Introducción a la teoría de operads.

María O. RONCO [1]

Introducción. Las operads son objetos matemáticos que modelizan distintos tipos de estructuras. Los principales ejemplos de operads son algebraicos (álgebras asociativas, conmutativas, de Lie, de Poisson, etc.) y topológicos (operad de pequeños cubos, espacios A_∞, etc.).
La teoría de operads se desarrolló a principios de los años '70 en problemas de topología algebraica relacionados con espacios de lazos. Los primeros trabajos sobre el tema se deben a J. Adams y S. Mac Lane (cf. [ML1]), J. M. Boardman y R. M. Vogt (cf. [BV]), J. D. Stasheff (cf. [St1]), J. P. May (cf. [Ma1]), R. J. Milgram (cf. [Mi]) y J. Beck (cf. [Be]). Luego de algunos años, la noción de operad volvió a concitar interés a partir de sus aplicaciones en cohomología de grafos, dualidad de Koszul, teoría de representaciones, combinatoria, espacios de moduli, teoría de representaciones, teoría de cuerdas y teoría conforme de campos.
Si bien la definición de operad se debe a P. May (cf. [Ma1]), en 1994 V. A. Ginzburg y M. M. Kapranov (cf. [GK]) desarrollaron en forma completa la teoría de operades algebraicas, describiendo las nociones de álgebra envolvente, módulos , operad dual y teoría de homología asociados a una operad algebraica, con especial interés en operads de Koszul.
El propósito de estas notas es:

1. Dar la definición de operad, e introducir algunos ejemplos como las operads asociadas a teoría de álgebras asociativas y las álgebras conmutativas.

2. Describir la operad de espacios A_∞, debida a J. D. Stasheff (cf. [St1]).

3. Dar un panorama sobre las operades algebraicas asociadas a los polítopos de Stasheff. Mostrar otros ejemplos de operades, que surgen a partir de temas de física y de teoría de grafos.

[1] Depto. de Matemática, CBC, Univ. de Buenos Aires. Pab. III Ciudad Universitaria (1428) Buenos Aires, Argentina. E-mail : mronco@mate.dm.uba.ar

1 Operads en una categoría monoidal simétrica

1.1 Operads

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal simétrica con producto $\otimes$ y objeto unidad κ.
Los lectores no familiarizados con teoría de categorías pueden suponer que $(\mathcal{C}, \otimes)$ es una de las siguientes categorías:

1. La categoría de conjuntos finitos $\mathcal{FS}et$, con el producto de conjuntos como operación monoidal, donde κ es el conjunto con un único elemento.

2. Dado un cuerpo k, la categoría $\mathcal{C} = Vect_k$ es la categoría cuyos objetos son los k-espacios vectoriales y cuyos morfismos son las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. La operación monoidal es el producto tensorial $\otimes_k$, y κ es el cuerpo k, considerado como k-espacio vectorial de dimensión uno.

3. La categoría $GVect_k$ que tiene como objetos a los k-espacios vectoriales graduados, y como morfismos a las transformaciones lineales de grado 0, con el producto tensorial sobre k como operación monoidal. En este caso, el objeto unidad está dado por $\kappa_0 = k$ y $\kappa_n = 0$, para $n \geq 1$.

4. La categoría $GDVect_k$ cuyos objetos son los pares $(V = \oplus_{n\geq 0} V_n, d)$, donde V es un espacio vectorial graduado y $d : V \to V$ es una transformación lineal de grado -1 tal que $d \circ d = 0$. La operación $\otimes$ está definida en la siguiente forma:

$$(V, d_V) \otimes (W, d_W) := (V \otimes_k W := \oplus_{n\geq 0}(\oplus_{i=0}^n V_i \otimes W_{n-i}), d_{V\otimes_k W}),$$

   donde $d_{V\otimes_k W}(v \otimes_k w) := d_V(v) \otimes_k w + (-1)^{i-1} v \otimes_k d_W(w)$, para $v \in V_i$ y $w \in W_{n-i}$. El objeto unidad es el espacio vectorial graduado κ del ejemplo anterior con el morfismo trivial como diferencial.

5. La categoría Top que tiene como objetos a los espacios topológicos y como morfismos a las funciones continuas entre espacios topológicos, la operación monoidal en este caso es el producto de espacios y el objeto unidad es espacio topológico formado por un solo punto.

6. La categoría Top^* cuyos objetos son los pares (X, x_0), donde X es un espacio topológico y x_0 es un punto de X, con

$$Hom_{Top^*}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y \text{ continua } : f(x_0) = y_0\}.$$

En este caso, el espacio topológico de $(X, x_0) \otimes (Y, y_0)$ es el espacio cociente del producto $X \times Y$ por la relación de equivalencia que identifica todos los puntos de la forma (x_0, y) y de la forma (x, y_0), con $x \in X$ e $y \in Y$, con el punto (x_0, y_0). En ese caso, el punto elegido es la clase de equivalencia de (x_0, y_0). El objeto unidad es el espacio de un solo punto $(\{x_0\}, x_0)$.

Definición 1 *Una operad $\mathcal{P}$ en una categoría monoidal simétrica $(\mathcal{C}, \otimes)$ es una familia de objetos $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$ de $\mathcal{C}$ provistos de:*

1. *Una acción a izquierda del grupo simétrico S_n sobre $\mathcal{P}(n)$, para todo $n \geq 1$.*
2. *Un morfismo unidad $\eta : \kappa \to \mathcal{P}(1)$.*
3. *Para toda familia de números naturales $n, m_1, \ldots, m_n$, un morfismo*

   $$\gamma_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(m_n) \longrightarrow \mathcal{P}(m_1 + \cdots + m_n) \text{ en } \mathcal{C}.$$

que verifican las siguientes condiciones:

a) (Asociatividad de los operadores $\gamma_{\mathcal{P}}$) Dados números naturales $n, m_1, \ldots, m_n$, $r_1^1, \ldots, r_{m_1}^1, \ldots, r_1^n, \ldots, r_{m_n}^n$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{P}(m_j) \otimes \bigotimes_{k=1}^n \bigotimes_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k) \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{P}} \otimes Id"] \arrow[dd, "Id \otimes \tau"'] & \mathcal{P}(m) \otimes \bigotimes_{k=1}^n \bigotimes_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k) \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"] \\
 & \mathcal{P}(r) \\
\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{k=1}^n (\mathcal{P}(m_k) \otimes \bigotimes_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k)) \arrow[r, "Id \otimes \bigotimes \gamma_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{P}(r^k), \arrow[u, "\gamma_{\mathcal{P}}"']
\end{tikzcd}$$

donde

$$\tau((f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \otimes (g_1^1 \otimes \cdots \otimes g_{m_n}^n)) := (f_1 \otimes g_1^1 \otimes \cdots \otimes g_{m_1}^1) \otimes \cdots \otimes (f_n \otimes g_1^n \otimes \cdots \otimes g_{m_n}^n),$$

$m := \sum_{i=1}^n m_i$, $r^k := \sum_{i=1}^{m_k} r_i^k$ y $r := \sum_{k=1}^n r^k$:

b) (Identidad) Las composiciones $\gamma_{\mathcal{P}} \circ (Id \otimes \eta^{\otimes n})$ y $\gamma_{\mathcal{P}} \circ (\eta \otimes Id)$ son los isomorfismos naturales de $\mathcal{P}(n) \otimes \kappa^{\otimes n} \to \mathcal{P}(n)$ y $\kappa \otimes \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n)$, respectivamente.

c) (Compatibilidad de $\gamma_{\mathcal{P}}$ con la acción de S_n) Sean $f \in \mathcal{P}(n)$, $g_1 \in \mathcal{P}(m_1), \ldots,$ $g_n \in \mathcal{P}(m_n)$.

(i) Para toda permutación $\sigma \in S_n$, se tiene que $\gamma_{\mathcal{P}}((\sigma \cdot f) \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) =$

$$\sigma(m_1, \ldots, m_n) \cdot \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)}),$$

donde $\sigma(m_1,\ldots,m_n) \in S_{m_1+\cdots+m_n}$ *es la permutación:*

$$\sigma(m_1,\ldots,m_n)(i) := m_1+\cdots+m_{k-1}+l, \quad \text{para} \quad i = m_{\sigma(1)}+\cdots+m_{\sigma(k-1)}+l,$$

con $1 \leq l \leq m_{\sigma(k)}$.

(ii) Dadas permutaciones $\tau_i \in S_{m_i}$*, para* $1 \leq i \leq n$*, vale que:*

$$(\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \cdot \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = \gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes \tau_1 \cdot g_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n \cdot g_n),$$

donde $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \in S_{m_1+\cdots+m_n}$ *es la concatenación de las* τ_i*'s, esto es:*

$$\tau_1 \times \cdots \times \tau_n(i) := \tau_k(i - m_1 - \cdots - m_{k-1}) + m_1 + \cdots + m_{k-1},$$

para $m_1+\cdots+m_{k-1} < i \leq m_1+\cdots+m_k$.

Si pensamos que $\mathcal{P}$ es una teoría dada por operaciones y relaciones, observamos que:

1. El objeto $\mathcal{P}(n)$ corresponde a las operaciones n-arias de la teoría. Dadas variables $x_1,\ldots,x_n$ y una operación $f \in \mathcal{P}(n)$, tiene sentido evaluar f en las variables $x_1,\ldots,x_n$ tomadas en cualquier orden, y el resultado sigue siendo una operación para la teoría $\mathcal{P}$. Para una permutación $\sigma \in S_n$, la operación $\sigma \cdot f \in \mathcal{P}(n)$ aplicada en $x_1,\ldots,x_n$ es:

   $$(\sigma \cdot f)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

   Por ejemplo, si $\mathcal{P}$ es la operad Ass asociada a las álgebras asociativas, el producto asociativo μ determina dos operaciones en $Ass(2)$:

   $\mu(x_1,x_2)$ y $((2,1)\cdot\mu)(x_1,x_2) = \mu(x_2,x_1)$, donde $(2,1) \in S_2$ es la trasposición de 1 y 2.

   En cambio, si miramos la operad Com asociada a las álgebras asociativas y conmutativas, el producto determina una sola operación en $Com(2)$, dada por $\mu(x_1,x_2) = ((2,1)\cdot\mu)(x_1,x_2) = \mu(x_2,x_1)$.

2. El morfismo unidad $\eta : \kappa \to \mathcal{P}(1)$ determina la existencia de la operación identidad en $\mathcal{P}(1)$. Por ejemplo, en la operad asociativa Ass, la relación de asociatividad se escribe en $Ass(3)$ como:

   $$\gamma_{Ass}(\mu \otimes 1 \otimes \mu) = \gamma_{Ass}(\mu \otimes \mu \otimes 1),$$

   donde $1 \in Ass(1)$ es el la imagen por η de $1_k \in k = \kappa$.

3. Las operaciones $\gamma_\mathcal{P}$ corresponden a la composición de operaciones. Si tenemos variables $x_1, \ldots, x_{m_1}, \ldots, x_{m_1+\cdots+m_n}$, y operaciones $g_i \in \mathcal{P}(m_i)$ y $f \in \mathcal{P}(n)$, entonces hacer $f(g_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, g_n(x_{m_1+\cdots+m_{n-1}+1}, \ldots, x_{m_1+\cdots+m_n}))$ es una operación en $m_1 + \cdots + m_n$ variables.

En este contexto, las condiciones $a)$, $b)$ y $c)$ son fáciles de interpretar. La condición $a)$ por ejemplo indica que la composición de operaciones es asociativa, o sea que:

$$\begin{gathered}\gamma_\mathcal{P}\big(f \otimes \gamma_\mathcal{P}(g_1 \otimes h_1^1 \otimes \ldots h_{m_1}^1) \otimes \cdots \otimes \gamma_\mathcal{P}(g_n \otimes h_1^n \otimes \cdots \otimes h_{m_n}^n)\big) = \\ f\big(g_1(h_1^1, \ldots, h_{m_1}^1), \ldots, g_n(h_1^n, \ldots, h_{m_n}^n)\big) = \\ \gamma_\mathcal{P}\big(\gamma_\mathcal{P}(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) \otimes h_1^1 \otimes \cdots \otimes h_{m_n}^n)\big).\end{gathered}$$

La condición $b)$ establece que:

$$\gamma_\mathcal{P}(f \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id) = f(Id, \ldots, Id) = f,$$

y que

$$\gamma_\mathcal{P}(Id \otimes f) = Id(f) = f.$$

En tanto que $c)$ afirma que, dada una permutación σ, resulta:

$$\begin{gathered}f\big(g_{\sigma(1)}(x_{M_{\sigma(1)-1}+1}, \ldots, x_{M_{\sigma(1)}}), \ldots, g_{\sigma(n)}(x_{M_{\sigma(n)-1}+1}, \ldots, x_{M_{\sigma(n)}})\big) = \\ f \circ (g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)})(x_{M_{\sigma(1)-1}+1}, \ldots, x_{M_{\sigma(n)}}) = \\ \sigma(m_1, \ldots, m_n) \cdot (f(g_1, \ldots, g_n))(x_1, \ldots, x_{M_n}),\end{gathered}$$

donde $M_l := m_1 + \cdots + m_l$, para $0 \leq l \leq n$. Dadas permutaciones $\tau_1, \ldots, \tau_n$, la condición (ii) afirma que:

$$\begin{gathered}f\big((g_1(x_{\tau_1(1)}, \ldots, x_{\tau_1(m_n)}), \ldots, g_n(x_{\tau_n(1)+M_{n-1}}, \ldots, x_{\tau_n(m-n)+M_{n-1}})\big) = \\ f(g_1, \ldots, g_n)(x_{\tau_1(1)}, \ldots, x_{\tau_n(m_n)+M_{n-1}}) = \\ (\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \cdot f(g_1, \ldots, g_n)(x_1, \ldots, x_{M_n}).\end{gathered}$$

Ejemplos. $a)$ Dado un cuerpo k, la operad Ass que describe las álgebras asociativas sobre k es la operad en la categoría $Vect_k$ dada por:

1. $Ass(n)$ es el k-espacio vectorial generado por todas las operaciones posibles en n variables. Como un álgebra asociativa está dada por un producto binario asociativo, las únicas operaciones en n variables $x_1, \ldots, x_n$ son las combinaciones

lineales de los productos $x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}$, para una permutación cualquiera $\sigma \in S_n$. Luego, el espacio vectorial $Ass(n)$ está generado por $n!$ operaciones, una por cada permutación de S_n. Entonces $Ass(n)$ es el espacio vectorial $k[S_n]$, con $\delta(x_1, \ldots, x_n) = x_{\delta(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\delta(n)}$.

Para calcular la acción de S_n en $Ass(n)$, recordemos que:

$$\sigma \cdot \delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(\delta(1))} \cdot \cdots \cdot x_{\sigma(\delta(n))} = (\sigma\delta)(x_1, \ldots, x_n).$$

Luego, la acción de S_n sobre $Ass(n)$ coincide con el producto del álgebra de grupo. O sea, que $Ass(n)$ es la representación regular de S_n.

2. El objeto κ en $Vect_k$ es el mismo cuerpo k, y $Ass(1) = k[S_1] = k$, luego $\eta = Id_k$.

3. Sean $\lambda \in Ass(n)$ y $\delta_i \in Ass(m_i)$ permutaciones, con $1 \leq i \leq n$. Recordemos que $\gamma_{Ass}(\lambda \otimes \delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_n)$ es la composición de operaciones. Como

$$\begin{gathered} \lambda(\delta_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \delta_n(x_{M_{n-1}+1}, \ldots, x_{M_n})) = \\ \lambda(x_{\delta_1(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\delta_1(m_n)}, \ldots, x_{\delta_n(1)+M_{n-1}} \cdot \ldots \cdot x_{\delta_n(m_n)+M_{n-1}}) = \\ x_{\delta_{\lambda(1)}(1)+M_{\lambda(1)-1}} \cdot \ldots \cdot x_{\delta_{\lambda(1)}(m_{\lambda(1)})+M_{\lambda(1)-1}} \cdot \ldots \cdot x_{\delta_{\lambda(n)}(m_{\lambda(n)})+M_{\lambda(n)-1}} = \\ (\delta_1 \times \cdots \times \delta_n) \cdot \lambda(m_1, \ldots, m_n)(x_1, \ldots, x_{M_n}). \end{gathered}$$

Luego, $\gamma_{Ass}(\lambda \otimes \delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_n) = (\delta_1 \times \cdots \times \delta_n) \cdot \lambda(m_1, \ldots, m_n)$.

Ejercicio. Probar que con esta descripción Ass es una operad.

b) La operad Com que describe las álgebras asociativas y conmutativas sobre k es la operad definida en la categoría $Vect_k$ tal que $Com(n) = k$ es la representación trivial del grupo S_n. En efecto, dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$ la única operación posible en Com es el producto $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, ya que para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, resulta:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(1)}.$$

Notamos $1_n \in Com(n) = k$ a esta operación, que identificamos con la unidad de k. Nuevamente, es inmediato verificar que $\eta = Id_k$. Calcular la composición también resulta simple, tenemos que:

$$\gamma_{Com}(1_n \otimes 1_{m_1} \otimes \cdots \otimes 1_{m_n}) = 1_{m_1+\cdots+m_n}.$$

c) Consideremos ahora las álgebras de Lie sobre k, la operad asociada *Lie* es también una operad en la categoría $Vect_k$. Un álgebra de Lie sobre k es un k-espacio vectorial $\mathcal{G}$, munido de una aplicación bilineal $[-,-] : \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ que verifica las siguientes igualdades:

1. $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$,
2. (Identidad de Jacobi) $[x_1, [x_2, x_3]] = [[x_1, x_2], x_3] - [[x_1, x_3], x_2]$,

para todos x_1, x_2 y x_3 en $\mathcal{G}$.

Tenemos que $Lie(1) = k$ y $\eta = Id_k$. En dos variables, existe una sola operación $[x_1, x_2]$, con $[x_2, x_1] = -[x_1, x_2]$. Luego, $Lie(2) = k$ es la signatura de S_2. Los restantes espacios $Lie(n)$ son más complicados de calcular, en $Lie(3)$ por ejemplo tenemos dos tipos de operaciones: $[x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]]$ y $[[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}]$, para cada $\sigma \in S_3$. Esto implica que $Lie(3)$ es el cociente de $k[S_3] \oplus k[S_3]$ por todas las relaciones entre corchetes que pueden obtenerse a partir de la antisimetría y de la identidad de Jacobi.

En general, la representación $Lie(n)$ de S_n está dada por el subespacio de dimensión n del álgebra de Lie libre en n elementos, para una mejor descripción de *Lie* se sugiere consultar [Kl].

d) **Operad de pequeños cubos** (cf. [BV] , [Ma1] y [Vo1]) Dado un entero $k \geq 1$, sea $[0,1]^k$ el cubo unitario en $\mathbb{R}^k$. La *operad de pequeños k cubos* es la operad $\mathcal{Q}_k$ en la categoría Top, dada por:

1. $\mathcal{Q}_k(n)$ es el espacio de n-uplas ordenadas de subcubos $C_1, \ldots, C_n$ de dimensión k de $[0,1]^k$ tales que:

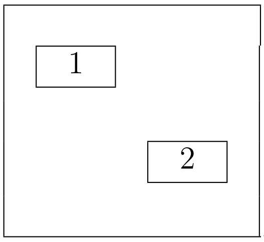
   (*i*) Los lados de C_i son paralelos a los lados de $[0,1]^k$.

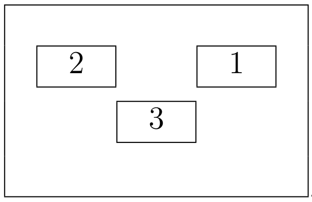
   (*ii*) La intersección del interior de C_i y el interior de C_j es vacía , para $i \neq j$.

2. Sean $\mathbb{C} = (C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{Q}_k(n)$ y $\mathbb{D}^i = (D_1^i, \ldots, D_{m_i}^i) \in \mathcal{Q}_k(m_i)$, con

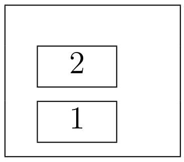
   $1 \leq i \leq n$. El elemento $\gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{D}^n) \in \mathcal{Q}_k(m_1 + \cdots + m_n)$ se obtiene reemplazando el subcubo C_i por la configuración $\mathbb{D}^i$.

Por ejemplo, si

$\mathbb{C} =$ 

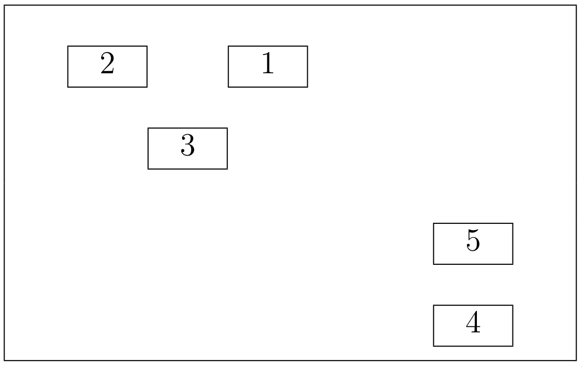
, $\mathbb{D}^1 =$ 

, y

$\mathbb{D}^2 =$ 

,

tenemos que $\gamma_{\mathcal{Q}_2}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}^1 \otimes \mathbb{D}^2) \in \mathcal{Q}_2(5)$ es la configuración



3. La acción de S_n sobre $\mathcal{Q}_k(n)$ está dada por la permutación en el orden de los subcubos:
$$\sigma \cdot (C_1, \ldots, C_n) := (C_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, C_{\sigma^{-1}(n)}).$$
4. El elemento $1 \in \mathcal{Q}_k(1)$ es la configuración que tiene como único subcubo a todo $[0,1]^k$.

En realidad, una configuración $\mathbb{C} \in \mathcal{Q}_k(n)$ queda determinada por las coordenadas del centro de cada C_i y su radio. O sea, que $\mathcal{Q}_k(n)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{(k+1)n}$.

Definición 2 *Dadas operads $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ en una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo de operads $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ es una colección de morfismos $\varphi(n) : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{Q}(n)$ en $\mathcal{C}$ tal que:*

1. $\varphi(n)(\sigma \cdot f) = \sigma \cdot \varphi(n)(f)$, para todo $\sigma \in S_n$ y $f \in \mathcal{P}(n)$.

2. $\varphi(1)(1_{\mathcal{P}}) = 1_{\mathcal{Q}}$

3. $\varphi(m_1 + \cdots + m_n)(\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)) = \gamma_{\mathcal{Q}}(\varphi(n)(f) \otimes \varphi(m_1)(g_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(m_n)(g_n))$*, para todos* $f \in \mathcal{P}(n)$*,* $g_i \in \mathcal{P}(m_i)$*, con* $1 \leq i \leq n$*.*

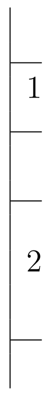
Ejemplos.

1. La proyección $k[S_n] \rightarrow k$ dada por $\sigma \mapsto 1$, para todo $\sigma \in S_n$, induce un morfismo de operads $Ass \longrightarrow Com$.

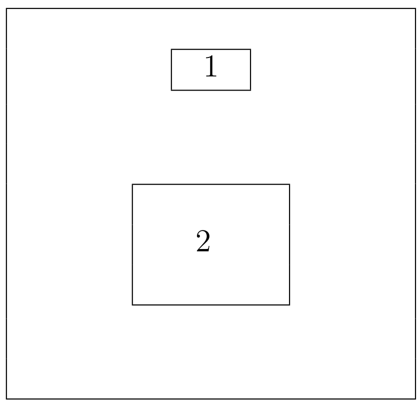
2. El Teorema de Poincaré-Birkhof-Witt (cf. [Ta]) implica que la representación $Lie(n)$ es un sumando directo de la representación regular de S_n. Esto induce un morfismo de $k[S_n]$-módulos $Lie(n) \hookrightarrow k[S_n]$, que determina un morfismo de operads $Lie \longrightarrow Ass$.

3. Dado $k \geq 1$, existe un morfismo natural de operads $q_k : \mathcal{Q}_k \longrightarrow \mathcal{Q}_{k+1}$ que consiste en enviar la configuración $(C_1, \ldots, C_n)$ en $(C_1 \times [\frac{1}{2} - r_1, \frac{1}{2} + r_1], \ldots, C_n \times [\frac{1}{2} - r_n, \frac{1}{2} + r_n])$, donde r_i es el radio de C_i.

   Por ejemplo



se transforma en



1.2 Algebras sobre una operad

Definición 3 *Sea* $\mathcal{P}$ *una operad en la categoría* $\mathcal{C}$*. Una* $\mathcal{P}$*-álgebra es un objeto* A *de* $\mathcal{C}$*, provisto de morfismos* $\rho_n : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A$*, donde* $A^{\otimes n}$ *denota el producto de* A *consigo mismo* n *veces, que verifican las siguientes relaciones:*

a) (Compatibilidad con $\gamma_{\mathcal{P}}$) Dados $f \in \mathcal{P}(n)$, $g_1 \in \mathcal{P}(m_1)$, $\ldots$, $g_n \in \mathcal{P}(m_n)$ y elementos $a_1^1, \ldots, a_{m_1}^1, \ldots, a_1^n, \ldots, a_{m_n}^n$ de A, se tiene que:

$$\rho_{m_1+\cdots+m_n}(\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) \otimes a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_{m_n}^n) =$$
$$\rho_n(f \otimes \rho_{m_1}(g_1 \otimes a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_{m_1}^1) \otimes \cdots \otimes \rho_{m_n}(g_n \otimes a_1^n \otimes \cdots \otimes a_{m_n}^n)).$$

b) La composición $\rho_1 \circ (\eta \otimes Id_A)$ es el isomorfismo canónico de $\kappa \otimes A$ en A.

c) Dada una permutación $\sigma \in S_n$, se tiene que:

$$\rho_n((\sigma \cdot f) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \rho_n(f \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}).$$

Definición 4 *Dadas dos $\mathcal{P}$-álgebras A y B, un morfismo de $\mathcal{P}$-álgebras es un morfismo ϕ en $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $\phi(\rho_n^A(f \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)) = \rho_n^B(f \otimes \phi(a_1) \otimes \cdots \otimes \phi(a_n))$.*

Ejemplo. Dado un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$, consideramos el espacio de lazos $\Omega(X, x_0) := \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X \text{ continua } : \gamma(0) = x_0 = \gamma(1)\}$ con la topología compacto abierta (si X es conexo por arcos, $\Omega(X, x_0)$ no depende del punto x_0 elegido). Dado $n \geq 1$, definimos la función continua

$$\rho_n : \mathcal{Q}_1(n) \times \Omega(X, x_0)^n \longrightarrow \Omega(X, x_0),$$

$$\rho_n((C_1, \ldots, C_n), \gamma_1, \ldots, \gamma_n)(t) := \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad t \notin \bigcup_{i=1}^n C_i \\ \gamma_i\left(\frac{t - t_0^i}{t_1^i - t_0^i}\right) & \text{si} \quad t \in C_i, \end{cases}$$

donde C_i es el intervalo $[t_0^i, t_1^i]$, para $1 \leq i \leq n$. Es fácil ver que ρ_n está bien definida y es continua. Los morfismos ρ_n definen una estructura de $\mathcal{Q}_1$-álgebra sobre $\Omega(X, x_0)$.

Ejercicios.

1. Probar que la categoría de k-álgebras asociativas es equivalente a la categoría de las Ass-álgebras en $Vect_k$, y que la categoría de k-álgebra asociativas y conmutativas es equivalente a la categoría de Com-álgebras.

2. Sean X un espacio topológico y x_0 un punto de X. Definimos en forma recurrente $\Omega^1(X) := \Omega(X, x_0)$ y $\Omega^n(X) := \Omega(\Omega^{n-1}(X), x_0^{n-1})$, donde x_0^n es la función constante de $\Omega(\Omega^{n-1}(X), x_0^{n-1})$. Probar que $\Omega^n(X)$ es una $\mathcal{Q}_n$-álgebra, para $n \geq 1$.

Observación 5 *Un morfismo de operads $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ induce un funtor $F_\varphi : \mathcal{Q} - alg \longrightarrow \mathcal{P} - alg$, usando la composición:*

$$\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \quad \overset{\varphi(n)\otimes Id}{\longrightarrow} \quad \mathcal{Q}(n) \otimes A^{\otimes n} \quad \overset{\rho_n}{\longrightarrow} \quad A \quad ,$$

donde $\mathcal{Q} - alg$ (respectivamente, $\mathcal{P} - alg$) denota la categoría de $\mathcal{Q}$-álgebras (respectivamente, de $\mathcal{P}$-álgebras).

Por ejemplo, el morfismo de operads $Ass \longrightarrow Com$ induce el funtor de inclusión $Com - alg \longrightarrow Ass - alg$ para todo cuerpo fijo k. En el otro ejemplo, tenemos que el morfismo de operades $Lie \longrightarrow Ass$ induce el funtor de la categoría de álgebras asociativas en la categoría de álgebras de Lie que a un álgebra $(A, \cdot)$ le asocia el álgebra de Lie cuyo espacio vectorial subyacente es A, provisto del corchete de Lie definido por:

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a, \quad \text{para} \quad a, b \in A.$$

Ejercicios.

1. Sea $\mathcal{P}$ una operad en la categoría $Vect_k$ y sea $\mathcal{O} : \mathcal{P} - alg \longrightarrow Vect_k$ el funtor tal que $\mathcal{O}(A)$ es el espacio vectorial subyacente de la $\mathcal{P}$-álgebra A. El funtor $\mathcal{O}$ se llama a menudo *funtor de olvido*, porque consiste en olvidar parte de la estructura de A. Probar que el funtor $\mathcal{O}$ admite un funtor adjunto a izquierda $\mathcal{L}_\mathcal{P} : Vect_k \longrightarrow \mathcal{P} - alg$, tal que

$$\mathcal{L}_\mathcal{P}(V) = \oplus_{n\geq 1} V^{\otimes n} \otimes_{k[S_n]} \mathcal{P}(n), \quad \text{para todo espacio vectorial} \quad V,$$

   donde la acción a derecha de S_n en $V^{\otimes n}$ está dada por $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot \sigma := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$.

2. Recordemos que un álgebra de Poisson sobre k es un espacio vectorial A provisto de dos operaciones binarias $\cdot$ y $[-, -]$ tales que:

   a) $(A, \cdot)$ es una k-álgebra asociativa y conmutativa, y $(A, [-, -])$ es un álgebra de Lie sobre k.

   b) las operaciones $\cdot$ y $[-, -]$ verifican la siguiente relación:

$$[a \cdot b, c] = a \cdot [b, c] + [a, c] \cdot b, \quad \text{para} \quad a, b, c \in A.$$

   Probar que:

(i) Si k es un cuerpo de característica 0 y $Poiss$ es la operad asociada a las álgebras de Poisson, entonces $Poiss(n)$ es la representación regular de S_n, para $n \geq 1$.

(ii) Describir los morfismos γ_{Poiss}.

Definición 6 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal (no necesariamente simétrica). Una operad no-simétrica, o no-Σ operad, en $\mathcal{C}$ es una colección de objetos $\mathcal{P}'(n)$ de $\mathcal{C}$, provisto de una familia de morfismos*

$$\delta_{\mathcal{P}'} : \mathcal{P}'(n) \otimes \mathcal{P}'(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}'(m_n) \longrightarrow \mathcal{P}'(m_1 + \cdots + m_n),$$

y un morfismo $\eta : \kappa \to \mathcal{P}'(1)$ que verifican las condiciones a) y b) de la Definición 1.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal simétrica con coproductos finitos, a toda operad no simétrica $\mathcal{P}'$ en $\mathcal{C}$ se le asocia una operad $\mathcal{P}$ en $\mathcal{C}$ de la siguiente forma:

1. El objeto $\mathcal{P}(n)$ es $\kappa[S_n] \otimes \mathcal{P}'(n)$, donde $\kappa[S_n] := \coprod_{\sigma \in S_n} \kappa_\sigma$, con $\kappa_\sigma = \kappa$ para todo $\sigma \in S_n$.

2. La acción de S_n en $\mathcal{P}(n)$ está dada por la acción evidente en $\kappa[S_n]$ donde S_n actúa permutando las copias de κ.

3. Sea $\Theta_{n,(m_i)}$ la aplicación dada por:

$$\Theta_{n,(m_i)}(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n) := (\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \cdot \sigma(m_1, \ldots, m_n).$$

   Los morfismos $\gamma_{\mathcal{P}}$ están inducidos en forma evidente por los $\delta_{\mathcal{P}'}$ y los $\Theta_{n,(m_i)}$.

Un ejemplo evidente de una operad asociada a una operad no simétrica es Ass, donde $Ass'(n) = k$, para todo $n \geq 1$.

2 Politopo de Stasheff y espacios A_∞

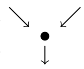
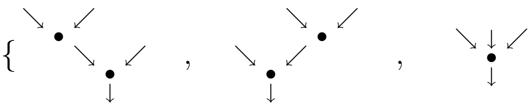
2.1 Arboles planares binarios

Definición 7 *Un árbol planar es un grafo t orientado conexo, sin lazos y con un elemento maximal tal que cada vértice de t es el punto inicial de un único segmento y el punto final de al menos dos segmentos.*

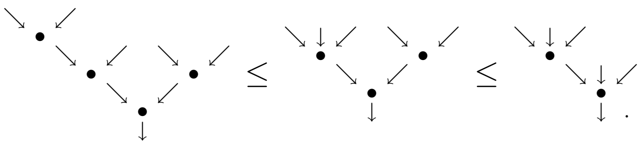
El elemento maximal del árbol se llama *raíz*. Los segmentos de un árbol limitados por un vértice sólo en el extremo final se llaman *hojas*. El árbol que tiene como único vértice la raíz y n hojas se llama *corola de dimensión* n, y se nota c_n.

Notation 8 *Dado $n \geq 0$, notamos T_n al conjunto de árboles planares con n hojas.*

A continuación describimos los conjuntos T_n, con $n \leq 3$,

$T_1 = \{\downarrow\}$, $T_2 = \{$  $\}$, y $T_3 = \{$  $\}$.

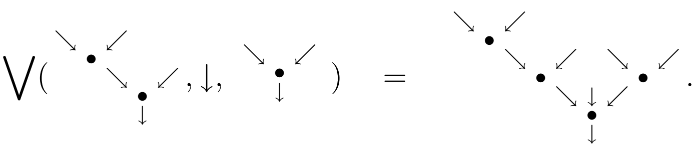
El número n se llama el *grado* de $t \in T_n$ y se nota $\mid t \mid$. El conjunto T_n es la unión disjunta de los conjuntos $T_{n,k} = \{t \in T_n \ : \ t$ tiene $n-1-k$ vértices$\}$. El conjunto $T_{n,0}$ está formado por los árboles tales que cada vértice es el punto final de exactamente dos segmentos, llamados árboles planares binarios, y $T_{n,n}$ tiene un único elemento: la corola c_n.
Dados dos árboles t y t' en T_n, decimos que t es menor que t' si t' se obtiene a partir de t contrayendo segmentos internos. Por ejemplo, tenemos que:



Los árboles planares binarios son elementos minimales de T_n para el orden $\leq$ y la corola c_n es el elemento maximal.

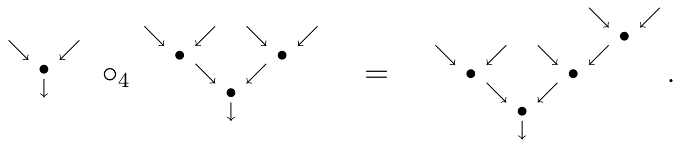
Definición 9 *Sean $t^1, \ldots, t^r$ árboles, con $t^i \in T_{n_i}$ para $1 \leq i \leq r$, $\bigvee(t^1, \ldots, t^r)$ es el elemento de $T_{n_1+\ldots n_r}$ que se obtiene uniendo las raíces de $t^1, \ldots, t^r$ a una nueva raíz.*

Por ejemplo,



Todo árbol planar $t \in T_n$ se expresa en forma única como $t = \bigvee(t^1, \ldots, t^r)$, para cierto conjunto de árboles $\{t^1, \ldots, t^r\}$, con $\mid t^1 \mid + \cdots + \mid t^r \mid = n$.

Dado $t \in T_n$ numeramos sus hojas de izquierda a derecha con $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$. Dados dos árboles t y t' y un entero $1 \leq i \leq \mid t' \mid$, el árbol $t \circ_i t'$ se obtiene uniendo la raíz de t a la i-ésima hoja de t'. Por ejemplo,



Sea $k[T_n]$ el k-espacio vectorial generado por T_n. Definimos $\partial : k[T_n] \longrightarrow k[T_n]$ como la única transformación lineal que verifica las siguientes condiciones:

1. $\partial(c_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^{(i+1)j} c_j \circ_i c_{n-j}$.

2. $\partial(\bigvee(t^0, t^1, \ldots, t^r)) :=$

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^{n_0+\cdots+n_{i-1}} \bigvee(t^0, \ldots, \partial(t^i), \ldots, t^r) +$$
$$(-1)^{n(t)} \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq r \\ (i,j) \neq (0,r)}} (-1)^{N_{i,j}} \bigvee(t^0, \ldots, t^{i-1}, \bigvee(t^i, \ldots, t^j), t^{j+1}, \ldots, t^r).$$

   donde $n_i := \mid t^i \mid -$ número de vértices de t^i, $n(t) := n_0 + \cdots + n_r$ si $t = \bigvee(t^0, \ldots, t^r)$, y $N_{i,j} := (i+1)(j-i) + (n_{j+1} + \cdots + n_r)(j-i+1)$ para $0 \leq j \leq r-1$.

Notemos que el número de vértices de t es el número de vértices de $\partial(t)\ -1$, luego $\partial(T_{n,k}) \subseteq T_{n,k+1}$.
La demostración del siguiente resultado se obtiene por inducción en n, si bien no es complicada resulta extensa y tediosa por lo cual preferimos dejarla a cargo del lector.

Lema 10 *El morfismo $\partial : T_n \to T_n$ verifica que $\partial \circ \partial = 0$.*

Ejercicio. Sea $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$ una familia de objetos en una categoría monoidal, tal que:

1. Existe un morfismo $\eta : \kappa \to \mathcal{P}(1)$.

2. Existen morfismos $\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \longrightarrow \mathcal{P}(m+n-1)$, para todos los enteros positivos n, m y $1 \leq i \leq m$, que verifican:

$$(i)\ \circ_i \circ (\eta \otimes Id_{\mathcal{P}(m)}) = Id_{\mathcal{P}(m)}, \quad \text{para todos} \quad m \geq 1,\ 1 \leq i \leq m,$$
$$(ii)\ \circ_1 \circ (Id_{\mathcal{P}(m)} \otimes \eta) = Id_{\mathcal{P}(m)}, \quad \text{para todo} \quad m \geq 1,$$

(iii) Dados $f \in \mathcal{P}(n)$, $g \in \mathcal{P}(m)$, $h \in \mathcal{P}(r)$, $1 \leq i \leq m+r-1$ y $1 \leq j \leq r$,

$$f \circ_i (g \circ_j h) = \begin{cases} g \circ_{n+j-1} (f \circ_i h), & \text{si} \quad 1 \leq i \leq j-1 \\ (f \circ_{i-j+1} g) \circ_j h, & \text{si} \quad j \leq i \leq j+m-1 \\ g \circ_j (f \circ_{i-m+1} h), & \text{si} \quad j+m \leq i \leq m+r-1. \end{cases}$$

Probar que existe una única estructura de operad no simétrica en $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\gamma_{\mathcal{P}}(f \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes g \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) = g \circ_i f,$$

donde $m_j = 1$ si $j \neq i$.

2.2 Polítopo de Stasheff

Dado un espacio vectorial X y un punto $x_0 \in X$, en la sección anterior definimos el espacio $\Omega(X, x_0)$ de lazos con base x_0. Dados dos lazos γ y μ, la *composición de Poincaré* de γ y μ es el lazo:

$$\gamma \circ \mu(t) := \begin{cases} \mu(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La operación $\circ$ no es asociativa, pero $H : [0,1] \times \Omega(X, x_0)^3 \longrightarrow \Omega(X, x_0)$, dada por:

$$H(h, \gamma, \mu, \delta)(t) := \begin{cases} \delta(\frac{4t}{1+h}) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1+h}{4} \\ \mu(4t-h-1) & \text{si} \quad \frac{1+h}{4} \leq t \leq \frac{2+h}{4} \\ \gamma(\frac{4t-h-2}{2-h}) & \text{si} \quad \frac{2+h}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

define una homotopía entre $(\gamma \circ \mu) \circ \delta$ y $\gamma \circ (\mu \circ \delta)$, para toda terna de lazos γ, μ y δ.

El problema inicial de J.D. Stasheff (cf. [St1]) fue simplificar un criterio de Sugawara (cf. [Su]) que caracteriza los espacios topológicos que son, módulo homotopía, espacios de lazos. La idea básica de [St1] es considerar espacios topológicos X munidos de una función continua $\circ : X^2 \to X$.

Observemos que el conjunto de árboles planares binarios $T(n,0)$ describe todas las formas posibles de obtener elementos de X a partir de n elementos $x_1,\ldots,x_n$ de X y la operación $\circ$, manteniendo el orden de las x_i's. Por ejemplo:

1. El árbol $\begin{array}{c}\searrow\ \swarrow\\ \bullet\\ \downarrow\end{array}$ determina la operación $x_1 \circ x_2$.

2. El árbol $\begin{array}{ccccc} \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ & & & \downarrow & \end{array}$ está asociado a la operación $(x_1 \circ x_2) \circ x_3$, mientras que el árbol $\begin{array}{ccccc} & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & \downarrow & & & \end{array}$ da la operación $x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$.

Evidentemente, si queremos todos los elementos posibles que se obtienen a partir de n elementos y la operación $\circ$ debemos considerar las permutaciones de elementos, y tomar el producto cartesiano $S_n \times T_{n,0}$.

Como la operación $\circ$ no es asociativa, sino asociativa módulo homotopía, Stasheff considera que la corola $\begin{array}{c}\searrow\downarrow\swarrow\\ \bullet\\ \downarrow\end{array}$ representa la homotopía entre $\begin{array}{ccccc} \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ & & & \downarrow & \end{array}$ y $\begin{array}{ccccc} & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & \downarrow & & & \end{array}$.

De otra forma, si miramos el conjunto parcialmente ordenado $(T_3,\leq)$ y construimos su realización geométrica (cf. [CR]), obtenemos una descomposición celular del disco $D^1 := \{t \in \mathbb{R} \quad : \quad t^2 \leq 1\}$ de dimensión 1, que es la división baricéntrica de:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c}\searrow\downarrow\swarrow\\ \bullet\\ \downarrow\end{array} & \\ \begin{array}{ccccc} \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ & & & \downarrow & \end{array} & \bullet - - - - - - - - - - \bullet & \begin{array}{ccccc} & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & \downarrow & & & \end{array} \end{array},$$

que corresponde al polítopo de Stasheff de dimensión 3, K_3.

En general, el polítopo de Stasheff K_n (también llamado asociahedro) de dimensión n es una descomposición celular de $D^{n-2} := \{(t_0,\ldots,t_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} \ : \ \sum_{i=0}^{n-2} t_i^2 \leq 1\}$, para $n \geq 2$, cuyas celdas de dimensión k corresponden a los elementos de $T_{n,k}$. Por ejemplo, los árboles planares binarios corresponden a los vértices de K_n y la única celda de dimensión $n-2$ corresponde a la corola c_n. Observemos además que el borde geométrico de K_n está descripto por la aplicación ∂ definida en la sección anterior.

Existen en la literatura varias descripciones de la realización de K_n como un polítopo convexo, por ejemplo [Le] ,[GKZ] ,[To], [De] , [CFZ] y [Lo2]. Para aquellos lectores familiarizados con la realización geométrica de conjuntos parcialmente ordenados,

K_n es la descomposición celular de D^{n-2} cuya subdivisión baricéntrica corresponde a la realización del conjunto parcialmente ordenado $(T_n, \leq)$. El espacio K_1 es un punto que corresponde al árbol $c_1 = \downarrow$.

Dados enteros no negativos $n, m_1, \ldots, m_n$, el espacio $K_n \times K_{m_1} \times \cdots \times K_{m_n}$ es igual a la celda de $K_{m_1+\cdots+m_n}$ correspondiente al árbol

$$c_{m_1} \circ_1 (c_{m_2} \circ_2 (\ldots c_{m_{n-1}} \circ_{n-1} (c_{m_n} \circ_n c_n)))).$$

Por ejemplo,

1. $K_1 \times K_m = K_m$ tiene dimensión $m-2$, para $m \geq 2$, y corresponde a todo K_m, que es la celda asociada a $c_m \circ_1 c_1 = c_m$.

2. $K_2 \times K_3 \times K_3$ tiene dimensión 2, y corresponde a la celda asociada al árbol

$$\begin{array}{ccccccc} \searrow & \downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & \bullet & & & & \bullet & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & & \bullet & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array}.$$

3. $K_3 \times K_1 \times K_3 \times K_2$ es la celda de dimensión 2 asociada al árbol

$$\begin{array}{cccccc} \searrow & \downarrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow \\ & \bullet & & & \bullet & \\ & \downarrow & & \swarrow & & \\ \searrow & \downarrow & \swarrow & & & \\ & \bullet & & & & \\ & \downarrow & & & & \end{array}.$$

Sea $\lambda_{n,m_1,\ldots,m_n} : K_n \times K_{m_1} \times \cdots \times K_{m_n} \longrightarrow K_{m_1+\cdots+m_n}$ la inclusión de $K_n \times K_{m_1} \times \cdots \times K_{m_n}$ en $K_{m_1+\cdots+m_n}$, vía la identificación con la celda correspondiente.

Ejercicio. Probar el siguiente Lema.

Lema 11 *La familia de* $\mathcal{K} := \{K_n\}_{n\geq 1}$ *con las aplicaciones* $\lambda_{n,m_1,\ldots,m_n}$ *es una operad no simétrica en la categoría* Top.

El principal resultado de [St1] es el siguiente teorema, que simplifica el principio de reconocimiento de Sugawara:

Teorema 12 *Un espacio conexo* Y*, con el tipo de homotopía de un complejo CW, tiene el tipo de homotopía de un espacio de lazos* $\Omega(X)$ *para algun espacio* X *si y solo si* Y *es un álgebra sobre la operad asociada a* $\mathcal{K}$.

3 Otros ejemplos

3.1 Operads algebraicas asociadas a operads topológicas

Dados un espacio topológico X y un cuerpo k, el espacio simplicial de cadenas singulares $Sing_*(X,k)$, de X con coeficientes en k (cf. [ML2] y [Ma2]), determina un funtor $Sing : Top \longrightarrow Simp(Vect_k)$, donde $Simp(Vect_k)$ es la categoría de objetos simpliciales de $Vect_k$. Sea $CSing : Top \longrightarrow GDVect_k$ la composición de $Sing$ con el funtor $CC : Simp(Vect_k) \longrightarrow GDVect_k$, que asigna a un objeto simplicial el complejo de cadenas asociado.

Observación. Dados $n, m \geq 1$, el producto de simples estándar $\Delta^n \times \Delta^m$ es una unión de $\binom{n+m}{n}$ copias de Δ^{n+m}.

En efecto, para n y m fijos, consideremos el conjunto $C_{n,m}$ de sucesiones no crecientes $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$ de m enteros con $0 \leq i_j \leq n$. Es fácil ver que $C_{n,m}$ tiene $\binom{n+m}{n}$ elementos. Para cada $\underline{i} \in C_{n,m}$ definimos la región $R_{\underline{i}}$ de $\Delta^n \times \Delta^m$ como el conjunto de todos los elementos $((x_1, \dots, x_n, 1 - \sum_{j=1}^n x_j), (y_1, \dots, y_m, 1 - \sum_{j=1}^m y_j))$ de $\Delta^n \times \Delta^m$ que verifican, para todo $1 \leq j \leq m$, las siguientes condiciones:

$$x_1 + \cdots + x_{i_j} + y_1 + \cdots + y_j \leq 1,$$
$$x_1 + \cdots + x_{i_j} + x_{i_j+1} + y_1 + \cdots + y_j \geq 1.$$

Es claro que $R_{\underline{i}}$ es un subconjunto cerrado de $\Delta^n \times \Delta^m$. Definimos $F_{\underline{i}} : \Delta^{n+m} \to R_{\underline{i}}$, asociada a $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$ en la siguiente forma:

Sean h_k el número de i_j's tales que $i_j = k+1$, y $H_k := h_0 + \cdots + h_k$, para $0 \leq k \leq n$. Y sean

$$g_l := \begin{cases} i_m + 1 & \text{si} \quad l = m \\ i_l - i_{l-1} + 1 & \text{si} \quad 1 \leq l < m \\ n - i_1 & \text{si} \quad l = 0, \end{cases}$$

y $G_m := g_1 + \cdots + g_m$. Dado un elemento $(t_0, \dots, t_{n+m}) \in \Delta^{n+m}$, definimos $F_{\underline{i}}((t_0, \dots, t_{n+m})) :=$

$$((t_0 + \cdots + t_{h_0}, \dots, t_{H_{n-1}+1} + \cdots + t_{n+m}), (t_{G_m+1} + \cdots + t_{n+m}, \dots, t_0 + \cdots + t_{g_m})).$$

La demostración del siguiente resultado queda a cargo del lector.

Lema 13 *Las regiones $R_{\underline{i}}$ definidas más arriba verifican las siguientes propiedades:*

1. La intersección de los interiores de las regiones $R_{\underline{i}}$ y $R_{\underline{k}}$ es vacía si $\underline{i} \neq \underline{k}$.

2. $\Delta^n \times \Delta^m$ es la unión de los subespacios cerrados $R_{\underline{i}}$, con $\underline{i} \in C_{n,m}$.

3. Dado $\underline{i} \in C_{n,m}$, la función $F_{\underline{i}} : \Delta^{n+m} \to R_{\underline{i}}$ es continua y biyectiva.

Dada una operad $\mathcal{P}$ en Top, la operad $CSing(\mathcal{P})$ en $DGVect_k$, está dada por:

1. $CSing(\mathcal{P})(n)$ es el complejo de cadenas asociado $CSing(\mathcal{P}(n))$.
2. La acción de S_n en $CSing(\mathcal{P})(n)$ es la inducida por la acción de S_n en $\mathcal{P}(n)$.
3. Las funciones $\gamma_{CSing(\mathcal{P})}$ están determinadas por las aplicaciones $F_{\underline{i}}$, definidas anteriormente, y las funciones $\gamma_{\mathcal{P}}$.

Ejemplos. 1. La operad A_∞. Sea $CSing(\mathcal{K})$ la no-Σ operad asociada a los polítopos de Stasheff. El objeto $CSing(\mathcal{K})(n)$ es el complejo de cadenas singular del polítopo K_n.

Definición 14 *(cf. [Vo2]) La operad A_∞ de álgebras asociativas módulo homotopía en la categoría $DGVect_k$ es la operad asociada a $CSing(\mathcal{K})$.*

Observemos que el complejo $CSing(\mathcal{K})(n)$ resulta quasi-isomorfo (cf. [ML2]) al complejo de cadenas $(k[T_n], \partial)$ cuyos k-ésimo espacio está generado por el conjunto $T_{n,k}$ de árboles planares con n hojas y $n-k-1$ vértices, y cuyo diferencial está dado el morfismo ∂ definido en la Sección 2.1. Tenemos que $k[T_n]_{n-2}$ es el espacio de dimensión 1 generado por la corola c_n, y que $k[T_n]_k = 0$, para $k > n-2$.

Ejercicio. (díficil) Probar que una A_∞-álgebra es un k-espacio vectorial diferencial graduado $(A = \oplus_{n\geq 0} A_n, d)$ munido de una familia $\{\mu_n\}_{n\geq 2}$ de operaciones tales que:

1. $\mu_n : A^{\otimes n} \longrightarrow A$ es un transformación n-lineal de grado $n-2$,
2. $$d(\mu_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) - (-1)^n \sum_{i=1}^{n} \alpha(i) \mu_n(a_1 \otimes \cdots \otimes d(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n) =$$
$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+l(n-i-l)} \beta(i,l) \mu_k(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes \mu_l(a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+l}) \otimes \cdots \otimes a_n),$$
donde $\alpha(i) := (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_i|-1}$, $\beta(i,l) := (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_i|+l-2}$, y $\mid a \mid$ es el grado de $a \in A$.

2. Algebras de Gerstenhaber En [Ge], M. Gerstenhaber define distintas operaciones en el complejo $CC^*(A)$ de cocadenas de Hochschild de una k-álgebra A, que le permiten obtener en el A-módulo de cohomología de Hochschild $HH^*(A)$ un producto conmutativo $\cup$ y un corchete de Lie $[-,-]$, que verifican cierta relación.

Definición 15 *Un álgebra de Gerstenhaber en un espacio vectorial graduado* $V = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ *munido de dos operaciones binarias* $\cdot$ *y* $[-,-]$ *que verifican las siguientes propiedades:*

1. $\cdot$ *es asociativa y conmutativa graduada, o sea,*

$$v \cdot w = (-1)^{nm} w \cdot v, \quad \text{para} \quad v \in V_n \quad \text{y} \quad w \in V_m.$$

2. $[-,-]$ *es un corchete de Lie graduado en la desuspensión* $V[1]$ *de* V*, esto es*

$$[v,w] = (-1)^{(n-1)(m-1)}[w,v]$$
$$[v,[w,z]] = [[v,w],z] - (-1)^{(m-1)(r-1)}[[v,z],w], \quad \text{si} \quad v \in V_n, w \in V_m \text{ y } z \in V_r.$$

3.

$$[v, w \cdot z] = [v,w] \cdot z + (-1)^{(n-1)m} w \cdot [v,z], \quad \text{si} \quad v \in V_n, w \in V_m \text{ y } z \in V_r.$$

En otras palabras, un álgebra de Gerstenhaber es una cierta versión graduada de un álgebra de Poisson.
El ejemplo clásico de un álgebra de Gerstenhaber es el k-espacio de cohomología de Hochschild de un álgebra asociativa sobre k (cf. [Ge]).
Sea $e_2 = H_*(\mathcal{Q}_2, k)$ la operad en $GVect_k$ asociada a la homología singular de la operad $\mathcal{Q}_2$ de pequeños cubos en el plano. O sea que $e_2(n) = \sum_{i\geq 0} H_i(\mathcal{Q}_2(n), k)$ es la homología del complejo $CSing(\mathcal{Q}_2(n), k)$.
El siguiente Teorema se debe a F. Cohen (cf. [Co])

Teorema 16 *La categoría de álgebras de Gerstenhaber* $\mathbb{Z}$*-graduadas es equivalente a la categoría de* e_2*-álgebras.*

En 1993, P. Deligne conjeturó que el Teorema de Cohen puede ser naturalmente levantado a los complejos de cocadenas.
Conjetura de Deligne. El complejo de cocadenas de Hochschild de un álgebra asociativa A es una $CSing(\mathcal{Q}_2)$-álgebra.
La conjetura de Deligne fue probada por M. Konsevitch en 1999. Para una descripción más detallada del problema sugerimos ver [Ko], [KS], [Vo1] y [Ta].

3.2 Otras operads asociadas a los árboles planares

1. Magma libre (cf. [GH])

Definición 17 *Un magma libre sobre k es un k espacio vectorial M equipado con una operación bilineal $\mu : M \otimes M \longrightarrow M$.*

Ejercicio. Probar que la operad Mag cuyas álgebras son magmas libres, es la operad asociada a la siguiente no-Σ operad siguiente:

1. $Mag'(n)$ es el k-espacio vectorial $k[T_{n,0}]$ generado por el conjunto de árboles planares binarios con n hojas, para $n \geq 2$.
2. $Mag'(1) := k\cdot \downarrow$
3. $\delta_{Mag'} : k[T_{n,0}] \otimes k[T_{m_1,0}] \otimes \cdots \otimes k[T_{m_n,0}] \longrightarrow k[T_{m_1+\cdots+m_n,0}]$ está dada por:

   $$\delta_{Mag'}(t_0 \otimes t_1 \otimes \cdots \otimes t_n) := t_1 \circ_1 (t_2 \circ_2 (\ldots (t_{n-1} \circ_{n-1} (t_n \circ_n t_0))),$$

   donde $\circ_i$ es la operación de *injerto en la i-ésima hoja*, definida en la Sección 2.1.

2. Algebras dendriformes (cf. [Lo3])

Definición 18 *Un álgebra dendriforme sobre k es un k espacio vectorial D munido de dos operacions bilineales $\succ$, $\prec$: $D \otimes D \longrightarrow D$ que verifican las siguientes relaciones:*

1. $a \succ (b \succ c) = (a \succ b) \succ c + (a \prec b) \succ c,$
2. $a \succ (b \prec c) = (a \succ b) \prec c,$
3. $a \prec (b \succ c) + a \prec (b \prec c) = (a \prec b) \prec c,$

para todos a, b y c en D.

Observación Si $(D, \succ, \prec)$ es un álgebra dendriforme entonces $(D, *)$ es un álgebra asociativa, con $a * b := a \succ b + a \prec b$.

Ejemplo. Consideremos el espacio vectorial $Dend(k)$ generado por todos los árboles planares binarios, $Dend(k) := \bigoplus_{n\geq 1} k[T_{n,0}]$.

Notemos que si t^l y t^r son dos árboles planares binarios, entonces $t = \bigvee(t^l, t^r)$ también resulta un árbol binario. Más aún, dado $t \in T_{n+1,0}$, t se escribe en forma única como $\bigvee(t^l, t^r)$, con $t^l \in T_{n_l+1,0}$, $t^r \in T_{n_r+1,0}$, y $n = n_l + n_r + 1$ (donde t^l o t^r pueden ser el árbol $\downarrow$).

Existe una única estructura de álgebra dendriforme en $Dend(k)$ dada por las siguientes definiciones:

1. Dado un árbol planar binario t, tenemos que:

   (i) $t* \downarrow := t =: \downarrow *t$,

   (ii) $t \succ \downarrow = \downarrow \prec t = 0$,

   (iii) $t \prec \downarrow = \downarrow \succ t = t$.

2. Si $t = \bigvee(t^l, t^r)$ y $w = \bigvee(w^l, w^r)$, entonces

   (i) $t \succ w := \bigvee(t * w^l, w^r)$,

   (ii) $t \prec w := \bigvee(t^l, t^r * w)$,

   donde $t * w = t \succ w + t \prec W$.

Ejercicio.

1. Calcular $\begin{smallmatrix}\searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ & & & \downarrow & \end{smallmatrix} \succ \begin{smallmatrix}\searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ & \bullet & & & & \bullet & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & & \bullet & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix} & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & \downarrow & & & \end{smallmatrix} \prec \begin{smallmatrix}\searrow & & \swarrow \\ & \bullet & \\ & \downarrow & \end{smallmatrix}$.

2. Probar que $Dend(k)$ con las operaciones $\succ$ y $\prec$ así definidas es un álgebra dendriforme.

La operad $Dend$ asociada a las álgebras dendriformes está dada por un operad no simétrica $Dend'$. Para describirla, observemos que las operaciones en n variables $x_1, \ldots, x_n$, donde el orden de la variables queda fijo, corresponden a todos los árboles planares binarios con $n + 1$ hojas.

Consideramos al árbol $\begin{smallmatrix}\searrow & & \swarrow \\ & \bullet & \\ & \downarrow & \end{smallmatrix}$ como la operación identidad, a $\begin{smallmatrix}\searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ & & & \downarrow & \end{smallmatrix}$ como la operación $x_1 \succ x_2$, y a $\begin{smallmatrix} & & \searrow & & \swarrow \\ & & & \bullet & \\ \searrow & & \swarrow & & \\ & \bullet & & & \\ & \downarrow & & & \end{smallmatrix}$ como la operación $x_1 \prec x_2$. Vamos a ver ahora que $Dend'(n)$ es el espacio vectorial generado por el conjunto $T_{n+1,0}$.

Procedemos por inducción sobre n: dado un árbol $t = \bigvee(t^l, t^r)$, suponemos que existen operaciones $f_l \in \mathit{Dend}'(n_l)$ y $f_r \in \mathit{Dend}'(n_r)$ que corresponden, respectivamente, a t^l y t^r; entonces a t le corresponde la operación

$$f(x_1, \ldots, x_n) := f_1(x_1, \ldots, x_{n_l}) \succ x_{n_l+1} \prec f_r(x_{n-l+2}, \ldots, x_n).$$

Al revés, dada una operación $f \in \mathit{Dend}'(n)$, las relaciones de la definición 18 implican que existe una única expresión del tipo:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_l(x_1, \ldots, x_{n_l}) \succ x_{n_l+1} \prec f_r(x_{n_l+2}, \ldots, x_n),$$

con $1 \leq l \leq n$, $f_l \in \mathit{Dend}'(n_l)$ y $f_r \in \mathit{Dend}'(n - n_l - 1)$. Procediendo por inducción en n, si f_l está dada por el árbol t^l y f_r por el árbol t^r, entonces a f le corresponde el árbol $t = \bigvee(t^r, t^l)$.

Esto muestra que $\mathit{Dend}'(n) = k[T_{n+1,0}]$, para $n \geq 1$.

Evidentemente, $\eta : k \to k[T_{2,0}] = k \cdot \begin{smallmatrix} \searrow & & \swarrow \\ & \bullet & \\ & \downarrow & \end{smallmatrix}$ es el morfismo identidad.

Para definir las operaciones $\delta_{\mathit{Dend}'}$ usamos la estructura de álgebra dendriforme de $\mathit{Dend}(k)$. Supongamos que tenemos $t \in T_{n+1,0}$, $w_1 \in T_{m_1+1,0}$, $\ldots$ y $w_n \in T_{m-n+1,0}$, sabemos que a t le corresponde una única operación f de n variables, construida a partir de $\succ$ y $\prec$. Definimos entonces:

$$\delta_{\mathit{Dend}'}(t \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) := f(w_1, \ldots, w_n).$$

La definición es correcta pues $w_1, \ldots, w_n$ son elementos del álgebra dendriforme $\mathit{Dend}(k)$.

Aplicaciones. I. Algebras de Baxter. En [Ag] y [EF] se estudia la conexión entre las álgebras dendriformes y los operadores de Baxter. Un *operador de Baxter de peso* λ en un álgebra asociativa $(A, \cdot)$ sobre k es una transformación lineal $B : A \to A$ que verifica:

$$B(a) \cdot B(b) + \lambda B(a \cdot b) = B(a \cdot B(b) + B(a) \cdot b), \quad \text{para} \quad a, b \in A.$$

En particular, si B es un operador de Baxter de peso 0 sobre $(A, \cdot)$ se definen operaciones:

$$a \succ b := B(a) \cdot b \quad \text{y} \quad a \prec b := a \cdot B(b), \quad \text{para} \quad a, b \in A.$$

El siguiente resultado se verifica con un sencillo cálculo:

Lema 19 *Dada un álgebra asociativa* $(A, \cdot)$ *con un operador de Baxter* B *de peso* 0*, el álgebra* A *con las operaciones* $\succ$ *y* $\prec$ *es un álgebra dendriforme.*

Ejercicio. (o más bien problema ...) Construir la operad asociada a las álgebras de Baxter (Sugerencia: usar la construcción de álgebras de Baxter libres de [GuK] y que *Baxt* es una operad no simétrica)

II. Grafos orientados y L-coálgebras. En [Ler], P. Leroux define estructuras de co-álgebras asociadas a grafos orientados localmente finitos.

Definición 20 *Un grafo orientado es una cuaterna* $G = (G_0, G_1, s, t)$ *donde* G_0 *y* G_1 *son conjuntos numerables, llamados respectivamente conjunto de vértices y conjunto de flechas, y* $s, t : G_1 \to G_0$ *son aplicaciones, llamadas origen y final, respectivamente.*

Un grafo orientado se dice localmente finito si $s^{-1}(v)$ *y* $t^{-1}(v)$ *son conjuntos finitos, para todo* $v \in G_0$*.*

Una función de peso en un grafo orientado G *es una aplicación* $\omega : G_1 \to k$*.*

En toda la sección consideraremos solo grafos orientados (G_0, G_1, s, t) tales que dados dos vértices $v, w \in G_0$ existe a lo sumo una flecha $g \in G_1$ con $s(g) = v$ y $t(g) = w$.

Sea G un grafo orientado localmente finito equipado con una función de peso ω. Consideramos el espacio vectorial $k[G_0]$ generado por los vértices, provisto de los coproductos Δ , $\hat{\Delta} : k[G_0] \to k[G_0] \otimes k[G_0]$, dados por:

$$\Delta(v) := \sum_{g \in G_1 \cap s^{-1}(v)} \omega(g) v \otimes t(g)$$
$$\hat{\Delta}(v) := \sum_{g \in G_1 \cap t^{-1}(v)} \omega(g) s(g) \otimes v,$$

para $v \in G_0$.

Ejemplo. Sea G el grafo dado por:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\lambda} & b \\ \mu \downarrow & \overset{\lambda}{\nearrow} & \uparrow \eta \\ d & & c, \end{array}$$

con λ, μ y $\eta \in k$. Tenemos que $\Delta(a) = a \otimes (\lambda b + \mu d)$, $\hat{\Delta}(a) = 0$ y

$\hat{\Delta}(b) = (\lambda(a + d) + \eta c) \otimes b.$

Es fácil ver que Δ y $\hat{\Delta}$ no son coasociativas, pero verifican la siguiente relación:

$$(\hat{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \hat{\Delta}. \tag{1}$$

Si pensamos que el grafo indica el estado de un punto en un momento de terminado, la operación $(\hat{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta$ puede interpretarse como *pasado* $\otimes$ *presente* $\otimes$ *futuro*. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 21 *Una L-coálgebra es un espacio vectorial V equipado con dos coproductos $\Delta, \hat{\Delta} : V \longrightarrow V \otimes V$ que verifican la relación* **(1)**.

Si V es una L-coálgebra de dimensión finita, entonces su dual V^* es un espacio vectorial munido de dos productos $\succ$ y $\prec$ que verifican la segunda ecuación de la Definición 18, o sea:

$$a \succ (b \prec c) = (a \succ b) \prec c, \quad \text{para} a, b, c \in V^*.$$

Si llamamos L-álgebras a los objetos con esta propiedad, resulta que toda álgebra dendriforme es una L-álgebra.

Ejercicio. (sin respuesta conocida) Determinar la operad $L - alg$ asociada a las L-álgebras y definir el morfismo de operads $L - alg \longrightarrow Dend$ que da la inclusión de las álgebras dendriformes en las L-álgebras.

3. Algebras pre-Lie y álgebras de Gerstenhaber

En los ejemplos de la Sección anterior damos la definición de álgebra de Gerstenhaber. En [Ge], M. Gertenhaber define ciertas operaciones en el complejo $CC^*(A)$ de cocadenas de Hochschild de una k-álgebra A, que inducen una estructura de álgebra de Gerstenhaber en el espacio de cohomología $HH^*(A)$. En particular, el corchete de Lie proviene de una estrucutra llamada por M. Gerstenhaber álgebra pre-Lie álgebra, cuya definición es la siguiente:

Definición 22 *Una k-álgebra pre-Lie es un espacio vectorial L provisto de una operación bilineal $\bullet : L \otimes L \longrightarrow L$ que verifica la siguiente relación:*

$$(a \bullet b) \bullet c - (b \bullet a) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) - a \bullet (c \bullet b),$$

para todos $a, b, c \in L$.

Observación.

1. Si $(L, \bullet)$ es un álgebra pre-Lie, entonces L con el corchete definido por:

$$[a,b] := a \bullet b - b \bullet a, \quad \text{para} \quad a,b \in L,$$

es un álgebra de Lie.

2. Si $(D, \succ, \prec)$ es un álgebra dendriforme entonces D con la operación $\bullet$ dada por .

$$a \bullet b := a \prec b - b \succ a, \quad \text{para} \quad a,b \in D,$$

es un álgebra pre-Lie.

La operad asociada a las álgebras pre-Lie está descripta en [ChL] en términos de árboles no-planares con vértices coloreados.

Ejercicio. (con solución desconocida) En la observación definimos un funtor de la categoría de algebras dendriformes en la categoría de álgebras pre-Lie. Describir el morfismo de operads $Pre - Lie \longrightarrow Dend$ correspondiente a este funtor.

References

[Ag] M. Aguiar, *Infinitesimal bialgebras, pre-Lie and dendriform algebras*, en Hopf algebras: Proceedings from an International Conference held at De Paul University (2002), a aparecer.

[Be] J. Beck, *On H-spaces and infinite loop spaces*, en Springer Lecture Notes in Math. 99, Springer-Verlag (1969).

[BV] J.M. Boardman , R.M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lectures Notes in Math., vol. 347, Springer-Verlag, (1973).

[CFZ] F. Chapoton, S. Fomin, A. V. Zelevinsky *Polytopal realizations of generalized associahedra*, arXiv: math.CO/0202004.

[Co] F. R. Cohen, *The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$-spaces, $n \geq 0$*, en The homology of iterated loop spaces, Lect. Notes in Mathematics 533, Springer-Verlag (1976) 207-351.

[CR] C. Curtis , I. Reiner, *Methods of Representation Theory II*, Wiley Interscience (1985).

[ChL] F. Chapoton, M. Livernet , *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math. Res. Notices, num. 8 (2001) 395-408.

[De] S. L. Devadoss, *Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad*, en Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), Contemp. Math. 239 (1999) 91-114.

[EF] K. Ebrahimi-Fard, *Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation*, Lett. Math. Phys. 61, num. 2 (2002) 139-147.

[Ge] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 (1963) 267-288.

[GH] L. Gerritzen, R. Holtkamp, *Co-addition for free non-associative algebras and the Hausdorff series*, arXiv math.RA/0207083.

[GK] V. Ginzburg , M. M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J.,76:203-272,1994.

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser oston (1994).

[GuK] L. Guo, W. Keigher, *Baxter algebras and the shuffle products*, Adv. in Math. 150 (2000) 117-149.

[Kl] A. Klyachko, *Lie elements in the tensor algebra*, Siberian Math. J. 15 (1974), 1296-1304.

[Ko] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys. 48 (1999) 35-72.

[KS] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Deformations of algebras aver operads and Deligne's Conjecture*, arXiv math.QA/0001151.

[Le] C. W. Lee, *The associahedron and triangulations of the n-gon*, European J. of Combin. 10, n 6 (1989) 551-560.

[Ler] P. Leroux, *Thèse: Description algèbriquedes graphes orientés pondérés et applications*, Pub. Univ. de Rennes, Num. 2834 (2003).

[Lo2] J. L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, preprint (9 de diciembre de 2002), arXiv: math.AT/0212126 v1.

[Lo3] J.-L. Loday. *Dialgebras* , en Dialgebras and related operads, Springer Lecture Notes in Math. 1763 (2002)

[Ma1] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics vol 271, Springer-Verlag (1972).

[Ma2] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, D. Van Nostrand 1967, reeditado por The University of Chicago Press 1982 y 1992.

[Ma3] J. P. May, *Definitions: operads, algebras and modules*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 1-7.

[Ma4] J. P. May, *Operads, algebras and modules*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 15-31.

[Mi] R. J. Milgram, *Iterated loop spaces*, Annals of math. 84 (1966) 386-403.

[ML1] S. MacLane, *Categorical algebra* , Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 40-106.

[ML2] S. MacLane, *Homology*, Classics in Math., Springer-Verlag (1995).

[Su] M. Sugawara,*On a condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama Univ. 7 (1957) 123-149.

[St1] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I y II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275-312.

[St2] J. D. Stasheff, *The pre-history of operads*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 9-14.

[St3] J. D. Stasheff, *From operads to physically inspired theories*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 53-81.

[Tam] D. E. Tamarkin, *Formality of chain operad of small square*, arXiv:math.QA/9809164 (1998)

[Ta] D. Tanré, *Homotopie Rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan* , Springer Lecture Notes in Mathematics vol. 1025, Springer-Verlag (1983).

[To] A. P. Tonks, *Relating the associahedron and the permutahedron*, en Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math. 202 (1997) 33-36.

[Vi] J. W. Vick, *Homology theory; an introduction to algebraic topology*, segunda edici'on, Springer-Verlag, (1994), 41-65.

[Vo1] A. A. Voronov, *Homotopy Gerstenhaber algebras*, Conf. Moshe Flato 1999 (G. Dito and D. Sternheimer, eds.), vol. 2, Kluwer Acad. Pub. (2000), 307-331.

[Vo2] A. A. Voronov, *Notes on universal algebra*, Univ. of Warwick Preprint 26/2001, arXiv:math QA/0111009.