1 Teoría de Perron-Frobenius.

1.1 Matrices de entradas positivas.

A lo largo de este capítulo, usaremos la siguiente notación: dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n$:

1. $A \geqslant 0$ si $A_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$.
2. $A > 0$ si $A_{ij} > 0$, $1 \leq i, j \leq n$.
3. $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$ y analogamente $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$.
4. $A \leqslant B$ si $a_{ij} \leq b_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.
5. El vector $(1, 1, \ldots, 1)$ será denotado por medio de $\mathbf{e}$.

El objetivo de este capítulo es la demostración del Teorema de Perron, para matrices de entradas estrictamente positivas y sus generalizaciones a matrices de entradas no negativas.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Perron). *Sea $A > 0$. Entonces vale:*

1. *$\rho(A) > 0$ y $\rho(A) \in \sigma(A)$.*
2. *$\exists x > 0$ tal que $Ax = \rho(A)x$.*
3. *Si $y \geqslant 0$, $y \neq 0$ y $Ay = \lambda y$, entonces, $\lambda = \rho(A)$ e $y > 0$.*
4. *$\rho(A)$ es raíz simple del polinomio característico de A.*
5. *Si $\lambda \in \sigma(A)$ y $\lambda \neq \rho(A)$, entonces, $|\lambda| < \rho(A)$.*
6. *Si $\rho(A) = 1$, entonces, $A^n \xrightarrow[n\to\infty]{} L = xy^t$ donde $x, y > 0$ son vectores tales que $\langle x, y \rangle = 1$, $Ax = x$, y $A^t y = y$.*

Antes de demostrar el Teorema de Perron, presentaremos varios resultados generales para matrices $A \geqslant 0$, su radio espectral y los autovectores correspondientes.

Proposición 1.1.2. *Si $0 \leqslant A \leqslant B$, entonces, $\rho(A) \leq \rho(B)$.*

Demostración. Como $0 \leqslant A \leqslant B$, entonces, para todo $n \geq 1$ se tiene que $0 \leqslant A^n \leqslant B^n$. Por lo tanto $\|A^n\|_2^{1/n} \leq \|B^n\|_2^{1/n}$ y, tomando límite, se obtiene la desigualdad buscada . $\square$

Corolario 1.1.3. *Si $0 < A$, entonces $\rho(A) > 0$.*

Demostración. Si $0 < A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon I \leqslant A$. Así $\rho(A) \geq \rho(\varepsilon I) = \varepsilon > 0$. $\square$

Corolario 1.1.4. *Sean $A \geqslant 0$, $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y $A_J = (a_{ij})_{i,j \in J}$. Entonces $\rho(A_J) \leq \rho(A)$.*

Demostración. Basta extender A_J a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ poniendo ceros en las entradas que le faltan, y aplicar la Proposición 1.1.2. $\square$

Observación 1.1.5. Recordemos que, dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$|||A|||_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \|F_i(A)\|_1 \ .$$

Si $A \geqslant 0$, entonces $\|F_i(A)\|_1 = \operatorname{tr}(F_i(A))$. △

A continuación vienen tres Lemas que sirven para ubicar el radio espectral de una matriz $A \geqslant 0$ usando la Observación anterior:

Lema 1.1.6. *Sea $A \geqslant 0$. Si $\operatorname{tr}(F_i(A))$ es constante, entonces, $\rho(A) = |||A|||_\infty$.*

Demostración. La desigualdad $\rho(A) \le |||A|||_\infty$ vale siempre. En nuestro caso, como $A\mathbf{e} = |||A|||_\infty \mathbf{e}$, se tiene que $|||A|||_\infty \le \rho(A)$. □

Lema 1.1.7. *Sean $A \geqslant 0$,*

$$\alpha = \max_{1\le i\le n} \operatorname{tr}(F_i(A)) = |||A|||_\infty \quad y \quad \beta = \min_{1\le i\le n} \operatorname{tr}(F_i(A)).$$

Entonces $\beta \le \rho(A) \le \alpha$.

Demostración. La desigualdad $\rho(A) \le \alpha$ es conocida, por lo tanto sólo verificaremos que $\beta \le \rho(A)$. Podemos suponer que $\beta > 0$. Definamos entonces la matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cuyas filas son:

$$F_i(B) = \frac{\beta}{\operatorname{tr}(F_i(A))} F_i(A).$$

De este modo, $\operatorname{tr}(F_i(B)) = \beta$ para todo $i \ge 1$. En consecuencia, usando el Lema 1.1.6 y la Proposición 1.1.2, $\beta = \rho(B) \le \rho(A)$, ya que, por su construcción, $0 \leqslant B \leqslant A$. □

Lema 1.1.8. *Sea $A \geqslant 0$, $x > 0$ e $y = Ax$. Notemos*

$$\beta = \min_{1\le i\le n} \frac{y_i}{x_i} \quad y \quad \alpha = \max_{1\le i\le n} \frac{y_i}{x_i} \ .$$

Entonces $\beta \le \rho(A) \le \alpha$.

Demostración. Sea $D = \operatorname{diag}(x)$. Entonces, por cuentas elementales, obtenemos que $D^{-1}AD = (x_i^{-1} x_j \ a_{ij})_{ij}$. Además $D^{-1}AD \geqslant 0$ y $\rho(D^{-1}AD) = \rho(A)$. Por otro lado se tiene que

$$\operatorname{tr}(F_i(D^{-1}AD)) = x_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \frac{(Ax)_i}{x_i} = \frac{y_i}{x_i} \ .$$

Luego basta aplicar el Lema 1.1.7. □

Teorema 1.1.9. *Sean $A \geqslant 0$ y $x > 0$.*

1. *Si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta x \leqslant Ax \leqslant \alpha x$, entonces $\beta \le \rho(A) \le \alpha$.*
2. *Si x es un autovector de A (y es $x > 0$), entonces $Ax = \rho(A)x$.*

Demostración. La primera parte se deduce inmediatamente del Lema 1.1.8. Supongamos que $Ax = \lambda x$. Como $Ax \geqslant 0$, debe cumplirse que $\lambda \geq 0$, en particular $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego se verifican las hipótesis de la primera parte con $\alpha = \beta = \lambda$. $\square$

Observaciones: 1.1.10.

1. Las desigualdades anteriores (para α y para β) son independientes.
2. Además, si $x > 0$, $\beta x < Ax$ implica $\beta < \rho(A)$ y $Ax < \alpha x$ implica $\rho(A) < \alpha$. En efecto, si en los Lemas 1.1.7 y 1.1.8 se toma β estrictamente menor que los mínimos correspondientes, se obtiene $\beta < \rho(A)$.

A partir de este momento $A > 0$. Notar que esto implica que si $0 \leqslant x$ y $x \neq 0$, entonces $Ax > 0$. Este hecho se usará reiteradas veces.

Proposición 1.1.11. *Sea $A > 0$ y $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \rho(A)$. Si $y \neq 0$ cumple que $Ay = \lambda y$, entonces:*

1. $|y| > 0$
2. $A|y| = \rho(A)|y|$

Demostración. Sea $x = |y|$, entonces por la desigualdad triangular,

$$\rho(A)x = |\lambda|x = |\lambda y| = |Ay| \leqslant A|y| = Ax.$$

Sea $z = Ax - \rho(A)x \geqslant 0$. Supongamos que $z \neq 0$. Entonces $Az > 0$. Si llamamos $u = Ax > 0$, $Az = Au - \rho(A)u > 0$. Por lo tanto, $Au > \rho(A)u$ y, por la Observación 1.1.10, se obtiene la contradicción $\rho(A) > \rho(A)$. Dado que esta provino de suponer que $z \neq 0$, se tiene que $z = 0$ y por ende $Ax = \rho(A)x$. Notar que esto implica que $|y| = x > 0$. $\square$

Corolario 1.1.12. *Si $A > 0$, entonces, $\rho(A) \in \sigma(A)$ y existe $x > 0$ tal que $Ax = \rho(A)x$.*

Proposición 1.1.13. *Sean $A > 0$ y $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $|\lambda| = \rho(A)$. Si $y \neq 0$ cumple que $Ay = \lambda y$, entonces, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $|y| = e^{i\theta}y$.*

Demostración. Por la Proposición 1.1.11 $A|y| = \rho(A)|y|$. Además $|Ay| = |\lambda y| = \rho(A)|y|$. En consecuencia, $|Ay| = A|y|$. Luego, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $y_j = e^{i\theta}|y_j|$ para todo j, porque vale la igualdad en la desigualdad triangular (basta mirar las primeras cordenadas de $|Ay|$ y $A|y|$). $\square$

Corolario 1.1.14. *Si $A > 0$, entonces $\rho(A)$ es el único autovalor de módulo máximo.*

Corolario 1.1.15. *Sea $A > 0$. Entonces* $\dim Nu(A - \rho(A)I) = 1$.

Demostración. Sean $x, y \in Nu(A - \rho(A)I)$. Probaremos que son linealmente dependientes. Por la Proposición 1.1.13 se puede suponer que $x > 0$ e $y > 0$. Sea $\beta = \min\limits_i x_i/y_i$, y definamos $z = x - \beta y$. Como $x_i - \beta y_i \geq x_i - (x_i/y_i)y_i = 0$, se tiene que $z \geq 0$.

Dado que $Az = \rho(A)z$, si $z \neq 0$, entonces, $z > 0$. Pero, si $\beta = x_k/y_k$, entonces, la coordenada k-ésima de z es cero. El absurdo, proviene de suponer que $z \neq 0$, por lo tanto, $z = 0$ y $x = \beta y$. $\square$

Corolario 1.1.16. *Sea $A > 0$ y $x \in R^n$ tal que $x \geqslant 0$, $x \neq 0$ y $Ax = \lambda x$. Entonces, $\lambda = \rho(A)$ y $x > 0$.*

Demostración. Como $Ax > 0$, y por ende $x > 0$, se puede aplicar el Teorema 1.1.9. $\square$

Teorema 1.1.17. *Sea $A > 0$ tal que $\rho(A) = 1$. Sean $x, y \in R^n$ tales que $\langle x, y\rangle = 1$, $x, y > 0$, $Ax = x$ y $A^t y = y$. Entonces, $A^m \xrightarrow[n\to\infty]{} xy^t$.*

Demostración. Sea $L = xy^t = (x_i y_j)_{ij}$

1. $L^2 = L^m = L$: En efecto, $L^2 = xy^t xy^t = x\,\langle x,\, y\rangle\, y^t = xy^t = L$.
2. $AL = LA = L$: $Axy^t = xy^t = xy^t A$.
3. $(A - L)^m = A^m - L$: Razonemos por inducción sobre m. Para $m = 1$ trivial.
$$\begin{aligned}(A-L)^{k+1} &= (A-L)(A-L)^k = (A-L)(A^k - L)\\ &= A^{k+1} - AL - LA^k + L = A^{k+1} - L - L + L\\ &= A^{k+1} - L.\end{aligned}$$
4. $\sigma\,(A - L) \setminus \{0\} \subseteq \sigma\,(A) - \{1\}$ (En particular, $\rho(A - L) < 1$.): Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda \neq 0$ y $z \in \mathbb{C}^n$ $z \neq 0$ tales que $(A - L)z = \lambda z$. Como $L(L - A) = 0$, se tiene que
$$Lz = \frac{1}{\lambda} L(\lambda z) = \frac{1}{\lambda} L(L - A)z = 0.$$
Luego, $Az = \lambda z$ y por lo tanto $\lambda \in \sigma\,(A)$. Si $\lambda = 1$, entonces, $z = \mu x$ y por lo tanto $(A - L)x = x$. Pero $Ax = x$ y $Lx = xy^t x = x$, en consecuencia, $(A - L)x = 0 = x$, absurdo.
5. Como el único $\lambda \in \sigma\,(A)$ con $|\lambda| = 1$ es $\lambda = 1$, se tiene que $\rho(A - L) < 1$ y por ende $A^m - L = (A - L)^m \to 0$ cuando $m \to \infty$.

$\square$

Final de la demostración del Teorema de Perron. Sólo falta verificar que $\rho(A)$ es raíz simple del polinomio característico de A. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $\rho(A) = 1$. En cierta base de $\mathbb{C}^n$, es decir, para cierta $S \in \mathcal{G}l\,(n)$,
$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & J_r \end{pmatrix},$$
donde J_1 es el bloque de Jordan asociado al autovalor 1 de A. Entonces $J_1 = I_k + N_k$, donde I_k es la matriz identidad de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ y $N_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ es cierta matriz extrictamente triangular superior. Luego
$$J_1^m = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[m\to\infty]{} SLS^{-1},$$
pero SLS^{-1} tiene rango 1. En consecuencia, $J_1 = 1$. $\square$

Definición 1.1.18. Sea $A > 0$. El único vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax = \rho(A)x \ , \quad x > 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{tr} x = 1 \ ,$$

se llamará vector de Perron de A. △

1.2 Matrices de entradas no negativas.

El Teorema de Perron falla en general si $A \geqslant 0$ pero $A \not> 0$. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $A^m = A$ o I, según m sea impar o par. Además, $\sigma(A) = \{1, -1\}$. En este caso el autovector asociado al 1 es positivo estricto (es $\mathbf{e}$). Pero eso no pasa para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es más, todas las partes del Teorema (salvo una) pueden hacerse fallar tomando matrices diagonales de bloques adecuadas (Ejercicio). La que se salva es la siguiente:

Proposición 1.2.1. *Sea* $0 \leqslant A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Entonces*

1. $\rho(A) \in \sigma(A)$ *y*
2. *existe* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $0 \leqslant x \neq 0$ *y* $Ax = \rho(A)x$.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con todas sus entradas iguales a 1. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $A_\varepsilon = A + \varepsilon E > 0$. Además, por la Proposición 1.1.2, si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, entonces

$$\rho(A) \leq \rho(A_{\varepsilon'}) \leq \rho(A_\varepsilon).$$

Denominemos $x_\varepsilon > 0$ al vector de Perron de A_ε, normalizado para que $\operatorname{tr} x_\varepsilon = 1$. Como la bola de $\mathbb{R}^n$ (con la norma uno) es compacta, se puede tomar una sucesión decreciente $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tal que, si llamamos $A_n = A_{\varepsilon_n}$ y $x_n = x_{\varepsilon_n}$, entonces existe $0 \leqslant x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\rho(A_n) \geq \rho(A_{n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} M \geq \rho(A) \quad \text{y} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \ .$$

Observar que $\operatorname{tr} x = 1$, por lo que $x \neq 0$. Además, $A_n x_n = \rho(A_n) x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Mx$ y, como $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, entonces $A_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$. Por lo tanto deducimos que $Ax = Mx$, con $M \geq \rho(A)$. Luego $M = \rho(A)$ y $x \geqslant 0$ es un autovector. □

1.2.1 Matrices primitivas

Definición 1.2.2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geqslant 0$. Diremos que A es una matriz *primitiva* si existe un $m \geq 1$ tal que $A^m > 0$. △

Teorema 1.2.3. *Sea* $A \geqslant 0$ *una matriz primitiva. Entonces valen:*

1. $\rho(A) > 0$ *y* $\rho(A) \in \sigma(A)$.

2. *$\exists x > 0$ tal que $Ax = \rho(A)x$.*

3. *Si $y \geqslant 0$, $y \neq 0$ y $Ay = \lambda y$, entonces, $\lambda = \rho(A)$ e $y > 0$.*

4. *$\rho(A)$ es raíz simple del polinomio característico de A.*

5. *Si $\lambda \in \sigma(A)$ y $\lambda \neq \rho(A)$, entonces, $|\lambda| < \rho(A)$.*

6. *Si $\rho(A) = 1$, entonces, $A^m \to L = xy^t$ donde $x, y > 0$ son vectores tales que $\langle x, y\rangle = 1$, $Ax = x$ y $A^t y = y$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m > 0$. Por el Lema **??**,

$$\sigma(A^m) = \{\lambda^m : \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Por el Teorema 1.1.1 aplicado a A^m, concluimos que $\rho(A) = \rho(A^m)^{1/m} > 0$. Sea $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \rho(A)$ y $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda$. Entonces, por lo anterior, $\lambda^m = \rho(A^m)$ y $A^m x = \rho(A^m)x$. De ahí podemos deducir que algún múltiplo y de x cumple que $y > 0$, y por ello $\lambda = \rho(A)$ y $Ay = \rho(A)y$.

Además, cada $\lambda^m \in \sigma(A^m)$ posee una multiplicidad en el polinomio característico de A^m mayor o igual que la de λ en el de A (esto se ve fácil triangulando con el Teorema **??**). Por lo tanto $\rho(A)$ posee multiplicidad algebraica uno como autavalor de A. Razonamientos similares permiten concluir que $\rho(A)$ es el único autovalor de módulo máximo, y también la condición 3.

Sólo falta probar la condición 5: Supongamos sin pérdida de generalidad que $\rho(A) = 1$. Dado que en la demostración del Teorema de Perron no se usó que A fuera estrictamente positiva para obtenerlas, siguen valiendo las sigientes relaciones:

$$(A - L)^m = A^m - L \tag{1}$$
$$\sigma(A - L) \setminus \{0\} \subset \sigma(A) - \{1\} \tag{2}$$

De (2) se deduce que $\rho(A - L) < 1$, por lo tanto $(A - L)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, mientras que usando (1) se deduce que $A^m \to L$. $\square$

1.2.2 Matrices irreducibles

Definición 1.2.4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Decimos que:

1. A es *reducible* si existe $P \in \mathcal{U}(n)$, una matriz de permutación, tal que

$$PAP^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} \end{array},$$

   donde $1 \leq k \leq n - 1$ y $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Se dice que A es *irreducible* si no es reducible.

2. Decimos que el par $1 \leq p, q \leq n$, $p \neq q$, se *conecta* por A, si existen $p = i_0,\ i_1, \ldots, i_m = q$ en $\mathbb{I}_n$ tales que $a_{i_k i_{k+1}} \neq 0$ para $0 \leq k \leq m - 1$.

   Observar que se puede suponer que todos los i_k son distintos entre sí, porque si hubiera repeticiones, una parte de la sucesión se podría borrar, quedando otra sucesión (más corta) que seguiría conectando a p y q. Por lo tanto, puede suponerse que $m \leq n - 1$.

3. A es *fuertemente conexa* (FC) si todo par $p, q \in \mathbb{I}_n$, $p \neq q$, se conecta por A.

4. Recordar que, si $A \geqslant 0$, decimos que A es primitiva si existe $m \geq 0$ tal que $A^m > 0$. $\triangle$

Lema 1.2.5. *Sea $0 \leqslant A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dados $p \neq q \in \mathbb{I}_n$, son equivalentes:*

1. *El par p, q se conecta por A.*

2. *Existe $1 \leq m \leq n-1$ tal que $A^m{}_{p\,q} > 0$.*

Demostración. Basta notar que

$$A^m{}_{p\,q} = \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n} a_{p\,i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} q}$$

y que todos estos términos son no negativos. $\square$

Proposición 1.2.6. *Sea $0 \leqslant A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces son equivalentes:*

1. *A es irreducible.*

2. *A es FC.*

3. *$(I + A)^{n-1} > 0$.*

4. *$I + A$ es primitiva.*

En particular se tiene que, si A es primitiva, entonces es irreducible y FC.

Demostración. $2 \leftrightarrow 3$: Por el Lema anterior, es claro que 3 implica 2, porque conectar por A es lo mismo que conectar por $I + A$, dado que los elementos de la diagonal no se usan para las conexiones. Recíprocamente, por el teorema del binomio de Newton, se tiene que $(I+A)^{n-1}$ es combinación lineal, a coeficientes positivos, de las potencias A^k, $0 \leq k \leq n-1$. Luego, nuevamente por el Lema 1.2.5, si A es FC, todas las entradas de $(I + A)^{n-1}$ deben ser estrictamente positivas.

$1 \to 2$: Si A no es FC, existe un par $p, q \in \mathbb{I}_n$, $p \neq q$ que no se conecta por A. Sean

$$J_1 = \{ i \in \mathbb{I}_n \setminus \{p\} : A \text{ conecta al par } p, i \ \} \cup \{p\} \quad \text{ y } \quad J_2 = \mathbb{I}_n \setminus J_1 \ .$$

Entonces $p \in J_1$ y $q \in J_2$, que son, entonces, no vacíos. En particular, $a_{ij} = 0$ si $i \in J_1$ y $j \in J_2$ (sino el par p, j sería conectado por A). Si reordenamos $\mathbb{I}_n$ poniendo primero a J_2 y luego a J_1, encontraremos una matriz P dee permutación tal que

$$PAP^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} J_2 \\ J_1 \end{array} \end{array} .$$

$3 \to 4$: Obvio.

$4 \to 1$: Si A es reducible, sea P una matriz de permutación tal que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$P(I + A)^m P^{-1} = (I + PAP^{-1})^m = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \not> 0.$$

Por lo tanto $(I + A)^m \not> 0$, y $I + A$ no es primitiva. $\square$

Teorema 1.2.7 (Teorema de Perron-Frobenius). *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* **irreducible** *tal que $0 \leqslant A$. Entonces se verifica:*

1. *$\rho(A) > 0$ y $\rho(A) \in \sigma(A)$.*
2. *Existe $x > 0$ tal que $Ax = \rho(A)x$.*
3. *$\rho(A)$ es raíz simple del polinomio característico de A.*

Demostración. Notar que por ser A ireducible, no puede tener ninguna fila nula, porque pasándola al final de la matriz, quedaría triangular superior. Por lo tanto $\beta = \min_i \operatorname{tr} F_i(A) > 0$. Pero por el Lema 1.1.7, deducimos que $\rho(A) \geq \beta > 0$.

Por otra parte, por la Proposición 1.2.1, $\rho(A) \in \sigma(A)$. Además, $\sigma(I + A) = 1 + \sigma(A)$. Por lo tanto $\rho(I + A) = 1 + \rho(A)$ (porque el máximo está a la derecha). Como $I + A$ es primitiva, si x es al vector de Perron de $I + A$, entonces $x > 0$ y $Ax = \rho(A)x$. Por último, la forma de Jordan de A es la misma que la de $I + A$ (sumando unos en la diagonal), en la misma base. Por lo tanto la multiplicidad algebráica de $\rho(A)$ para A es uno (por serlo la de $1 + \rho(A)$ para A). □

Observación 1.2.8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ irreducible tal que $0 \leqslant A$. En este caso, $\rho(A)$ no es, necesariamente, el único autovector de módulo máximo. En efecto, tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que A es irreducible porque $I + A > 0$, pero $\sigma(A) = \{1, -1\}$.

Se demuestra que los otros autovectores de módulo máximo son $\omega_1\rho(A), \ldots, \omega_{k-1}\rho(A)$, donde los ω_i son las raíces k-ésimas de la unidad, para cierto $k \leq n$ (ver los libros de A. Benedek y R. Panzone [2] o de Horn y Johnson [5]).

Corolario 1.2.9. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ irreducible tal que $0 \leqslant A$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \leqslant x \neq 0$ y $Ax \geqslant \rho(A)x$. Entonces $x > 0$ y $Ax = \rho(A)x$.*

Demostración. Como A es irreducible, también A^t lo es. Por el Teorema de Perron-Frobenius existe un vector $y > 0$ tal que $A^t y = \rho(A)y$, o sea $y^t A = \rho(A)y^t$. Ahora bien, $Ax - \rho(A)x \geqslant 0$, pero si fuera $Ax - \rho(A)x \neq 0$, entonces, como $y^t > 0$,

$$0 \neq y^t(Ax - \rho(A)x) = y^t Ax - \rho(A)y^t x = \rho(A)y^t x - \rho(A)y^t x = 0.$$

En consecuencia, $Ax = \rho(A)x$. Que $x > 0$ se deduce del Teorema de Perron-Frobenius. □

Proposición 1.2.10. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que A es irreducible y $0 \leqslant B \leqslant A$. Si $B \neq A$, entonces $\rho(B) < \rho(A)$.*

Demostración. Sea, por la Proposición 1.2.1, $0 \neq x \geqslant 0$ tal que $Bx = \rho(B)x$. Si $\rho(B) = \rho(A)$, entonces, $Ax \geqslant Bx = \rho(B)x = \rho(A)x$. Por el Corolario 1.2.9, deducimos que $Ax = \rho(A)x$ y $x > 0$. Luego, como $0 \neq A - B \geqslant 0$, debería pasar que $(A - B)x \neq 0$, aunque sabemos que $Ax = \rho(A)x = \rho(B)x = Bx$. La contradicción provino de suponer que $\rho(B) = \rho(A)$. Luego $\rho(B) < \rho(A)$. □

Ejercicio 1.2.11. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant A$. Probar que:

1. A es primitiva si y sólo si A es irreducible y $\rho(A)$ es el único autovector de módulo máximo de A.

2. Si A es irreducible y semidefinida positiva (o sea que A es irreducible, $A \geq 0$ y $A \geqslant 0$), entonces A es primitiva. $\triangle$

Ejemplo 1.2.12. Sea $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el bloque de Jordan de tamaño $n \times n$ (con $n \geq 2$). Es decir que $J_n e_1 = 0$ y $J_n e_k = e_{k-1}$, para $2 \leq k \leq n$. Llamemos

$$A = J + J^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & .. & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & .. & .. & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & .. & .. & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & .. & .. & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(n) ,$$

que actúa en $\mathbb{R}^n$ por $Ax = (x_2 \, , \, x_1 + x_3 \, , \, x_2 + x_4 \, , \, \dots \, , \, x_{n-2} + x_n \, , \, x_{n-1})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

No es difícil verificar que A es irreducible, ya sea mostrando que $(I + A)^{n-1} > 0$, o viendo que satisface la definición de ser FC (con la diagonal de arriba si $p < q$ y con la de abajo si $q < p$). También puede probarse sin dificultad que $A \in \mathcal{G}l(n)$ si y sólo si n es par. Esta matriz es muy famosa y es, tal ves, la primera matriz a la que se le calcularon todos los autovalores y autovectores. Esto lo hizo Lagrange en 1759, para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado al problema de la cuerda que vibra. Sus autovalores son, en orden decreciente,

$$\mu_k(A) = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \ , \quad 1 \leq k \leq n \ ,$$

por lo que $\|A\| = \rho(A) = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}$. Notar que $\mu_n(A) = -\mu_1(A)$, luego A no es primitiva. Además, si $n + 1 = 2k$ (es decir, si n es impar), entonces $\mu_k(A) = 2 \cos \pi/2 = 0$, lo que prueba lo antedicho. Los autovectores asociados son, respectivamente,

$$x_k = \left(\sin \frac{k\pi}{n+1} \ , \ \sin \frac{2k\pi}{n+1} \ , \ \dots \ , \ \sin \frac{nk\pi}{n+1} \right) , \quad 1 \leq k \leq n \ .$$

Notar que el único con entradas positivas es x_1, porque $\dfrac{n\pi}{n+1}$ no llegó aún a π. La verificación de lo anterior es tediosa pero elemental. Se basa en las fórmulas del seno y coseno de sumas y restas, y en que $\sin(\pi - t) = \sin t$ y $\cos(\pi - t) = -\cos t$.

Veamos que $Ax_1 = \mu_1(A)x_1$, lo que nos dirá que $\rho(A) = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}$ y que x_1 es el vector de Perron-Frobenius de A. En efecto, se tienen dos casos: para las entradas 1 y n:

$$\begin{aligned} A(x_1)_1 &= \sin \tfrac{2\pi}{n+1} = 2 \cos \tfrac{\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{\pi}{n+1} \qquad \text{y} \\ A(x_1)_n &= \sin \tfrac{(n-1)\pi}{n+1} = \cos \tfrac{\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{n\pi}{n+1} \ - \ \cos \tfrac{n\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{\pi}{n+1} \\ &= 2 \cos \tfrac{\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{n\pi}{n+1} \ . \end{aligned}$$

Para las entradas $1 \le k \le n-1$, $A(x_1)_k = (x_1)_{k+1} + (x_1)_{k-1}$. Pero

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{(1+k)\pi}{n+1} &= \cos \tfrac{\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{k\pi}{n+1} + \cos \tfrac{k\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{\pi}{n+1} \quad \text{ y} \\ \sin \tfrac{(k-1)\pi}{n+1} &= \cos \tfrac{\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{k\pi}{n+1} - \cos \tfrac{k\pi}{n+1} \ \sin \tfrac{\pi}{n+1} \ . \end{aligned}$$

Sumando se obtiene la fórmula buscada. Los números $c_m = 2\cos(\pi/m)$ para $m \ge 3$, que aparececn como normas de las matrices anteriores, son muy importantes en varias ramas de la matemática. Por ejemplo, aparecen en la teoría del índice de V. Jones. Tienen la siguiente particularidad (ver [4]): Sea $\mathcal{N}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}$ el conjuntos de normas de matrices de cualquier tamaño (incluso rectangulares) con entradas en $\mathbb{Z}$. Entonces

$$\mathcal{N}(\mathbb{Z}) \cap (0,2) = \{c_m : m \ge 3\}.$$

Notar que realizamos todos estos valores con las matrices cuadradas anteriores. Sin embargo, se los puede realizar con matrices más pequeñas. En efecto, si $n = 2k$, sea $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{Z})$ dada por $B = I_k + J_k$. Entonces la matriz

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(n)$$

difiere de la matriz A del principio sólo en una reordenación de la base canónica (poniendo los pares primero y los impares al final). Es decir que existe una matriz P de permutación tal que $PAP^{-1} = \widehat{B}$. Por lo tanto

$$\|B\| = s_1(B) = \mu_1(\widehat{B}) = \|\widehat{B}\| = \|A\| = c_{n+1}.$$

Por eso era que $-\mu_{n-j+1}(A) = \mu_j(A) = s_j(B)$, para $1 \le j \le k$. Algo similar puede hacecrse si $n = 2k+1$, tomando $B' = (B, e_k) \in \mathcal{M}_{k,k+1}(\mathbb{Z})$. $\triangle$

Referencias

[1] R. Bhatia; *Matrix Analysis*, Springer, Estados Unidos, 1997.

[2] A. Benedek y R. Panzone; *La matriz positiva y su espectro*, Informe Técnico interno No.86, INMABB, Bahía Blanca, 2003.

[3] M. C. González; *Relaciones de Mayorización para el Producto de Hadamard*, Tesis de licenciatura, Depto. Mat. FCEA-UNC, Neuquén, 2003.

[4] F. M. Goodman, P. de la Harpe and V. F. R. Jones, Coxeter graphs and towers of algebras. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 14. Springer-Verlag, New York, 1989.

[5] R. Horn- C. Johnson; *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Estados Unidos, 1985.

[6] R. Horn- C. Johnson; *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Estados Unidos, 1991.

[7] P. D. Lax, Linear Algebra, Springer Verlag, 1998.

[8] L. Mirsky, An introduction to Linear Algebra, Clarendon Press, Oxford, 1963.

[9] M. L. Metha, Matrix Theory, 2a Ed., Hindustan Publishing Co. 1989.

[10] R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, 2a Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

[11] W. F. Donoghue, Jr., Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[12] A. W. Marshall y I. Olkin, Inequalities: Theory of Mayorization and its Applications, Academic Press, New York, 1979.