y a las elecciones de ingeniería didáctica disponibles hasta ahora. El texto presenta un análisis epistemológico y al mismo tiempo, un análisis de las principales características de las situaciones y de los procesos que dan acceso a esos conceptos por parte de los alumnos.

Brousseau califica este ensayo como "epistemología experimental", una designación que hubiera podido conservarse para el campo científico nuevo que constituye la didáctica y del cual este estudio es uno de los mejores ejemplos.

---

[1] *NdT*: Es así como se denomina en la publicación de 1998 realizada por La Pensée Sauvage.

[2] *NdT*: se refiere a Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 33-115. Grenoble: La Pensée Sauvage.

PROBLEMAS DE DIDACTICA DE LOS DECIMALES

1. CONCEPCIÓN GENERAL DE UN PROCESO DE ENSEÑANZA DE LOS DECIMALES

1.1. Conclusiones del estudio matemático

1.1.1. Axiomática y elecciones didácticas implícitas

Existen muchas maneras de definir o de construir matemáticamente los decimales. Difieren en la elección de lo que se considere conocido como objeto matemático y como método de demostración, pero su resultado es el mismo, en el sentido de que existe un medio para mostrar la equivalencia, el isomorfismo de las estructuras obtenidas. Cada una de esas construcciones axiomáticas está en el campo de la matemática; por el contrario, el estudio de lo que hace sus diferencias, las razones de las elecciones, de lo que es admitido o no, de lo que es importante o no, fácil o no... no pertenece a la matemática. Una construcción axiomática está implícitamente cargada de opciones epistemológicas, de presupuestos didácticos de los cuales no hay que creer que son necesarios, como lo son las conclusiones matemáticas, pero por los cuales hay que pasar para obtener un discurso que permita comunicar la noción. Dos métodos difieren por la elección de los axiomas y las reglas de producción de los teoremas.

1.1.2. Transformaciones del discurso matemático

Existen también procedimientos formales que transforman un discurso matemático en otro que da cuenta de la misma axiomática. Estos procesos afectan más o menos profundamente al discurso:

- la lógica permite el cambio de orden de los enunciados, diversas presentaciones de las implicaciones (condición necesaria o condición suficiente puestas en evidencia), el reagrupamiento en enunciados generales, el estallido de lemas y corolarios, etc.
- la retórica sugiere sus figuras de pensamiento, la antítesis, la comparación, la repetición[3] inclusive la hipotiposis y porque no la prosopopeya[4] y agregaremos la ilustración, el ejemplo, el comentario, etc.
- la gramática y la estilística permiten las reformulaciones en lenguaje más simple, el reemplazo de términos por su definición, la elección de sinónimos, etc., sin hablar de los procedimientos de presentaciones caros a Gagné (1980).

Estos diversos procedimientos aplicados de forma casi automática suministran siempre un discurso, una exposición que se puede esperar más simple, más clara, más redundante... y en consecuencia más inteligible, más asimilable que el discurso matemático inicial. Este punto de vista alimenta cierto número de investigaciones que, a pesar de todo su interés, no han logrado mostrar que esos procedimientos actuaran, según las nociones y sobre las adquisiciones de los alumnos, de manera específica y diferenciada. De igual modo que los métodos pedagógicos de los cuales hemos estudiado los efectos en el artículo precedente, estos procedimientos tienen en común no cuestionar, no interrogar la construcción matemática misma.

---

[3] Aquí, el lector puede insertar las 43 principales acepciones que podrá encontrar por ejemplo a la palabra "figura" en el *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue francaise* de Robert.

[4] Cf. Lucienne Félix. *NdE*: Félix (1971). Lucienne Félix imagina un diálogo entre tres personajes Dessi, Mati y Logi que reúnen sus competencias en dibujo, matemática y lógica para estudiar un problema de geometría. La prosopopeya es un género retórico en el cual se invoca el discurso de seres ausentes, muertos, sobrenaturales o abstractos, o dioses.

1.1.3. Metamatemática y heurística

Existe un lenguaje especializado en la descripción y la comparación de esos métodos; funciona en el discurso de los matemáticos, en sus comentarios, en sus cursos y sus confidencias. Junto a los términos auténticamente matemáticos a veces utilizados de forma metafórica, a los indispensables términos metamatemáticos (que describen el lenguaje matemático) y a algunos términos paramatemáticos, (considerados como claros aunque no están definidos) se encuentran esencialmente conceptos heurísticos: generalización, síntesis, análisis, problemas tales como los que presenta Polya en sus obras[5]. Ese lenguaje, más bien descriptivo y clasificador en algunos de sus continuadores, permite no obstante interrogarse sobre las diferentes construcciones de una noción a partir de sus motivaciones.

1.1.4. Extensiones y restricciones

Tomemos por ejemplo una construcción directa de los decimales **D**:

- Consideremos, en **Z x N**, la relación de equivalencia $\sim$

(a, n) $\sim$ (b, p) $\Leftrightarrow$ $a.10^{p} = b.10^{n}$, la clase de (a, n) se denota $\frac{a}{b}$ $a/10^{n}$

- **D = Z x N**/ $\sim$ está munido de operaciones estables por pasaje al cociente:

(a, n) + (b, p) = ($a.10^{p} + b.10^{n}$, n + p)
(a, n) x (b, p) = (a.b, n+p)
que extienden las operaciones en **N**, identificadas a (**N**,0) $\subset$ **D**

- **D** está ordenado por (a, n) $\leq$ (b, p) $\Leftrightarrow$ $a.10^{p} \leq b.10^{n}$

- Entonces (**D**, +, x, $\leq$) es un anillo conmutativo unitario íntegro y totalmente ordenado.

Este método es típico de una categoría de construcciones que consisten en tomar una estructura conocida, aquí **Z**, y hacer *una extensión* que le agrega elementos. Hemos esbozado en el artículo precedente una construcción de $\mathbf{D}^{+}$, por una extensión de **N** que procedía por la *adjunción* de un solo elemento *d* tal que 10.d = 1. Todas las potencias positivas o negativas de este elemento, sus productos y sus sumas con un número finito de otros (entre ellos o con los naturales) engendran $\mathbf{D}^{+}$. Aunque produce el mismo resultado, este método permite "ver" mejor que se ha agregado lo menos posible a **N**, y qué es lo que se ha agregado. Por el contrario, exige una toma de conciencia de lo que representan todas las operaciones posibles de un elemento con los otros, es decir el semianillo de los polinomios con coeficientes naturales **N**[x]. (Supone el uso de una estructura más compleja.)

Pero esta construcción borra las partes más rugosas de la construcción utilizando la mejor de las realizaciones físicas. El sistema métrico es para ese programa el medio indispensable para la comprensión de $\mathbf{D}^{+}$. Observando de más cerca, es porque **N** se expresa en la base 10 que la elección oportuna de *d* permite una agradable extensión de las técnicas de cálculo al nuevo conjunto. Esta construcción por adjunción permite luego engendrar el conjunto de las series enteras de *d*, es decir los reales.

Existe otra categoría de construcciones que procede a la inversa, por restricción. Se ha definido una estructura general, por ejemplo **Q**, y se la restringe a no tomar más que una parte de sus

[5] *NdE*: Polya (1957)

elementos. *Ejemplo:* los decimales son los racionales expresables por una fracción decimal. (Es la construcción que conservamos más adelante.)

$\mathbf{D} = \{x \in \mathbf{D} \ / \ (\exists\, p \ \ x.10^{p} \in \mathbf{Z})\}$

En el proceso expuesto más adelante conservaremos en primer lugar una extensión de **N** para construir directamente $\mathbf{Q}^{+}$, el conjunto de los números racionales, y luego una reducción de $\mathbf{Q}^{+}$ a $\mathbf{D}^{+}$.

La extensión de **N** es muy clásica y semejante a la ya expuesta previamente. En **N x N** la relación de equivalencia (a; b) ~ (c; d) ⇔ a x d = b x c determina las clases. En el conjunto cociente **N x N** / ~ algunas de esas clases están representadas por un natural y todos los naturales están inmersos en este conjunto. Este conjunto de clases puede ser munido de las operaciones + y x compatibles con las definidas en **N** y que las prolongan:

(a; b) + (c; d) = (a x d + b x c; b x d) y (a; b) x (c; d) = (a x c; b x d).

Este conjunto totalmente ordenado y sobre todo denso es $\mathbf{Q}^{+}$. Sería más satisfactorio considerar **Z x Z** para construir **Q** pero esta estructura no es necesaria para las medidas, que son el motor de la construcción de los números en la escuela primaria. Existen muchos otros métodos basados en otras motivaciones matemáticas (problemas de orden o de topología por ejemplo). No daremos cuenta de esto pero el lector podrá consultar Ermel (1980).

1.1.5. Motivaciones matemáticas

Se pueden también imaginar muchas otras extensiones de **N**. ¿Por qué ésta? ¿Qué permite resolver que otras no lo permitirían? Es demasiado pronto para buscar una situación precisa que haría necesaria la creación y el uso de los decimales, pero es a lo que habrá que llegar.

Algunos problemas no tienen solución en ciertos conjuntos porque éstos no son suficientemente ricos: por ejemplo, no se encuentra en **N** el número tal que: (1) a x 3 = 2, o bien tal que (2) 7 + a = 5.

Ahora bien, puede suceder, en ciertos dominios o en ciertas aplicaciones que estas ecuaciones tengan siempre, evidentemente, una solución: por ejemplo, se puede siempre dividir una longitud en tres partes iguales, aún si mide 2 m. Entonces, se quiere representar por un número la longitud así obtenida. Hay que construir entonces una extensión (aquí de **N**) en la cual esas ecuaciones tengan siempre solución, **Q** para (1), **Z** para (2) o cualquier otra estructura que los contenga.

Se habría podido construir **R**, los reales, para que toda serie de Cauchy sea convergente, o **C**, los complejos, para que todo polinomio en una indeterminada no constante y con coeficiente en **C**, tenga al menos una raíz.

¿Y por qué una restricción? A partir de la inmersión de un conjunto A en una extensión B, todos los elementos de A tienen todas las propiedades comunes a los elementos de B, pero la inversa no es verdadera y los elementos de B pueden haber "perdido" propiedades interesantes. Por ejemplo, "n es el sucesor de 17" tiene una solución en **N** pero no en **D**. Así **D** hereda facilidades de cálculo que se encuentran en **N**; pero **Q** las ha perdido, en particular para las diferencias, las comparaciones, el cálculo sobre los intervalos. Sucede entonces que se ha podido construir, por un medio o por otro, un conjunto B satisfactorio para encontrar allí la solución a un problema, pero tal que los cálculos o los razonamientos son costosos. Se busca entonces un subconjunto, una restricción A de B, tal que todo elemento de B pueda ser representado, aproximado por un elemento de A, en el cual los cálculos sean más fáciles.

D aproxima **Q** o **R** porque, para todo real, cualquiera sea la tolerancia que se acuerde, existe siempre un decimal cuya distancia a ese real es inferior a la tolerancia elegida.

Problemas de ese tipo se encuentran muy frecuentemente en matemática donde a menudo se quieren estudiar todos los objetos engendrados por un sistema generador o al contrario, buscar un sistema generador cómodo para un conjunto dado.

Ya que el hecho de sumergir un conjunto en una extensión cambia sus "propiedades" y las de sus elementos, que a partir de allí se pueden utilizar, podemos esperar grandes dificultades y resistencias al cambio de empleo desde el momento en que el hábito jugará un rol -se trate de hábitos psicológicos o culturales. Es uno de los principales obstáculos epistemológicos que se encuentran en matemática.

Esta observación nos lleva a notar que los métodos heurísticos de análisis no toman en cuenta verdaderamente las situaciones de empleo o de creación de la matemática. Esos métodos ignoran, además, al sujeto, al grupo social y a su historia.

1.2. Conclusiones del estudio epistemológico

Para organizar una génesis experimental que dé un sentido conveniente a la noción de decimal, hay que hacer un estudio epistemológico a fin de poner en evidencia las formas bajo las cuales el decimal se ha manifestado y su estatuto cognitivo. Este estudio no puede exponerse en este artículo[6]. Solamente vamos a extraer algunas conclusiones.

1.2.1. Diferentes concepciones de los decimales

El "decimal" de la antigüedad sirve exclusivamente a la medición y a la representación de las cantidades. Por ejemplo, los que expresan las medidas decimales en China trece siglos antes de Cristo. Funcionan casi como los binarios jeroglíficos de los egipcios del -2500 y como los sexagesimales de los babilonios de -1900, en el sentido que resuelven de forma similar problemas similares. Se trata del empleo directo del sistema de numeración en uso para los conteos como medio de describir fraccionamientos: algunas fracciones pueden ser designadas, otras simplemente aproximadas. Se distinguen bien, por toda clase de caracteres formales, técnicos y aún sociológicos, de las otras fracciones con las cuales los iniciados intentan hacer cálculos exactos, entonces definen la noción de razón y con las cuales han franqueado diversos obstáculos... (pasaje a la forma $\frac{1}{m}$, m natural cualquiera; luego a $\frac{n}{m}$, n estrictamente menor a m; luego $\frac{n}{m}$, n y m cualesquiera, etc.). Muy pocas de esas propiedades son reconocidas aunque son utilizadas. Yo diría -tomando el término de Y. Chevallard (1981)- que el decimal es entonces una *noción paramatemática*: esta estructura es movilizada implícitamente en usos y prácticas, sus propiedades son utilizadas para resolver ciertos problemas, pero no es reconocida, ni como objeto de estudio, ni aún como herramienta.

Al Huwarizmi, (750-850), quien unifica el cálculo de los naturales con el de las razones "geométricas" e introduce el empleo de la numeración de posición decimal, permite la emergencia del decimal -herramienta matemática de aproximación, ya no de magnitudes, sino de entidades matemáticas: racionales primero, después radicales, etc. Esas entidades son susceptibles de ser números para contar, números para medir, razones y finalmente, tener auténticas funciones con Stevin (1585).

El decimal deviene entonces una *noción protomatemática*: desde el comienzo no es más que una herramienta conscientemente utilizada, reconocida, designada, pero que su inventor Al Uqlidisi, hacia 952, no trata como un objeto de estudio (Abdeljaouad, 1978). El decimal es mostrado en su funcionamiento (pre construido) y aparece como un método de exposición de las

[6] Disponible en el I.R.E.M. de Bordeaux, Francia.

fracciones o como una curiosidad. La escritura de las fracciones decimales en la obra de Al Uqlidisi es idéntica a la nuestra y sin embargo el concepto no es retomado por los contemporáneos.

Al contrario, su segundo inventor, Al Kashi (1427) lo reconoce como un descubrimiento matemático. Pero aún no está bajo el control de una teoría que fije la definición, las propiedades y la posición epistemológica. Es la traducción del sistema sexagesimal de los astrónomos en un sistema más cómodo para los cálculos. Se puede suponer que durante cinco siglos, los decimales están potencialmente presentes en la cultura y que es su estatuto el que está en evolución (por ejemplo, Bonfils de Tarascon hacia 1350 produce un bosquejo).

Es después de Simon Stevin (1585) que el decimal accede al estatuto de *noción matemática*. Stevin introduce sistemáticamente los números geométricos y los multinomios -las funciones polinómicas- para unificar la noción de número y las soluciones a los problemas del álgebra de su época. Los decimales aparecen como una producción acabada de esta teoría; devienen entonces un objeto de conocimiento susceptible de ser enseñado y utilizado en las aplicaciones prácticas, los cálculos, la constitución de tablas. Su rol conceptual permanece oculto. Para Stevin, "las cantidades irracionales, irregulares, inexplicables, sordas y absurdas" son números (reales) porque todas son aproximables por los números decimales; él no escribió esta frase, pero todo sucede como si la hubiera pensado.

Los decimales sirven como modelo heurístico en los comienzos del análisis y Newton los utiliza para explicar la aproximación a las funciones y a sus fluxiones con la ayuda de las funciones polinómicas y de las series, de sus derivadas y de sus primitivas (Ovaert, 1976). Este lugar está finalmente fijado y certificado solo cuando los reales devinieron objetos matemáticos y que los procedimientos de aproximación a las funciones que utilizaba Stevin recibieron, a su vez, su identidad matemática.

1.2.2. Relaciones dialécticas de ***D*** *y de* ***Q***

El análisis epistemológico suministra otros datos:

Los progresos de **D** se han nutrido de los de **Q** y luego de los de **R** en una dialéctica difícil de resumir: será sin duda indispensable plantear los problemas que exigirían la construcción de una sobre estructura como **Q** o **R**, y tal vez construirla efectivamente para dar a **D** su significación (Douady, 1980).

Por ejemplo, nos parece difícil concebir que la noción de razón pueda ser directamente aproximada por las razones decimales.

1.2.3. Tipos de objetos realizados

Las situaciones en las cuales son empleados **D** o **Q** difieren profundamente por la naturaleza de los objetos matemáticos que cumplen con estas estructuras y de los cuales nos ocupamos. En el origen, $\mathbf{Q}^+$ y $\mathbf{D}^+$ cumplían como conjunto de las imágenes en un *sistema de medida*; lo que era explicitado, escrito, que tenía un estatuto, era el semigrupo ordenado ($\mathbf{Q}^+$, +, ≤) munido de los operadores naturales. Las propiedades de cuerpo de **Q** eran implícitamente utilizadas pero no reconocidas.

La traducción de los hechos históricos en lenguaje moderno nos hace cometer algunos abusos pero ganaremos en concisión. Así, al lado de las *razones* naturales (múltiplos, submúltiplos), los pitagóricos utilizaban algunas razones privilegiadas [épimères, épimores, émioles...] pero sólo en geometría, y los cálculos con ellas eran muy pesados; seguramente no las asimilaban a las fracciones. Rápidamente, Euclides rechazó esas distinciones salvajes, pero esta iniciativa quedó casi sin futuro y aún Arquímedes verdaderamente no conoció las fracciones que llamamos "arquimedeanas".

La construcción de £ (**Q**$^{+}$) en tanto que conjunto de razones o de operadores, munidos de las operaciones de grupo, y su identificación con Q^{+} va a tomar más de mil años (de -400 a +850). A fines de ese período, las razones funcionan implícitamente como *aplicaciones* pero será necesario aún al menos seiscientos años (1585) antes que **Q**$^{+}$ devenga explícitamente un conjunto de funciones tratadas como números.

1.2.4. Diferentes sentidos del producto de dos racionales

Así, por ejemplo, la operación multiplicación de dos fracciones puede recibir interpretaciones diferentes de las cuales muchas han aparecido en épocas a veces alejadas. En el cuadro 1 presentamos esas interpretaciones.

Este cuadro se debe comparar con el plan que daremos en la sección 1.4 y con el estudio de los niveles de conocimiento sobre la composición de dos aplicaciones lineales racionales en 2.1.7.

Se puede entonces esperar que las concepciones correspondientes, que se tiene la posibilidad de confundir hoy en los cálculos, se presenten en realidad en situaciones diferentes y en consecuencia no son concebidas de entrada de la misma forma ni a la misma edad[7].

Operador natural X	n x U, n x L; n x m x M x tiene el sentido de $n \times L = \underbrace{L + L + \ldots + L}_{n}$	m, n naturales variables L, M magnitudes U unidad
Naturales que operan sobre fracciones medida $\dot{x}$	$n\ \dot{x}\ \frac{U}{a} = \underbrace{\frac{U}{a} + \frac{U}{a} + \ldots + \frac{U}{a}}_{n}$ $n\ \dot{x}\ \frac{U}{a} = \frac{n \times U}{a}$; o $\frac{n \times m \times U}{a}$	$\frac{U}{a}$ es la fracción medida natural, no necesariamente cualquiera. n, escalar que opera sobre unas fracciones
X	$\frac{n}{a}$ X U = n $\dot{x}$ ($\frac{U}{a}$)	$\frac{n}{a}$ es una "fracción medida" separada de la magnitud, casi escalar
Razón de naturales invariante en una transformación implícita *	$\frac{a}{b} = \frac{L}{M}$ [$\frac{a}{b}$ medida de L con la unidad M] $\frac{a}{b}$ * U = $\frac{L}{M}$ * U $\frac{n}{m}$ * L	$\frac{a}{b}$ es una razón entre magnitudes expresadas por números $\frac{a}{b}$ razón de la medida de L a la de M cualquiera sea U Cuarto proporcional de (nU; mL y L)
Aplicaciones lineales racionales **X**	$\frac{a}{b}$ **X** L = $\frac{a}{b}$ (L) [designa la imagen de L por la aplicación lineal $\frac{a}{b}$] ($\frac{a}{b}\ \dot{x}\ \frac{n}{m}$) (U) = $\frac{a}{b}$ (L) = $\frac{a}{b}$ ($\frac{n}{m}$ U)	L =n U entonces ($\frac{a}{b}$ **X** n) es el número que mide L, extensión de la aplicación $\frac{a}{b}$ a las fracciones medida
Operadores racionales	($\frac{n}{m} . \frac{p}{q}$) (L) = $\frac{n}{m}$ ($\frac{p}{q}$ L) $\frac{n}{m} . \frac{p}{q}$	Aplicación compuesta de dos racionales, composición en £(Q)
Racional	$\frac{n}{m} . \frac{p}{q}$ ($\frac{n}{m}$ y $\frac{p}{q}$ racionales "abstractos"	Después identificación

CUADRO 1

---

7 Más adelante volveremos sobre esta cuestión precisa en los párrafos 2.1.4. y 4.3. Ver también Vergnaud y Durand (1976).

Nuevos comentarios sobre el cuadro 1

El texto que reproducimos a continuación fue redactado por Guy Brousseau después de nuestras preguntas sobre la construcción del Cuadro 1. En realidad, con la generosidad que lo caracteriza, Guy Brousseau nos ofreció la historia de ese cuadro y de su contenido, su razón de ser. Reproducimos lo esencial de esa nota.

Los editores

Antes de proponer una presentación mejor del cuadro 1, quisiera mostrar, o más bien reconstituir, lo que había detrás de esta "curiosa" clasificación, muy mal explicada en el texto.

Ese cuadro tenía por objeto "mostrar" diferentes concepciones de la multiplicación que refuerzan o corren el riesgo de reforzar una construcción o una génesis (histórica, ontogenética o didáctica), de las diferentes estructuras numéricas.

Las concepciones diferentes de una misma noción matemática tienen diferentes maneras de comprender a esa noción –son diferentes en el sentido que cada una permitiría más fácilmente ciertas interpretaciones, ciertos cálculos, el reconocimiento de la noción en ciertas circunstancias, mientras que se opondrían en otras condiciones. Ya había utilizado esta idea en el libro de sugerencias que había publicado en la editorial Dunod en 1965[8]. El ejemplo que me interesaba en esa época (1972) era la oposición entre las concepciones de "conmensuración" y "partición de la unidad" para las fracciones, este interés se manifestó en la tesis de mi estudiante Ratsimbah-Rajhon (1981) donde habíamos comenzado a despejar los medios (teóricos y empíricos) para identificar y distinguir diferentes concepciones de una noción matemática. El cuadro 1 debía preparar este trabajo que se continuó en diferentes tesis sin llegar a ser un artículo específico. Se encuentra un ejemplo (una tentativa) en la lista de las diferentes concepciones de la división en "Rationnels et décimaux" (Brousseau et Brousseau 1987), retomado y aumentado en "les différents sens de la division" (Brousseau 1988). El trabajo continuó luego, pero no está aún hoy con un estatuto científico satisfactorio. Así es cómo justificaría actualmente esas distinciones:

En ese cuadro 1 intentaba –con cierta torpeza- aplicar un *método* (todavía no publicado pero bastante claro) para discriminar las diferentes concepciones de la multiplicación, al menos aquellas de las cuales sospechaba que jugaban un rol en las razones con las medidas. Voy a intentar explicitar y precisar ese método. No podía hacerlo antes, en el marco de ese artículo, que era ya muy largo y que tenía por fin principal presentar un máximo de vías de investigación.

A. Generalidades. Principales elementos para la diferenciación de concepciones

Tenemos varios instrumentos, de los cuales:

1. El más evidente, el instrumento matemático mismo. Puede ser utilizado

– sea directamente porque las descripciones en términos de estructuras conocidas permitían distinguir diversas clases de objetos, por ejemplo:

  - los elementos de un espacio mensurable munido de operaciones conjuntistas adecuadas, y de transformaciones compatibles;
  - los elementos del conjunto numérico de llegada de las aplicaciones medida y su estructura numérica ($\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{D}^+$, $\mathbf{R}$);
  - las aplicaciones lineales y la estructura de los grupos o semigrupos lineales (dual) asociados (más tarde, Vergnaud también utiliza a su modo este instrumento).

– sea complementando un estudio de situaciones. Se podía concebir así estructuras "nuevas" apropiadas a usos particulares, esos usos estaban además justificados por tipos de situaciones o de problemas diferentes como por ejemplo para las medidas:

  - el conjunto de las medidas "efectivas" cuya imagen es un par (número, unidad);
  - el conjunto de las medidas "concretas", resultado de una medición, formadas por una terna

[8] *NdE*: ver también la biografía de Brousseau para tener mayores precisiones sobre la publicación de este libro. *NdT*: consultar http://guy-brousseau.com/

(número, unidad, intervalo de incertidumbre[9]);

o el conjunto de las medidas "prácticas" compuesto por cuatro elementos (número, unidad, intervalo de incertidumbre[10]), evaluación (medida sobre la medida: orden de magnitud relativa, rareza, posición en una distribución de frecuencia de los valores de este tipo sobre el conjunto de las medidas, etc.);

o el conjunto de las medidas "físicas", cuyos elementos son las medidas de diferentes magnitudes, estructurado por diversos procedimientos matemáticos como medida producto, medida derivada, integración, y que se concretiza en las ecuaciones con dimensiones en las diferentes medidas;

o accesoriamente el conjunto de valores de una "magnitud", es decir el conjunto de clases de equivalencia de objetos –imágenes recíprocas de una medida en el sentido matemático- concebidas a la manera en que lo hacen los físicos como una especie de "medida absoluta" (sin unidad).

(Me arriesgo con los términos "efectiva", "concreta", "práctica", pero la clasificación es importante y figura, salvo el último punto, en un artículo que publiqué mucho más tarde en la revista *Grand N*, con Nadine Brousseau: "Le poids d'un verre d'eau"[11]).

2. El análisis en términos de situaciones (en particular de condiciones históricas) permitía dar una función a objetos matemáticos antiguos y hacerlos funcionar, en particular la noción de razón. Esta noción permite distinguir los usos como medio implícito de acción, como medio de expresión directa o metalingüística, o como objeto de estudio o medio de prueba. Permite también distinguir las situaciones donde uno se interesa por un elemento aislado de un conjunto, de aquéllas donde es la estructura del conjunto el instrumento o el objeto de la acción.

3. El instrumento más convincente aunque el más delicado era el estudio de las propiedades, en particular las propiedades ergonómicas que el uso de esas estructuras matemáticas daba a las situaciones encontradas más o menos frecuentemente en ciertos "medios" (familia de situaciones reunidas por su uso y no solamente por su estructura lógica).

B. Aplicación a la multiplicación

¿Cómo combinar los instrumentos precedentes para identificar diferentes concepciones posibles, a priori, para la multiplicación?

1. Consideremos para comenzar los conjuntos finitos como los objetos de una aplicación "medida natural" en el conjunto **N** de los naturales. Existen ya las siguientes distinciones:

1.1. En el conjunto de los números naturales la operación interna "multiplicación formal" **x**, que se puede imaginar construida a partir de la adición: 3 **x** 4 = 3 + 3 + 3 + 3

1.2. En los conjuntos la operación X producto de conjuntos finitos A X B. Es compatible con la aplicación medida natural Cardinal(A):

Card (A X B) = Card (A) x Card (B)

Esta aplicación y las operaciones que se relacionan pueden definirse naturalmente con los niños a partir de la enumeración de conjuntos finitos (como lo hemos mostrado con Briand en su tesis[12]).

1.3. La medida natural efectiva puede ser concebida como una operación (formal) que asocia un natural y un objeto (una "unidad") o un conjunto de objetos: <3, gatos> o <3, docenas de rosas>, que puede ser interpretada como una multiplicación (externa) 3 * U.

---

[9] O intervalo de error, o distribución de probabilidades, o intervalo de confianza, etc.

[10] O intervalo de error, o distribución de probabilidades, o intervalo de confianza, etc.

[11] *NdE*: "Grand N" es una publicación del IREM de Grenoble para la escuela elemental. Por el artículo al cual Guy Brousseau se refiere, ver (Brousseau y Brousseau 1987).

[12] *NdE*: ver Briand (1993).

1.4. La razón múltiple, no es una operación pero se le asocia una (3 ; 12) * 3 x 4. Existen diversos tipos de razones según el conjunto o los conjuntos de donde son tomados los objetos de la razón. Por supuesto estos tipos se confunden fácilmente, pero cada uno está asociado a una multiplicación de un tipo un poco diferente.

1.4.1. la razón interna al conjunto de los naturales, (3 ; 12).

1.4.2. la razón "escalar" interna al espacio medible (de los conjuntos finitos): una correspondencia de uno a cuatro sobre un conjunto no efectivamente enumerado, por ejemplo,

1.4.3. la razón "escalar" interna al conjunto de las "medidas efectivas" de una misma magnitud física, por ejemplo (3 dm ; 12 m)

1.4.4. la razón natural entre medidas naturales efectivas diferentes, por ejemplo (3m ; 12 F).

La conservación de las razones múltiples permite manipular implícitamente los racionales.

1.5. La aplicación lineal natural de **N** en **N** tampoco es una operación. Puede ser identificada con un natural operando multiplicativamente en un conjunto de medidas (un semigrupo) al que se le asocia una operación.

Ejemplo f(3) = 12 con f = 4. Para marcar bien la diferencia se puede escribir f = *4. Los maestros de primaria llamarían a esto un "operador" y escribirían *4(3), o *4 **x** 3 o, con una flecha, $3 \xrightarrow{x4} 12$ o simplemente 3 x 4. Escribiré aquí esta operación externa 4 * 3.

El uso de los signos multiplicativos * y "dividido por" como símbolos univalentes (como en *4) y al mismo tiempo como símbolos bivalentes (como en 3 x 4), exige diferencias en las concepciones pero produce las mismas dificultades que el uso simultáneo de los signos + y – como símbolos univalentes y como símbolos bivalentes en los enteros.

Una aplicación lineal natural de **N** en **N** puede también ser identificada con una clase de razones naturales iguales. Existen en consecuencia tantos tipos de aplicaciones lineales como tipos de razones, (que identificaremos como 1.5.1., 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4) y en consecuencia tantas multiplicaciones ligeramente diferentes.

1.6. La composición de aplicaciones es una operación interna en el semigrupo de las aplicaciones lineales de **N** en **N**. Puede ser también interpretada como una multiplicación *4 o *3 = *12

2. Consideremos ahora por ejemplo las medidas racionales, pero cada una de las estructuras numéricas puede dar lugar al mismo desarrollo.

2.1. Habrá también la multiplicación interna formal en los racionales. A priori es diferente de la multiplicación de los naturales. La diferencia aparece sobretodo en las propiedades utilizadas por los alumnos para "comprender" o controlar el uso de estas operaciones, por ejemplo: la multiplicación aplicación natural "agranda" siempre, no la racional. La denotaremos en consecuencia de modo diferente: a/b * c/d = a**X**c/b**X**d

2.2. Los espacios medibles (densos), sobre los cuales se puede definir una medida racional, poseen naturalmente un producto de conjuntos x, que es diferente formalmente de los productos de conjuntos finitos, pero tal que:

med (A x B) = med(A) * med(B)

2.3. En las medidas racionales, encontramos la operación formal que asocia una fracción a un objeto de un espacio medible o a una unidad a/b * U.

2.4. Las razones racionales. La conservación de las razones racionales y su definición directa en los espacios medibles (razones de segmentos, de superficies) permite a los griegos manipular los racionales y aún los reales con Euclides. Existe también aquí, como previamente, los mismos tipos diversos de razones según el conjunto o los conjuntos de donde son tomados los objetos de la razón.

2.5. Las aplicaciones racionales se prestan al mismo análisis que se hizo previamente.

3. Las filiaciones de las concepciones

3.1. Lo importante para comprender la génesis de los racionales era examinar qué concepciones pueden engendrarse, articularse y cómo hacerlo. Las posibilidades de existir verdaderamente, de ciertas "concepciones" consideradas previamente –es decir de ser observables aisladamente en la historia o en el desarrollo de los conocimientos de los niños- dependen de esas relaciones. Esas son algunas de las etapas de un desarrollo posible que intento esbozar en el cuadro 1.
Las operaciones en los espacios medibles, la intervención de los números en esas operaciones, y sus traducciones en operaciones numéricas, luego sus transcripciones en nuevos números y la lenta y pesada emergencia de nuevas concepciones de los objetos formales así introducidos, donde los objetos antiguos se identifican y se zambullen, es un proceso no sin confusiones ni contrasentidos. No publiqué el análisis epistemológico donde se trenzan esas evoluciones, solamente doy un resumen de algunas conclusiones.
Las dos líneas del cuadro que pueden plantear un problema resumen un proceso más complejo que el que conservé para dirigir el conjunto del proceso. Intento representar allí la dialéctica de las transformaciones tanto del espacio de los objetos medidos, como de los números utilizados, dialéctica que permite pasar de las medidas naturales a las medidas racionales (y decimales).

3.2. La primera línea presenta la operación denotada previamente con *. Los operadores naturales sirven para contar las reiteraciones de una operación material * (puestos uno a continuación de otro y alineados, por ejemplo para segmentos "iguales" a L), entonces:

$$n * L = L + L + \ldots + L$$

Naturalmente estos operadores naturales poseen su multiplicación propia y se tiene por ejemplo:
$(n \times m) * L = n* (m*L)$

3.3. La segunda línea del cuadro presenta operaciones materiales sobre los objetos del espacio medible. Por ejemplo un segmento L puede ser partido geométricamente en a partes iguales (con una red de paralelas equidistantes, por ejemplo). Escribo esta operación L/a. Los naturales operan sobre este nuevo conjunto como sobre el precedente y aparecen implícitamente unas especies de fracciones heterogéneas con una medida en el numerador y un natural escalar en el denominador. Es el caso encontrado en mi libro: las fracciones concebidas por conmensuración tienen un "contador" en el lugar del denominador y un "medidor" (la medida del número de objetos contados) en el lugar del numerador. Es necesario evidentemente para tener las ideas claras, distinguir esta operación por un nuevo signo, ninguno de aquellos que figuran en los párrafos precedentes (en el artículo, la cruz con un punto arriba, aquí pongo un *)

$$n * L/a = L/a + L/a + \ldots + L/a$$

(las sumas de fracciones materiales de segmentos o de áreas no son tan fáciles de concebir como las sumas de objetos primitivos) entonces como:

$$L/a + L/a + \ldots + L/a = (L + L + \ldots + L)/a$$

se tiene evidentemente:

$$n * L/a = (n*L)/a \text{ y } (n \times m)* L/a = n*(m* L/a)$$

Si n es múltiplo de a se vuelve al caso de la primera línea. Se encuentran razonamientos semejantes a aquellos que son específicos de esta concepción en la manipulación de los decimales y especialmente en los cálculos de cambios de unidades.

3.4. La tercera línea presenta el caso donde los operadores son fracciones comprometidas con una medida racional. La operación es la que hemos denotado previamente *. Esta etapa presenta el resultado de un proceso muy importante y mucho más complejo que no deja suponer la proximidad formal entre n * L/a y n/a * L, porque es necesario que las operaciones numéricas (sumas, restas, productos) puedan ser definidas (sería mejor decir "transferidas" de los objetos del espacio medible hacia la estructura numérica, pero encima hay que tener sólidas razones para hacerlo). Serían necesarias muchas etapas entre la segunda y tercera línea para representar la lenta evolución histórica o una evolución ontogenética didáctica plausible.

3.5. La cuarta línea presenta diversas concepciones de una razón racional como las indicadas previamente. La diferencia entre la tercera línea y la cuarta es que la medida fraccionaria (3ª línea) se aplica a un objeto que juega el rol de una especie de unidad, que no es el caso de las razones.

Las otras líneas del cuadro son más claras.

Es claro que si el cuadro presenta las diferentes concepciones de la "multiplicación", no muestra la génesis propuesta en el proceso didáctico presentado en este capítulo.

1.2.5. Necesidad del estudio de epistemología experimental

Pero es poco probable que subsistan todas las distinciones, todos los obstáculos, todas las situaciones particulares. Por ejemplo, tomar el décimo -decimar- consistía, en la antigüedad, en ordenar los elementos y después contar 1,2,3,... y retener el décimo. ¡Así no podía haber más que un décimo y no 2! Es necesario entonces dedicarse a un estudio de epistemología genética y experimental por medio de búsquedas y experiencias comparables a las que expondremos aquí.

Hay que encontrar un equilibrio entre una enseñanza "histórica" que restauraría un bosque de distinciones y de puntos de vista perimidos en el cual el niño se perdería, y una enseñanza directa de lo que hoy se sabe es una estructura única y general, sin preocuparse por unificar las concepciones del niño, necesaria y naturalmente diferentes. La investigación de las condiciones de tal equilibrio es uno de los grandes problemas que se plantea actualmente a la didáctica. Una de las ambiciones de este artículo es hacer avanzar la reflexión en esta dirección.

1.2.6. Obstáculos culturales

Es necesario agregar que la didáctica de los decimales tiene una larga historia. A partir de Stevin, quien la consideraba con cierta ingenuidad y con principios definitivos, hasta la decisión por parte de los Estados Unidos de adoptar el sistema métrico, y entonces un sistema decimal de medida, pasando por su primera aparición en la enseñanza popular en Francia después de 1792, esta didáctica ha cambiado, no solamente de forma sino también, correlativamente, de inspiración y aún de significación política. Esas significaciones políticas y culturales pesan siempre sobre su enseñanza y se constituyen a veces en verdaderos obstáculos (Brousseau, 1976).

1.3. Conclusiones del estudio didáctico

El análisis epistemológico provee además un gran número de variantes de condiciones, de métodos, de sentido. La dificultad consiste en reagrupar esas variantes y en jerarquizar los caracteres en función de su *supuesta* importancia, con el fin de reproducir y controlar situaciones que puedan provocar la aparición del saber.

1.3.1. Principios

Vamos a dejar esta cuestión abierta, y según nuestro proyecto, vamos a mostrar cómo producir un proceso. Las génesis artificiales que proyectamos construir deberán hacer funcionar la noción de decimal simulando los diferentes aspectos actuales del concepto. No se trata de reproducir el proceso histórico sino de producir efectos similares por otros medios. La fenomenotécnica epistemológica consiste en hacer, sobre *ciertos* puntos, elecciones muy diferentes a aquéllas que sugeriría la historia, y de restaurar un proceso equivalente a través del ejercicio de reglas y principios que se han podido descubrir.

La experiencia epistemológica incide en los efectos y las correcciones que esas modificaciones producen sobre el conjunto del sistema.

Pero esta experiencia se desliza hacia una actividad de enseñanza. Debe ser compatible con ella, plegarse a sus exigencias y sufrir inevitables transposiciones didácticas.

Desde ahora vamos entonces a ubicar nuestra reflexión en ese marco didáctico.

1.3.2. Objetivos de la enseñanza de los decimales

Examinemos los objetivos clásicos de la enseñanza de los decimales. Se trata de capacitar a los alumnos para resolver los problemas clásicos y prácticos, que aplican las operaciones y el orden de los decimales, lo que implica el empleo de medidas decimales (y sexagesimales), y un dominio conveniente de las situaciones que comprenden aplicaciones lineales decimales (y racionales): escalas, cambio de unidades, porcentajes, intereses, velocidad, volúmenes, superficies, densidades...

En la mayoría de esos problemas, se pide a los niños que presenten o designen su resultado en los términos de la situación propuesta. Por ejemplo, "el precio de venta en francos de un transistor es..." Y luego que expresen ese resultado en $\mathbf{Q}^+$ mediante una fórmula, (por ejemplo $\frac{280 \times 4}{3}$) y luego que reproduzcan un decimal razonablemente próximo a ese resultado. El cálculo consiste esencialmente en pasar de $\mathbf{Q}^+$ a $\mathbf{D}^+$. No se escribe ninguna explicación; la justificación consiste en la descomposición del cálculo final en una serie de cálculos intermedios "simples", es decir que pertenecen al repertorio reconocido de las oportunidades de uso de esa operación.

El currículum está dirigido a alumnos de al menos 9-10 años y de a lo sumo 12-13 años, quienes pueden haber aprendido las operaciones con decimales en referencia al uso del sistema métrico. Fundamentalmente apunta a los mismos objetivos.

Esto implica la posibilidad de hacer todos los cálculos usuales con los decimales (y con las fracciones). Pero deberá favorecer la recuperación teórica que conducirá a los alumnos de 13-14 años a reorganizar de forma definitiva la noción de decimal y a utilizarla bajo su forma matemática actual (ejemplo: $1{,}394 \cdot 10^{-4}$), en particular la utilizada en las calculadoras.

1.3.3. Consecuencias: tipos de situaciones

Si se quiere conseguir que los alumnos tengan la posibilidad, no sólo de aplicar los métodos y producir soluciones, sino también comprender y discutir los fundamentos, es necesario hacer posible esta actitud reflexiva, dándoles el uso de un vocabulario -aún simplificado- y de una teoría -aún no satisfactoria- de las aplicaciones lineales y de sus propiedades.

Nuestro estudio epistemológico permite comprender que, para que una teoría pueda ser institucionalizada, es necesario que previamente haya funcionado como tal en debates científicos y en las discusiones entre los alumnos, como medio para establecer pruebas o rechazarlas. Ese proceso corresponde a la tercera etapa de nuestro análisis, aquélla donde la noción es dominada como noción matemática. Llamaremos situaciones de *"validación*" y de *"institucionalización"* a las situaciones didácticas que permiten simular ese proceso.

Pero para que esas teorías tengan un sentido para el que las utiliza, es "necesario" que hayan funcionado previamente como solución a un problema planteado a cada alumno en condiciones que le permitan, ya sea encontrar esta solución por él mismo, o más exactamente construirla (eventualmente en forma progresiva), o tomarla totalmente hecha, por él mismo, entre varias que podía considerar sin que una intención didáctica o una presión cultural lo obligue reemplazando su juicio. Decimos entonces que la teoría funciona como un modelo implícito y llamamos *situaciones* *"de acción"* a las situaciones didácticas que permiten la aparición de esta teoría cuyo estatuto en la clase es entonces el de una noción protomatemática.

Para que el vocabulario sea adquirido, y que los términos tengan sentido, es "necesario" que sirvan suficientemente para expresar y comunicar informaciones en situaciones que justifiquen su empleo y lo controlen. Tales *situaciones llamadas de "formulación"* permiten la adquisición de los modelos explícitos y de lenguajes que, en el caso en el que no sean aún nociones matemáticas, se encuentran así conferidos a un estatuto de nociones paramatemáticas (la ostensión y el uso tienen allí nivel de definición).

1.3.4. Nuevos objetivos

Los objetivos comprenderán entonces los conocimientos, los saber-hacer, un vocabulario y adquisiciones teóricas. Esos objetivos no pueden ser independientes: desde el momento en que se quiere respetar sus funciones recíprocas en una génesis auténtica, cierto equilibrio se establece entre ellos. Además, un saber teórico, no justificado, estaría perdido y no tendría sentido, y una práctica excesiva sin debates conduciría a aprendizajes por condicionamiento y prematuros que obstaculizarían las etapas ulteriores.

Así, en la fase final, el alumno deberá calcular en el semicuerpo $\mathbf{Q}^{+}$ y en particular en el semigrupo ($\mathbf{Q}^{+}$-{0}, X). Los dominios de aplicación elegidos conducen a considerar todos los tipos de realizaciones que hemos evocado en el párrafo precedente.

Se podría estimar que es un buen test de adquisición de la estructura a la que se apunta, el hecho que los alumnos puedan explicarse el producto de dos decimales presentándose ambos como operadores o aplicaciones lineales (Rouchier, 1980).

Ejemplo: 1
¿Cuál es la distancia recorrida en 4,25 vueltas por un disco de 0,38 m de perímetro? *(1 operador, 1 longitud)*
4,25 x 0,38 es igual a 4 veces 0,38 más 2 décimos de vez 0,38 más $\frac{5}{100}$ de vez 0,38.
Es también $\frac{425}{100}$ x 0,38

Ejemplo: 2
Se estima que la distribución normal de un presupuesto de vivienda es la siguiente:
alquiler: 0,68
expensas: 0,18
calefacción: 0,14
Una persona ha previsto consagrar 0,23 de su salario a alquiler. ¿Qué parte de su salario destina esa persona a calefacción? *(2 operadores)*

Pero queda aún por verificar experimentalmente esta hipótesis. Sería necesario que el éxito de estos ejercicios domine jerárquicamente a todos los demás, es decir que los implique.

Las investigaciones sobre las razones entre esos organigramas de objetivos, las jerarquías de conocimientos y las implicaciones de adquisiciones concentran la atención de numerosos investigadores hace ya una quincena de años. (Gras, 1980)[13].

A pesar del gran interés de esos trabajos, no se han podido aún obtener conclusiones decisivas.

[13] *NdE*: ver también (Gras 1996)

1.3.5. Opciones

Finalmente, hemos conservado las siguientes opciones principales sobre las cuales volveremos más tarde:

a) La adquisición de los decimales-medida seguirá un proceso distinto del que apunta a los decimales-aplicación. Se sucederán en ese orden.

b) En los dos casos, los decimales serán presentados como racionales, simple re-escritura de las fracciones decimales. Los racionales serán construidos entonces en primer lugar en las dos etapas. Esto no es muy original para los operadores. Por el contrario, para las medidas, esto va en contra de hábitos culturales bien establecidos.

c) Las fracciones decimales-medidas, debido a las facilidades de cálculo que presentan, serán elegidas por los alumnos para aproximar los racionales.

Los problemas topológicos exigen justamente numerosas comparaciones y cálculos de intervalos. Además, pondrán en evidencia, las propiedades del orden natural de **Q** y de **D** que se oponen a las de **N**.

d) Este enfoque topológico no será reproducido en el estudio de las aplicaciones lineales racionales. Se trata de una opción: tal enfoque es posible, lo hemos mostrado en otra parte de la investigación[14] que no relatamos aquí.

e) Intentaremos hacer adquirir los modelos implícitos, o hacerlos funcionar si ya están adquiridos, antes de provocar su formulación o su análisis. Admitiremos que los niños poseen un modelo implícito de la proporcionalidad en **N**.

f) Aunque se reencuentran las sumas y las diferencias de aplicaciones racionales, no serán teorizadas ni institucionalizadas.

g) Explicitaremos las otras opciones en el curso de la exposición de las situaciones.

1.4. El esbozo del proceso

1.4.1. Advertencia al lector

Este plan está formulado en términos matemáticos visiblemente excluidos del vocabulario de los alumnos y organizado como una exposición donde las definiciones y los teoremas se suceden en forma clásica. Esto podría hacer creer que toda exposición del mismo tipo, es decir articulada como un discurso de matemática, podría constituir un esbozo. Nada de eso. De hecho, representa una serie de interrogantes y de problemas que tienden a constituir una génesis: la cuestión de rango n nace de los problemas encontrados con las soluciones propuestas al interrogante de rango n - 1, o de las consecuencias y desarrollos de esas soluciones. Dicho esbozo no puede ser obtenido automáticamente como secuencia del análisis matemático y epistemológico. Constantemente es necesario asegurarse de la capacidad para concebir un proceso general y para permitir la invención, la organización y el desarrollo de las situaciones locales.

Esta ida y vuelta, esta dialéctica entre la concepción del proceso y la de las situaciones es inevitable debido a la naturaleza misma de la *didáctica*.

La articulación solo a partir del conocimiento no es suficiente para determinar el sentido dado a

---

[14] Se trataba de aproximar, con la ayuda de una función lineal que representaba la probabilidad -como medio de prever una frecuencia teórica- una aplicación estadística que atribuya efectivos observados que corresponden a los números de tirajes. La aproximación de las estadísticas por sus aplicaciones "probabilidad" es tratada por métodos similares en 33 clases. Los alumnos siguen un desarrollo experimental y de redescubrimiento. Cf. *"L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire"*, IREM de Bordeaux, 1974.

las adquisiciones a través de las situaciones específicas elegidas.

Es clásico analizar hacia atrás los currículum para poner en evidencia las implicaciones entre los objetivos terminales y los objetivos subordinados. El lector no se sorprenderá de que lo hayamos utilizado en este texto. A pesar de nuestras reiteradas dudas acerca de la posibilidad para determinar las adquisiciones independientemente de las situaciones que las producen, vamos a utilizar en el capítulo siguiente el mismo procedimiento en la representación de las actividades. Este procedimiento tal vez aumente las dificultades del lector para comprender cuáles son realmente los conocimientos disponibles de los alumnos en el momento de la lección, pero esperamos conducirlo a tomar más conciencia a la vez de la necesidad de precisar las condiciones del desarrollo de las situaciones y del rol de la historia del sujeto en sus adquisiciones. Si nuestra tentativa es un fracaso, aconsejamos al lector leer los párrafos en el orden cronológico.

1.4.2. La fase II: de la medida a las homotecias en $\boldsymbol{D^+}$

Según esas opciones, en la fase final vamos a prever una *identificación* institucionalizada, es decir razonada y convenida de ($\mathbf{Q}^+$, X) (medida) y £($\mathbf{Q}^+$, 0) que implica, en particular, la utilización sistemática de las aplicaciones inversas en el cálculo de la razón de dos decimales. (Fase II.7: 2 sesiones).

Para esto, sería necesario controlar *la composición y la descomposición* de las aplicaciones racionales borrando el rol de los pares objeto-imagen para poder proveer diversas descomposiciones de una misma aplicación. Hemos decidido exponer las situaciones de introducción a esta fase (II.6; 3 sesiones): "composición de 2 aplicaciones lineales") donde los alumnos utilizan un pantógrafo. Este estudio no se puede desarrollar convenientemente si las fracciones y los decimales no han sido identificados como conjunto de aplicaciones *que operan* sobre las fracciones y los decimales-medida.

En el curso de la fase II.5 (2 sesiones): los niños tratan de dar un sentido al producto de 2 fracciones o de dos decimales. Llegan a esto interpretando uno como aplicación lineal que opera sobre el otro. En esta oportunidad, los alumnos recuperan el vocabulario tradicional que describe el "producto" de un racional por un racional operador (por ejemplo tomar una fracción de un número, un porcentaje, etc.) y formalizan e institucionalizan el cálculo de las imágenes con los elementos de £ ($\mathbf{Q}^+$), cálculos que ya practicaban en la fase precedente pero con métodos muy diversos, no fijados, hasta por tanteos. Las relaciones entre multiplicar, dividir, ampliar, reducir son objeto de un debate.

La introducción de esas aplicaciones lineales ocupa las tres fases precedentes, que es mejor exponer en su orden natural.

La fase II.1 (2 sesiones) consiste en pedir a los niños "que amplíen" un rompecabezas, pieza por pieza, sin aclarar lo que quiere decir "ampliar" y de tal modo que el lado que medía 4 cm mida 7. Expondremos esta situación de forma detallada (Sección 2.2.). Los alumnos se obstinan intentando distintos modos de calcular las longitudes imágenes, pero únicamente el método que (implícitamente) hace corresponder la suma de las imágenes a la imagen de la suma permite un rearmado satisfactorio del rompecabezas. Lo que los niños construyen "empíricamente" es un conjunto de algunos pares que no tiene nombre. "La aplicación lineal $\frac{7}{4}$" se inscribe solamente en los esquemas de acción del sujeto. Hay que encontrar sin embargo la imagen de longitudes decimales y fraccionarias.

La fase II. 2 (1 sesión) reproduce una situación casi idéntica a la precedente. La ampliación de un mosaico regular replantea los mismos problemas; los lados tienen longitudes decimales. En los debates, la imagen de 1 emerge como medio para establecer las otras imágenes así como la división de un decimal por 10^n, $n \in \mathbf{N}$.

La fase II.3 (2 sesiones) comienza con una situación idéntica. Se considera un dibujo de un barco y 6 fotografías de ese dibujo obtenidas con ampliaciones diferentes. Cada alumno trata de prever, desde su banco, las longitudes de todos los segmentos reproducidos en una de las fotos. Pueden ir a verificar el resultado de sus previsiones y eventualmente corregirlas (hay "ampliaciones" y "reducciones"). Luego aparecen nuevas fotografías y se trata de encontrar el modo de designar y ordenar las fotos para ganar en un juego de comunicación (bastante parecido al que expondremos en la sección 3.1. en la lección "espesor de una hoja de papel"). Naturalmente es la imagen de 1 la que sirve para designar las fotos y ordenarlas. Así, los niños fueron llevados a identificar, a designar aplicaciones lineales con ayuda de los números decimales. Pero esos números quedan ligados a una de las fotos, a un conjunto de valores. El juego recomienza pero el modelo se cambia cada vez. El cálculo de imágenes se vuelve familiar, el vocabulario y las discusiones se refieren a las ampliaciones y a las reducciones (lo que implica el debate ulterior que hemos señalado precedentemente). En conclusión, los alumnos declaran saber designar las aplicaciones lineales (de $\mathbf{Q}^+$ en $\mathbf{Q}^\times$ y de $\mathbf{D}^+$ en $\mathbf{D}^\times$).

Es el momento de proponer algunas situaciones donde las aplicaciones no lineales vienen a deslizarse como soluciones "alternativas" a las aplicaciones lineales (Fase II.4.; 2 sesiones).

En esta oportunidad, los alumnos toman conocimiento de las prácticas y de los lenguajes en el dominio de las "escalas" y en el del comercio (tasas, intereses en porcentajes, etc.)

1.4.3. La fase I: De las medidas racionales a las medidas decimales

En la fase II, en lugar de definir directamente los operadores racionales como composición de operadores naturales (que no son entonces aplicaciones), método del cual hemos señalado las dificultades y las contradicciones, hemos admitido la existencia de $\mathbf{Q}^+$ y de $\mathbf{D}^+$ en tanto que conjunto de llegada de las medidas. El objeto de la fase I es entonces construir tal conjunto: los niños crean y experimentan con números nuevos para medir distintas magnitudes.

La fase I.1. permite a los alumnos primero inventar los "racionales" por un método de pasaje al cociente sobre el conjunto de los pares de racionales. Analizaremos largamente esta primera actividad: "medida del espesor de una hoja de papel" para mostrar la evolución del estatuto de esos racionales (Sección 3).

Los racionales aparecen como solución a una situación favorable, sin estatuto cognitivo. Esta solución plantea problemas de identificación porque puede tomar formas equivalentes. Los alumnos son llevados entonces a un debate: "¿Esos objetos nuevos, son números?" es el motor de la actividad 2 (5 sesiones) que lleva a los niños a identificarlos, a sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos por un natural, compararlos y ordenarlos.

Las fracciones son entonces reconocidas como números nuevos que engloban a los números ya conocidos, pero de los cuales algunas propiedades son diferentes.

En la fase I.3., para medir otras magnitudes, capacidades, pesos, longitudes, los alumnos utilizan esos mismos números y pasan de la concepción de una definición de las fracciones por *conmensuración a una definición constructiva* (esta fase será comentada en el párrafo 4, no es esencial en el proceso).

La fase I.4. "**D** medio de estudio de **Q**" comprende 7 sesiones. Las propiedades nuevas, investigadas en los racionales para fabricar medidas, son principalmente propiedades topológicas: se quiere, entre dos números racionales, poder ubicar siempre uno nuevo y se quiere poder medir los intervalos obtenidos. Gracias a un juego conveniente de batalla naval donde lanzarán redes cada vez más finas (filtros) para atrapar "peces" racionales, los niños van a explorar entonces la estructura topológica de $\mathbf{Q}^+$ (esta actividad será también presentada en el párrafo 2.3.). Pero sucede que entre todas las operaciones que se pueden hacer con los racionales bajo su forma fraccionaria, las más largas, las menos fáciles, son justamente las comparaciones y las sumas o las diferencias. De tal modo que, por razones de eficacia, rápidamente los niños van a elegir por sí mismos, entre las fracciones racionales, algunas -las decimales- que permiten a la vez cálculos rápidos y una representación cómoda -una aproximación- a las medidas racionales.

Fase I.5 (6 sesiones). Construcción y estudio de **D**. Estas fracciones decimales se prestan a una escritura simplificada que permite extender las reglas de cálculo (adición, sustracción, multiplicación por un escalar) de **N** a **D** al precio de modificaciones menores (actividad 6).

Fase I.6. (4 sesiones). Densidad de **D** en **Q** -División - Aproximación a un racional por un decimal.

Evidentemente, todos los racionales no son decimales, pero con los decimales se puede aproximar a cualquier racional tanto como se quiera.

Este enfoque, organizado, estandarizado e institucionalizado permitirá convertir en decimal el resultado de una división de un racional por un natural y dará implícitamente el método de la división de los decimales por enteros.

En esta parte I, los niños controlan los números como medidas. La construcción conlleva entonces limitaciones de sentido que es necesario respetar (cf. párrafo 2.3.).

Los únicos operadores utilizables son los naturales, se sabrá multiplicar o dividir por 2, 3... pero no por 2/7 ni por 2,5. (Este aprendizaje será objeto de la segunda parte). Y esos operadores no son introducidos como objetos matemáticos. Funcionan como un modelo implícito de linealidad tomado de **N**. Servirán a lo sumo para expresar las *razones escalares naturales* que se utilizarán en el transcurso de los cálculos.

El método ha sido concebido de tal modo que, para los alumnos, el hecho de haber aprendido a utilizar los decimales para las medidas, y a hacer las operaciones o no, no modifica esencialmente el proceso. Esto no quiere decir que será necesario hacer como si se ignorara lo que ya se sabe, ni que se va a retomar un conocimiento adquirido rechazando su antiguo sentido y sustituyéndolo por un sentido "nuevo".

2. ANÁLISIS DEL PROCESO Y DE SU REALIZACIÓN

2.1. El pantógrafo

2.1.1. Introducción de los pantógrafos: la realización de la fase II.6

El pantógrafo es un paralelogramo articulado utilizado sobre mesas de dibujo para producir figuras homotéticas a una figura dada. Los aparatos utilizados en esta actividad son juguetes de plástico mucho menos precisos que los aparatos profesionales -y es precisamente esta particularidad la que será utilizada. Los pantógrafos son susceptibles, según el reglaje, de producir algunas homotecias decimales bien determinadas:

1,5; 2; 2,5; 3; 4; y sus inversas

(otro modelo puede producir $1\frac{1}{2}$; 2 ; $2\frac{1}{4}$; $2\ \frac{1}{2}$; $2\ \frac{3}{4}$; 3 ; $3\frac{1}{2}$; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10).

En la sesión de introducción, los alumnos aprenden de la maestra simplemente, a utilizar el aparato: la ventosa no debe moverse, el papel tampoco, la punta sigue el modelo, el lápiz dibuja la imagen... Intentan agrandar y achicar dibujos personales, luego ponen en común sus observaciones y sus hipótesis:

- se puede "ampliar" o "reducir" cambiando la punta y el lápiz;

- la imagen no cambia de forma, cualquiera sea el modo de disposición del pantógrafo;
- la ampliación varía según los pantógrafos o según la elección de los agujeros de montaje;
- si el pantógrafo no forma un paralelogramo, la imagen se deforma;
- a ciertas longitudes, el pantógrafo hace corresponder otras; a la suma de longitudes, hace corresponder la suma de las imágenes;
- el pantógrafo efectúa ampliaciones conocidas, los alumnos reconocen los nombres de las ampliaciones sobre los agujeros... etc.

2.1.2. Ejemplos de situaciones didácticas diferentes basadas en ese esquema de situación

La simple exposición basada en la ostensión: la maestra muestra el aparato, muestra sus efectos mágicos, enseña el modo de empleo. Presenta los diferentes cálculos posibles: cálculo de la imagen, del modelo y de la ampliación y hace reproducir algunos ejemplos.

El método es heurístico (de redescubrimiento), vecino del que acabamos de evocar. Da resultados colectivos bastante rápidos y es conveniente si los alumnos tienen el hábito de la investigación individual y de los debates, pero sin ningún otro proyecto que "decir cosas interesantes". Este método termina a menudo bruscamente.

Un método activo y mayéutico: cada alumno tiene su pantógrafo; se le plantean una serie de interrogantes para hacerle enunciar sucesivamente las diferentes propiedades o corregir los errores que ha cometido.

Un proceso más elaborado que comprende varias fases:

- *una fase de acción*: la maestra anuncia a los alumnos que en un momento elegirá una longitud entre 1 y 15 cm. Cada alumno (o grupo de dos) deberá prever la longitud correspondiente transformada por su pantógrafo. Esta previsión será objeto de una apuesta, y luego de una prueba: se verificará con el aparato si el valor anunciado es exacto. Hasta ese momento, los alumnos pueden entrenarse en anticipar: buscan las imágenes de algunos números y las verifican. Pueden apostar desde el momento en que piensan haber descubierto la ley y que se sienten suficientemente seguros de ello.
- *una fase de validación*: los resultados concretos son bastante imprecisos y presentan distancias a veces desconcertantes con el modelo; por otra parte, es fácil mostrar un pantógrafo falso. El juego opone entonces a varios grupos: se trata, para cada uno, de descubrir si los pantógrafos de los otros -que están tapados- hacen ampliaciones correctas o no y cuáles son dichas ampliaciones. Para esto, cada grupo pide a otro que le muestre imágenes de diferentes segmentos o figuras (que él elije) obtenidas con su aparato. Cuando un grupo cree haber descubierto la ampliación dada por ese pantógrafo oculto, anuncia su conclusión. Si esta conclusión parece falsa a uno de los otros grupos (que tampoco tiene ese pantógrafo) éste toma posición contra esa conclusión. Entonces se genera un debate donde hay que probar a los otros alumnos que las aserciones del adversario son falsas y que las suyas son verdaderas, recurriendo lo más tarde posible a la prueba contingente. (Esta prueba consiste en mostrar el pantógrafo que está tapado y lo que él produce). Una regla de asignación de la palabra y un sistema de puntos dejan a cada grupo la posibilidad de decidir si acepta o rechaza las pruebas producidas por el adversario o pide nuevas informaciones (nuevas imágenes) (Brousseau, 1979). Algunos alumnos llegan a la convicción de que si el pantógrafo da la misma ampliación de un segmento cualquiera en todas las posiciones, la aplicación debe ser (es necesariamente) lineal porque entonces la imagen de la suma es la suma de las imágenes.

2.1.3. Lugar de esta situación en el proceso

Con pocas modificaciones, esta situación del pantógrafo podría ser tomada como situación inicial en el estudio de las aplicaciones lineales. Pero entonces las hipótesis que hacen los alumnos para interpretar las ampliaciones del rompecabezas (cf. párrafo 2.2.) con simples translaciones ($x \rightarrow x + a$) se encararían menos seriamente. Serían rechazadas casi sin examen, porque el aparato proveería la imagen correcta. En lugar de construir el modelo y de prever el resultado satisfactorio y las condiciones requeridas, sería suficiente con descubrirlo como una ley de la naturaleza. Ahora bien, el modelo aditivo es un obstáculo resistente al funcionamiento del modelo multiplicativo y debe poder oponérsele en situaciones abiertas, donde la elección debe hacerse en base a criterios *racionales* e *intelectuales*.

2.1.4. Composición de aplicaciones (2 sesiones)

Primero los alumnos, en grupos de 2, deben construir la imagen de una figura simple, que se obtiene por dos ampliaciones sucesivas (por ejemplo X 2,5 seguido de X 1,5). Hecha la verificación, la imagen más "linda" y "correcta", será la ganadora. La consigna está dada de tal modo que claramente se manifiesta que es el resultado el que cuenta y no la manera de obtener esta imagen.

De hecho, la manipulación real produce una ampliación tan errónea que es necesario trazar los segmentos con regla y medirlos, calculando su longitud. (Figura 1).

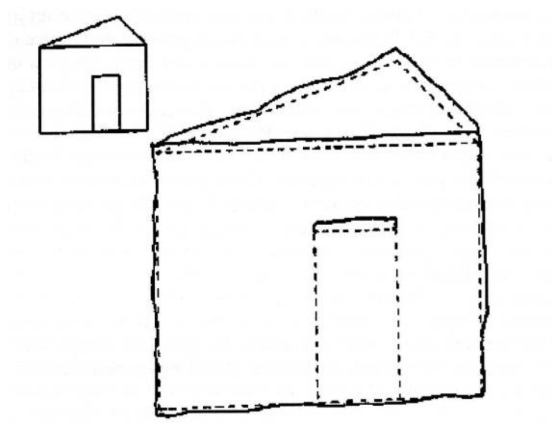


FIGURA 1

Entonces la punta y el lápiz, guiados convenientemente, pueden "probar" que la ampliación es correcta. Los alumnos deben entonces estar convencidos (implícitamente) que la composición de dos aplicaciones lineales conserva las formas.

2.1.5: Relaciones teoría matemática/práctica

Las dos últimas situaciones-problemas del párrafo 2.1.1. son un ejemplo correcto de las funciones que en primer lugar debe cumplir una teoría (una estructura o un conocimiento matemático), en relación con una manipulación: la teoría debe proveer un modelo que permita la previsión, de manera más simple, más económica, más precisa, que la práctica, y no ser una complicación inútil. Esto porque se quiere anticipar que hay que exigir a la matemática que sea no contradictoria. La teoría recibe de la práctica un cierto tipo de prueba y de justificación y a su vez, sirve de prueba (intelectual) para la práctica.

En la segunda sesión se propone a los alumnos que prevean las longitudes de numerosos segmentos que forman una imagen (en el sentido común), obtenida por una composición de homotecias. Los alumnos disponen de las dimensiones del modelo y piden -ya sea las longitudes de los segmentos que corresponden a cada una de las ampliaciones- o los decimales que designan las aplicaciones lineales (en realidad, la imagen de 1).

Ejemplo:

Primer dibujo		Segundo dibujo		Tercer dibujo
	x 3			
4 $\longrightarrow$		12		
			x 1,5	
		3,5 $\longrightarrow$		5,25

FIGURA 2

Hay que calcular para el tercer dibujo las imágenes de las longitudes 2,5; 6; 2; 5,1; 14,6; 2,25 sobre el primero. En el cálculo de esta imagen los alumnos emplean diversos procedimientos:

P_0) El más largo, por linealidad y calculando los intermedios, es la huella de los primeros descubrimientos: cada vez menos alumnos utilizan la definición inicial que conduce a los cálculos del tipo $\frac{3{,}75}{2{,}5}$ el cual es bastante disuasivo:

Primer dibujo	Segundo dibujo	Tercer dibujo
4 $\longrightarrow$	*12*	
1 $\longrightarrow$	12 : 4 = 3	
2,5 $\longrightarrow$	*7,5*	
	2,5 $\longrightarrow$	3,75
	1 $\longrightarrow$	$\frac{3{,}75}{2{,}5}$ = 1,5
	7,5 $\longrightarrow$	*11,25*
2,5 $\longrightarrow$		*11,25*

FIGURA 3

P_1) Por linealidad directa, sin cálculos intermedios, del primer dibujo al tercero:

$4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 12 \times 1{,}5 = 18$

$1 \longrightarrow 18 : 4 = 4{,}5$

$2{,}5 \longrightarrow 2{,}5 \times 4{,}5 = 11{,}25$

FIGURA 4

P_2) Por la composición de las dos aplicaciones lineales con un cálculo intermedio:

$$2{,}5 \xrightarrow{\times 3} 7{,}5 \xrightarrow{\times 1{,}5} 11{,}25$$

FIGURA 5

P_3) Por la utilización directa de la composición de las dos aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc} & \times 4{,}5 & \\ 2{,}5 & \longrightarrow & 11{,}25 \\ 1 & \longrightarrow & 4{,}5 \\ 2 & \longrightarrow & 9 \end{array}$$

FIGURA 6

esta composición calculada de una vez para todas, de una manera o de otra.

En esta situación, es muy ventajoso utilizar implícitamente el hecho que la composición de las dos homotecias es una homotecia, calcularla y utilizarla para obtener la imagen final de cada segmento del modelo.

Como antes, las imágenes están realmente ligadas a la tabla, cada alumno hace una previsión, él mismo la controla, vuelve, la corrige si es falsa y busca modificar su cálculo o su sistema de previsión.

El reemplazo de dos similitudes por una sola aparece en los comportamientos como una solución a la situación-problema. Pero los diferentes procedimientos dan testimonio de diferentes niveles cognitivos: en el procedimiento P_0, el alumno ha efectuado una composición de aplicaciones pero nada permite pensar que está interesado en la aplicación compuesta. Aunque está presente para un observador, en la situación en el sentido habitual, no lo está en el procedimiento P_0; está en la situación-problema porque es el conocimiento característico, desde el punto de vista de la complejidad de los cálculos, del paso de una solución menos buena a una solución mejor.

2.1.6. Diferentes "niveles de conocimiento" relativos a la composición de las aplicaciones lineales

Estos niveles dependen a la vez de los comportamientos que manifiestan el conocimiento y los tipos de situaciones que provocan esos comportamientos. La clasificación en niveles tiende a permitir explicar a priori sus diferencias por las diferencias de complejidad entre las situaciones, entre los procedimientos o entre los modelos cognitivos que los caracterizan. Esas diferencias de complejidad están basadas en informaciones de origen matemático, epistemológico, psicológico que deben justificarse de forma intrínseca en el análisis de la situación o del proceso didáctico.

Experimentalmente, la existencia de tales niveles puede manifestarse por indicadores que evocaremos más adelante y en algunos casos particulares, importantes por lo que G. Vergnaud llamó "niveles de complejidad psicogenética"[15].

Para recordarlo, podríamos denotar Nivel () al que da cuenta del procedimiento P(): la estructura produce un efecto.

- *Nivel (1)*: es el que da cuenta del reemplazo de una serie de similitudes por una sola (procedimiento P_1). Se puede suponer que ese comportamiento sólo es posible si el sujeto tiene un modelo, tal vez aún implícito, que le permita admitir ese reemplazo, el cual puede aparecer sin que el sujeto tenga la posibilidad de reconocerlo, de formularlo, de considerarlo como un objeto de estudio y a fortiori justificar este reemplazo de un modo diferente, que no sea a través de pruebas contingentes.

[15] *NdE*: ver Vergnaud y Durand (1976)

- *Nivel (2)*: un primer paso está franqueado si un alumno dice: "tengo los pantógrafos [x 2,5] y [x 0,25] entonces calcularé las imágenes con una sola aplicación"; [x 0,625] se obtiene después de algunos cálculos sobre longitudes particulares (procedimiento P_2).

- *Nivel (3)*: si dice: "Con los dos pantógrafos que ustedes me dan: [x 4,5] y [x 1/3], preveo que la ampliación será [x 4,5 x 1/3]" y se franquea otro paso. La verificación es posible a través del cálculo (procedimiento P_3).

- *Nivel (4)*: El alumno dice: "siempre se debería poder reemplazar la acción de dos o de varios pantógrafos por la acción de uno solo que se puede calcular haciendo el producto de los dos primeros".

- *Nivel (5)*: considerar que las mismas propiedades podrían valer en otros dominios y adquirir formulaciones especializadas: "tomar una fracción de... -un porcentaje..." exige otros tipos de situaciones, en las que el concepto puede ganar en familiaridad, en extensión, y recibir un estatuto cultural nuevo sin cambiar mucho desde un punto de vista matemático. Por el contrario, el cálculo de las medida-productos afecta la concepción misma de la noción de fracción y debe ser tratado separado de este estadio (Ver sobre este tema Vergnaud et al. 1979; Rouchier 1980).

- *Nivel (6)*: aunque ciertas observaciones anteriores hayan permitido a los alumnos objetar o dudar acerca del siguiente modelo nacido de la práctica con los naturales:

ampliar ↔ multiplicar (o agregar)
reducir ↔ dividir (o restar)

y a pesar de que se haya dado cuenta que [X 1/3] era el mismo operador que [: 3] sobre los enteros (Fase II.3), el obstáculo que constituye ese modelo así como todos los construidos sobre el uso de N está lejos de ser franqueado.

Así los alumnos no saben directamente lo que significa $3{,}2 \xrightarrow{:\ 3}$ ni calcular la imagen correspondiente, aún cuando tengan los medios para descubrirlo.

Está claro que el juego puede conducir a los alumnos a identificar las diferentes maneras de designar las "semejanzas", a unificar los métodos de cálculo, y exige que se ocupen ya no de una o de algunas aplicaciones sino de todas. Será necesario un debate intelectual, y solo un juego social conveniente puede promover tales problemáticas y conducir a plantearse la cuestión: "¿Todo pantógrafo tiene un inverso?". En el nivel 6, el alumno puede ocuparse de ciertas propiedades de las operaciones en la medida en que esas propiedades sirvan a una acción.

Hay un salto de complejidad muy importante entre las situaciones que, como la del pantógrafo, llevan a utilizar el hecho que este inverso existe y aquéllas que conducen a plantearse la cuestión, sobre todo si se quiere que esta cuestión se plantee por razones matemáticas (sería útil saberlo) y no didácticas y formales, y que esas razones aparezcan en el modo de ver del alumno.

- *Nivel (7)*: La etapa siguiente consiste en hacer funcionar esta operación como medio de análisis. Por ejemplo, dándose cuenta de que todas las aplicaciones racionales pueden expresarse como compuestas por una aplicación entera y por la inversa de una aplicación entera. Por ejemplo: (X 3/4) = (X 3). (X 1/4)

Los cálculos en este sistema aseguran la posibilidad de establecer verdaderos teoremas sobre los racionales como aquél que exigía de manera un poco abrupta la Sra. Touyarot (Brousseau 1980, p.36)[16].

Ejemplo de una pregunta:

"Para pasar de un modelo a su imagen utilicé una aplicación lineal X 4/7; ¿cuál es la aplicación

[16] *NdE*: ver "Problemas de enseñanza de los decimales", párrafo 3.

lineal que permite pasar de la imagen al modelo? ¿Puedes probarlo ante un compañero sin calcular ninguna imagen?"

Esta etapa permite buscar y encontrar cómo resolver todos los casos de divisiones de decimales en el sentido más general. Los alumnos tienen la posibilidad de poner a punto la técnica de la división en uno de los niveles de conocimiento precedentes, sin recurrir a la composición de aplicaciones lineales, pero con diferentes sentidos: implícitamente, en el momento del encuadramiento de los racionales-medida (por ejemplo en la fase I.5, luego en la I.7), para calcular la imagen en ciertas homotecias (X 1/4 por ejemplo, fase II.3.), para la búsqueda de la imagen por medio de la aplicación recíproca o de la composición de dos aplicaciones excepcionalmente evidentes debido al contexto. Por ejemplo, para calcular 3,25 x 1,25 sin recurrir a la composición, el alumno busca cuál es la aplicación equivalente a x 1,25, que, él lo sabe, hace corresponder a 1 $\rightarrow$ 1,25 , lo que lo conduce a buscar penosamente una fracción decimal equivalente a 125/100.

Está claro que esos procedimientos, aunque han aparecido una o dos veces en el comportamiento, no merecen en ese momento ser erigidos en métodos y ser objeto de aprendizajes. Los alumnos pueden producirlos una vez, en situación, gracias a un esfuerzo excepcional y al soporte semántico que se desprende de esa situación. Sería un error querer hacer desprender ese "procedimiento" de su contexto y erigirlo directamente en método a fuerza de ejercicios.

Es el nivel (7) el que permite una solución razonable y controlada a estos problemas.

- *Nivel (8)*: consiste en tomar conciencia de la etapa 7, en tomarla como objeto de estudio, en describirla de modo de llegar a formalizarla utilizando un lenguaje algebraico y una teoría matemática axiomatizada. El interés de tal aventura puede ser una clasificación de las estructuras numéricas. Tal construcción encajaba bien en las intenciones de los reformadores de los años 70, para la clase de segundo año (alumnos de 13-14 años). Pero en ausencia de un contrato didáctico claro con los alumnos sobre lo que está en juego en la actividad matemática, todos los niveles epistemológicos que acabamos de detallar se confunden y la tentativa en la mayoría de los casos está condenada al fracaso.

Una práctica comparable, normal en la enseñanza elemental, consiste en que la maestra "explote" el tipo de situaciones didácticas presentadas anteriormente, institucionalizando inmediatamente el descubrimiento de un alumno: "Uds. descubrieron tal objeto (afirmación implícita del hecho que tiene un carácter general); se llama "composición de dos aplicaciones", sobrentendido hay un estatuto cognitivo y cultural, reconózcanlo, utilícenlo en los ejercicios siguientes...)".

Esta práctica pone en corto-circuito todo el trabajo matemático y hasta lo niega; vuelve a afirmar implícitamente que sería suficiente pensar para transformar un concepto protomatemático en noción matemática. Por cierto, ese procedimiento didáctico funciona y se puede emplear legítimamente de forma local. Pero tenemos fundamentos para pensar que es necesario el rechazo de su empleo sistemático para cambiar fundamentalmente las relaciones del "sujeto que aprende" con el conocimiento.

2.1.7. Sobre la investigación en didáctica

Entre las condiciones que confieren a la situación problema sus propiedades didácticas (ver párrafo 4.2.2.), figuran:

- la posibilidad de que cada alumno tenga un número suficiente de oportunidades de cambiar el nivel de los conocimientos,
- penalizaciones implícitas a los procedimientos complejos debidos a un conocimiento más simple, esas sanciones se producen por intermedio de los costos de ejecución y de las

probabilidades de errores más elevadas.

La situación donde el alumno debe prever la imagen por la composición de dos aplicaciones posee esas propiedades.

El problema que se le plantea al didacta es entonces un problema de factibilidad: hay que prever en la situación del pantógrafo un mínimo de dibujos y de segmentos por dibujo, existe un máximo de operaciones compatible con el tiempo disponible, y la motivación de los alumnos. ¿Esa intersección es vacía? Hay que obtener una evolución más rápida, generalmente disminuyendo la incertidumbre del alumno, ya sea por un aporte de información o por la elección de una situación más cerrada. ¿En qué medida está afectado el sentido de las adquisiciones? Sólo la experimentación puede responder. Pero puede aportar mucha más información sobre el efecto de esas condiciones. Es posible, en ciertos casos ayudarse con estudios a priori, de "cálculos de situaciones". Por ejemplo, se pueden comparar los costos de diversas estrategias en número de operaciones a efectuar (mentales o escritas).

	P_0	P_1	P_2	P_3
Costo de un resultado	2D + 2M	D + M	$2M + \frac{2D}{n}$	$\frac{D}{n} + M$
Fiabilidad de un resultado	$d^2 . m^2$	d . m	$d^2 . m^2$	d . m

D: costo de una división
M: costo de una multiplicación
d: probabilidad (división correcta)
m: probabilidad (multiplicación correcta)
n: número de segmentos.

CUADRO 2

Se puede intentar prever el efecto de esas variables que se pueden hacer variar (D y M eligiendo el tamaño de los números, n). Llamaremos variables didácticas a las variables de control que tienen un efecto importante -cualitativo- sobre las evoluciones de los procedimientos.

Ayudándonos con otras consideraciones, se pueden formular ciertas hipótesis: por ejemplo el método P_1 conduce a P_3 más rápidamente que P_2.

La observación de dos clases (50 alumnos), tal como la practicamos regularmente en el Centro para la Observación de la escuela Jules Michelet de Talence, permite, por simples χ^2 testar las hipótesis de ese tipo, con tal que la toma de datos tenga lugar en el momento en que los efectivos elegidos sean suficientes para cada método. Daremos algunos ejemplos en el párrafo 4.

2.1.8. Resumen de la continuación del proceso (2 sesiones)

Las actividades que siguen a las dos que hemos descripto anteriormente, tienen por objeto provocar las modificaciones de sentido -del nivel 1 al 7- detalladas anteriormente .

El proceso tiende a llevar a los alumnos a plantearse cuestiones matemáticas en relación a las propiedades de las composiciones: “¿Es la misma aplicación X2.((X1,5).(2,5)) que X(2x(1,5x2,5))?” “¿Qué significa [: 3], qué otros nombres se le puede dar?” (La definición de igualdad de dos aplicaciones funciona aquí como medio de prueba). “¿Qué ampliaciones se pueden obtener por composición de dos pantógrafos (después de tres, etc.) tomados en un cierto conjunto, por ejemplo (X 2; X 3; X 4; X 7; X 10)?” “¿Cuál es la recíproca de X 4/7, etc.?” “¿Qué produce X 4/7 X 5/3?” Uno de los fines de estas actividades es interesar a los alumnos en la búsqueda de las propiedades de los objetos de los cuales se ocupan, o que se interesen por curiosidades, como por ejemplo, situaciones donde hay que elegir entre dos modelos de aumentos de precio por suma o por composición.

Por ejemplo: X (1 + 0,03 + 0,05) y X (1 + 0,03) (1 + 0,05)

Por supuesto, cada etapa plantea un problema específico que exige la elección de situaciones también específicas. Sin embargo, cierto número de conceptos de didáctica, permiten producir y estimar su adecuación. La mayoría de ellas dan cuenta del esquema de la validación. La costumbre con ese tipo de situaciones que, al comienzo, sigue reglas precisas, permite a los alumnos instaurar y conducir debates sin que las reglas sean explicitadas cada vez y los sujetos elegidos previamente.

La actividad final consiste en identificar las fracciones-medida, las fracciones-aplicaciones lineales y las razones, en unificar las expresiones y las explicaciones particulares producidas en el transcurso del proceso, y en reformularlas en el nuevo lenguaje común.

2.1.9. Límites de los procesos de recapitulación

Esta reorganización "a destiempo" del conocimiento es una actividad fundamental de la cual quisiéramos ver un buen entrenamiento de los alumnos en matemática (Brousseau 1976); pero no está probado que esta transposición de la génesis histórica en génesis didáctica sea tan interesante. H. Ratsimba-Rajohn (1981) mostró que, contrariamente a lo que se podría esperar y a pesar de una elección conveniente de las situaciones, en ciertos casos, el modelo más antiguo, ése en el cual los otros toman su origen y su justificación, resulta reforzado por un proceso destinado a reemplazarlo por otro, aún si el alumno está convencido de que el nuevo modelo es mejor y si las situaciones le dan una gran supremacía. El condicionamiento por la repetición del empleo no se borra por la significación del proceso. Del mismo modo, el estudio de las características de las situaciones didácticas no puede ser rebatido sobre la epistemología, ni tampoco sobre la psicología.

2.2. El rompecabezas

2.2.1. La situación problema

La primera situación planteada a los alumnos para el estudio de las aplicaciones lineales es la siguiente.

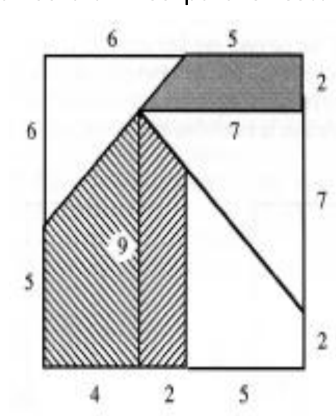


FIGURA 7

Consigna

"Dados unos rompecabezas (por ejemplo el tangram de la figura 7) van a fabricar otros semejantes, más grande que los modelos, respetando la regla siguiente: el segmento que mide cuatro centímetros en el modelo deberá medir siete centímetros en la reproducción. Les doy un rompecabezas por grupo de 5 o 6 alumnos, cada alumno debe hacer al menos una pieza o si el grupo es de dos, cada uno hace al menos dos piezas. Cuando hayan terminado, deben poder reconstituir las mismas figuras que con el modelo".

Desarrollo

Después de una breve concertación por equipos, los alumnos se separan. La maestra exhibe en el pizarrón una representación ampliada de los rompecabezas completos.

Casi todos los niños piensan que hay que agregar 3 cm a todas las dimensiones: aún si algunos sospechan de ese modelo, raramente llegan a explicar sus dudas y jamás, en ese momento, convencen a sus compañeros. Evidentemente, el resultado es que las piezas no encajan. Discusiones, diagnósticos, los líderes acusan a sus compañeros de falta de cuidado. No es el modelo, es la realización la que se pone en duda; verificaciones, algunos rehacen todas las piezas. Hay que rendirse a la evidencia, ¡no es fácil! La maestra solo interviene para alentar y constatar los hechos, sin exigencias particulares. Algunos niños producen, por sucesivos retoques, un rompecabezas que reproduce groseramente la forma del modelo. Otros salen del paso recortando un cuadrado grande: los encajes son impecables. La maestra invita – a los grupos de alumnos- a constatar el éxito, y en ese caso sugiere a los competidores formar con *el modelo una figura* (fig. 8) que no puede ser reproducida con la imagen (fig. 9). En general es bastante fácil encontrar tres lados a, b, c, tales que a + b = c y f(a) + f(b) ≠ f(c). A menudo esto lleva a los alumnos a considerar la necesidad de cumplir con la condición característica de la linealidad.

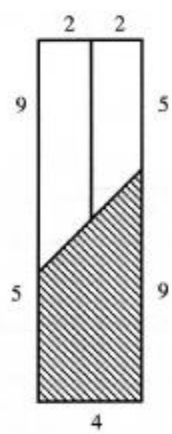


FIGURA 8

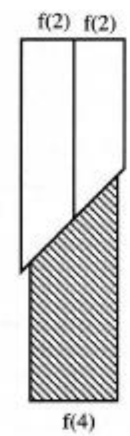


FIGURA 9

Diversos procesos sociales e intelectuales se conjugan para hacer difícil el cuestionamiento del modelo. Se pueden observar manifestaciones afectivas extremadamente vivas: disputas, obstinación, llantos, amenazas.

Desde el momento en que los niños admiten que allí debe haber alguna otra ley y se ponen a buscarla, las cosas van mucho más rápido, sobre todo si uno de ellos, o la maestra dispone las longitudes en el siguiente cuadro (figura 10).

4 ------ 7
5 ------
6 ------
2 ------
9 ------
7 ------

FIGURA 10

De entrada encuentran la imagen de 8: “4 $\rightarrow$ 7 entonces 8$\rightarrow$14”, que no sirve y curiosamente, esta idea no es discutida, como si desde el momento en que el otro modelo es rechazado, éste se impusiera. "Habría que calcular la imagen de 1". "Sí, eso permitiría encontrar la imagen de todos los otros". "Para esto, hay que partir 4 en 4 partes, hay que dividir 7 también en cuatro". El modelo de conmensuración que se les ha enseñado les permitiría escribir directamente:

4 veces la imagen de 1 mide 7, la imagen de 1 es entonces 7/4 (ver párrafo 3.2.6.). Los niños no lo utilizan espontáneamente. Calculan por procedimientos del siguiente tipo:

$$7 = \frac{70}{10} = \frac{280}{40} \qquad \frac{280}{40} : 4 = \frac{70}{40} = \frac{35}{20} = \frac{175}{100} = 1{,}75$$

Entonces $\frac{350}{100} : 2 = \frac{175}{100} = 1{,}75$ etc.

Está claro que estos cálculos sólo pueden tener lugar porque la fracción-medida es conocida.

En este momento se observan pocas advertencias sobre la necesidad de tener segmentos tales que f(a) + f(b) = f(c) donde a + b = c. Estos cálculos permiten finalmente el éxito debidamente constatado por la construcción efectiva.

2.2.2. Resumen de la continuación del proceso

La lección siguiente consiste en proponer la búsqueda de la imagen -en la misma situación- de una longitud fraccionaria. Los niños pueden verificar sus previsiones por fracciones simples utilizando los rompecabezas construidos.

Para enseñar el cálculo de la imagen de decimales, la maestra introduce otra vez una situación semejante a la del rompecabezas; se trata de ampliar y reproducir una pieza en T que por yuxtaposición, producirá un mosaico. Esta vez, las observaciones sobre la relación fundamental abundan y el modelo lineal es adoptado de entrada pero la maestra se equivoca si supone que está definitivamente instalado, porque, en una actividad ulterior (6 sesiones más tarde) los alumnos aceptarán sin pestañear la idea que las aplicaciones $\xrightarrow{x\ 2{,}2}$, $\xrightarrow{x + 5}$, $\xrightarrow{2x + 3}$ son las tres aplicaciones lineales ("ampliaciones" como las otras). Y será necesario también distinguirlas de las funciones cuadráticas (por ejemplo: lado $\rightarrow$ superficie del cuadrado) para que utilicen sistemáticamente el criterio fundamental a fin de asegurar en cada caso la justificación del uso de la linealidad.

El lector habrá notado que en esa primera sesión sobre el rompecabezas, la ampliación no necesita tener nombre. Las actividades siguientes van a multiplicar esas ampliaciones y en el momento en que sea necesario compararlas, encontrar las que son equivalentes, ordenarlas, por mayoría se elegirá conscientemente la imagen de 1. Entonces la pregunta, "¿las ampliaciones son números?" será planteada como lo ha sido para las fracciones-medidas y dejada sin respuesta oficial.

2.2.3. Fundamentos afectivos y sociales de la prueba matemática

Esta situación del rompecabezas es del mismo tipo didáctico que la del pantógrafo pero la previsión correcta choca aquí, de una manera mucho más dramática, con un obstáculo epistemológico: la imposición del modelo aditivo.

Es esencial que, previamente, la maestra haya podido dar a sus alumnos el hábito de aceptar la búsqueda de las soluciones en la situación-problema y no de intentar interpretar los indicios que ella misma podría suministrarles. Tendrá necesidad de todo su crédito de "neutralidad cognitiva" para poder sostener a los alumnos en el nivel afectivo sin interrumpir los procesos psicológicos y sociales que deben cumplirse. Al principio la situación les parece perfectamente inocente, familiar y sin misterio: cada uno tiene tiempo de hacerse una idea y de dedicarse personalmente en una tarea material que va a comprometer su responsabilidad frente al equipo. El suspenso es totalmente moderado, pero de todos modos existe. El escándalo estalla en el cielo sereno: ¡esto no va! ¡Tiene que andar! Las convicciones chocan y se expresan según los caracteres y las posiciones sociales en el seno del equipo. Es entonces cuando comienza el proceso científico, hay que buscar la causa, obstinarse. No sirve de nada seducir o intimidar al oponente, hay que convencerse, convencer, probar. El equipo estalla en movimientos: unos controlan el trabajo hecho, otros quieren ampliar el cuadrado, duplicarlo y cortarle una partecita. Las amistades son sometidas a prueba, las dudas son recibidas como traiciones, los "flojos" ponen en duda la competencia de los "buenos". Nada que hacer, la retórica deberá ceder paso a la prueba científica e intelectual, único medio honorable de rendirse al "adversario". Cuando, franqueado el obstáculo, la solución aparezca a cada uno como desmitificada, contingente, banal e incluso un poco decepcionante, cada uno se la habrá apropiado, y habrá triunfado, no sobre sus compañeros, sino sobre él mismo, todos han ganado sin que la maestra tenga necesidad de concluir con una lección. El mérito de abandonar una idea que se manifiesta falsa es tan grande como el de encontrar directamente una idea correcta, la obstinación es también necesaria como el renunciamiento a la obstinación. Los niños han sido llevados a tomar partido por la verdad más apasionadamente.

Constantemente hemos observado que también obtienen un gran placer con esos juegos, comparables en muchos aspectos a los juegos deportivos. Ese placer los conducirá a amar la matemática y a darle la significación humana y filosófica que ella no habría podido dar. La maestra debe administrar la inversión afectiva, el deseo de sus alumnos, y las lecciones de este tipo tienen características para hacerlo, no solamente aceptar, sino eventualmente exigir ejercicios o entrenamientos. No hemos descripto el sistema muy complejo que regula las intervenciones de la maestra, no solo las estrictamente didácticas, pero cuya importancia no escapará al lector. A. N. Perret Clermont (1979 y 1980)[17] estudia esta construcción de la inteligencia en la interacción social y N. Balacheff (1980)[18] observa de una manera muy fina las conductas de prueba en alumnos de diversos niveles.

2.3. Aproximación decimal a los racionales (5 sesiones)

Estas situaciones forman parte de la fase II.4 que interviene desde el momento en que los alumnos han construido el conjunto de los racionales munidos de las operaciones adición, sustracción, producto y división por un natural y del orden.

2.3.1. Localización de un racional en un intervalo natural

El jugador A elige una fracción comprendida entre 0 y 10 (sin decirla en voz alta). La escribe en un papel y lo guarda en su bolsillo.

El jugador B trata de adivinar en qué intervalo de naturales consecutivos se encuentra esta fracción. Para esto, plantea, por ejemplo, preguntas del tipo:

"¿Tu fracción está entre 7 y 9?"

A puede responder solamente "sí" o "no". B plantea preguntas hasta que haya encontrado los dos enteros consecutivos entre los cuales se encuentra la fracción. La maestra solo interviene en esta fase si los alumnos la llaman, ya sea para arbitrar un conflicto, o para aportar precisiones o datos.

Al principio el juego opone equipos, luego rápidamente alumnos uno a uno, que eligen al mismo tiempo dos fracciones y se plantean mutuamente preguntas por turno. El juego termina

[17] *NdE*: la segunda referencia corresponde probablemente a Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980.
[18] *NdE*: para profundizar, ver Balacheff 1987, 1991.

con una puesta en común de las observaciones.

El juego lleva a los niños a dominar el lenguaje que designa los intervalos de **N** y eventualmente sus intersecciones. Bastante rápidamente, la búsqueda del número mínimo de preguntas conduce a una estrategia de particiones lineales sucesivas en intervalos casi iguales.

Por ejemplo:

¿[0, 5[? Respuesta: sí;

¿[0, 3[? Respuesta: no

¿[3, 4[? Respuesta: no.

¡Ya sé: [4, 5[!

Muchos niños de 10 años tienen necesidad de asegurarse, después de "¿[0, 5[? R: sí; ¿[0, 3[R: no", con el [3, 5[.

El juego en equipos conduce a explicaciones interesantes. En las fases anteriores, los alumnos habían observado que los enteros correspondían a ciertas fracciones pero esta actividad exige el uso sistemático de la inmersión de **N** en **Q**.

2.3.2. Intervalos racionales

La maestra pide a los niños que busquen fracciones, por ejemplo entre 3 y 4. La comparación les provee el medio de encontrar muchas: 3 = $\frac{12}{4}$; 4 = $\frac{16}{4}$ entonces $\frac{13}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{15}{4}$ responden a la pregunta. Introduce entonces nuevas reglas al juego precedente: vamos a continuar el juego intentando encuadrar la fracción del adversario en el intervalo más pequeño posible (sin precisarlo de entrada).

Observación: un año este juego se llamó el "juego del radar" (conocido también con el nombre del "juego del explorador") porque la fracción del adversario era un avión que había que localizar lo mejor posible con un haz de radar cada vez más estrecho, pero esta "justificación" fue propuesta sólo una vez y no ayuda demasiado a los niños.

La dificultad consiste tanto en encontrar fracciones entre otras dos, como en comparar la que se ha elegido con las de la "red" del adversario.

Después de algunos intentos, el método del juego se aclara un poco pero hay que ponerse de acuerdo sobre lo que quiere decir el intervalo más pequeño. Los alumnos discuten, dibujan una recta. La sesión es *difícil*: la regla de juego es difícil de aprender y necesita numerosos cálculos -lo que está en juego no es evidente, esta actividad consume "capital-placer" durante la primera clase. Desde el primer encuadramiento inferior a 1, los niños deciden detenerse y comparar las longitudes de los intervalos. En la clase siguiente, algunos pueden avanzar y afinar una vez su partición. Los niños solo tienen tiempo de completar dos partidos. Sin embargo los encuadramientos decimales ya aparecen a pesar de que los niños vean que se facilitan los cálculos del *adversario*. Es una debilidad del juego, porque los niños no comprenden por sí mismos que no hay ningún interés en complicar el cálculo del adversario. Desde el momento en que la cuestión queda aclarada en una elaboración colectiva, los partidos se desarrollan mucho más rápidamente y los denominadores de las fracciones se inflan: 99/10 es atrapada bajo la forma de 9900/1000. Encuadrada en un intervalo muy pequeño: 1/100000, la fracción 22/7 todavía no es atrapada. Se genera una discusión muy animada: ¡jamás podremos atraparla! dicen algunos... ¡Pero sí! ¿Por qué? Algunos dan la justificación: porque 10, 100, 1000, ... no son múltiplos de 7, pero pocos están convencidos y la maestra se muestra interesada pero ignorante o neutra, el problema queda abierto por el momento.

2.3.3. Continuación del proceso

Las fracciones decimales que hemos utilizado en el juego precedente, pueden ser ubicadas rápidamente sobre una recta graduada. Esta actividad permite establecer una relación con los números con coma (los decimales) si los alumnos ya los conocen y con las longitudes. Si no, la maestra introduce la escritura decimal. ¿Son números? Discusiones bastante cortas, los alumnos deducen los cálculos con decimales a partir de los realizados con las fracciones... El juego de localización reaparece al final de esta serie de lecciones: ¿Dónde está $\frac{221}{35}$? Pero también toma la forma de: se quiere repartir 4319 entre 29. Los alumnos "redescubren" la división en los enteros y la prolongan.

El cuadro 3 de la página que sigue, construido por la clase, presenta el trabajo efectuado y las mejoras aportadas. La disposición de la división fue perfeccionada.

2.4. Experimentación del proceso

2*.4.1. Observaciones metodológicas*

El método que hemos utilizado para identificar los problemas de enseñanza de los decimales y para observar el funcionamiento de los conceptos de didáctica es bien conocido en física y en tecnología empírica: es el de las "comparaciones con resultados constantes".

Después de haber identificado un cierto número de variables o de opciones que se creen susceptibles de actuar de un modo significativo, se realizan experiencias basadas sobre elecciones diferentes con la intención de compararlas, independientemente de la idea que se tiene del interés de esas elecciones para la enseñanza.

El método experimental clásico consiste en organizar a nivel de experiencias las diferentes elecciones y concluir en función de las variaciones de los resultados estadísticos.

Ese método no conviene a nuestros propósitos:

- por una parte, no es aceptable deontológicamente. Ningún profesional puede aceptar, a priori, enseñar "para ver", desinteresándose del resultado.

- por otra parte, no es posible; por su funcionamiento: el sistema educativo reacciona a sus propios resultados modificando sus condiciones de enseñanza y por consiguiente, la base de la comparación, fundada sobre la identidad de las condiciones, caduca y en consecuencia, exige el análisis de las reacciones del sistema educativo y también, el de las condiciones de enseñanza.

Estas comparaciones "con resultados constantes" se realizan sobre las condiciones de obtención y los medios puestos en marcha para controlar los resultados, y no sobre los resultados mismos: buscaremos saber si los mismos resultados son más o menos costosos de obtener según diversas elecciones. Numerosas razones, que no expondremos aquí, argumentan en favor de este procedimiento.

Sin embargo, es necesario romper con ciertas rutinas de la investigación fundamental: así, en lugar de comparar procesos poco diferentes para observar el efecto de una modificación de las condiciones, manteniendo todas las otras constantes, es preferible, en cambio, producir procesos muy diferentes haciendo variar condiciones que se consideran importantes. Sin embargo, para hacer posible la enseñanza, es decir para realizar y conducir estas situaciones concurrentes, vimos que fuimos llevados a responder a numerosas cuestiones y a hacer numerosas elecciones. Estas cuestiones y estas elecciones forman la trama que los conceptos y las teorías didácticas deben describir y al mismo tiempo suministrar los medios para *analizar* las realizaciones obtenidas.

Lo que buscábamos	Lo que hicimos	
1. Busco los enteros Busco cuántas veces 35/35 está contenido en 221/35 6 < 221/35 < 7	221 : 35 = 6 el resto es 11 que representa 11/35	Una niña propone reemplazar las sustracciones sucesivas por una división, lo que es hecho por los niños de inmediato. La misma niña pregunta si no se podrían poner todas esas divisiones en una sola.
2. Busco los 1/10 Busco cuántas veces 1/10 está contenido en 11/35 6.3 < 221/35 < 6.4	11/35 – 1/10 110/350 – 35/350 = 75/350 75/350 - 35/350 = 40/350 110 : 35 = 3 sobra 5 40/350 - 35/350 = 5/350 que representa se resta tres veces 5/350	**IV. División**. Algoritmo 6.31 35	221 35 x 6 = 210 210 011 0
3. Busco los 1/100 Busco cuántas veces 1/100 está contenido en 5/350 6.31 < 221/35 < 6.32	5/350 – 1/100 50: 35 =1, sobra 15 50/3500 – 35/ 3500 = 15/3500 que representa se puede restar 1 vez 15/3500	35 x 3 = 105 10 5 00 50 35 15
4. Busco los 1/1000	15/3500 – 1/1000 150/35000 – 35/35000= 115/35000 Aquí los niños proponen escribir etc. porque se dan cuenta que “es siempre lo mismo”.	

CUADRO 3

2.4.2. La situación experimental

Currículum

El currículum ha sido concebido y pre-experimentado durante el período 1974-1976 (luego de tentativas que se iniciaron en 1971-1972) con la colaboración de las Sras. Llorens y Brousseau, maestras, en dos clases de CM2[19] de la escuela Jules Michelet de Talence, donde se encuentra el Centro para la Observación del I.R.E.M. de Bordeaux.

Ha sido presentado bajo la forma de una serie de textos comparables al del párrafo 2 de este artículo, y de un film realizado por la OFRATEME en colaboración con M. C. Prouteau. Su comunicabilidad ha sido probada en el mismo nivel de la Escuela Normal de Pau (5 clases), en la Escuela Normal de Périgueux (3 clases), en Orléans-La Source (1 clase) y tres veces en CM1.

La población

Vamos a presentar el informe de su reproducción en dos clases de CM2 de la escuela J. Michelet durante tres años (de octubre 1977 a junio de 1980) por N. Brousseau y D. Greslard; los efectivos fueron 54, 50 y 47 niños.

Técnicas

Nos aseguramos la "reproducción" del proceso en su conjunto. En el interior de ese proceso, disponemos modificaciones de las condiciones y comparamos los esfuerzos necesarios para la obtención de los mismos resultados. La recolección de un gran número de observaciones en condiciones determinadas permite el estudio experimental clásico de ciertas cuestiones de didáctica de las que hablaremos en la sección 4.

2.4.3. Los resultados escolares

Los resultados que presentamos fueron elegidos entre todos aquéllos que fueron recogidos de modo que se pueda mostrar, tanto como sea posible, cuál es el nivel de los alumnos al fin del año sobre las diferentes categorías matemáticas de ejercicios. En el cuadro 4, damos entonces todos los resultados obtenidos en el transcurso de los diferentes CAS (Contrôles de l'Année Scolaire), todos los que figuran en los TAS (Tests d'Acquisitions Scolaires) y algunos resultados de exámenes, tomados tan tarde como fue posible, en las categorías donde ni los CAS ni los TAS planteaban preguntas.

El TAS es un test QCM estandarizado a escala nacional que evalúa las adquisiciones en francés y en matemática. Permite controlar que los resultados de la escuela experimental no se alejen significativamente de los resultados nacionales.

El CAS es una lista de ejercicios, que corresponden a los objetivos de la experiencia, entre los cuales se eligen los que constituyen la prueba a finales de cada año (las preguntas pueden entonces diferir de un año al otro).

Recordemos que estos resultados están dados a título indicativo y que el currículum no ha sido elegido para producir los máximos efectos escolares. Las únicas exigencias deontológicas de la experiencia son:

i) los maestros tratan de obtener los mejores resultados en las condiciones que les han sido propuestas,

ii) los resultados obtenidos son al menos tan buenos como los producidos por los otros métodos.

El siguiente cuadro muestra que las exigencias han sido satisfechas. No se deben sacar

[19] CM1: curso medio primer año, niños de 9-10 años; CM2: Curso medio segundo año, niños de 10-11 años.

conclusiones científicas sobre las diferencias entre los métodos de los que se sabe pueden ser producidos en condiciones muy variadas y que no tenemos los medios de controlar.

LOS RESULTADOS ESCOLARES CAS – TAS

MEDIDA

FRACCIONES				**DECIMALES**			
Enunciados	**Resultados en %**			**Enunciados**	**Resultados en %**		
Años Número de alumnos	77 – 78 54	78-79 50	79-80 47	Años Número de alumnos	77-78 54	78-79 50	79-80 47

1 - Orden

Ordenar del más chico al más grande los números siguientes: $\frac{1109}{1000}$; 0,802; 1,019 $\frac{41}{50}$ + $\frac{4}{50}$ **CAS 78** **CAS:** Controles de Adquisiciones Escolares tomados a fines del año escolar	78,5			Rodea al más pequeño de los números siguientes y marca con una cruz al más grande: 8,709; 8,09; 8,079 8,90; 8,097 **CAS 80** 0,12<0,097<0,107 0,097<0,107<0,12 0,097<0,12<0,107 **TAS:** Test de Adquisiciones Escolares (marcar la respuesta correcta)	39,5	39	70 72 70

2 – Localización

Ubicar las fracciones siguientes sobre una recta: $\frac{75}{50}$; $\frac{160}{75}$; $\frac{450}{50}$ (Control del 4/2/78 y 2/79)	62	84,5		Ubicar sobre la recta graduada los números siguientes: 2,2 ; 2,63 ; 2,04 Ubicar bajo cada flecha el número que corresponde: (eran 0,8 ; 3,7 ; 8,5) **CAS 80**			50 50 52 70 72 90

3 – Encuadramientos

Escribir 3 fracciones comprendidas entre: $\frac{5}{10}$ y $\frac{45}{25}$ (Control del 1/2/79)	67,7	77,7		Escribir un número decimal entre 1,2 y 1,3 ¿Puedes escribir un decimal entre 3,14<…<3,15? **CAS 79** Escribir 5 números decimales entre 1,019 y 1,021 **CAS 78**	33	53	67

4 – Transformaciones

Fracción-decimal Escribir como número con coma $\frac{123}{100}$; $\frac{12}{25}$; $\frac{2}{125}$ **CAS 78**	56			**Pasaje de la escritura en letras a cifras** Escribir en cifras: cuarenta y ocho unidades, siete décimos; doce unidades, tres décimos; treinta y cinco centésimos. **CAS 80**			80 80 70
				Escribe como número decimal: cuarenta y ocho unidades, siete décimos; doce unidades, tres centésimos; doscientas unidades ocho milésimos; ochenta y nueve milésimos; seiscientos cuarenta y ocho centésimos. **CAS 79**		79	
Equivalencia Escribir 3 fracciones iguales a 15/25 **(comp. 1, 1978-1979)**	65,5	82,5					
¿Cuál es la serie de fracciones equivalentes? $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{7}$ $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{6}{9}$ $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{16}{81}$ **TAS**	50,5	54	62,5				

5 – Adiciones

Calcular: $\frac{84}{10} + \frac{425}{100} + 7 + \frac{3}{5}$ (Composición 1)	24	38	52	Resolver: 12,04 + 108,974 **CAS 78 – CAS 80**	82,5		90
				2763 + 544,65 **CAS 79**		89	
				Marcar la respuesta correcta 0,07+0,05+0,01=0,013 0,07+0,05+0,01=1,3 0,07+0,05+0,01=0,13 **TAS**	84,5	75	82

6 – Sustracciones

Calcular: $5/8 - \frac{24}{100}$	57,5	69	71	Resolver: 8,043 – 7,95 **CAS 78**	65,5		
				273,08 – 67,5 **CAS 79**		78,5	

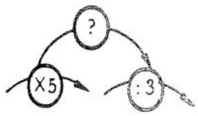
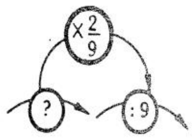
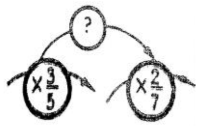
				8,14 – 7,956 **CAS 80** Marcar la respuesta correcta 1 – 0,991 = 0,009 1 – 0,009 = 0,091 1 – 0,001 = 0,099 **TAS**	47	45	87 45

7 – Multiplicaciones

				Resolver: 17,03 x 4,507 **CAS 78** 2,6 x 30,5 **CAS 79** 2,68 x 30,9 **CAS 80** Marcar la respuesta correcta 10000 x 0,042 = 42 420 4200 **TAS**	53,5 52,5	89 66	67 62

8 – Divisiones

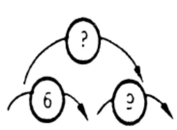
				Resolver: 50,25 : 33,5 **CAS 78** 491,4 : 0,7 **CAS 79** 50,25 : 33,5 **CAS 80** Marcar la respuesta correcta 0,17342:0,0017342 = 1000 100 10000 **TAS**	58,5 67,5	61 64	62 75
PRODUCTOS **1 – Operadores**							

	82,5	87	82,5				
 TAS	86,5	93,5	90				
 TAS	63,5	75	75,5				

2 – Aplicaciones comunes

Un queso contiene 45% de materia grasa. Encuentra la masa de materia grasa en 250 g de ese queso.	C[20]: 64 R: 45,5						
¿Qué distancia representa 12 cm sobre un mapa a escala 1/5000000? La distancia entre 2 ciudades es de 35 km. ¿Cuál será la distancia entres esas dos ciudades sobre el mapa? **CAS 78**	C: 79,5 R: 53						

COCIENTES
1 – Operadores

 TAS	63,5	75	75,5				

2 – Aplicaciones comunes

				Un estuche de doce botellas cuesta 56,40 F. ¿Cuál es el costo de una botella? **CAS 80**			C: 95 R: 72

[20] C: operaciones planteadas y explicaciones correctas; R: resultados.

				Un estuche de diez botellas cuesta 36,50 F. ¿Cuál es el costo de una botella? **CAS 78-79** Un vendedor de frutas y legumbres compró en el mercado un cajón de 14 kg de naranjas por 20 F. ¿A qué precio pagó i kg de naranjas? Da tu respuesta en forma de fracción y luego aproximando hasta los centésimos. **CAS 78**	79 C:79, 5 R: 53	C: 93 R: 82	

II – Problemas							
En un reloj, la aguja grande gira 5/12 de vuelta. ¿Cuál es la duración de esa rotación? 5 minutos 25 minutos un cuarto de hora TAS Sobre el plano de un departamento a 1/200, las dimensiones de la sala de estar entre las paredes es 35 y 20. Las dimensiones reales en metros son: 2,35 m y 2,20 m 70 m y 40 m 7 m x 4 m (Marcar la respuesta correcta) TAS	37,5 26	43 31	32 27	Mamá pagó 25,20 F por un bistec de 900 g. ¿Cuál es el precio del kilo? ¿Cuánto habría pagado por 350 g de bistec? **CAS 78** Sobre un mapa de ruta, 4,5 cm representa una distancia de 9 km. ¿Cuál es la escala de ese mapa? **CAS 78** A 40 F el kg, ¿cuánto cuesta una pata de cordero de 1500 g? **CAS 78-79** A 40 F el kg., ¿cuánto cuesta un asado de 3550 g? **CAS 80** Colette quiere comprar manzanas. Puede elegir entre 4 tipos, A, B, C, D presentadas en bolsas de pesos diferentes Pesos Precio A 1kg 2,30 F B 2kg 5,00F C 3kg 6,90F D 5kg 10,50F ¿Cuál es el tipo más interesante? (El que resulta más barato por kg.) **CAS 78-79**	C:55,5 R: 28 C: 31 R:18,5 64 49	C:58 R:53,5 C: 43 R: 43	

2.4.4. Reproductibilidad - Obsolescencia

La reproductibilidad debe ser vista primero a través de la estabilidad de los resultados en ejercicios comparables, propuestos en el transcurso de cada uno de los tres años de la experiencia principal, en condiciones comparables.

Habiéndose dado a las maestras una gran libertad para ajustar su enseñanza, se encuentran solamente 40 ejercicios comunes a los tres años (sobre 75 planteados cada año): 21 han sido planteados en el transcurso del proceso, 8 figuran en los controles de fin de año y 11 que trataremos aparte, pertenecen al TAS.

Años % de éxitos	**X 77-78**	**Y 78-79**	**Z 79-80**	**XY t, test de student r, correlación**		**XZ t r**	**YZ t r**
Número de alumnos	**54**	**50**	**47**				
m ejercicios r = 21	65,93	75,23	76,05	1	1,57 NS	1,98 NS	NS
σ	20,21	18,08	11,75	1	0,97 S.001	0,67 S.001	0,64 S.001
m control anual r = 8	73,25	77,50	72,50	1	0,65 NS	NS	NS
σ	11,46	14,17	10,12	1	0,75 S.05	0,80 S.02	0,47 NS

CUADRO 5

El examen del cuadro 5 permite observar:

- una estabilidad bastante buena en los *resultados de los controles* anuales a pesar de que, según la opinión de las maestras, hay diferencias importantes entre los niveles de los alumnos de las diferentes promociones: los resultados no difieren significativamente de un año al otro. Por el contrario, una buena correlación entre los ejercicios muestra que son comparables.

- los resultados a los *ejercicios durante el aprendizaje* parecen menos utilizables, pero no hay tampoco entre ellos diferencias significativas. Las correlaciones son excelentes: a costa de una corrección lineal, los porcentajes casi podrían confundirse. El examen de las correlaciones parciales permite eliminar, en cierta medida, la influencia de la "naturaleza de los ejercicios". Mientras que los dos primeros años están fuertemente correlacionados, el tercero no lo está:

($r_{xz/y}$ = -0,055(NS); $r_{xz/y}$ = 0,26(NS); $r_{xy/z}$ = 0,95 (S))

La observación del grafo de contingencia muestra, que en realidad, una corrección cuadrática sería más indicada porque los resultados de los ejercicios que tuvieron en el primer año los porcentajes de éxito más débiles (5 ejercicios por debajo del 50%) son objeto de una mejora importante en los años siguientes (3 por debajo de 50 el segundo año, y solamente 2 entre 50 y 60 en el tercero). Solamente los ejercicios propuestos durante el proceso están en ese caso, pero no están caracterizados por un tipo de operación matemática.

La hipótesis de *reproducción* del mismo proceso debe ser considerada principalmente contra las dos siguientes:

1. La de una "mejora", al menos local, como la que acabamos de señalar y cuyo efecto visible aquí es una disminución de la dispersión de los resultados (el desvío estándar de los ejercicios disminuye fuertemente de un año al otro).

2. La de una obsolescencia de las situaciones didácticas. *Entendemos por obsolescencia el fenómeno siguiente: los maestros, de un año a otro, tienen dificultades para reproducir las condiciones susceptibles de engendrar en sus alumnos, a través tal vez de reacciones diferentes, una misma comprensión de la noción enseñada. En lugar de reproducir las condiciones, que, produciendo el mismo resultado dejan libres las trayectorias, reproducen al contrario una "historia", un desarrollo semejante al de los años precedentes, por intervenciones que, aún discretas, desnaturalizan las condiciones didácticas que garantizan una significación correcta de las reacciones de los alumnos: los comportamientos obtenidos son aparentemente los mismos pero las condiciones en las cuales han sido obtenidos modifican* el sentido, *más próximo del comportamiento cultural.*

El niño toma entonces las informaciones necesarias para elaborar sus respuestas, menos en el análisis de la situación y la comprensión del problema (que le ha sido propuesto) que en las indicaciones "pedagógicas" que se le suministran poco a poco, según un contrato didáctico implícito independiente del contenido, (Brousseau 1979). Ese proceso presenta la ventaja de realizar la institucionalización del conocimiento: el alumno toma conocimiento de las cuestiones que se le quieren plantear, de las respuestas que se esperan de él, de su estatuto cultural,... etc.

La situación didáctica inicialmente considerada como una situación de adaptación del alumno a una situación problema, en realidad devino una situación de comunicación de un saber institucionalizado, con los inconvenientes que se le conoce para la comprensión y la adquisición.

Los trabajos de E. Filloy[21] *permiten prever que ciertos objetivos de alto nivel taxonómico escapan al control de los maestros y en consecuencia a las correcciones didácticas. Se puede esperar que la obsolescencia, si se produce, implicará por una parte, una evolución de las cuestiones elegidas por el maestro en el sentido de un aumento del número de problemas formulados y por otra parte una disminución de los éxitos en las cuestiones más abiertas.*

Se pueden notar tendencias en el sentido indicado observando, por ejemplo, en el cuadro 6, la evolución de los porcentajes de éxito en las operaciones y comparándolos con los de las estructuras problemas. Esas tendencias no son significativas.

Aceptaremos esta conclusión, sin dar aquí más información acerca de los medios por los cuales se ha obtenido: si la experiencia reprodujo las condiciones previstas -lo que la observación clínica y la estadística tienen a su cargo determinar- produjo sensiblemente los mismos resultados. Es por lo que tomamos los resultados del proceso que estudiamos, en cualquiera de los años que suministre la información presentada en el cuadro 6.

		78	**79**	**80**
Operaciones	**m**	72,0	77,4	77,2
	σ	12,8	11,08	10,97
Problemas	**m**	73,8	73,7	67,2
	σ	8,13	17,43	5,87

Resultados

	78	**79**	**80**
operaciones	19	15	15
problemas	7	1	1

Número de controles

CUADRO 6

2.4.5. Breves comentarios

Comparaciones externas

Al cotejar, teniendo en cuenta las observaciones precedentes, estos resultados sobre **D** con los de los cuadros de la primera parte del artículo (Brousseau 1980, p. 47) se puede observar que son

[21] *NdE*: ver (Filloy et al. 1979).

bastante comparables, sin ser inferiores, sobre los objetivos considerados como fundamentales por las maestras (operaciones). Se escalonan en el mismo orden de éxito entre el 60 y el 90%.

Se pueden atribuir las fluctuaciones a diferencias entre las cuestiones planteadas.

Asimismo, se asiste, aquí y allá, a una importante baja de éxitos en los "Problemas".

Comparaciones internas: los decimales

El análisis factorial de los resultados indica que el modo de cuestionamiento (TAS o CAS) es el primer factor de dispersión de los alumnos y de las preguntas. Las operaciones sobre los decimales están razonablemente adquiridas. Las diferencias entre los éxitos en las adiciones y en las sustracciones tienen tendencia a borrarse, salvo para los TAS que presentan dificultades específicas (1 - 0,09 etc.). Asimismo, el éxito es más o menos el mismo en las multiplicaciones y en las divisiones y en promedio de 10 a 15% inferior al de las operaciones precedentes.

La relación de orden y sus manifestaciones -ordenamientos, localizaciones, encuadramientos- tienen tasas de éxito que están al mismo nivel que las operaciones (contrariamente a lo que se produce habitualmente).

La concepción de los decimales en tanto que aplicación lineal está bien adquirida: las operaciones se plantean con discernimiento (comprensión de 80 a 95 %) y están bien resueltas.

Las situaciones y los problemas tienen menos éxito y el objeto del debate es la comprensión de las situaciones.

Los racionales

Los ordenamientos, localizaciones y encuadramientos son un poco más exitosos en los racionales que en los decimales y los resultados son honorables. Hay que ver allí el efecto de refuerzo del modelo inicial del cual hemos hablado: las fracciones sirven para establecer las reglas de comparación de los decimales. Se refuerza su conocimiento.

Ese fenómeno se produce también para la sustracción de fracciones que se utiliza al comienzo de la aproximación de los racionales (65%) mientras que en la adición es mucho menor (40%) pero en el último ejercicio, es la presencia del 7 lo que hace bajar los resultados.

La utilización de los operadores y del simbolismo funcional es eficaz, a pesar del aprendizaje finalmente muy corto sobre ese tema (75 a 90%).

El hecho que el éxito en los ejercicios sobre los decimales sea bastante comparable con el éxito en los ejercicios correspondientes sobre los racionales, es un indicador nuevo y positivo de un funcionamiento mejor controlado del concepto.

No se hará aquí el análisis del proceso. La principal pregunta que nos interesa (ver el párrafo 4.4.) exigiría el examen de la cantidad de ejercicios y lecciones y de las dependencias e implicaciones entre los resultados de los alumnos. Este examen debe hacerse sobre sus comportamientos erróneos y no solamente, como aquí, sobre sus éxitos en relación a situaciones que dan cuenta de niveles taxonómicos más elevados.

3. ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN: EL ESPESOR DE UNA HOJA DE PAPEL

3.1. Descripción de la situación didáctica: sesión 1 (fase 2.1)

3.*1.1. Preparación del material y de los lugares*

La maestra dispuso:

- sobre una mesa delante de los niños: cinco pilas de unas 200 hojas del mismo formato, del mismo color, pero de espesores diferentes (por ejemplo, hojas para fotocopiadoras, de papel bristol, etc.) ubicadas en un orden cualquiera. Algunas diferencias de espesor no deben poder ser apreciadas al tacto simplemente. La maestra no trata de "saber" esos espesores de antemano: no se trata de descubrir "una buena medida",

- sobre otra mesa, al fondo de la clase, otras cinco pilas de unas 200 hojas de los mismos tipos de papel ubicadas en un orden diferente que servirá durante la fase 2,
- diez calibres de plástico (dos por grupo de cinco niños)
- una cortina o un biombo que permita dividir la clase en dos.

3.1.2. Primera fase: búsqueda de un código (duración 20 a 25 minutos)

La maestra organiza equipos de cuatro o cinco niños.

Presentación de la situación - Consigna
"He puesto hojas en las cajas A, B, C, D, E. En una misma pila, todas las hojas tienen el mismo espesor pero de un montón a otro, los espesores no son tal vez los mismos. ¿Pueden percibir esas diferencias?"

Algunas hojas de cada pila circulan en la clase -los niños las tocan, las comparan. "¿Cómo se hace en el comercio para distinguir las diferentes calidades del papel?" (Según el peso).

Objetivo
"Ustedes van a tratar de inventar otro medio para designar y reconocer estos diferentes tipos de papel, y para distinguirlos solamente según su espesor. Uds. están agrupados en equipos adversarios. Cada equipo va a reflexionar para encontrar un medio de designación de los espesores de las hojas. A partir del momento en que lo hayan encontrado, lo van a probar en un juego de comunicación.

Pueden hacer ensayos con el papel y los instrumentos llamados "calibres" (las reglas graduadas bastarían pero los calibres ya han sido utilizados)".

Desarrollo y observaciones
Casi todos los niños intentan medir el espesor de una sola hoja a fin de obtener inmediatamente la designación buscada.

Hacen observaciones del tipo: "Es demasiado fino, una hoja no tiene espesor", o "es mucho más chico que un milímetro", o "¡no es posible medir una hoja!"

A menudo en ese momento hay una fase de desconcierto, de desaliento. Luego preguntan a la maestra si pueden tomar varias hojas. Rápidamente entonces hacen intentos de medida con 5 hojas, 10 hojas, hasta que obtienen un espesor suficiente para medirlo con el calibre o con la regla. Entonces intercambian sistemas de designación tales como:

- 10 hojas 1 mm
- 60 hojas 7 mm

o

- 31 = 2 mm (la maestra hará notar -en el momento de la discusión- que este empleo del signo igual no es correcto).

En uno de los equipos, los niños rechazaron el calibre y establecieron este sistema de designación:

A = MG , B = MF , C = M

Siendo A, B, C los nombres de los diferentes tipos de papeles;

MG, MF, M quiere decir: muy grueso, muy fino, medio.

En esta fase la maestra interviene lo menos posible. Sólo hace observaciones si percibe que, en los grupos, los niños no respetan -o simplemente olvidaron- la consigna. Los niños pueden levantarse, ir a buscar hojas, cambiarlas, etc.

Cuando la mayoría de los equipos encontró un sistema de designación (y que los cinco niños de cada uno está de acuerdo con ese sistema o ese código) o si el tiempo se acabó, la maestra propone la fase siguiente: el juego de comunicación, y ello aún cuando no todos los equipos lo hayan encontrado.

3.1.3. Segunda fase: juego de comunicación (10 a 15 minutos)

Presentación de la situación - Consigna

"Para probar el código que acaban de encontrar, van a hacer un juego de comunicación. Van a ver, en el transcurso del juego si la designación que han inventado para los espesores de las hojas les permite reconocer los tipos de hojas designado.

Los niños de un mismo equipo se van a separar en dos grupos, (de 2 emisores y 3 receptores, según que sean 4 o 5 en el equipo): un grupo de emisores y un grupo de receptores.

Todos los grupos emisores van a ubicarse de un mismo lado de la cortina. Todos los receptores del otro.

Los emisores van a elegir uno de los tipos de papel ubicados sobre la primera mesa (A o B, o C, o D, o E) (que los receptores no ven debido a la cortina). Van a enviar a sus receptores un mensaje que deberá permitir encontrar el tipo de papel elegido. Los receptores utilizan las pilas de papel dispuestos sobre la segunda mesa en el fondo de la clase para encontrar el tipo de papel elegido por los emisores.

Cuando los receptores han encontrado un tipo de papel, devienen emisores (después de la verificación con los emisores). El puntaje será atribuido a los equipos cuyos receptores han encontrado el tipo de papel elegido por los "emisores".

Desarrollo y observaciones

Desde el comienzo del juego, la maestra pone la cortina que separa emisores de receptores.

La maestra: lleva los mensajes de emisores a receptores, recibe las respuestas de los receptores, controla que esta respuesta se ajuste a la elección de los emisores y constata, con todo el equipo, el éxito o el fracaso.

Todos los mensajes se escriben sobre una misma hoja -que podríamos llamar aquí el "carnet de mensajes" (figura 11)- el cual circula entre los emisores y los receptores de un mismo equipo -esta hoja lleva el número del equipo. Además, los emisores anotan sobre otra hoja -que podríamos llamar la "ficha de control" y que ellos guardan- el tipo de papel que eligieron en cada juego a fin de que la maestra pueda constatar el éxito o el fracaso.

Nº del equipo	I
Primer juego: mensaje emitido	E: 10 = 1 mm
Respuesta	R: D éxito
Segundo juego: mensaje emitido	E : 21 = 1 mm
Respuesta	R: B éxito
Tercer juego: mensaje emitido	E: 8 = 2 mm
Respuesta	R: A éxito

Carnet de mensajes

	I
Primer juego	1 D
Tercer juego	3 A

Hoja de control

FIGURA 11

Observaciones
Está claro que la maestra no introdujo vocabulario superfluo como "carnet de mensajes", "ficha de control", ... ni exigencias formales con respecto a la presentación de los mensajes -que los niños deberían aprender a respetar. No hubo consigna general sobre este tema, solamente ayudas y correcciones particulares a los niños mal encaminados.

Si algunos equipos no llegaron a hacer mensajes eficaces, la maestra organizará una nueva fase de concertación, por equipo, para la búsqueda de un código (la consigna es la misma que en la primera fase).

Pero este hecho no se produjo jamás (sobre 8 experiencias idénticas). Los niños llegaron a hacer dos o tres partidos de ese juego.

Durante el juego, se observa en los niños tres actitudes diferentes:
- algunos eligen un número de hojas de las cuales miden su espesor,
- otros eligen un espesor y cuentan el número de hojas,
- otros buscan al azar el espesor y el número de hojas.

Se observa también que los niños eligen preferentemente los tipos de hojas de espesores extremos: las más finas o las más gruesas, para facilitar el trabajo de sus compañeros.

3.1.4. Tercera fase: Resultado de los juegos y de los códigos (20 a 25 minutos). [Confrontación]

Presentación de la situación y de la consigna
Para esta fase, los niños retoman su lugar en equipos de 5 como para la primera fase de la sesión. La maestra anuncia una comparación de los resultados y prepara un cuadro de doble entrada: (equipos) X (tipos de papel) en la cual se inscribirán los mensajes intercambiados y los puntos obtenidos por los equipos (ver cuadro 8) a medida que presenten sus respectivos informes.

Desarrollo y observaciones
Por turno, cada equipo envía un "representante" que lee los mensajes en voz alta, explica el código elegido e indica el resultado del juego.

Los diferentes mensajes son comparados y discutidos por los niños. Como a menudo son muy diferentes, la maestra les pide que adopten un código común.

Ejemplo: 10 = 1 mm
MF
60 hojas 7 mm

Después de una discusión, la clase entera decide denotar:

10 h; 1 mm
60 h; 7 mm

Escritos todos los mensajes, los niños observan la tabla y espontáneamente hacen observaciones del tipo: "esto no va", o "aquí está bien", etc.

Esas observaciones podrían ser clasificadas en cuatro categorías:

Primera categoría
Si las hojas son de diferente tipo, a un mismo número de hojas deben corresponder espesores diferentes.

Ejemplos del cuadro 8:

$$\left.\begin{array}{l}\text{19 h; 3 mm} \longrightarrow \text{Tipo A}\\[1em] \text{19 h; 3 mm} \longrightarrow \text{Tipo B}\end{array}\right\}\text{"Esto no va"}$$

$$\left.\begin{array}{l}19\text{ h ; 2 mm} \longrightarrow \text{Tipo C}\\ \\ 19\text{ h ; 2 mm} \longrightarrow \text{Tipo D}\end{array}\right\}\text{"Esto no va"}$$

Segunda categoría
Para un mismo tipo de hojas, al mismo número de hojas corresponde el mismo espesor.

Ejemplo del cuadro 8:

$$\left.\begin{array}{l}30\text{ h ; 2 mm} \longrightarrow \text{Tipo C}\\ \\ 30\text{ h ; 3 mm} \longrightarrow \text{Tipo C}\end{array}\right\}\text{"Esto no va"}$$

Tercera categoría
Si hay dos veces más hojas, el espesor es dos veces más grande.

Ejemplo del cuadro 8:

$$\left.\begin{array}{l}30\text{ h ; 3 mm} \longrightarrow \text{Tipo C}\\ \\ 15\text{ h ; 1 mm} \longrightarrow \text{Tipo C}\end{array}\right\}\text{"Esto no va"}$$

y los niños agregan "Se habría debido encontrar":

$$\begin{array}{lcccc}30\text{ h ; 2 mm} & & & 15\text{ h ; 1 mm} & \\ & \text{Porque} & \text{x2}\downarrow & & \downarrow\text{x2} \\ 15\text{ h ; 1 mm} & & & 30\text{ h ; 2 mm} & \end{array}$$

Cuarta categoría
Las diferencias en el número de hojas no deben corresponder a iguales diferencias de medidas:

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}19\text{ h ; 3 mm}\\ \\ 20\text{ h ; 4 mm}\end{array}\right\}\text{"Esto no puede ser porque una hoja no puede medir 1 mm"}$$

Al final de la clase, la maestra propone retomar el examen de la tabla en la próxima sesión y verificar colectivamente las medidas por manipulación y si es necesario rectificarlas.

Observación
La presentación de las operaciones efectuadas sobre los números en la búsqueda de pares equivalentes con la ayuda de flechas no tiene carácter formal ni obligatorio, es una "manifestación" familiar del empleo de los operadores naturales al cual los niños están habituados.

3.1.5. Resultados

Todos los niños saben medir el espesor de un cierto número de hojas de papel, escribir el par correspondiente y rechazar un tipo de papel que no corresponde a una escritura que le fue dada. La mayoría es capaz entonces de poner en marcha una estrategia de comparación y en conclusión aceptar un tipo de papel como correspondiente a una medida. Algunos han formulado esta estrategia. La mayoría de los niños puede analizar un cuadro de medidas y señalar incoherencias utilizando implícitamente un modelo lineal.

3.2. Comparación de espesores y pares equivalentes (Actividad 1, sesión 2)

3*.2.1. Preparación del material y de los lugares*

El material es el mismo que para la primera clase: las pilas de hojas están dispuestas de la misma manera, y los calibres están disponibles.

3.2.2. Primera fase (25 a 30 minutos)

Presentación de la situación - Consigna
La maestra pide a los niños que retomen el examen de la tabla realizada en el transcurso de la primera clase. Esta observación se hace primero en silencio, para que los niños puedan detectar las incompatibilidades más evidentes de ciertas medidas. Luego la maestra les propone dar cuenta de los errores que han visto, línea por línea (para cada tipo de papel).

Desarrollo y observaciones
Los niños, después de la observación y según su voluntad, van por turno al pizarrón para mostrar los "mensajes" que les parecen inexactos y eventualmente proponen una corrección.

Esas correcciones son discutidas por el conjunto de los niños. Si están de acuerdo, la corrección se hace, si no, proponen verificar con una manipulación: recuentan el número de hojas indicado en el mensaje y hacen la medición. Después de la verificación colectiva, el nuevo mensaje es adoptado y escrito en el pizarrón (esta manipulación se hace en grupos: dos grupos verifican un mensaje, otros dos otro mensaje, etc.). A menudo sucede que un mismo tipo de papel medido por dos grupos diferentes de niños, da medidas que no son compatibles. Esto se debe generalmente a errores de lectura, o al hecho que los niños tienen las hojas más o menos acomodadas. Se dan cuenta rápidamente y lo dicen.

También sucede, para tipos de papel de espesores muy próximos, que las medidas encontradas no permiten reconocer de qué papel se trata. Es durante esta fase que los niños se dan cuenta que tienen mayores posibilidades de distinguir espesores próximos tomando un número grande de hojas. En efecto, solamente 15 o 20 hojas de espesores muy próximos tienen medidas tan cercanas que los niños no pueden distinguirlas con precisión. Entonces proponen medir espesores de 50, 80 o 100 hojas.

Ejemplos de observaciones realizadas por los niños (tomados del cuadro 8).

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{10 h ; 2 mm} \\ \text{y} & \text{5 h ; 1 mm} \end{array}\right\} \text{ para el tipo B, "está bien"}$$

Un niño agrega:

$$\begin{array}{ccc} & \text{5 h ; 1 mm} & \\ \text{x3} \downarrow & & \downarrow \text{x3} \\ & \text{15 h ; 3 mm} & \end{array}$$

Estas tres medidas: 5 h; 1 mm - 10 h; 2 mm y 15 h; 3 mm se conservan.

En cambio, para el tipo C (cuadro 7) las medidas: 12 h ; 1 mm y 8 h; 1 mm son discutidas y rechazadas y los niños proponen rehacer la medición.

Las dos primeras conclusiones no corresponden a la tercera -los niños deciden conservar la primera porque ven que sobre 100 hojas, hay 3 mm de diferencia mientras que con 8 h, 14 h, 12 h, no hay diferencia en la medida. Dicen también que una diferencia de cuatro hojas (12-8) o de dos hojas (14-12) no cambia la medida (verifican con una manipulación).

Equipo	Tipo C	Tipo D	Conclusiones de los niños
1	100 h ; 8 mm	100 h ; 11 mm	1) D > C (D es más espeso que C)
2	12 h ; 1 mm	10 h ; 1 mm	2) D > C (D es más espeso que C)
3	8h ; 1 mm		3) C > D (C es más espeso que D)
4		14 h : 1 mm	

CUADRO 7

3.2.3. Segunda fase: terminación del cuadro. Búsqueda de los valores que faltan (20 a 25 minutos)

Presentación de la situación. Consigna

Los niños observan que ciertos tipos de papel no han sido considerados en el transcurso del juego de comunicación y que faltan las medidas.

La maestra propone entonces completar el cuadro midiendo los tipos de papel que faltan.

Desarrollo y observaciones

Los niños se dividen el trabajo por grupos de cinco, ya no adversarios sino compañeros y no necesariamente los mismos que en la sesión precedente (varios grupos toman el mismo tipo de papel y verifican a continuación la compatibilidad de las medidas).

Ejemplo para el tipo C:

$$\begin{array}{c} 12\ \text{h}\ ;\ 1\ \text{mm} \\ \text{x8} \downarrow \qquad \downarrow \text{x8} \\ 96\ \text{h}\ ;\ 8\ \text{mm} \end{array}$$

Cuando todos los niños están de acuerdo, las nuevas medidas se escriben en el pizarrón (cuadro 8). Al final de esta fase, el cuadro está totalmente corregido y completo. Hay varios mensajes compatibles para cada tipo de papel.

3.2.4. Tercera fase: juego de comunicación (15 minutos)

La maestra propone a los niños rehacer el juego de comunicación de la primera actividad, teniendo en cuenta todas las observaciones y correcciones que han hecho (número grande de hojas, papel más o menos acomodado,...).

Se vuelve a jugar una vez, con gran satisfacción por parte de los niños. Todos tienen éxito, aún si se agregan uno o dos tipos nuevos de papel.

3.2.5. Resultados

Estos niños saben adaptar el número de hojas elegidas a las necesidades de discriminación de sus espesores (aumentar el número de hojas cuando los espesores son muy próximos). Saben encontrar a través del cálculo, los pares correspondientes al mismo tipo de papel. Todos saben ahora utilizar el modelo lineal para analizar una tabla. Una parte de ellos es capaz de utilizar las relaciones de vecindad entre los pares. Un gran número de niños ha sido conducido a juzgar las declaraciones y a argumentar por sí mismos.

Ejemplo del primer cuadro de mensajes (no fue corregido)

Tipo de hojas	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
A	19 h ; 3 mm	10 h ; 2 mm	20 h ; 4 mm	
B	19 h ; 3 mm		4 h ; 1 mm	15 h ; 2 mm
C	19 h ; 2 mm	30 h ; 2 mm	100 h ; 8 mm	30 h ; 3 mm 15 h ; 1 mm 20 h ; 2 mm
D	19 h ; 2 mm 12 h ; 1 mm		100 h ; 9 mm	
E			9 h ; 4 mm	13 h ; 5 mm 7 h ; 3 mm

CUADRO 8

Clase de CM2 (1977)

Tipo de hojas	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
A	48 h ; 9 mm			
B			10 h ; 2 mm	5 h ; 1 mm 15 h ; 3 mm
C	100 h ; 8 mm	12 h ; 1 mm 96 h ; 8 mm	8 h ; 1 mm 64 h ; 8 mm 12 h ; 1 mm	
D	100 h ; 11 mm	10 h ; 1 mm 100 h ; 10 mm		14 h ; 1 mm 154 h ; 11 mm
E	23 h ; 10 mm	10 h ; 4 mm 8 h ; 3 mm	6 h ; 2 mm	

CUADRO 8 (Continuación)

3.2.6. Resumen de la continuación de la secuencia (Sesión 3)

Después de haber verificado que los alumnos saben reconocer las hojas designadas por su espesor, (48;9) por ejemplo, la maestra pide que encuentren otras escrituras para designar cada espesor, y después que ordenen las hojas de la más delgada a la más espesa intercalando (25h; 7 mm) entre las otras.

Al final de la sesión, la maestra expone a los alumnos un método de escritura del espesor de una hoja: (50; 4) designa un montón de 50 hojas que miden 4 mm de espesor, el espesor de una de esa hojas se escribe $\frac{4}{50}$ que se lee: "cuatro cincuenta avos de milímetro". Verifica con ejercicios que esta información está efectivamente transmitida.

La distinción entre el espesor de una hoja y la designación de una pila de hojas es esencial pero difícil y sólo será aprendida progresivamente.

3.2.7. Resultados

Los niños saben encontrar pares equivalentes. Saben comparar los espesores de las hojas (muchos de ellos con dos métodos). Tienen una estrategia para ordenar pares, según esas comparaciones. Saben designar el espesor de una hoja de papel con ayuda de una fracción y encontrar fracciones iguales.

No saben encontrar, en el caso general, dos fracciones iguales.

Observación
Esos saber-hacer son constatados en situaciones. No es posible en ese momento separar una cuestión del contexto y plantearla de forma independiente. No es posible entonces apoyarse sobre estos resultados considerándolos conocimientos "adquiridos" e identificados como tales por el niño.

3.3. Análisis de la situación: el juego

3.3.1. La situación - problema

Análisis de la tarea de los alumnos: los emisores:
La tarea del emisor es más fácil que la del receptor: sólo se deben contar las hojas de la pila elegida y prestar atención para medirlas bien. El deseo de tener números simples y correctos conduce a elegir un número de hojas tal que:

- el espesor sea tan próximo como sea posible de un número entero de milímetros,
- los errores debidos al aireado de las hojas sean débiles,
- el número de hojas a contar no sea muy grande.

Un análisis poco profundo o una práctica repetida conducirían al emisor a elegir:

- un número de hojas bastante grande para que la diferencia entre su espesor y el espesor de un mismo número de hojas del tipo más próximo sea bastante neta, por ejemplo que exceda 1 mm (aireado eliminado).
- un número de hojas tal que el costo de la operación sea mínimo (el costo de la operación se evalúa en costo del conteo de hojas y en precio de los errores por tentativa). El costo de errores depende del error relativo por intermedio de la probabilidad del error que la operación engendre.

Este punto mereció un estudio matemático que no se publica aquí.

Análisis de la tarea de los alumnos: los receptores
La tarea de los receptores es más pesada. Si "aplicaran" un algoritmo racional, para interpretar el mensaje (60 h; 7 mm) deberían:

- contar 60 hojas de cada tipo de papel,
- medir el espesor de esas 5 pilas de 60 hojas,
- comparar: serían conservadas las pilas cuya medida sería la más próxima a 7 mm.

En realidad, si este procedimiento se aplicara sistemáticamente, haría perder el beneficio esencial de la situación: los niños pueden (deben) eliminar ciertas hipótesis utilizando la experiencia que adquirieran en la primera fase y poniendo en marcha una representación (un modelo implícito) del espesor. En esta fase de acción, las relaciones, las apreciaciones, las operaciones, aún vagas, incompletas, aproximativas, van a probarse, clarificarse, complejizarse incluso antes de ser formulables.

Ejemplo: "60 h; 7 mm, es (papel) fino, no es el A, porque se había encontrado para A (3 h; 1 mm)". Por supuesto que 60 hojas de A medirían mucho más que 7 mm ...

Si los niños se equivocan en sus hipótesis, pueden darse cuenta sin demasiada demora y sin otra sanción que una pequeña pérdida de tiempo. La representación permite anticipar, economizar tentativas; dicha representación está controlada por la acción, sin que la condicione completamente, ni sea condicionada por ella. La representación domina sin embargo estas decisiones de acción porque una vez descartados los "papeles" improbables, hay que conservar los otros. "C da para 30 h, 2 mm y D también, no se puede saber. Hay que medir otra vez... Si 30 h de C miden un poco menos de 2 entonces debe ser D... Harían falta más hojas..."

Para los receptores, dos mensajes tienen tendencia a ser equivalentes si permiten la misma discriminación entre los papeles, es decir si son vecinos topológicamente.

Es necesario que cada niño sea a su turno, emisor y receptor.

Aún si todos los niños no adquieren un dominio igual en el razonamiento sobre los espesores, todos adquieren un buen conocimiento de las condiciones que deberá satisfacer el modelo que se elegirá, lo que ese modelo deberá permitir.

3.3.2. La situación didáctica

Análisis de la tarea de la maestra: fases 1 y 2

En las dos primeras fases, la tarea más importante de la maestra no es controlar el contenido y el desarrollo de las reflexiones de los niños: no debe intervenir, no importa si escucha una proposición interesante o una declaración falsa. Es la situación la que debe ejercer los feed-back necesarios. Provisoriamente, dejó de ser el guardián de la verdad, el garante, el recurso, el destinatario obligado y final de todas las intervenciones de los niños.

Debe, con su actitud, convencer a los niños de su neutralidad con respecto a las apreciaciones de la situación a fin de que ellos renuncien a obtener de él informaciones y ayudas que deben obtener por ellos mismos.

Neutralidad pero no indiferencia: recibe con el mismo interés todas las sugerencias y las devuelve con convicción sin modificar el contenido pero trata de hacerlas realizables. La maestra envía a los niños hacia la situación pero se preocupa por acrecentar su compromiso, su deseo de resolver correctamente. Facilita la solución de los problemas subalternos, vigila el respeto de las reglas y de las consignas que oportunamente precisa y repite, resuelve los problemas de organización, ayuda a la evolución favorable de los conflictos en los grupos. Controla que todos estén comprometidos y trabajen en dirección al resultado que se busca. Para ello, se interesa mucho por el resultado final que se registra, participando de los éxitos tanto como de las decepciones, feliz con los primeros, animando a los otros, con una especie de espíritu del "buen deportista".

Aquí y allá, son los esfuerzos los que son educativos y no los puntos obtenidos.

En particular, el puntaje de los equipos no da lugar a ninguna declaración por parte de la maestra, los equipos no son los mismos de una lección a la siguiente. Los puntos sirven para determinar las estrategias durante el juego, no para clasificar a las personas a través de ese juego.

Fase 3

La fase 3 de la primera actividad es una fase de confrontación (no es una situación de validación formal). Aún allí, la maestra es una conductora del juego que hace jugar pero que no juega. Para todos los niños, los problemas que logran resolver con sus exigencias: formulaciones claras, datos precisos... son los que impedirían el funcionamiento de la situación. No hay exigencias "externas". Deja llegar a declaraciones falsas o absurdas, hasta la formulación correcta, da a los otros el tiempo de formular su juicio. No confirma una declaración correcta antes de que todos se hayan declarado de acuerdo.

Animа a las minorías para que expresen sus dudas, clarifica los debates aún cuando no pueda resolverlos.

3.3.3. El mantenimiento de las condiciones de apertura y su relación con la significación del saber

En las situaciones de investigación, la pedagogía clásica conduce al maestro a "explotar" inmediatamente, o casi, la "buena" declaración. El maestro habla con el primero o uno de los primeros "que encuentra". Finalmente los intercambios conciernen al 20 % de los niños (los más "vivos"). Para que esos intercambios sean comprendidos por los otros, las cuestiones planteadas deben ser tales que el 80 % de los niños sean capaces de responder a ellas casi directamente, si tuvieran el tiempo necesario: las preguntas serán entonces bastante cerradas y la búsqueda consistirá en una especie de prueba de velocidad que privilegia a los algoritmos. Así, 60 % de los niños participa dejando a otros la responsabilidad de actuar, de hablar en su lugar. En cuanto al 20 % que no sabría responder, no se trata jamás para ellos de buscar, sino de aprender un saber ya hecho, que ellos deberían poseer, que es "vergonzoso" no poseer, ya que no se trata finalmente aquí más que de saber "quién lo tiene" y "quién no lo tiene". Entonces, para el 80% de los niños, la investigación es una situación sancionada negativamente donde el acento está puesto sobre el saber: tener que buscar es la confesión de una debilidad que no se perdona. Tener que aprender es el hecho de una minoría desfavorecida y despreciada.

Las situaciones que proponemos no deben ser conducidas de la misma manera.

Las cuestiones a menudo son más abiertas, en el sentido en que el número de niños capaces de responder a ellas directamente es muy bajo: casi todos tienen que buscar. Los intercambios van a afectar al 80 % de los alumnos sobre problemas que menos del 20 % puede resolver directamente. El maestro mantiene la situación abierta sin explotar las ideas. Se contenta con hacerlas tomar en cuenta. El hecho de ser el primero en tener una idea pierde un poco de importancia.

Los niños que encontraron una respuesta más rápido, deben aprender a compartir su convicción sin la seguridad de la validación por el adulto. Así, la investigación y el aprendizaje devienen la preocupación principal de la mayoría.

Estas situaciones son delicadas para conducir: el camino está abierto a un campo de actitudes sociales muy diversas. El maestro ha aprendido a oponerse a las diversiones; algunos niños perturban la opinión de los otros para tener tiempo de buscar ellos mismos, acaparan la atención, no respetan la investigación de los otros, etc... En ese momento, lo que se aprende es toda la función y el uso del saber y de la verdad. Algunos niños, habituados a un estatuto en la clase y a un contrato didáctico clásico, viven mal los cambios súbitos en el modo de acción didáctica del maestro tales como la ausencia de seguridad, de valorización inmediata, la dependencia en relación a la acción o a la opinión de otro, etc. El maestro debió hacer provisoriamente -a veces con los niños e inclusive con los padres- de mediador de los cambios, a menudo profundos, que había provocado. De todos modos, los cambios frecuentes en los tipos de intervenciones utilizadas favorecen, a pesar de su diversidad, las evoluciones progresivas y la adaptación de las actitudes.

La evolución se realiza correctamente en la medida en que se llega a hacer de modo que las relaciones con el objeto de estudio, y las relaciones con los otros sujetos que aprenden devienen fuentes de placer y objeto de deseo. La toma de decisiones, las acciones, los intercambios, los juicios... deben convertirse en primer lugar en oportunidades de júbilo para la clase. El maestro es llevado a renunciar al objeto único de deseo de los niños.

El saber, coartada simbólica de una lucha entre los niños, debe poder devenir objeto de una actividad libidinal.

Se borra así la relación maestro-alumno ante las relaciones niño-saber, niño-medio-saber y niño-compañero-saber.

3.3.4. El contrato didáctico

El maestro es la memoria de referencia de la clase[22]. Se acuerda de las convenciones, los acuerdos y los hechos pertinentes. Los recuerda oportunamente. Es por ese rol que ordena y controla los aprendizajes.

Finalmente, el maestro representa el saber de los adultos, desde el momento en que suministra informaciones sobre ese tema (por ejemplo: Actividad 1-sesión 3-fase 3). Los niños, que

[22] *NdE*: ver (Brousseau y Centeno 1991)

tienen su propio sistema, pueden comprender la notación en curso y sus ventajas -o su equivalencia- con el sistema que han construido, y adoptarlo, no libremente sino a conciencia (situaciones de institucionalización).

Por supuesto, los cambios eventuales de notaciones o de vocabulario cuestan a los niños y a los maestros.

Es por ello que las condiciones de los aprendizajes tienen un carácter crítico y dependen esencialmente del contrato didáctico.

En ningún momento del transcurso de esta primera actividad, la maestra indica que hay que aprender algo. En ningún momento hace repetir una actividad que, con los niños, se convino debería ser sabida, conocida, aprendida. Esto vendrá tal vez más tarde, y reconociendo que una fase no estaba justificada por otras razones.

En realidad, la fase 1 de la primera sesión: "búsqueda de pares equivalentes", debe permitir a todos los niños efectuar la búsqueda de al menos dos pares equivalentes a un par dado, comparar dos pares al menos una decena de veces, explicar una equivalencia al menos una vez, escuchar varios métodos de comparaciones. Todo esto en una situación de control colectivo. Pero el contrato realizado con ellos no es "ustedes deben aprender y *saber hacer* esto para poder responder a la cuestión siguiente como yo quiero", sino "ustedes deben *hacer* esto para poder participar en el desafío siguiente".

El aprendizaje de la búsqueda de pares equivalentes se continúa en la fase 2 y aún después, no es necesario "acabarlo" en la fase 1. Además esto exigiría a menudo la *formulación* de un método de investigación como por ejemplo: se pueden multiplicar o dividir los dos términos de un par por un mismo número, "o peor" dos pares son equivalentes si "infaliblemente" en ese momento se deberá decir o una tontería o una frase incomprensible. Además, a largo plazo, esas formulaciones de métodos generalmente no son económicas. Aquí lo rechazamos categóricamente.

La solución a la situación de la fase 2, ordenamiento de los espesores, no es más complicada si no se *saben* buscar los equivalentes, ya que los niños reflexionan sobre la representación de la situación: en número de hojas y espesores de la pila (en lugar de aplicar un algoritmo sobre la escritura del espesor de una hoja).

En este momento, todo aprendizaje *formal* (convenido, institucional) estaría pesadamente hipotecado de contrasentido. Por el contrario, es necesario que el maestro verifique que *todos* los alumnos han *reflexionado*, *elegido y calculado* un par nuevo... en caso de necesidad, en el pizarrón, con ayuda de los otros.

Esto no quiere decir que no hay aprendizajes ni aportes de información. La fase 3 de la tercera sesión muestra un ejemplo de aportes de información. Se trata de convenciones a registrar y a utilizar. Desde ahora esas convenciones serán una regla y el maestro "exigirá" su empleo en las comunicaciones "públicas" de los niños. En realidad, ejercerá una presión creciente a medida que la convención se banalice, sin rechazar tratar de comprender otras formulaciones, sobre todo al comienzo.

3.4. Análisis de las variables didácticas. Elección del juego

3.4.1. El tipo de situación

No volveremos sobre el carácter fundamentalmente *cibernético* de la situación de comunicación. La codificación más económica, si se admite que se puede aumentar a voluntad el número de tipos de papeles, consiste en designarlos con la ayuda de un par: número de hojas, espesor en milímetros. Observemos sin embargo que la situación de búsqueda de un código no se repite. No hay dialéctica de la formulación de los pares. El código se pone en uso de forma casi inmediata. La situación de comunicación no funciona entonces mucho en situación de aprendizaje, sirve solamente para dar "sentido" a la fase de acción de los emisores y de los receptores. El carácter "óptimo" del mensaje no es objeto de ningún comentario con los niños. Nos asegura solamente una buena aceptación de su parte.

3.4.2. La elección de los espesores: modelo implícito

En cambio la componente *"acción"* de la situación es la oportunidad de la creación de un modelo implícito del sistema de los espesores.

Si se trata finalmente de medir longitudes, ¿por qué no elegir objetos de longitudes apreciables? El niño posee a esta edad una representación eficaz de las "longitudes" comprendidas entre 1 mm y 50 mm. Es decir que puede compararlas, ponerlas una a continuación de otra, partirlas, y aún evaluarlas si es necesario (es decir hacer corresponder aproximativamente un entero con la ayuda de sistemas de unidades en uso).

Pero justamente, esta representación es bastante eficaz para permitirles resolver la mayoría de las situaciones prácticas *sin* que sea necesario utilizar el nuevo sistema de numeración: percepción, medida entera, etc.

El niño puede imaginar o efectuar operaciones sobre "longitudes": suma, diferencia, sin usar un modelo, sin representación.

Por ejemplo, puede indicar la longitud deseada de una varilla enviando un hilo de "longitud" igual.

La actividad matemática puede entonces traducir mejor, transcribir "la realidad" que se supone preexistente.

Como en geometría, el modelo implícito del cual disponen los niños es tan rico que rige todas las decisiones. Cuando no llega a resolver una situación, la teoría matemática que podría suplir a ese modelo es demasiado compleja para ser construida en ese momento. Si se utiliza ese modelo implícito, la teoría matemática construida, aquí la medición, aparecería solamente como una complicación, una exigencia suplementaria o superflua. La teoría debe ser guiada, controlada por "la intuición", debe suministrar datos más precisos, etc.

Hemos elegido entonces para la variable didáctica "tamaño de los objetos", un dominio en el cual el modelo implícito natural no alcanza, sin excluir sin embargo las manipulaciones.

Con las longitudes de algunos centésimos de milímetros, las operaciones a las que se apunta se pueden "concebir" pero seguramente no percibirlas ni efectuarlas directamente. Algunas de esas operaciones son inconcebibles, tal como partir una de esas longitudes (¡un cabello en cuatro! en el sentido de la longitud). Veremos que esta imposibilidad es deseada por otras razones. El número que mide el espesor deviene entonces el medio -el único "concreto" de aprehender este espesor, de construir las experiencias de comparación, de prever la suma, etc. La representación matemática ha sido reintegrada en su rol fundamental de teoría en construcción, en su relación dialéctica con el constructor y con la situación.

Además, el enriquecimiento de esta representación va a poder ser controlado si se favorece, en un primer momento, el desarrollo del modelo implícito volviendo inútiles la explicación de los métodos (de comparación, por ejemplo). Se podrá provocar una fase de formulación (actividad 1-sesión 2) y luego de formalización progresiva en el módulo 4, en el momento oportuno para cada noción: antes que el modelo implícito sea demasiado eficaz, suficientemente pronto como para que sea útil, pero bastante tarde para tener sentido; suficientemente pronto para que el sentido atribuido al lenguaje sea indispensable a la acción y a su formulación, bastante tarde para que los conceptos formulados no estén aislados unos de otros, sino funcionando juntos.

3.4.3. Del modelo implícito a la explicación

El modelo implícito desarrollado por los niños en la primera sesión comprende una aproximación a la relación de equivalencia algebraica fundamental (número de hojas de la pila 1 x espesor de la pila 2 = número de hojas de la pila 2 x espesor de la pila 1, pero seguramente no bajo esta forma), bajo la forma de un conjunto de aplicaciones lineales de **N** en **N**.

Esta aplicación es aproximada a través de sus propiedades:

- la primera observación de los niños significa que quieren aplicaciones diferentes para hojas percibidas como diferentes (inyección del conjunto de aplicaciones en el conjunto de tipos de papeles).

Observemos que no es realista por parte de los niños querer que aplicaciones diferentes indiquen tipos de papeles diferentes: tienen ejemplos ante los ojos donde para un mismo tipo de papel, y para un mismo número de hojas, se obtienen espesores diferentes, y donde sin embargo el mensaje ha funcionado. Alcanza con tener resultados suficientemente cercanos unos de otros y suficientemente alejados de otros resultados.

- Sin embargo, esta exigencia se formula: parece que se quisiera un número para un tipo y un tipo por número. En realidad se rechazan solamente los resultados escandalosos; "30 h ; 2 mm; 30 h ; 3 mm ¡alguien se equivocó!" (Estos resultados no son algebraicamente equivalentes, ni topológicamente bastante próximos).

- Es solamente más tarde, que la linealidad se formula, por su propiedad característica de conservar las razones. Los niños dan cuenta de los pares que contrarían esa propiedad y luego la enuncian.

Observación

Si no hubiese habido intentos un poco variados, con la libertad de tomar el número de hojas que se quiere, no habrían aparecido razones simples. Si el juego no hubiese sido rápido, un poco anárquico, amable, las contradicciones tampoco hubiesen aparecido.

Es necesario notar que el modelo explícito no aparece como una formulación positiva de las propiedades conocidas dadas por su existencia. Los pares que obedecen a la ley implícita no dan lugar a ninguna observación: son los pares que no la obedecen, los cuales, por el accidente que ellos revelan, hacen necesaria la formulación: como una teoría, el modelo se revela por sus contradicciones -aparentes o reales- con la experiencia y no por sus acuerdos.

Hay que ver en este hecho un fenómeno completamente general e importante que contradice formalmente ciertas teorías didácticas empiristas, como por ejemplo el proceso psicodinámico de Dienes: no son las semejanzas (los isomorfismos) entre las situaciones presentadas el motor principal de las "abstracciones", tampoco la transcripción o la esquematización de las estructuras son la llave de la formulación. La simple familiaridad, aún activa, con situaciones bien estructuradas, jamás es suficiente para provocar una matematización. En cambio, los problemas planteados por una situación que pone en marcha (implícita o explícitamente) un modelo preexistente, o por una teoría en la toma de una decisión, provocan la evolución, la reconsideración o el rechazo y la formulación de las teorías.

Esta dialéctica caracteriza la mayor parte de las matematizaciones.

Aquí, la situación inicial (primera sesión, fases 1 y 2) puede ser considerada sin un modelo inicial particular (conteos y medidas enteras - homotecias en **N**). Su resolución conduce a un lenguaje y a métodos poco satisfactorios desde el punto de vista lógico. La resolución de ese problema teórico (fase 3) exige nuevas "experiencias" y confrontaciones (segunda sesión) que llevan a la reducción de las contradicciones y al uso de un modelo en parte explícito. Sobre todo en lo que concierne a la técnica de la medición de hojas de papel y un poco también en la relación de equivalencia fundamental entre las escrituras.

Con la tercera sesión, comienza otra etapa: la puesta a prueba del sistema de medida. ¿Permite reconocer la escritura del espesor de una de las hojas conocidas, de distinguirla de la escritura de un nuevo espesor? Aquí, la codificación deviene de nuevo el objeto de estudio de los niños con la formulación de la equivalencia, la creación de las clases de equivalencia y el estudio de la compatibilidad de la relación de orden sobre los pares con la relación de equivalencia: las conclusiones deben ser las mismas, cualesquiera que sean los pares que sirven a la equivalencia.

La designación de las clases por una "fracción" (la palabra no es obligatoriamente pronunciada), la escritura de la igualdad de clases, son informaciones aportadas por el maestro como convenciones sociales (a respetar para ser comprendidas por los otros) y como una conclusión didáctica, una confirmación implícita de la validez del desarrollo de la clase.

Los niños piensan que los tipos de hojas pueden ordenarse por orden creciente de espesor. La teoría que han construido permite ese ordenamiento mientras que sus sentidos no pueden hacerlo, y aún pueden tener confirmaciones bastante concretas de sus inferencias -su teoría funciona como una verdadera teoría.

La teoría plantea nuevos problemas porque el método de comparación no parece válido para cualquier par y recurre a la vez:

- a las relaciones algebraicas que permiten llevar la comparación de (40 ; 6) con (20 ; 4) a la de (40 ; 6) con (40 , 8) o aún llevar (30 ; 4) y (20 ; 2) a (30 ; 4) y (40 ; 4),

- y a las relaciones topológicas que permiten comparar por ejemplo (19 ; 3) y (10 ; 2) porque (19 ; 3) es menos espeso que (20 ; 4). El comentario de los niños es: "con una hoja más, la pila tiene 1 mm más, y como una hoja no mide 1 mm...".

Sucede que la construcción general de esta secuencia sigue el modelo de una construcción axiomática de los racionales -bastante moderna (pares, pasaje al cociente). No se puede negar que el conocimiento de tal axiomática ha permitido considerarla como una solución a los problemas que nos planteábamos de didáctica de los decimales. Sería falso creer que esa elección ha precedido al análisis didáctico. Si hubiéramos sido conducidos a elegir otro dominio de variables didácticas y otra génesis, los pares hubieran podido perder toda significación, la equivalencia todo interés, la construcción hubiera podido entonces coincidir *localmente* con otra axiomática clásica o no.

De todas maneras, dejar aparecer la huella -bajo cualquier forma- de esta arquitectura en la actividad de los niños, no tendría interés para ellos.

4. CUESTIÓN DE DIDÁCTICA DE LOS DECIMALES

4.1. Los objetos del discurso didáctico

El discurso de didáctica se refiere a cuatro niveles de objetos:

1. El nivel de los hechos contingentes

Es la descripción de las producciones efectivas del maestro o del sistema educativo: objetivos declarados, informaciones suministradas, consignas, etc. Las producciones efectivas de los alumnos, los comportamientos, los resultados, las reacciones del medio, etc.

2. El nivel de la situación didáctica

Se trata de interpretar las decisiones del maestro, los comportamientos del alumno, sus motivaciones, etc. discerniendo contra qué otros comportamientos han sido elegidos los que sirven de testimonio, y de relacionarlos en estrategias, en modelos de comportamiento, de errores, si es posible explicativos de los "juegos" y de los contratos respectivos y recíprocos entre compañeros. Este análisis pone en evidencia las variables que aseguran la reproductibilidad de la situación, a través de algunas diferencias entre los hechos observados.

3. El nivel de análisis del concepto y de su génesis
Se trata entonces de determinar el conjunto de situaciones que son susceptibles de hacer funcionar una noción, confiriéndole los diferentes sentidos que determinan al concepto correspondiente. En el campo de la didáctica, las diferentes situaciones que afectan al concepto, son en realidad variables a determinar en cada caso.

4. El nivel de los hechos y de los debates en didáctica
En este nivel es donde se producen los conceptos, los métodos y los medios de análisis necesarios para los niveles precedentes.

Cada nivel tiene sus métodos propios, de estudio y de pruebas -y sus problemas de metodología- que hacen considerar una experiencia de didáctica como una experiencia de epistemología experimental y la distinguen de una experiencia de enseñanza.

Las interacciones de estos cuatro niveles son evidentes pero la forma en la que se articulan los problemas de enseñanza y las cuestiones de didáctica no aparece aún claramente para muchos, así como la forma en la que se oponen y se completan el punto de vista científico y la fenomenotécnica didáctica. Es por ello que nos hace falta volver sobre el proceso que acabamos de describir de forma muy detallada, para mostrar cómo ese proceso puede ser el lugar donde pueden probarse y actualizarse las cuestiones que nos interesan.

4.2. Algunos conceptos de didáctica

4.2.1. Las componentes del sentido

La definición del sentido de una noción es, lo hemos dicho, uno de los problemas centrales de la didáctica. Lo que precede nos permite ahora entrever cómo nos proponemos resolverlo: se tratará de *inventariar* y *clasificar* todas las situaciones donde esta noción aparece involucrada, ya sea como solución, necesaria o no, óptima o no, ya sea en el enunciado, o en los comportamientos de los protagonistas del juego didáctico. Así, la noción aparece en su funcionamiento y en sus relaciones con los diferentes sectores de la matemática. Se puede identificar diversas concepciones particulares que permiten resolver una clase de situaciones, mientras que sugieren respuestas falsas sobre otra, y cuya reunión constituye el concepto.

Inventariemos los criterios que hemos utilizado para elegir el proceso estudiado. Esos criterios constituyen una primera aproximación de las componentes del sentido de los decimales y permiten engendrar una buena parte de las situaciones buscadas.

1. El tipo matemático de problemas: algebraicos, topológicos o de orden.

2. El tipo de objetos matemáticos que realizan la noción y por cuyo motivo el problema se plantea explícitamente: el decimal imagen de una *medida*, el decimal *escalar* o razón que opera en un conjunto de medidas, el decimal-proporción, el decimal-operador lineal en un espacio vectorial, etc. (cf. cuadro 1).

3. El tipo de estructura matemática que rivaliza con **D** en la situación propuesta, aquélla contra la cual se define o se justifica **D** (puede ser **N**, **Q** o **R**) como única solución o como la mejor.

4. El tipo de situación didáctica según las manifestaciones del conocimiento: situaciones de acción, de formulación, de validación, de institucionalización. El decimal aparece allí respectivamente como regla de acción, como lenguaje, como sistema de pruebas o como saber cultural. Esta clasificación produce también las funciones de **Q**: cálculos, algoritmos, designación,

representación, objeto de estudio, medio de prueba, teoría...

5. El ámbito donde se lleva a cabo la situación (banco, comercio, física, etc.) y el estatuto científico: necesidad matemática, ley física, convención social.

6. El tipo de presentación formal del lenguaje que expresa los decimales y los caracteres informacionales que lo oponen a soluciones vecinas: decimales vs. sexagesimales o vs. binario (caracteres de numeración).

7. La frecuencia con la cual la situación es susceptible de presentarse.

8. El tipo de generación de **D** o de la parte utilizada -tipo de operaciones utilizadas y caracteres de la distribución de las frecuencias de empleo sobre los decimales empleados.

9. El estatuto didáctico o cognitivo de la noción en los comportamientos del sujeto puestos en práctica por la situación. Ver lo que hemos llamado en el párrafo 2.1.6, los niveles de conocimiento.

10. El tipo de representación o de definición, por ejemplo conmensuración o fraccionamiento. (ver a continuación 4.3.4.).

11. El tipo de organización axiomática de los saberes implícitos y explícitos del sujeto.

12. El tipo de operación o de relación matemática solución de la situación: ordenamientos, encuadramientos (entre dos enteros, entre dos fracciones, entre dos decimales de un orden de magnitud dado), localización (insertar, encontrar un número en un intervalo), transformaciones (fracciones $\Leftrightarrow$ decimales $\Leftrightarrow$ sexagesimales, cambios de unidades, escritura científica, descomposición polinómica, cifras $\Leftrightarrow$ letras), sumas (de medidas, adiciones, traslaciones, composición de traslaciones), diferencias (ídem, decimal opuesto), productos (medida x operador natural o decimal, medida x medida, operador x operador, medida derivada, etc... cuadro 2), división (repartir, división, multiplicación por un inverso, composición, medida por una razón, etc.).

Todas las distinciones no son de igual importancia y la lista no es exhaustiva. Faltaría reorganizar este conjunto de situaciones para favorecer los análisis, que sean menos pesados.

4.2.2. Las propiedades didácticas de una situación-problema

El término "situación" designa el conjunto de circunstancias en las cuales se encuentra el alumno, las relaciones que lo unen a su medio, el conjunto de datos que caracterizan una acción o una evolución. Una situación es una situación-problema que necesita una adaptación, una respuesta del alumno. En particular, si la necesidad de esta respuesta ha sido objeto de una consigna precisa, si el alumno tiene un proyecto, un objetivo declarado, tendremos una "situación problema estricta" (o formal), y aún un "problema" si el medio se reduce a un enunciado y si ninguna traba material, debida a ciertos aspectos físicos de la situación, ni ninguna condición psicológica o social, modifica la interpretación. Una *situación didáctica* es una situación donde se manifiesta directa o indirectamente una voluntad de enseñar, un enseñante. En general, se puede distinguir, en una situación didáctica, al menos una situación-problema y un contrato didáctico.

¿Qué condiciones hacen de una situación-problema una situación de aprendizaje o una situación de enseñanza? R. Douady (1980) propone una lista que corresponde bien en una primera aproximación, a la que he querido satisfacer en el proceso propuesto antes y que no puedo exponer aquí. El análisis y la teorización de las situaciones conduce a afinar y prolongar esta lista, a construir los indicadores que permiten objetivar y estudiar los criterios demasiados intuitivos, como lo hacen Bessot y Richard (1979). Es un problema central de la didáctica tanto para el análisis como para la realización de tales procesos, y que no recibió aún el lugar que le corresponde (a pesar de algunas publicaciones antiguas pero casi confidenciales, por ejemplo Brousseau 1970).

4.2.3. Situaciones-Conocimientos-Comportamientos

Cada situación-problema exige por parte del alumno comportamientos que son indicios de un conocimiento. Esta correspondencia fundamental, establecida, caso por caso, se justifica por la interpretación de situaciones-problemas en términos de juego, y de comportamientos, en términos de indicios de estrategias de las cuales hay que mostrar la adaptación al modelo o la representación atribuida por el alumno. El cuadro 9 tiene por fin mostrar que los diferentes tipos de situación, producidas por el estudio de las condiciones didácticas del aprendizaje, dan muchos comportamientos distintos según las formas de conocimiento. Desde entonces (Brousseau 1970) hemos utilizado un modelo de cuatro clases cuyos nombres han variado según los matices que distinguían los casos estudiados:

(1) Procedimiento (o modelo implícito de acción, o esquema de acción);

(2) Saber implícito equivalente a un enunciado; propiedad o relación;

(3) Saber explícito;

(4) Lenguaje (código, sistema formal ...).

A veces las clases 2 y 3 estaban unidas.

Este sistema podría ser comparable, en cierta medida, con el de Skemp (1976) y Byers y Herscovics (1977): (1) demuestra una comprensión instrumental, (2) una comprensión intuitiva, (3) una comprensión relacional y (4), tal vez una comprensión formal. Es lamentable que Herscovics, que había tenido en 1976 una larga conversación sobre este tema con Skemp y conmigo en Karlsruhe, no haya examinado esta correspondencia.

No retomaremos aquí los caracteres bien conocidos de las situaciones de acción, de formulación y de validación (Brousseau 1970).

Las situaciones de institucionalización son aquéllas a través de las cuales se fija convencional y explícitamente el estatuto cognitivo de un conocimiento o de un saber. La institucionalización es interna si un grupo fija libremente sus convenciones, según un proceso cualquiera que conforma un sistema quasi aislado. Es externa si toma sus convenciones de una cultura: es la situación más frecuente en la didáctica clásica.

Comportamientos observados según el tipo de situaciones y el tipo de conocimientos

Tipos de situaciones Tipos de conocimientos	**Situación de acción**	**Situación de formulación bajo control de una situación de acción**	**Situación de prueba (o de validación)**	**Situación de institucionalización**
Procedimiento	Saber-hacer. Implementar el procedimiento, preferirlo a otro.	Descripción detallada. Designación.	Justificación del procedimiento pertinente (puede aplicarse), adecuado, correcto, óptimo.	Canonización de un procedimiento en algoritmo (término debido a Rouchier).
Modelo implícito **Propiedad** **Relación** **Representación**	Hacer elecciones, tomar decisiones motivadas por el conocimiento en cuestión (sin poder "formular" ese saber).		Pruebas contingentes experimentales por exhaustividad.	
Saber **Enunciado** **Teoría**	Aplicar un saber (el saber podría ser formulado).	Enunciado de la propiedad o de la relación. Reformulación más "correcta".	Prueba Demostración Traducción más convincente Organización Axiomatización	Canonización de una teoría, de un saber. Transposición didáctica (Chevallard 1980)[23]
Lenguaje	Empleo de un lenguaje para expresar. El comportamiento manifiesta un recorte en objetos que corresponden a los signos y a las palabras.	Empleo de un lenguaje de un sistema formal de una formulación para comunicar, saber, decir.	Justificación de una palabra, de un lenguaje, de un modelo formal (pertinencia, adecuación, optimización) definiciones. Actividades metalingüísticas.	Elección de definiciones, convenciones lingüísticas y gramaticales.

CUADRO 9

[23] *NdE*: Brousseau se refiere aquí a la conferencia dada por Y. Chevallard, presentada en la Primera Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas. El texto correspondiente está publicado en Chevallard (1985).

4.3. Retorno sobre ciertos caracteres del proceso

4.3.1. Insuficiencias del proceso

Hemos insistido en varias oportunidades en el hecho que no considerábamos al currículum como un método para proponer a los enseñantes. Conviene explicar por qué.

La principal razón reside en la dificultad para comunicar todas las informaciones necesarias. En particular aquéllas relativas a las reglas a las cuales el maestro está obligado a obedecer. Son muy diferentes a aquéllas a las cuales los enseñantes están habituados y reposan sobre una concepción didáctica muy "nueva", sobre los modos de evaluación, y aún sobre una sensibilidad nueva en las relaciones maestro-alumno. Probablemente sería perjudicial para los niños enseñarles de manera clásica cada paso de esta larga génesis e institucionalizar los comportamientos provisorios.

Además, las necesidades de la experiencia en epistemología condujeron a elecciones que sería al menos prematuro proponer a los enseñantes: por ejemplo, no sabemos provocar y controlar el franqueamiento de los obstáculos epistemológicos, o simplemente retomar lo que es indispensable para reemplazar el modelo de la acumulación regular de los conocimientos compatibles. O más aún, hemos elegido una representación del decimal-medida muy alejada de la que sugiere la historia.

Finalmente, el proceso presenta notorias imperfecciones del mismo tipo que las que reprochábamos a los métodos clásicos[24] y que son objeto de estudio. La definición por conmensuración casi no da al alumno una noción de fracción más disponible que la antigua definición.

Por ejemplo en la fase II.1., los alumnos experimentan dificultades para escribir la imagen de 1 en la aplicación lineal que a 4 le hace corresponder 7, aunque saben que esta imagen iterada 4 veces forma un segmento de 7 cm: la imagen es 7/4.

El esfuerzo por definir las fracciones-medida es probablemente bastante estéril desde el punto de vista cultural, etc. Vamos a examinar ahora algunas de esas cuestiones.

4.3.2. Retorno al decimal-medida

Un estudio epistemológico de la medición y de sus funciones mostró que juega un rol importante en la emergencia de los decimales (por intermedio de los sexagesimales). Este rol está ligado a diversas situaciones donde se trata de representar, de comunicar o de prever el resultado de ciertas manipulaciones de la vida diaria; control de la conservación, comparaciones, reproducción de cantidades iguales, repartos. En esas situaciones, los valores de las variables físicas y sus relaciones con las características humanas son esenciales. Así, se distingue en la mayoría de las civilizaciones tres funciones "unidades":

- la unidad para "contar" (C). Las cantidades más grandes que ella deben de todas maneras ser fraccionadas, para su transporte o su evaluación en partes iguales que se puedan contar. La unidad (C) es la más grande de las que el hombre puede manejar cómodamente.
- la unidad para "fraccionar" (f). Las cantidades que son inferiores pueden ser manipuladas "de un golpe". Su fraccionamiento en un gran número de partes iguales que se cuenta, es menos económico que una partición directa.
- la unidad de "precisión" (S), la más pequeña que se toma en cuenta.

En general, $S \leq f \leq C$ y $10 \leq \frac{C}{f} \leq 60$

---

[24] Por ejemplo, la evaporación de la unidad en la primera fase (Brousseau 1980 p. 33). *NdE*: ver en Problemas de la enseñanza de decimales, párrafo 3.2.4.

Se puede observar al respecto el rol bastante borrado en la práctica del "deca" y de los "deci" en relación al "hecto" o al "kilo".

La práctica de las cantidades en el intervalo [f,c] sirve de modelo en la identificación del conteo y de ciertas fracciones.

El sistema de escritura tiene también por objeto llevar las "medidas" de las cantidades más familiares al intervalo natural mejor conocido.

Las negociaciones históricas entre estas exigencias han producido diversos sistemas algunos de los cuales, demasiado bien adaptados, no han podido evolucionar. Casi no se puede esperar ir más allá del uso que los babilonios y luego los astrónomos hacían de los sexagesimales.

Pero este estudio permite comprender todo el partido que se podría sacar de esta problemática en una perspectiva dialéctica donde la práctica de la medida, el uso del sistema decimal de medida y la introducción de los decimales estuvieran disociados y no estrechamente confundidos, como es el caso actualmente en Francia. Para esto sería muy útil retomar los estudios y las observaciones de F. Colmez (1974) y examinarlos en esta perspectiva "económica" que permite la teoría de situaciones.

4.3.3. Observaciones sobre el número de elementos que permite aprehender un conjunto

Es posible engendrar todas las operaciones de la lógica binaria con la ayuda de sistemas que comprendan una operación (la incompatibilidad de Sheffer[25]) hasta dieciséis. Los sistemas que se utilizan comúnmente comprenden cuatro o cinco. Frecuentemente es ventajoso, para aprehender un conjunto, engendrarlo a partir de un número restringido de elementos que llegarán a ser particularmente familiares. Ese número debe ser bastante pequeño para que todos los elementos generadores puedan ser considerados juntos (menos de 10) y bastante grande, para que la generación de los elementos más raros, pero comunes, no sea demasiado larga y para que el sistema pueda soportar un número suficiente de relaciones distintas.

Es así que según Youschkevitch (1976) Abu-l-Wafa, hacia 961-976, "engendra" las fracciones con la ayuda de un sistema de fracciones "pronunciables" en árabe que comprende las fracciones principales: numerador 1, denominador de 2 a 10, las fracciones compuestas de la forma m/n, m < n $\leq$ 10, las fracciones unificadas: productos de la forma $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \ldots \frac{1}{p}$, aquéllas cuyo denominador comprende factores primos superiores a 10 son impronunciables. (Elige este sistema que se remonta a la más alta antigüedad en Bagdag mientras que Al Uglidisi inventó los decimales en Damasco 10 años antes).

Es así, finalmente, como los niños han procedido con los naturales en el primer año de escolaridad.

Ahora bien, aquí hemos decidido introducir de una vez un conjunto mucho más amplio de fracciones: todos los denominadores hasta 50, todos los numeradores de 1 a 20 tienen probabilidades de aparición cercanas. Ninguna fracción juega un rol de privilegio.

No parece que este método, que se opone a los hábitos culturales (que favorecen siempre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$) haya enfrentado dificultades especiales, en cambio, parece haber favorecido el razonamiento sobre una fracción cualquiera. Es probable que no se pudiera introducir de la misma manera la noción de razón.

4.3.4. Fraccionamiento y conmensuración

El sistema cultural actual da, en forma general para los racionales, la siguiente definición:

[25] *NdE*: Sheffer (1913).

Definición 1: (por fraccionamiento)
Una fracción como en el siglo XVII (d'Alembert) es "una o varias partes de un entero partido en varias partes iguales así como la mitad, el tercio, los dos tercios...". Este "un" es poco afortunado y hace difícil la concepción de fracciones más grandes que la unidad: $\frac{a}{b}$ es entonces el resultado de una operación material que consiste en partir *unos* enteros y no solamente *un* entero en **b** partes que se pueden comparar y declarar iguales, y luego tomar un número **a** de esas partes.

Es una definición constructiva. Se refiere a la manera de construir el objeto definido.

Esa definición está bien adaptada a la *construcción de una magnitud correspondiente* a un número dado (dada una unidad), salvo en los casos en que no se conoce el medio práctico de efectuar concretamente las operaciones necesarias.

Por ejemplo, no se puede fabricar un peso de oro que sea los 2/3 del peso de un anillo dado, si no se puede cortar el anillo (pero por tanteo se puede partir en tres un peso igual de plastilina). En esos casos donde, ya sea que la división no es concebible, o que la comparación no es posible (o bien el resultado no está definido, o el conteo es imposible) la definición funciona, no como una representación de la realidad o como una teoría, sino como un sistema simbólico al cual es en vano buscarle una significación concreta. Por ejemplo, esta definición directamente no da ninguna ayuda si se trata de atribuir un número a una magnitud dada. A menos que se deje aparecer el procedimiento de fabricación.

La definición utilizada en el currículum es muy diferente.

Definición 2: (por conmensuración)
*Una cantidad (si existe) será a/b de un entero si iterándola **b** veces (tomando b idénticos a sí mismos) se obtienen **a** enteros.*

Esta definición supone de entrada que la magnitud existe, y las operaciones que evoca son mucho más frecuentes y fácilmente efectuables (multiplicar), no dice cómo construir 3/4. No es constructiva, pero da un algoritmo de reconocimiento: permite decir si tal magnitud, es o no, los 3/4 de tal otra. También es necesario poder "iterar varias veces" o disponer de varios ejemplares de las magnitudes evocadas.

Estas dos definiciones, matemáticamente equivalentes, corresponden de hecho a concepciones diferentes de las fracciones y de los decimales, en el sentido en que ellas no son pertinentes, o más eficaces, o mejor adaptadas, sobre las mismas situaciones problemas. Según los valores atribuidos a la unidad, la relación entre las dimensiones del objeto y la de la unidad elegida, presencia o no de una partición o de la medida de una subdivisión, es posible bloquear la utilización de una o de la otra, o hacerlas más o menos costosas en número de acciones elementales, o contrariar el control de la incerteza del resultado, o aumentar las probabilidades de errores.

El cuadro 10 resume un estudio teórico que se encuentra en Ratsimba-Rajohn (1981). Indica cuál de las dos concepciones hace más eficaces los valores de las variables. Parece que son bastante complementarias y que la definición constructiva es, ampliamente, la más frecuentemente utilizable. Existen otras concepciones que no estudiaremos aquí.

Ratsimba-Rajohn mostró que la estabilidad y la homogeneidad de los comportamientos sobre un conjunto bastante variado de ejercicios permitía hablar de dos representaciones diferentes y en cierta medida incompatibles: propuso a una muestra de alumnos del primer ciclo del secundario -11 a 14 años- situaciones que bloquean sucesivamente una u otra. Observó un porcentaje de alumnos capaces de tratar las dos definiciones, muy débil en relación a lo que las probabilidades de éxito a cada prueba hubiera dejado prever.

VARIABLES DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA DE MEDIDA QUE SIRVE PARA LA EVALUACIÓN DE LA ESPERANZA DE COSTO

Variables de comando

Situación problema

1. Tamaño de la unidad elegida U en relación con los valores de referencia:
   S_1: umbral de percepción **o** S_2: umbral de precisión útil
   f: unidad "a fraccionar" (cómodamente y frecuentemente)
   p: unidad "a transportar" o que sirve para contar
2. Razón del tamaño del objeto ∇, con respecto a U
   $\frac{\nabla}{U} \ll 1$ $\frac{\nabla}{U} \approx 1$ $\frac{\nabla}{U} \gg 1$

   "mejor" valor preferido del intervalo $\frac{\nabla}{U} - S_2$, $\frac{\nabla}{U} + S_2$; ej: $\frac{3}{5}$ o $\frac{59}{57}$

3. Las condiciones de "comparación":
   1 a 1 (Roberval), 1 a n (graduación), directa o indirecta (tara)
4. Las condiciones de ajuste:
   - posibilidad de fraccionamiento material
   - posibilidad de transportar
   - número máximo de transportes… etc. (espacio disponible)
5. Tipo de actividad:
   Realización de un objeto de tamaño dado o medición de un objeto

Contrato didáctico

1. Convenciones a propósito de las exigencias de la medida
   -precisión útil (acción) convenida (comunicación): fracciones usuales, decimales, etc.
2. Valor del éxito, costo del error o del fracaso…
3. Número de tentativas permitidas – tipo de retroacciones – apertura de la situación
4. Variables de contrato relativas al aprendizaje: tiempos, número de oportunidades, etc.

Variables ligadas

1. Número de transportes para una precisión dada
2. Número de fraccionamientos realizados
3. Número de comparaciones
4. Densidad relativa de los puntos de medición fácil o compleja

Variables culturales

Distribuciones de frecuencia sobre los valores de las variables de la situación problema

- en el medio escolar (variable más o menos ajustable),
- en el medio cultural (libre)

CUADRO 10

4.4. Cuestiones de metodología de la investigación en didáctica (sobre los decimales)

El reagrupamiento de las situaciones en modelos, concepciones, representaciones, niveles, etc. plantea el problema de saber lo que es equivalente y lo que no lo es, lo que es diferente de lo que no lo es, y hechas esas distinciones, eventualmente observar las relaciones de implicaciones internas con los modelos -sincrónicas- y de las relaciones entre los modelos -diacrónicas.

4.4.1. Los modelos de errores

M. L. Izorche (1977) mostró que los errores y los éxitos de los alumnos se explicaban si se les atribuía el modelo siguiente: en presencia de varios decimales (d_i), se busca n el más pequeño, tal que para todo d_i, $d_i \times 10^n \in \mathbf{N}$ y se identifica con N, al conjunto $\mathbf{D_n}$ de los decimales tales que 10^n . $\mathbf{D_n} \subset \mathbf{N}$. El niño razona y opera sobre $\mathbf{D_n}$ como sobre $\mathbf{N}$. Léonard y Grisvard (1981) produjeron, sobre un problema de orden, un modelo de comportamiento un poco más preciso dando cuenta del funcionamiento independiente de la parte entera y de la parte decimal. Esos estudios se basan en el derrumbamiento concomitante de ciertos éxitos de conjunto y sobre una jerarquía de comportamientos individuales: esos estudios muestran que el modelo sufre pocas excepciones. Sin embargo cuando la explicación se da sobre modificaciones de probabilidades de errores y no sobre modelos deterministas, (suponiendo que el mismo alumno hace siempre el mismo error) el método raramente es satisfactorio.

Se podría esperar que el análisis factorial de correspondencias o el análisis jerárquico hagan aparecer los reagrupamientos de cuestiones y los reagrupamientos de alumnos que corresponden a esos modelos. Este método es utilizado sistemáticamente por varios investigadores pero su empleo es delicado y la interpretación se detiene habitualmente en los primeros factores principales.

4.4.2. Los niveles de complejidad

Si se observa en los alumnos un despegue suficiente en el tiempo, entre el control de dos cuestiones que pertenecen a primera vista a un mismo concepto, se puede inferir que existe, entre sus soluciones o las concepciones que las rigen, diferencias de complejidad suficientes para formar niveles psicogenéticos diferentes. El análisis genético que se desprende de ese principio aportó muchas observaciones interesantes por parte de G. Vergnaud (1976), G. Ricco (1978) y A. Rouchier (1980) y sus colaboradores. Es necesario sin embargo, ya sea renunciar a aproximarse demasiado a los fenómenos didácticos que pueden introducir desfasajes de origen arbitrario y didáctico, o redefinir una metodología específica. En particular, la formalización de esta noción de nivel, aunque probada en varias oportunidades, presenta dificultades.

4.4.3. Dependencias e implicaciones

La observación sistemática de las diferencias de comportamientos, ligadas a modalidades o a condiciones didácticas diferentes, ha sido posible por la utilización astuta del análisis de correspondencias en el método de cuestionarios de modalidades de F. Pluvinage (1977) y produjo observaciones interesantes sobre la proporcionalidad.

En didáctica, son menos interesantes las proximidades o las distancias que las dependencias disimétricas que evocan la implicación. En consecuencia, R. Gras (1979) ha estudiado métodos jerárquicos y de análisis factoriales basados en un índice de implicación que mejora el de J. Loevinger. Pero la implicación misma evoca una transitividad bastante a menudo ausente en realidad, y hay que producir un concepto específico más refinado antes de obtener un índice estadísticamente satisfactorio.

Tal vez el análisis de las dependencias diacrónicas emprendido sobre procesos como éste que tenemos a disposición, conducirá a ese resultado.

POSTLUDIO

Nota de los editores: *el texto a continuación, reproduce la conclusión escrita por Guy Brousseau para el artículo "Problèmes de didactique des décimaux". En realidad es una conclusión común a los dos artículos sobre los decimales publicados en 1980 y 1981, en el cual Guy Brousseau expresa cómo el estudio presentado muestra la utilidad de la investigación en didáctica de las matemáticas*[26].

En estos dos artículos, hemos intentado presentar los problemas de enseñanza de los decimales sin destruir la trama en la cual se insertan. Y esto nos ha llevado sin darnos cuenta a traducir esos problemas de enseñanza en problemas de didáctica más o menos generales, y a encadenar las cuestiones hasta la metodología de la investigación. ¿No nos hemos extraviado en el camino? Debimos resumir o excluir numerosos estudios demasiado particulares o demasiado centrífugos... En tal caso, ¿de qué unidad puede jactarse la didáctica, cuál es su campo, sus relaciones con la enseñanza? ¿En qué hemos avanzado con respecto a nuestras primeras observaciones?

La enseñanza de los decimales, como la de la numeración plantea, en mi opinión, un problema didáctico difícil y primordial.

Por una parte, su uso está tan expandido, es tan cómodo y tan banal que los niños lo encuentran muy pronto, bajo su forma acabada, actual. Cualquiera sea la forma del aprendizaje, es el hábito y el empleo familiar quien regulará la significación del concepto.

Hemos visto las insuficiencias de esta concepción "mecánica" y la necesidad de ubicar este uso bajo el control de una comprensión y aún, desde que sea posible, de un saber racional. Solamente, la resolución de ciertas situaciones-problemas puede dar esta concepción clara, esta comprensión y este saber. Pero esos problemas son de una complejidad bastante grande y casi no parece posible proponerlos a los alumnos en el momento deseado, demasiado precoz.

Por otra parte, es impensable atrasar la enseñanza de los decimales o aproximarlos a una génesis demasiado larga o que conduciría a prácticas insólitas. Finalmente, en el momento en que se podrían retomar y hacerle las acomodaciones necesarias, en la enseñanza secundaria, no hay más tiempo para dedicarle a esta cuestión subalterna.

Tenemos aquí un problema de enseñanza sin solución. Existen otros problemas que conducen a contradicciones semejantes.

De una forma general, tales problemas son, si no resueltos, al menos tratados por una negociación didáctica, de la cual se saben pocas cosas todavía, pero que sigue solo de lejos el discurso clásico. En ese discurso, todos los éxitos son percibidos como funciones monótonas de las variables: en un extremo lo que es bueno, en el otro lo malo. Potencialmente, el enseñante tiene todo el poder.

¿Cuáles son los roles recíprocos del hábito y de la comprensión en la adquisición y en el funcionamiento de una noción? ¿Cómo evoluciona ese rol? ¿Cuáles son los resultados que se puede esperar que varíen, si se obtiene un mejor compromiso? La traducción de este debate en una lista de hipótesis falsables, susceptibles de ser estudiadas experimentalmente, exige la creación de nociones nuevas. Es el precio que debe pagar la didáctica para acceder a un estatuto científico sin dejar de ser una teoría de los hechos didácticos y controlar su técnica. Los problemas de enseñanza son problemas de decisiones. Esos problemas deben recibir una respuesta, aún

---

[26] *NdT*: esta cuestión es discutida en el artículo difundido en español, Brousseau, G. (1990) ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera y segunda parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 8 (3) y 9 (1).

provisoria, cueste lo que cueste. Esta respuesta no puede ser una respuesta "para ver". El enseñante no puede comprometerse a asumir todas las consecuencias lógicas de una elección y mantenerse en ella pase lo que pase. Tampoco los problemas dan mucha importancia al método experimental, son indicios para interpretar. En la medida en que esos indicios son específicos del contenido, ciertas cuestiones del enseñante pueden ser cuestiones de una "ciencia didáctica" que llegaría a suspender la necesidad de las decisiones. ¿Cuáles son los resultados de los alumnos? ¿Qué decisiones pueden mejorarlos? ¿Qué alternativas se presentan? ¿Cómo fabricar otros métodos, cómo elegir uno? ¿Cómo gestionarlo, cómo conducirlo? ¿Cómo comunicarlo? ¿Qué indicios hay que controlar? Sin embargo, los interrogantes pueden plantearse a condición de sufrir una sutil modificación desde el punto de vista del vocabulario y de los métodos: ¿qué situaciones y qué comportamientos corresponden a una apropiación conveniente de un concepto? ¿Cuáles son los comportamientos erróneos que aparecen y cuál es su significación? ¿Cuáles son las variables susceptibles de actuar sobre las apropiaciones, qué hipótesis pueden explicar los buenos o los malos resultados?

Sin embargo la mayoría de las elecciones que aparecen como criticadas por el enseñante no proveen a la didáctica de buenas preguntas. (Por ejemplo, ¿hay que adoptar el manual de Dupond o el de Durand?). La investigación en didáctica, ¿puede contentarse con dar respuestas donde puede asegurarlas por un estudio científico, dejando al cuidado y a la responsabilidad del enseñante solo, decidir sobre la importancia o la pertinencia de la información y del uso que puede hacer? Siempre será necesario que alguien informe las conclusiones de un proceso de enseñanza bien preciso y que elija una respuesta óptima. De todas maneras, todo estudio "in vivo" del aprendizaje en situación escolar, deberá inscribirse en una actividad de enseñanza de la cual habrá que controlar las variables. En consecuencia, la didáctica científica no escapará a la fenomenotécnica didáctica. Es necesario que tome a su cargo la totalidad de las interacciones de los sistemas presentes y que trate lo que pueda ser aislado y lo que es específico del contenido (sin que sea reductible a él). Debe entonces producir procesos, no como proposición óptima para los enseñantes, sino como objeto de estudio.

BIBLIOGRAFIA

Abdeljaouad M (1978) Vers une épistémologie des décimaux. *Bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques* 50, 1-27.

Balacheff N. (1980) *Etude de l'élaboration d'explications par des élèves de 6ème à propos d'un problème combinatoire* Rapport de Recherche n° 224). Grenoble: IMAG.

Balacheff N. (1987) Processus de prevue et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18 (2), 147-176.

Balacheff N. (1991) Treatment of refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In: Von Gasersfeld E. (ed.) *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bessot A., Richard F. (1979) *Commande de variable dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures, rôle du schéma*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Briand J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique.* Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Brousseau G. (1965) *Les mathématiques du cours préparatoire*. Paris: Dunod.

Brousseau G. (1970) Processus de mathématisation. In: *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428-457). Paris: APMEP.

Brousseau G. (1976) Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels? In: *Actes du Congrès International des Sciences de l'Education* EPI 1, 364-378.

Brousseau G. (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIIIe rencontré organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117), Lovain-la-Neuve.

Brousseau G. (1979) *Etude de situations, (théorie des situations didactiques)*. Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1 (1), pp. 11-59.

Brousseau N., Brousseau G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1988) Représentation et didactique du sens de la division. In: Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M. (eds.) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 47-64). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau G., Centeno J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 11 (2/3), 167-210.

Byers V., Herscovics N. (1977) Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage. (Trad. esp., *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique, 1997.)

Colmez F. (1974) *Document d'accompagnement du film "Mesure"*. Mesure I et II film RTS - Melun-Bordeaux.

Doaudy R. (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 1 (1), 77-111.

ERMEL (1980) *Apprentissages mathématiques à l'École élémentaire* (Cycle Préparatoire, 1 volume; Cycle Élémentaire, 2 volumes). Paris: INRP.

Félix, L. (1971) *Dialogues sur la géométrie Dessi-Mati-Logi.* Paris: Librairie Albert Blanchard.

Filloy E., Montes de Oca V., Riestra J., Senderos G. (1979) *Experimentación en el área de*

Matemáticas del Quinto Grado de educación primaria. México. Publicación de la Sección Matemática Educativa.

Gagné (1980) *"Les principes fondamentaux de l'apprentissage"* Montréal: Éditons HRW. [Traduction française de: “The conditions of Learning”, 1970, New York: Holt, Rinehart and Wilson].

Gras R. (1979) *Contribution à l’étude expérimentale et à l’analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques.* Thèse d’état. Rennes: Université de Rennes 1.

Gras R. (1996) *L’implication statistique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gras R. (1980) *Deux méthodes d'analyse de données didactiques: classification implicative et classification hiérarchique. Application à une situation réelle.* Rennes: IREM de Rennes.

Izorche M. L. (1977): *Les réels en classe de seconde*. Mémoire de D.E.A. de Didactique des Mathématiques. Bordeaux: Université de Bordeaux.

Léonard F., Sackur-Grisvard C. (1981) Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. B*ulletin de l’APMEP 327, 47-60.*

Ovaert J.-L. (1976) La thèse de Lagrange et la transformation de l’analyse. In: Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P., Sansuc J.-J. *Philosophie et calcul de l'infini* (pp. 157-198). Paris: Librairie François Maspero.

Perret-Clermont A. N. (1979) *La construction de l'intelligence dans l'interaction social.* P. Lang, Berne.

Perrin-Glorian M.-J. (1994) Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds*) Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 96-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Polya G. (1957) *How to solve It.* (Second edition). Princeton: Princeton University Press (Trad. esp. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas, 8ª reimpresión 1979).

Pluvinage F. (1977): *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques*. Thèse d'état. Strasbourg: Université de Strasbourg.

Ratsimba-Rajohn H. (1981) *Etudes de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l’unité en vue de l’élaboration des situations didactiques.* Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Ricco G. (1978) *Le développement de la notion de function linéaire chez l’enfant de 7 à 12 ans*. Travaux du Centre d’Etude des Processus et du Langage, n° 11. Paris: Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

Rouchier et al. (1980) Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 1 (2), 225-275.

Scheffer H. M. (1913) A set of five independent postulates for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society* 14, 481-488.

Schubauer-Leoni M. L., Perret-Clermont A. N. (1980) Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 1 (3), 297-350.

Skemp R. (1976) Relational and instrumental understanding. *Mathematics teaching* 77, 20-26.

Stevin S. (1585) *La disme* (1634 1ère édition).

Vergnaud G, Durand C. (1976) Structures et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie* 36, 28-43.

Vergnaud G., Rouchier A., Ricco G., Marthe P., Metregiste R., Giaccobe J. (1979) *Acquisition des "structures multiplicatives" dans le premier cycle du second degré*. Orléans: IREM d'Orléans.

Youschkevitch A. P.(1976) *Les mathématiques arabes.* Paris: Vrin.