CAPíTULO 2

Algunas Representaciones Supercuspidales de $GL(N, \mathbf{F})$

En esta sección describiremos una clase de representaciones supercuspidales que bien pueden ser llamadas de Carayol (ver [Ca]) del grupo $GL(N, \mathbf{F})$, $\mathbf{F}$ un cuerpo local no arquimideano. Cuando N es un número primo se tiene que estas son todas las representaciones supercuspidales del grupo $GL(N, \mathbf{F})$, de lo contrario es necesario determinar el resto según técnicas que se pueden ver en [B-K].

2.1. Introducción

En lo que sigue, al igual que en el primer capítulo, denotaremos por $\mathbf{F}$ un cuerpo local no arquimideano, $O_{\mathbf{F}}$ su anillo de enteros con único ideal maximal $P_{\mathbf{F}}$ y elemento uniformizante $\varpi_{\mathbf{F}}$, $k_{\mathbf{F}} = O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}$ el cuerpo residual de $\mathbf{F}$ y $\psi_{\mathbf{F}}$ un carácter continuo fijo del grupo aditivo $\mathbf{F}$ con conductor $P_{\mathbf{F}}$ (es decir, $Ker(\psi_{\mathbf{F}}) \supset P_{\mathbf{F}}$). Además denotaremos por V el $\mathbf{F}-$espacio vectorial $\mathbf{F}^N$, $B = \{e_1, ..., e_N\}$ la base canónica de V, A el álgebra de $\mathbf{F}-$endomorfismo de V, G el grupo de los elementos invertibles de A (esto es $G = GL(N, \mathbf{F})$ dependiendo de la base elegida) y $\psi = \psi_{\mathbf{F}} \circ tr$ donde tr denota la función traza de $\mathbf{F}$ mirado como extensión de un cuerpo p-ádico $\mathbf{Q}_p$.

Definición 2.1.1. Un *retículo* en V es un subgrupo aditivo L de V el cual es abierto y compacto. Diremos que L es un $O_{\mathbf{F}}-$*retículo* si además L es un $O_{\mathbf{F}}-$módulo.

Ejemplo 2.1.2.
1. Los subgrupos $O_{\mathbf{F}}$ y $P_{\mathbf{F}}$ son retículos en $\mathbf{F}$ y además son $O_{\mathbf{F}}-$retículos.
2. El $O_{\mathbf{F}}-$módulo de V,

$$L = P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_s + O_{\mathbf{F}}e_{s+1} + ... + O_{\mathbf{F}}e_N$$

es un $O_{\mathbf{F}}-$retículo.

Definición 2.1.3. Un $O_{\mathbf{F}}-$retículo $\mathcal{A}$ en $A = M_N(\mathbf{F})$ el cual es también un subanillo de A con elemento identidad 1_N, se denomina un $O_{\mathbf{F}}-$*orden.*

Ejemplo 2.1.4.
1. El anillo de los enteros de $\mathbf{F}$ es un $O_{\mathbf{F}}-$orden en $\mathbf{F}$.
2. Dado un $O_{\mathbf{F}}$-módulo L se puede considerar el conjunto $\mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}}(L) = \{x \in A \mid xL \subset L\}$. La elección de una $O_{\mathbf{F}}$-base de L implica establecer un isomorfimo entre $\mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}}(L)$ y un subanillo de $M(N, O_{\mathbf{F}})$, se tiene así que $\mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}}(L)$ es un $O_{\mathbf{F}}$-orden. Recíprocamente, sea $\mathcal{A}$ un $O_{\mathbf{F}}$-orden y v en $V - \{0\}$ entonces $L = \mathcal{A}v$ es un $O_{\mathbf{F}}$-retículo en V (L es claramente un $O_{\mathbf{F}}$-módulo, $L = \bigcup\limits_{a\in\mathcal{A}} av$, L es abierto y compacto) y también un $\mathcal{A}$-módulo, por lo tanto $\mathcal{A} \subset \mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}}(L)$.
3. Definamos por $\mathcal{A}=\{(a_{ij})_{i,j} \in A \mid a_{ij} \in P_{\mathbf{F}}$ si $i < j$ y $a_{ij} \in O_{\mathbf{F}}$ si $i \geq j\}$, conjunto que denotaremos en lo sucesivo por

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & \cdots & P_{\mathbf{F}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & \cdots & \cdots & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$$

Definición 2.1.5. Diremos que un $O_{\mathbf{F}}-$orden $\mathcal{A}$ en A es *hereditario* (izquierdo) si todo $\mathcal{A}-$retículo (izquierdo) es $\mathcal{A}-$proyectivo.

Observación 2.1.6. Sea $\mathcal{A}$ un $O_{\mathbf{F}}-$orden en A y $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} \cap A^{\times}$ entonces $\mathcal{A}^{\times}$ es un subgrupo abierto y compacto en $A^{\times}$. En efecto, $A^{\times} = \det^{-1}(\{0\}^c)$ es abierto en A y por definición $\mathcal{A}$ es abierto en A, así que $A^{\times} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}^{\times}$ es un abierto en $A^{\times}$ y claramente $\mathcal{A}^{\times}$ es tambien compacto en $A^{\times}$.

Definición 2.1.7. Una *cadena* de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en V es una sucesión $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en V tales que:
1. $L_i \supset L_{i+1}, \ \ i \in \mathbf{Z}$.
2. Existe $e \in \mathbf{Z}$ tal que $P_{\mathbf{F}}L_i = L_{i+e}, \quad i \in \mathbf{Z}$. El entero e (el cual es únicamente determinado) es llamado el $O_{\mathbf{F}}-$*período* de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 2.1.8.
1. Definamos:
$L_0 = O_{\mathbf{F}}e_1 + \dots\dots\dots\dots + O_{\mathbf{F}}e_N$
$L_1 = O_{\mathbf{F}}e_1 + \dots + O_{\mathbf{F}}e_{N-1} + P_{\mathbf{F}}e_N$
$\vdots$
$L_i = O_{\mathbf{F}}e_1 + \dots + O_{\mathbf{F}}e_{N-i} + P_{\mathbf{F}}e_{N-i+1} + \dots + P_{\mathbf{F}}e_N$
$\vdots$
$L_N = P_{\mathbf{F}}e_1 + \dots\dots\dots\dots + P_{\mathbf{F}}e_N$

y tenemos que $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ es una cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en V con $e = N$ pues $P_{\mathbf{F}} L_i = L_{i+N}$.
2. Sea $\mathbf{E}$ una extensión de $\mathbf{F}$ de grado N con $e(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = e$, el índice de ramificación de la extensión y $f(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = f$, el grado de inercia de la extensión. Lo anterior significa que si $O_{\mathbf{E}}$ es el anillo de los enteros de $\mathbf{E}$, $P_{\mathbf{E}}$ es el único ideal primo de $O_{\mathbf{E}}$ con elemento uniformizante $\varpi_{\mathbf{E}}$ y $k_{\mathbf{E}}$ es el cuerpo residual de $\mathbf{E}$ entonces $k_{\mathbf{E}}$ es una extensión finita del cuerpo $k_{\mathbf{F}}$ de grado, $[k_{\mathbf{E}} : k_{\mathbf{F}}] = f$ y $\varpi_{\mathbf{E}}^e = \varpi_{\mathbf{F}}$.

Claramente se tiene que $O_{\mathbf{E}}$ es un $O_{\mathbf{F}}-$módulo y por lo tanto $O_{\mathbf{E}}$ es un $O_{\mathbf{F}}-$retículo de $\mathbf{E}$. Si consideramos $\mathcal{L} = \{\varpi_{\mathbf{E}}^i O_{\mathbf{E}} \mid i \in \mathbf{Z}\}$ entonces $\mathcal{L}$ es una cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en $\mathbf{E}$ y $e(\mathcal{L}) = e(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ ya que

$$L_{i+e} = \varpi_{\mathbf{E}}^{i+e} O_{\mathbf{E}} = \varpi_{\mathbf{E}}^i \varpi_{\mathbf{F}} O_{\mathbf{E}} = \varpi \theta_{\mathbf{E}} = L_e$$

Definición 2.1.9. Sea $\mathcal{L}$ una cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en V. Se define, para cada $n \in \mathbf{Z}$,

$$\operatorname{End}^n_{O_{\mathbf{F}}}(\mathcal{L}) = \{x \in A / x L_i \subseteq L_{i+n}, \forall i \in \mathbf{Z}\}$$

el cual es una cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en A.

Observación 2.1.10. Se puede probar que

$$\mathcal{A} = \operatorname{End}^0_{O_{\mathbf{F}}}(\mathcal{L}) = \{x \in A \mid x L_i \subseteq L_i, i \in \mathbf{Z}\}$$

es un $O_{\mathbf{F}}-$orden en A, el cual es hereditario, y recíprocamente; todo $O_{\mathbf{F}}$-orden hereditario en A esta determinado por una cadena $\mathcal{L}$ de $O_{\mathbf{F}}-$retículos. Esto último significa que podemos recuperar la cadena de retículos $\mathcal{L}$ desde el orden $\mathcal{A}$, salvo cambio de índices. La cadena $\mathcal{L}$ es precisamente el conjunto de todos los $\mathcal{A}-$retículos en V.

En otras palabras, $\mathcal{L} \leftrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$ da una biyección entre el conjunto de las cadenas de $O_{\mathbf{F}}$-retículos en V y el conjunto de $O_{\mathbf{F}}$-ordenes hereditarios en A la cual invierte la inclusión, esto es: $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ si y solamente si $\mathcal{A}(\mathcal{L}_1) \supset \mathcal{A}(\mathcal{L}_2)$

Definición 2.1.11. Un orden hereditario $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ en A es llamado *un orden hereditario principal* si $[L_i : L_{i+1}] = [L_j : L_{j+1}]$ para todos $i, j \in \mathbf{Z}$.

Ejemplo 2.1.12.
1. Definamos la cadena $\mathcal{L}$ de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en $\mathbf{F}^4$ por:

$$\begin{aligned} L_0 &= O_{\mathbf{F}} e_1 + O_{\mathbf{F}} e_2 + O_{\mathbf{F}} e_3 + O_{\mathbf{F}} e_4 \\ L_1 &= P_{\mathbf{F}} e_1 + P_{\mathbf{F}} e_2 + O_{\mathbf{F}} e_3 + O_{\mathbf{F}} e_4 \\ L_2 &= P_{\mathbf{F}} e_1 + P_{\mathbf{F}} e_2 + P_{\mathbf{F}} e_3 + P_{\mathbf{F}} e_4 \end{aligned}$$

y es claro que $L_i/L_{i+1} \simeq k \times k$, por lo tanto el $O_{\mathbf{F}}-$orden hereditario

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \{a \in A \mid aL_i \subseteq L_i, i \in \mathbf{Z}\} = \begin{bmatrix} M_2(O_{\mathbf{F}}) & M_2(P_{\mathbf{F}}) \\ M_2(O_{\mathbf{F}}) & M_2(O_{\mathbf{F}}) \end{bmatrix}$$

determinado por la cadena $\mathcal{L}$ la cual es principal.

2.- La cadena $\mathcal{L}$ de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en $\mathbf{F}^4$ definido por:

$$\begin{aligned} L_0 &= O_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 + O_{\mathbf{F}}e_4 \\ L_1 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 + O_{\mathbf{F}}e_4 \\ L_2 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + P_{\mathbf{F}}e_3 + O_{\mathbf{F}}e_4 \\ L_3 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + P_{\mathbf{F}}e_3 + P_{\mathbf{F}}e_4 \end{aligned}$$

es tal que $L_0/L_1 \simeq k$ y $L_1/L_2 \simeq k^3$, por lo tanto el $O_{\mathbf{F}}-$orden hereditario $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ determinado por esta cadena no es principal.

Observación 2.1.13. Sea $N = N_1 + N_2 + ...N_e$ una partición ordenada de N. Definamos la cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos $\mathcal{L}$ por:

$$\begin{aligned} L_0 &= O_{\mathbf{F}}e_1 + ... + O_{\mathbf{F}}e_N \\ L_1 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_{N_1} + O_{\mathbf{F}}e_{N_1+1} ... + O_{\mathbf{F}}e_N \\ & \vdots \\ L_i &= P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_{N_i} + O_{\mathbf{F}}e_{N_i+1} ..... + O_{\mathbf{F}}e_N \\ & \vdots \\ L_e &= P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_N \end{aligned}$$

Entonces tenemos lo siguiente:

1. $L_i/L_{i+1} \simeq k_{\mathbf{F}}^{N_{i+1}}$
2. $L_i/L_e \simeq k_{\mathbf{F}}^{N_{i+1}+......+N_e}$
3. $g\mathcal{L}_1 g^{-1} = \mathcal{L}_2$ si y solamente si $(N_1, ..., N_e)$ es igual para ambas. Esto es, cada partición de $N = N_1 + ... + N_e$ determina una cadena $\mathcal{L}$ salvo conjugación.
4. El conjunto de las particiones ordenadas de N determina las órbitas en $X = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L}$ es una cadena de retículos$\}$ bajo la acción de G por conjugación sobre X.

Ejemplo 2.1.14. Consideremos $N = 3$, así tenemos las siguientes particiones:

1. $(1, 1, 1) \leftrightsquigarrow \mathcal{L}_0 = \left\{ \begin{aligned} L_0^0 &= O_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_1^0 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_2^0 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_3^0 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + P_{\mathbf{F}}e_3 \end{aligned} \right. \leftrightsquigarrow \mathcal{A}_0$

donde $\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$

2. $(1,2) \leftrightsquigarrow \mathcal{L}_1 = \begin{cases} L_0^1 = O_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_1^1 = P_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_2^1 = P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + P_{\mathbf{F}}e_3 \end{cases} \leftrightsquigarrow \mathcal{A}_1$

donde $\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$

3. $(2,1) \leftrightsquigarrow \mathcal{L}_2 = \begin{cases} L_0^2 = O_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_1^2 = P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_2^2 = P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + P_{\mathbf{F}}e_3 \end{cases} \leftrightsquigarrow \mathcal{A}_2$

donde $\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$

4. $(3,0) \leftrightsquigarrow \mathcal{L}_3 = \begin{cases} L_0^3 = O_{\mathbf{F}}e_1 + O_{\mathbf{F}}e_2 + O_{\mathbf{F}}e_3 \\ L_1^3 = P_{\mathbf{F}}e_1 + P_{\mathbf{F}}e_2 + P_{\mathbf{F}}e_3 \end{cases} \leftrightsquigarrow \mathcal{A}_3$

donde $\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$

Además tenemos que:

$$\mathrm{Orb}_G(\mathcal{L}_0) = \{g\mathcal{L}_0 \mid g \in G\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_G(\mathcal{L}_0) &= \{g \in G \mid g\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0\} \\ &= \{g \in G \mid \exists j(g) \in \mathbf{Z}, gL_i^0 = L_{i+j(g)}^0\}\end{aligned}$$

Proposición 2.1.15. Sea $\mathcal{A}$ el orden hereditario en A determinado por una cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ y sea $\mathcal{U} = \mathcal{A}^\times$ el subgrupo de G de todas las unidades del anillo $\mathcal{A}$. Entonces $\mathrm{Stab}_G(\mathcal{L}) = N_G(\mathcal{U})$.

Demostración:

Si $g \in N_G(\mathcal{U})$ entonces $g^{-1}ug(L_i) = L_i$, para todo $i \in \mathbf{Z}$, así $ugL_i = gL_i$ para todo $i \in \mathbf{Z}$, o sea $\mathrm{Stab}_G(g\mathcal{L}) = \mathcal{U}$ y como $\mathcal{A}$ determina $\mathcal{L}$ entonces $G/\mathcal{U} \simeq \mathrm{Orb}_G(\mathcal{L})$. Luego $g\mathcal{L} = \mathcal{L}$ lo cual implica que $gL_i = L_{i+j(g)}$ esto es $g \in \mathrm{Stab}_G(\mathcal{L})$. Recíprocamente, si $g \in \mathrm{Stab}_G(\mathcal{L})$ entonces $g\mathcal{L} = \mathcal{L}$, lo que significa que $\exists j(g) \in \mathbf{Z}$ tal que $gL_i = L_{i+j(g)}$ para todo $i \in \mathbf{Z}$ y así $agL_i = a(L_{i+j(g)}) \subset L_{i+j(g)} = gL_i$, para a en $\mathcal{A}^\times$ y esto nos dice que $g^{-1}agL_i \subset L_i$ lo que equivale a decir que $g^{-1}ag \in \mathcal{A}^\times$ y por lo tanto $g \in N_G(\mathcal{U})$.

Observación 2.1.16.

Los retículos $\mathrm{End}^n_{O_{\mathbf{F}}}(\mathcal{L})$ son $(\mathcal{A},\mathcal{A})-$bimódulos. En particular, $\mathrm{End}^1_{O_{\mathbf{F}}}(\mathcal{L}) = \mathcal{P}$ corresponde a ser el radical de Jacobson de $\mathcal{A}$. Como ideal fraccionario de $\mathcal{A}$, el radical $\mathcal{P}$ es invertible y tenemos además,

$$\mathcal{P}^n = \mathrm{End}^n_{O_{\mathbf{F}}}(\mathcal{L}) \qquad\qquad (n \in \mathbf{Z})$$

y se verifica que,

$$\mathcal{P}^n L_i = L_{i+n} \qquad\qquad (n \in \mathbf{Z})$$

Si $e = e(\mathcal{L})$ es el período de la cadena de retículos $\mathcal{L}$ entonces,

$$\mathcal{P}^e = P_{\mathbf{F}}\mathcal{A}$$

Si $\mathcal{A}$ es un orden hereditario principal entonces $\mathcal{P} = \pi\mathcal{A}$ donde π es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $\pi^e = \varpi_{\mathbf{F}}\mathbf{1}_N$

Explícitamente tenemos:
$L_i = P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_{fi} + O_{\mathbf{F}}e_{fi+1} + ... + O_{\mathbf{F}}e_N$
con $f = \frac{N}{e}$, $i = 0, ..., e-1$ y $P_{\mathbf{F}}L_i = L_{i+e}$ y

$$\pi = \begin{pmatrix} 0_f & 0_f & \dots & 0_f & \varpi_{\mathbf{F}}\mathbf{1}_f \\ 1_f & 0_f & \ddots & & 0_f \\ 0_f & 1_f & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_f & \dots & 0_f & 1_f & 0_f \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz de tamaño $e\times e$ donde cada entrada es de tamaño $f\times f$ y 0_f representa la matriz nula de tamaño $f\times f$ y 1_f es la matriz identidad de tamaño $f\times f$. Así, $\mathcal{A}$ son las matrices de tamaño $e\times e$ con entradas en bloques de tamaños $f\times f$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} M_f(O_{\mathbf{F}}) & \cdots & \cdots & M_f(O_{\mathbf{F}}) & M_f(P_{\mathbf{F}}) \\ \vdots & & & & M_f(O_{\mathbf{F}}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ M_f(O_{\mathbf{F}}) & \cdots & \cdots & M_f(O_{\mathbf{F}}) & M_f(O_{\mathbf{F}}) \end{bmatrix}$$

y así se tiene claramente que,

$$\mathcal{P} = \pi\mathcal{A} = \begin{bmatrix} M_f(P_{\mathbf{F}}) & \dots & \dots & \dots & M_f(P_{\mathbf{F}}) \\ M_f(O_{\mathbf{F}}) & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & M_f(P_{\mathbf{F}}) & \vdots \\ M_f(O_{\mathbf{F}}) & \dots & \dots & M_f(O_{\mathbf{F}}) & M_f(P_{\mathbf{F}}) \end{bmatrix}$$

Definición 2.1.17. Si $\mathcal{A}$ es un orden hereditario se define $\mathcal{U}^n = 1 + \mathcal{P}^n$, $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U} = \mathcal{A}^\times$ y $\mathcal{K} = N_G(\mathcal{U})$.

Ejemplo 2.1.18.

Si consideramos $\mathcal{A} = M_N(O_{\mathbf{F}})$ y $\mathcal{P} = M_N(P_{\mathbf{F}})$ entonces es claro que la correspondiente cadena $\mathcal{L}$ es:

$$\begin{aligned} L_0 &= O_{\mathbf{F}}e_1 + ... + O_{\mathbf{F}}e_N \\ L_1 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_N \end{aligned}$$

y $e(\mathcal{L}) = 1$, $L_0/L_1 \simeq k^N$ y $L_1/L_1 = \{0\}$. Así tenemos la bandera incompleta $\mathcal{B}_0 = \{\{0\}, k^N\}$ y es claro que bajo la acción de $GL(N,k)$ sobre las banderas incompletas se tiene que $\mathrm{Stab}_G(\mathcal{B}_0) = GL(N,k)$, esto es el subgrupo parabólico maximal. En esta situación tenemos:

a) $\pi = \varpi_{\mathbf{F}}\mathbf{1}_N$, y el polinomio característico asociado a π es $c_\pi(x) = (x - \varpi_{\mathbf{F}})^N$

b) $\mathcal{P}^n = M_N(P_{\mathbf{F}}^n)$

c) $\mathcal{U} = \mathcal{A}^\times = GL_N(O_{\mathbf{F}})$

d) $\mathcal{K} = N_G(\mathcal{U}) = \mathbf{F}^\times\mathcal{U}$ el cual es compacto módulo el centro de G.

e) $\mathcal{U}^n = 1 + \mathcal{P}^n$ es una familia de subgrupos abiertos compactos de $GL_N(\mathbf{F})$.

Podemos decir que $\mathcal{A} = M_N(O_{\mathbf{F}})$ es un orden hereditario *no ramificado*.

Ahora consideremos la cadena $\mathcal{L}$ dada por:

$$\begin{aligned} L_0 &= O_{\mathbf{F}}e_1 + ... + O_{\mathbf{F}}e_N \\ L_1 &= P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + O_{\mathbf{F}}e_N \\ &\ \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ L_{N-1} &= P_{\mathbf{F}}e_1 + ... + P_{\mathbf{F}}e_N \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & \dots & P_{\mathbf{F}} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & \dots & \dots & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$ y $\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{F}} & \dots & \dots & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & \dots & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$.

En esta situación se verifican las siguientes propiedades

a) $\pi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el polinomio característico asociado a π es $c_\pi(x) = x^N - \varpi_{\mathbf{F}}$ el cual es irreducible en $\mathbf{F}[x]$.

b) $\mathcal{U} = \mathcal{A}^\times = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}}^\times & P_{\mathbf{F}} & \dots & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & \dots & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}}^\times \end{bmatrix}$

c) $\mathcal{K} = N_G(\mathcal{U}) = \langle \pi \rangle \mathcal{U}$ el cual es compacto módulo el centro de G.

d) $\mathcal{U}^n = 1 + \mathcal{P}^n$ es una familia de subgrupos abiertos compactos de $GL_N(\mathbf{F})$.

En este caso podemos decir que $\mathcal{A}$ es un orden hereditario *totalmente ramificado.*

Proposición 2.1.19. El $N_G(\mathcal{U}) = \mathcal{K}$ es un subgrupo abierto de G y compacto módulo el centro de G.

Demostración:

El grupo $\mathbf{F}^\times \mathcal{U}$ esta siempre contenido en $\mathcal{K}$ de donde se obtiene que $\mathcal{K}$ es abierto. En efecto, $\mathcal{K} = \big\{x \in G / \exists j(x) \in \mathbf{Z}$ talque $xL_i = L_{i+j(x)}\ \forall i \in \mathbf{Z}\big\}$ entonces $\mathcal{K} \supset \mathcal{U}$ pues $uL_i = L_i$. Por otra parte si $x \in \mathbf{F}^\times$ entonces $x = \varpi_{\mathbf{F}}^z a$, $z \in \mathbf{Z}$, $a \in O_{\mathbf{F}}^\times$, entonces $\varpi_{\mathbf{F}}^z a L_i = \varpi_{\mathbf{F}}^z L_i = \mathcal{P}^{ez} L_i = L_{i+ez}$ ($\mathcal{P}^e L_i = L_{i+e}$ y $\mathcal{P}^e = P_{\mathbf{F}} \mathbf{1}_N$) así que $\mathcal{K} \supset \mathbf{F}^\times$ y por lo tanto $\mathcal{K} \supset \mathbf{F}^\times \mathcal{U}$.

Ahora no es dificil ver que $\mathcal{K} = \{g \in G / g\mathcal{L} = \mathcal{L}\}$ así la acción de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{L}$ es una acción por automorfismo de $\mathbf{Z}$, con lo cual se obtiene que

$$\mathcal{K} / \mathbf{F}^\times \mathcal{U} \simeq \mathbf{Z} / e\mathbf{Z}$$

lo que significa que $\mathcal{K}$ es compacto módulo el centro del grupo G.

Observación 2.1.20. En general se tiene que dado un orden hereditario $\mathcal{A}$ cualquiera entonces $\mathcal{U} = \mathcal{A}^\times$es un subgrupo compacto maximal del grupo G y $\mathcal{K}$ es un subgrupo de G el cual es compacto módulo el centro y es maximal con esta propiedad.

2.2. Entrelazamiento de representaciones.

Recordemos que $\psi \in \widehat{\mathbf{F}^\times}$, con conductor $P_{\mathbf{F}}$, así podemos definir un carácter $\psi_b : A \longrightarrow \mathbf{C}^\times$, de manera que para $b \in A$ se tenga,

$$\psi_b(x) = \psi(tr(bx)) \qquad (x \in A)$$

De esta forma, si $\hat{A}$ denota el dual de Pontrjagin de A entonces la función definida por $b \to \psi_b$ es un isomorfismo entre A y $\hat{A}$. Ver [Bu 2].

Por otra parte si $\mathcal{A}$ es un orden hereditario en A y $\mathcal{P}$ es el radical de Jacobson de $\mathcal{A}$ entonces cada $\mathcal{P}^n$ es un $O_{\mathbf{F}}-$submódulo de $A = M_N(\mathbf{F})$.

Así tenemos la siguiente sucesión,

$$1 \longrightarrow \left\{\psi_b \in A \mid \varphi_{b_{|_{\mathcal{P}^{n+1}}}} \equiv 1\right\} \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}^{n+1}} \longrightarrow 1$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \psi_{b_{|_{\mathcal{P}^{n+1}}}} \equiv 1 &\iff tr(bx) \in \operatorname{Ker}\psi \qquad \forall x \in \mathcal{P}^{n+1} \\ &\iff \quad tr(bx) \in P_{\mathbf{F}} \qquad \forall x \in \mathcal{P}^{n+1} \end{aligned}$$

Ahora definamos $(\mathcal{P}^{n+1})^* = \{b \in A \mid tr(bx) \in P_{\mathbf{F}}, \forall x \in \mathcal{P}^{n+1}\}$. No es difícil probar que $(\mathcal{P}^{n+1})^* = \mathcal{P}^{-n}$ y así tenemos que

$$\widehat{A}/(\mathcal{P}^{n+1})^* \simeq A/\mathcal{P}^{-n} \simeq \widehat{\mathcal{P}^{n+1}}$$

y por lo tanto la función $b \longrightarrow \psi_b$ induce el isomorfismo:

$$\mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{-r} \simeq (\widehat{\mathcal{P}^{r+1}/\mathcal{P}^{n+1}})$$

cuando $n \geq r$.

Por otra parte, si r, n son enteros tales que $n \geq r \geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ entonces tenemos el isomorfismo canónico $\phi : \mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}^{r+1}/\mathcal{P}^{n+1}$ de modo que $\overline{x} \rightarrow \overline{x} - 1$. En efecto,

$$\overline{xy} = (1+x)(1+y) = (1+x+y+xy) - 1 = \overline{x} + \overline{y}$$

Luego ϕ define un isomorfismo entre

$$(\widehat{\mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}}) \simeq (\widehat{\mathcal{P}^{r+1}/\mathcal{P}^{n+1}}) \simeq \mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{-r}$$

definiendo $\psi_b(x) = \psi(tr(b(x-1)))$, para $x \in \mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}$.

Observamos que $\mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}$ es un grupo finito isomorfo a $\mathcal{P}^{r+1}/\mathcal{P}^{n+1}$ así que $(\widehat{\mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}})$ es el conjunto de carácteres de un grupo abeliano finito.

Ejemplo 2.2.1.

Sea $A = M_4(\mathbf{F})$ y $G = GL_4(\mathbf{F})$, y consideremos el orden hereditario principal

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}, \mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \text{ y así tenemos que,}$$

$$\pi_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \varpi \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \pi_{\mathcal{L}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varpi^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Claramente podemos observar que,

$$A \supset \ldots\ldots. \supset \mathcal{P}^{-n} \supset \ldots \supset \mathcal{P}^{-2} \supset \mathcal{P}^{-1} \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{P} \supset \mathcal{P}^{2} \supset \ldots\ldots \supset \mathcal{P}^{n} \supset \ldots\ldots.$$

y así el conjunto $\{\mathcal{P}^{z} \mid z \in \mathbf{Z}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de A y tenemos

$$P^{-1} = \pi_{\mathcal{L}}^{-1} A = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$$

y

$$P^{-2} = \pi_{\mathcal{L}}^{-2} A = \pi_{\mathcal{L}}^{-1} P^{-1} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ P_{\mathbf{F}}^{-1} & P_{\mathbf{F}}^{-1} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\widehat{\mathcal{U}^2/\mathcal{U}^3} \simeq \widehat{\mathcal{P}^2/\mathcal{P}^3} \simeq \mathcal{P}^{-2}/\mathcal{P}^{-1} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el cual es un grupo abeliano finito.

Lema 2.2.2. Sean S y T $O_{\mathbf{F}}-$retículos en A, y $S^{*} = \{x \in A \mid tr(xS) \subset P_{\mathbf{F}}\}$ entonces

1. $S^{**} = S$
2. $(S+T)^{*} = S^{*} \cap T^{*}$
3. $(S \cap T)^{*} = S^{*} + T^{*}$

Demostración:

1. Como S es un $O_{\mathbf{F}}-$retículo en A existe una base $\mathcal{B} = \{v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq N\}$ en A tal que (S es un $O_{\mathbf{F}}-$módulo finitamente generado con una base de A).

$$S = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq N} O_{\mathbf{F}} v_{ij}$$

Dado $x \in S^*$, $< x, s >= tr(xs) \in P_{\mathbf{F}}$, para todo $s \in S$. Esto es, $tr(x\sum_{i,j}\alpha_{ij}v_{ij}) = \sum_{i,j}\alpha_{ij}tr(xv_{ij})$ el cual es un elemento de $P_{\mathbf{F}}$. Lo anterior equivale a decir que $tr(xv_{ij}) \in P_{\mathbf{F}}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Así,

$$S^* = \bigoplus_{1\leq i,j\leq N} P_{\mathbf{F}} v_{ij}^*$$

donde $B^* = \left\{v_{ij}^*/1 \leq i, j \leq N\right\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$. De la misma forma podemos demostrar que:

$$S^{**} = \bigoplus_{1\leq i,j\leq N} O_{\mathbf{F}} v_{ij}^{**} = S$$

2. $(S+T)^* = \{x \in A \mid tr(x(s+T)) \in P_{\mathbf{F}}\}$
$= \{x \in A \mid tr(xS) + tr(xT) \in P_{\mathbf{F}}\}$
$= \{x \in A \mid tr(xS) \in P_{\mathbf{F}}\} \cap \{x \in A \mid tr(xT) \in P_{\mathbf{F}}\}$
$= S^* \cap T^*$
3. $(S^* + T^*) = S^{**} \cap T^{**} = S \cap T$
y $S^* + T^* = (S^* + T^*)^{**} = (S \cap T)^*$

Desde el teorema de Mackey tenemos que dado representaciones σ de K y τ de H con H subgrupo cerrado de G y K subgrupo abierto de G y tal que K es compacto en $H\diagdown G$ entonces,

$$\mathrm{Hom}_G(c-\mathrm{Ind}_K^G\,\sigma, c-\mathrm{Ind}_H^G\,\tau) \simeq \bigoplus_{H\diagdown G/K} \mathrm{Hom}_{xHx^{-1}\cap K}(\sigma, \tau^x)$$

y de ahí la importancia de conocer como es el $\mathrm{Hom}_{xHx^{-1}\cap K}(\sigma, \tau^x)$ en ciertos casos y así tenemos la siguiente,

Definición 2.2.3. Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario en A, $\mathcal{P}$ su radical de Jacobson y $\mathcal{U}^n = 1 + \mathcal{P}^n$, $n \in \mathbf{Z}$. Se define el conjunto $\mathcal{I}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2})$ de todos los entrelazamientos entre los caracteres ψ_{b_1} y ψ_{b_2} de $(\widehat{\mathcal{U}^n/\mathcal{U}^{n+1}})$ por:

$$\mathcal{I}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2}) = \left\{x \in G \mid \mathrm{Hom}_{x\mathcal{U}^n x^{-1}\cap\mathcal{U}^n}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2}^x) \neq (0)\right\}$$

Proposición 2.2.4. Dado el conjunto $\mathcal{I}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2})$, de todos los entrelazamientos entre los caracteres ψ_{b_1} y ψ_{b_2} de $(\widehat{\mathcal{U}^n/\mathcal{U}^{n+1}})$, se tiene que:

$$\mathcal{I}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2}) = \left\{x \in G \mid (b_1 + \mathcal{P}^{1-n}) \cap x(b_2 + \mathcal{P}^{1-n})x^{-1} \neq \phi\right\}$$

Demostración:

Como $\psi_{b_1}, \psi_{b_2}^x$ son caracteres se tiene que $\mathrm{Hom}_{x\mathcal{U}^n x^{-1}\cap \mathcal{U}^n}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2}^x) \neq \emptyset$ implica $\psi_{b_1} = \psi_{b_2}^x$ sobre $x\mathcal{U}^n x^{-1} \cap \mathcal{U}^n$. Esto significa que $\psi_{b_1}(y) = \psi_{b_2}^x(y)$ para todo $y \in x\mathcal{U}^n x^{-1} \cap \mathcal{U}^n$, esto es:

$$\begin{array}{rcll} \psi(tr(b_1(u-1))) & = & \psi(tr(b_2(x^{-1}yx-1))); & y \in x(1+\mathcal{P}^n)x^{-1} \cap (1+\mathcal{P}^n) \\ & = & \psi(tr(b_2x^{-1}(y-1)x)); & y-1 \in x\mathcal{P}^n x^{-1} \cap \mathcal{P}^n \\ & = & \psi(tr(xb_2x^{-1}(y-1))); & y-1 \in x\mathcal{P}^n x^{-1} \cap \mathcal{P}^n \end{array}$$

donde $\psi \in \widehat{\mathbf{F}^+}$ es el carácter que se fijó anteriormente. Así,

$\psi(tr(b_1(y-1)))\psi^{-1}(tr(xb_2x^{-1}(y-1))) = 1$

$\psi(tr(b_1(y-1) - xb_2x^{-1}(y-1)) = 1$

$\psi(tr([b_1 - xb_2x^{-1}]\,(y-1)) = 1;$ para $y-1 \in x\mathcal{P}^n x^{-1} \cap \mathcal{P}^n)$

Luego tenemos que $tr([b_1 - xb_2x^{-1}]\,(y-1)) \in P_{\mathbf{F}}$, de donde se obtiene que $tr([b_1 - xb_2x^{-1}]\,(x\mathcal{P}^n x^{-1} \cap \mathcal{P}^n) \subset P_{\mathbf{F}}$ lo cual quiere decir que $b_1 - xb_2x^{-1} \in (x\mathcal{P}^n x^{-1} \cap \mathcal{P}^n)^*$ que es igual, por el lema anterior, a $(x\mathcal{P}^n x^{-1})^* + (\mathcal{P}^n)^*$ luego,

$b_1 - xb_2x^{-1} \in (x\mathcal{P}^n x^{-1})^* + (\mathcal{P}^n)^*$ y esto implica $b_1 \in xb_2x^{-1} + (x\mathcal{P}^n x^{-1})^* + (\mathcal{P}^n)^*$, esto es
$b_1 = r + s \in xb_2x^{-1} + (x\mathcal{P}^n x^{-1})^* + (\mathcal{P}^n)^*$ lo que equivale a

$b_1 - s \in xb_2x^{-1} + (x\mathcal{P}^n x^{-1})^* \cap (\mathcal{P}^n)^*$ luego $s \in xb_2x^{-1} + (x\mathcal{P}^n x^{-1})^* \cap b_1 + (\mathcal{P}^n)^*$

así que $xb_2x^{-1} + (x\mathcal{P}^n x^{-1})^* \cap b_1 + (\mathcal{P}^n)^* \neq \emptyset$ de donde podemos concluir que

$$(b_1 + \mathcal{P}^{1-n}) \cap x(b_2 + \mathcal{P}^{1-n})x^{-1} \neq \emptyset$$

Recíprocamente, si $x \in G$ tal que

$$(b_1 + \mathcal{P}^{1-n}) \cap x(b_2 + \mathcal{P}^{1-n})x^{-1} \neq \emptyset$$

entonces existe $z = b_1 + \alpha$ y $z = x(b_2 + \beta)x^{-1}$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{P}^{1-n}$. Así, $\psi_{\alpha_{|\mathcal{U}^n}} \equiv 1$ y $\psi_{\beta_{|\mathcal{U}^n}} \equiv 1$. Ahora, dado $y \in \mathcal{U}^n$,

$$\begin{array}{rcl} \psi_{b_1+\alpha}(y) & = & \psi tr((b_1+\alpha)(1-y)) \\ & = & \psi tr(b_1(1-y) + \alpha(1-y)) \\ & = & \psi\,[tr(b_1(1-y)) + tr(\alpha(1-y))] \\ & = & \psi tr(b_1(1-y))\psi tr(\alpha(1-y)) \\ & = & \psi_{b_1}(y)\psi_\alpha(y) = \psi_{b_1}(y) \end{array}$$

Ahora dado $y \in x\mathcal{U}^n x^{-1}$, $\psi_{x(b_2+\beta)x^{-1}}(y) = \psi_{b_2}^x(y)$ por lo tanto $\psi_{b_1}(y) = \psi_{b_2}^{\times}(y)$ para cualquier $y \in x\mathcal{U}^n x^{-1} \cap \mathcal{U}^n$, lo cual significa que

$$\mathrm{Hom}_{x\mathcal{U}^n x^{-1} \cap \mathcal{U}^n}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2}^x) \neq \emptyset$$

es decir, $x \in \mathcal{I}(\psi_{b_1}, \psi_{b_2})$.

Ejercicio.2.2.5.

1. Sea K un subgrupo abierto compacto módulo el centro de G. Sea σ una representación irreducible de K. Probar que σ es de dimensión finita.
2. Si $\mathcal{I}(\sigma, \sigma) = \{x \in G \mid \mathrm{Hom}_{xKx^{-1}\cap K}(\sigma, \sigma^x) \neq \phi\}$ entonces $\mathrm{Ind}_K^G \sigma$ es irreducible si y solamente si $\mathcal{I}(\sigma, \sigma) = K$ (Ayuda: Probar que $\mathrm{Ind}_K^G \sigma = c - \mathrm{Ind}_K^G \sigma$ es crucial para aplicar el teorema de Mackey.)

2.3. Elementos Cuspidales

Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario principal con periodo e asociado a la cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$. Además $\mathcal{P}$ denota, al igual que siempre, el radical de Jacobson de $\mathcal{A}$. Esto es, dado $V = \mathbf{F}^N$ y una base de V como $\mathbf{F}-$espacio vectorial entonces, $N = fe$, $P_{\mathbf{F}} L_i = L_{i+e}$ y $\dim_k(L_i/L_{i+1}) = f$.

Ahora si consideramos L_i/L_{i+1} y L_{i+e}/L_{i+e+1} como $k_{\mathbf{F}}-$espacios vectoriales ($k_{\mathbf{F}} = O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}$) entonces podemos definir la función

$$\phi : L_i/L_{i+1} \longrightarrow L_{i+e}/L_{i+e+1}$$

$\phi(x + L_{i+1}) = \pi_{\mathbf{F}} x + L_{i+e+1}$ el cual es un $k_{\mathbf{F}}-$isomorfismo. En efecto, $\pi_{\mathbf{F}} x + L_{i+e+1} = L_{i+e+1}$ si y solamente si $x \in L_{i+1}$ lo que significa que ϕ esta bien definida y es una función inyectiva. Además, como $\pi_{\mathbf{F}} L_i = L_{i+e}$ entonces ϕ es sobreyectiva. Así podemos identificar L_i/L_{i+1} con L_{i+e}/L_{i+e+1}.

Por otra parte, dado un elemento $\alpha \in A$ podemos definir la función $k_{\mathbf{F}}-$lineal: $\alpha_i : L_i/L_{i+1} \longrightarrow L_i/L_{i+1}$ de manera que $x + L_{i+1}$ es enviado en $\alpha(x) + L_{i+1}$ y como $\alpha \in A$ entonces $\alpha(L_i) \subset L_i$.

Así tenemos que, con la identificación hecha anteriormente y los $k_{\mathbf{F}}-$endomorfismos α_i de L_i/L_{i+1}, podemos definir,

$$\emptyset : \mathcal{A} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}}(L_i/L_{i+1})$$

por: $\emptyset(\alpha) = (\alpha_0, ..., \alpha_{e-1})$ el cual es un epimorfismo de anillos con $\mathrm{Ker}\,\emptyset = \mathcal{P}$.

En efecto, claramente es un epimorfismo de anillos y para cualquier $i = 0, ..., e-1$ se tiene que $\alpha_i(x + L_{i+1}) \in L_{i+1}$ si y solamente si $\alpha(x) \in L_{i+1}$, para cualquier $x \in L_{i+1}$ lo cual significa que $\alpha(L_i) \subset L_{i+1}$ esto es $\alpha \in \mathcal{P}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{A}/\mathcal{P} \simeq \bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}}(L_i/L_{i+1})$$

Ejemplo 2.3.1.

Si $V = \mathbf{F}^4$ y $\mathcal{L}$ es tal que $e(\mathcal{L}) = 2$ entonces

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A}$$

Así tenemos que:

$$\mathcal{A}/\mathcal{P} \simeq \begin{bmatrix} k_{\mathbf{F}} & k_{\mathbf{F}} & 0 & 0 \\ k_{\mathbf{F}} & k_{\mathbf{F}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\mathbf{F}} & k_{\mathbf{F}} \\ 0 & 0 & k_{\mathbf{F}} & k_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \simeq M_2(k_{\mathbf{F}}) \bigoplus M_2(k_{\mathbf{F}}).$$

Lo anterior es general. Como $L_i/L_{i+1} \simeq L_{i+1}/L_{i+2}$ y esto vale para todo $i = 0, ..., e-1$ entonces podemos identificar

$$\mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}}(L_i/L_{i+1}) \simeq M_f(k_{\mathbf{F}})$$

Así obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{A}/\mathcal{P} & \xrightarrow{\psi} & M_f(k_{\mathbf{F}}) \times \cdots \times M_f(k_{\mathbf{F}}) & \\ g + \mathcal{P} & & \rightsquigarrow & & (g_0, ...g_{e-1}) \\ \downharpoonleft & \downarrow & & \downarrow & \downharpoonleft \sigma \\ \pi_{\mathcal{L}}^{-1} g \pi_{\mathcal{L}} + \mathcal{P} & & \rightsquigarrow & & (g_1, g_2, ...g_{e-1}, g_0) \\ & \mathcal{A}/\mathcal{P} & \xrightarrow{\psi} & M_f(k_{\mathbf{F}}) \times \cdots \times M_f(k_{\mathbf{F}}) & \end{array}$$

Claramente tenemos: $\pi_{\mathcal{L}}^{-1} g \pi_{\mathcal{L}}(L_i) = \pi_{\mathcal{L}}^{-1} g(L_{i+1}) \subset \pi_{\mathcal{L}}^{-1}(L_{i+1}) = L_i$ así, $\pi_{\mathcal{L}}^{-1} g \pi_{\mathcal{L}} \in \mathcal{A}$.

Por otra parte, dado $g \in \mathcal{A}/\mathcal{P}$, si $\psi(g) = (g_0, ..., g_{e-1})$ entonces

$$\psi(\pi_{\mathcal{L}}^{-1} g \pi_{\mathcal{L}}) = (g_1, g_2, ...g_{e-1}, g_0) = \sigma(g_0, ..., g_{e-1})$$

En efecto, si $\pi_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} 1_f \\ 1_f & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1_f & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\pi_{\mathcal{L}}^{-1} \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & g_{e-1} \end{pmatrix} \pi_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & g_{e-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & g_0 \end{pmatrix}$$

Denotemos por $\sigma : M_f(k)^e \longrightarrow M_f(k)^e$ definido por,

$$\sigma(g_0, ..., g_{e-1}) = (g_1, g_2, ...g_{e-1}, g_0)$$

La función σ es un automorfismo de anillos. Observe que σ es una permutación cíclica de orden e, esto es

$$\sigma^e = \mathbf{Id}$$

y $\sigma^m(g_0, ..., g_{e-1}) = (g_m, g_{m+1}, ..., g_{e-1}, g_0, ...g_{m-1})$, $m = 1, ..., e$ y $e + k \equiv k (\operatorname{mod} e)$

Por otra parte consideremos la función:

$$\varphi : \mathcal{P}^m/\mathcal{P}^{m+1} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{P}$$

definida de manera que $b + \mathcal{P}^{m+1}$ es enviado en $\varpi_{\mathbf{F}}^{-m} b^e + \mathcal{P}$. Función la cual esta bien definida pues $\varpi_{\mathbf{F}}^{-m} b^e(L_i) = (\pi_{\mathcal{L}}^e)^{-m} b^e(L_i) \subset \pi_{\mathcal{L}}^{-em} L_{i+me} = L_i$. Así entonces $\varpi_{\mathbf{F}}^{-m} b^e \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{P}^m = \pi_{\mathcal{L}}^m \mathcal{A}$ entonces dado $b \in \mathcal{P}^m$ existe $b_0 \in \mathcal{A}$ talque $b = \pi_{\mathcal{L}}^m b_0$.

Con todo esto tenemos que $\psi(\pi_{\mathcal{L}}^{-m} g \pi_{\mathcal{L}}^m) = \sigma^m(g_0, ..., g_{e-1})$ para $m = 0, ...,$
$e - 1$. Ahora tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}^m/\mathcal{P}^{m+1} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}/\mathcal{P} & \xrightarrow{\psi} & M_f(k_{\mathbf{F}})^e \\ \pi_{\mathcal{L}}^m b_0 = b + \mathcal{P}^{m+1} & \rightsquigarrow & \varpi_{\mathbf{F}}^{-m} (\pi_{\mathcal{L}}^m b_0)^e & \rightsquigarrow & \psi(\varpi_{\mathbf{F}}^{-m} b^e) = (\beta_0, ..., \beta_{e-1}) \end{array}$$

y como $\varpi_{\mathbf{F}}^{-m}1_N = (\pi_{\mathcal{L}}^{e})^{-m}$ entonces:

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{F}}^{-m}b^e &= (\pi_{\mathcal{L}}^{-m})^e(\pi_{\mathcal{L}}^{m}b_0)^e\\ &= \underbrace{\pi_{\mathcal{L}}^{-m}.......\pi_{\mathcal{L}}^{-m}}_{e}\underbrace{\pi_{\mathcal{L}}^{m}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m}b_0......\pi_{\mathcal{L}}^{m}b_0}_{e}\\ &= \underbrace{\pi_{\mathcal{L}}^{-m}......\pi_{\mathcal{L}}^{-m}}_{e-1}\underbrace{(b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m})(b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m})......(b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m})b_0}_{e-1}\end{aligned}$$

y esto último es igual a

$$\left[(\pi_{\mathcal{L}}^{-m})^{e-1}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m(e-1)}\right]\left[\pi_{\mathcal{L}}^{-m(e-2)}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m(e-2)}\right]...\left[\pi_{\mathcal{L}}^{-2m}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{2m}\right]\left[\pi_{\mathcal{L}}^{-m}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{-m}\right]b_0$$

Así entonces:

$$\psi(\varpi_{\mathbf{F}}^{-m}b^e) = \psi(\pi_{\mathcal{L}}^{-m(e-1)}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m(e-1)})......\psi(\pi_{\mathcal{L}}^{-m}b_0\pi_{\mathcal{L}}^{m})\psi(b_0)$$

Ahora, si denotamos por $\tau = \sigma^m$ y por $\psi(b_0) = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{e-1})$ entonces $\psi(\varpi_{\mathbf{F}}^{-m}b^e)$ es igual a

$\sigma^{m(e-1)}(\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{e-1})\sigma^{m(e-2)}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1})...\sigma^{m}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1})(\alpha_0, .., \alpha_{e-1})$ y esto es igual a $\tau^{e-1}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1})\tau^{e-2}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1}).....\tau(\alpha_0, ..., \alpha_{e-1})(\alpha_0, .., \alpha_{e-1})$

Como:

$$\tau(\alpha_0, ..., \alpha_{e-1}) = \sigma^m(\alpha_0, ..., \alpha_{e-1}) = (\alpha_m, \alpha_{m+1}, .., \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1})$$

$$\tau^2(\alpha_0, ..., \alpha_{e-1}) = \sigma^{2m}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1}) = (\alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}, .., \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2m-1})$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\tau^{e-1}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1}) &= \sigma^{(e-1)m}(\alpha_0, .., \alpha_{e-1})\\ &= (\alpha_{(e-1)m}, \alpha_{(e-1)m+1}, .., \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{(e-1)m-1})\end{aligned}$$

entonces si $\psi(\varpi_{\mathbf{F}}^{-m}b^e) = (\beta_0, ..., \beta_{e-1})$ tenemos que $(\beta_0, ..., \beta_{e-1})$ es igual a

$$(\alpha_{(e-1)m}, .., \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{(e-1)m-1})\dots\dots\dots(\alpha_0, ..., \alpha_{e-1})$$

por lo tanto:

$$\beta_0 = \alpha_{(e-1)m}\alpha_{(e-2)m}...........\alpha_m\alpha_0 \in M_f(k)$$

$$\beta_1 = \alpha_{(e-1)m+1}\alpha_{(e-2)m+1}......\alpha_{m+1}\alpha_1 \in M_f(k)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\beta_{e-1} = \alpha_{(e-1)m-1}\alpha_{(e-2)m-1}....\alpha_{m-1}\alpha_{e-1} \in M_f(k)$$

de donde podemos concluir lo siguiente:
1. Si $(m, e) = 1$ entonces la permutación cíclica $\sigma^m = \tau$ genera el grupo de permutaciones cíclicas.
2. Los endomorfismos β_i son todas invertibles o bien son todos no invertibles.
3. Si los endomorfismos β_i son invertibles todos entonces son conjugados entre ellos. $[B(AB)B^{-1} = BA]$

Ejemplo 2.3.2. Sea

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A}$$

y $\mathcal{A}/\mathcal{P} \simeq M_2(k_{\mathbf{F}}) \bigoplus M_2(k_{\mathbf{F}})$

Observemos lo siguiente:

$$L_0 = O_{\mathbf{F}} + O_{\mathbf{F}} + O_{\mathbf{F}} + O_{\mathbf{F}} \qquad L_0/L_2 \simeq k_{\mathbf{F}}^4$$

$$L_1 = P_{\mathbf{F}} + P_{\mathbf{F}} + O_{\mathbf{F}} + O_{\mathbf{F}} \qquad L_1/L_2 \simeq k_{\mathbf{F}}^2$$

$$L_2 = P_{\mathbf{F}} + P_{\mathbf{F}} + P_{\mathbf{F}} + P_{\mathbf{F}} \qquad L_2/L_2 \simeq \{0\}$$

Sea $X = \{l_0 < l_1 < l_2 = k_{\mathbf{F}}^4 \mid \dim_K(l_i/l_{i-1}) = 2\}$ el espacio de las banderas y $G = GL_4(k_{\mathbf{F}})$, el cual actua sobre X transitivamente. Si b_0 denota la bandera $\{0\} < k^2 < k^4$, entonces $\mathrm{Stab}_G(b_0) = P = \begin{bmatrix} Gl_2(k_{\mathbf{F}}) & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ M_2(k_{\mathbf{F}}) & GL_2(k_{\mathbf{F}}) \end{bmatrix}$ el cual corresponde ser un subgrupo parabólico de $GL_4(k_{\mathbf{F}})$.

Por otra parte, si consideramos la función que envia a todo elemento del grupo $\mathcal{A}^\times = \begin{bmatrix} GL_2(O_{\mathbf{F}}) & M_2(P_{\mathbf{F}}) \\ M_2(O_{\mathbf{F}}) & GL_2(O_{\mathbf{F}}) \end{bmatrix}$ al cuociente módulo $P_{\mathbf{F}}$ entonces la imágen es el grupo $P = \begin{bmatrix} GL_2(k_{\mathbf{F}}) & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ M_2(k_{\mathbf{F}}) & GL_2(k_{\mathbf{F}}) \end{bmatrix}$

El subgrupo $\mathcal{A}^{\times}$ de $GL_4(O_{\mathbf{F}})$ es llamado un subgrupo Parahorico de $GL_4(O_{\mathbf{F}})$ y de alguna manera todo orden hereditario corresponde a algún grupo Parahorico de $GL_4(O_{\mathbf{F}})$.

Definición 2.3.3.

Sea $b \in \mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{1-n}$. El elemento b se dice *$e-$cuspidal de nivel* $-n$ si $(n, e) = 1$ y $\varpi_{\mathbf{F}}^{n} b^{e} \in \mathcal{A}/\mathcal{P}$ es una $e-$upla de O_F/P_F endomorfismos con polinomios característicos irreducibles sobre $k_{\mathbf{F}}$.

Ejemplo 2.3.4. Sea

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi_{\mathbf{F}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A}.$$

Así tenemos que $\mathcal{P}^{-2} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ P_{\mathbf{F}}^{-1} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ P_{\mathbf{F}}^{-1} & P_{\mathbf{F}}^{-1} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$ y $\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & P_{\mathbf{F}} \\ O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \\ P_{\mathbf{F}}^{-1} & O_{\mathbf{F}} & O_{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$.

Sea $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \varpi^{-1} & 1 & 0 \\ \varpi^{-1} & \varpi^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^{-2} - \mathcal{P}^{-1}$ entonces

$$\varpi_{\mathbf{F}}^{2} b^{3} = \varpi_{\mathbf{F}}^{2} \begin{pmatrix} \varpi^{-2} & \varpi^{-1} & \varpi^{-1} \\ \varpi^{-1} + \varpi^{-2} & 1 + \varpi^{-2} & \varpi^{-1} \\ 2\varpi^{-2} & \varpi^{-1} + \varpi^{-2} & \varpi^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varpi & \varpi \\ 1 + \varpi & 1 + \varpi^{2} & \varpi \\ 2 & 1 + \varpi & 1 \end{pmatrix}$$

el cual es un elemento de $\mathcal{A}/\mathcal{P}$.

En este caso $(2, 3) = 1$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi & \varpi \\ 1 + \varpi & 1 + \varpi^{2} & \varpi \\ 2 & 1 + \varpi & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\mathcal{P}}$$

de donde se tiene que $b \in \mathcal{P}^{-2}/\mathcal{P}^{-1}$ es un elemento $3-$cuspidal de nivel -2 ya que $\mathcal{A}/\mathcal{P} \simeq M_1(k_{\mathbf{F}})^3$ y por lo tanto el elemento $\varpi_{\mathbf{F}}^{2} b^{3}$ de $\mathcal{A}/\mathcal{P}$ es enviado en $(1,1,1)$ de $M_1(k_{\mathbf{F}})^3$. Además tenemos que $\mathbf{F}[b] \supset \mathbf{F}$ y $[\mathbf{F}[b] : \mathbf{F}] = 3$ con $f = 1$ y $e = 3$

Observación 2.3.5. Diremos que un elemento $b \in M_N(\mathbf{F})$ es $e-$cuspidal si existe $n \in \mathbf{Z}$ talque $b \in \mathcal{P}^n$ y módulo $\mathcal{P}^{n+1}$es $e-$cuspidal.

Ejercicio 2.3.6.

1. Demuestre que si $g \in N_G(\mathcal{U})$ y $b \in \mathcal{P}^n/\mathcal{P}^{n+1}$ es $e-$cuspidal entonces gbg^{-1} es un elemento $e-$cuspidal.
2. Probar que si $x \in \mathcal{A}$ es invertible módulo $\mathcal{P}$ entonces x es invertible en $\mathcal{A}$ y por lo tanto en $M_N(\mathbf{F})$. [*Ayuda*: considere $xy = 1 + p$ y estudie la serie $\frac{1}{1+p}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n p^n$
3. Todo elemento $e-$cuspidal es invertible en $M_N(\mathbf{F})$.

Proposición 2.3.7. Sea b un elemento $e-$cuspidal de $M_N(\mathbf{F})$ entonces:

1. El elemento b es un elemento regular y elíptico en $M_N(\mathbf{F})$ (esto significa que b es invertible y con polinomio característico irreducible en $\mathbf{F}$).
2. La extensión $\mathbf{F}[b]$ de $\mathbf{F}$ es talque $[\mathbf{F}[b] : \mathbf{F}] = ef$ y $\left[k_{\mathbf{F}[b]} : k_{\mathbf{F}}\right] = f$.
3. Para cualquier r en $\mathbf{Z}$ se tiene que $\mathcal{P}^r \cap \mathbf{F}[b] = P^r_{\mathbf{F}[b]}$.
4. El grupo multiplicativo $\mathbf{F}[b]^\times$ es un subgrupo de $\mathcal{K} = N_G(\mathcal{U})$.

Demostración:

1. Asumiremos que: dado $A \in M_N(\mathbf{F})$, $\alpha_0 1_N + ... + \alpha_{N-1}A^{N-1}$ es invertible para todo $\alpha_i \in \mathbf{F}$ $(0 \leq i \leq N-1)$ si y solamente si A es regular y el polinomio característico de A es irreducible. (Ejercicio)

Sea ahora b un elemento $e-$cuspidal en $\mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{1-n}$. Anotemos por $b_0 = \varpi^n_{\mathbf{F}} b^e \in \mathcal{A}/\mathcal{P}$ y ya sabemos entonces que $\psi(b_0)$ es una $e-$upla de matrices regulares elípticas.

Probaremos que, dado un polinomio cualquiera $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{N-1}x^{N-1}$ entonces $p(b)$ es invertible.

Si $\nu_{\mathbf{F}}$ designa la valuación sobre $\mathbf{F}$, consideremos el conjunto:

$$I = \{i \in \{0, ..., N-1\} \mid \nu_{\mathbf{F}}(\alpha_i)e + (-n)i \text{ es mínimo}\}$$

El hecho que $(n,e) = 1$ implica que si $i, i' \in I$ entonces $i \equiv i' (\mathrm{mod}\, e)$. En efecto, si $\nu_{\mathbf{F}}(\alpha_i)e + (-n)i = M$ y $\nu_{\mathbf{F}}(\alpha_{i'})e + (-n)i' = M$ entonces: $(-n)(i - i') = [\nu_{\mathbf{F}}(\alpha_i) - \nu_{\mathbf{F}}(\alpha_{i'})]\, e$ y como $(e,n) = 1$ entonces e divide a $i - i'$ o sea $i \equiv i'(\mathrm{mod}\, e)$.

Sea ahora $i_0 = \min(I)$ y $J = \left\{\frac{i-i_0}{e} \mid i \in I\right\}$ entonces podemos escribir:

$$a = \sum_{i \in I} \alpha_i b^i$$

y claramente tenemos que si $I = \{i_0 \leq i_1 \leq ... \leq i_s\}$

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i \in I} \alpha_i b^i = \alpha_{i_0} b^{i_0} + \alpha_1 b^{i_1} + ... + \alpha_{i_s} b^{i_s} \\ &= \quad = b^{i_0}(\alpha_{i_0} + \alpha_1 b^{i_1 - i_0} + ... + \alpha_{i_s} b^{i_s - i_0}) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} b^{i_k - i_0} = b^{e\frac{(i_k - i_0)}{e}} &= \left[\varpi_{\mathbf{F}}^{-n} (\underbrace{\varpi_{\mathbf{F}}^n b^e}_{b_0}) \right]^{\frac{i_k - i_0}{e}} \\ &= \left[\varpi_{\mathbf{F}}^{-n} b_0 \right]^{\frac{i_k - i_0}{e}} \\ &= \varpi_{\mathbf{F}}^{-n(\frac{i_k - i_0}{e})} b_0^{\frac{i_k - i_0}{e}} \\ &= \varpi_{\mathbf{F}}^{-nj_k} b_0^{j_k}; \text{ con } j_k \in J \end{aligned}$$

y así tenemos que:

$$\begin{aligned} a = \sum_{i \in I} \alpha_i b^i &= b^{i_0}(\alpha_{i_0 +} \alpha_{i_0} \varpi_{\mathbf{F}}^{-nj_1} b_0^{j_1} + \alpha_{i_2} \varpi_{\mathbf{F}}^{-nj_2} b_0^{j_2} + ... + \alpha_{i_s} \varpi_{\mathbf{F}}^{-nj_s} b_0^{j_s}) \\ &= b^{i_0}(\sum_{j \in J} \alpha_{i_0} + e_j \varpi_{\mathbf{F}}^{-nj} b_0^j) \end{aligned}$$

Si denotamos por $\beta_{i_0 + ej} = \alpha_{i_0 + ej} \varpi_{\mathbf{F}}^{-nj}$ entonces ambos elementos en $\mathbf{F}$ tienen la misma valuación la cual se puede suponer nula (es suficiente multiplicar $p(x)$ por constantes)

Por lo tanto:

$$a = b^{i_0}(\sum_{i \in J} \beta_{i_0 + ej} b_0^j)$$

y $\sum_{i \in J} \beta_{i_0 + ej} b_0^j \in \mathcal{A}$ y es invertible módulo $\mathcal{P}$.

En efecto $b_0 = \varpi_{\mathbf{F}}^n b^e \in \mathcal{A} - \mathcal{P}$ y entonces $b_0^j \in \mathcal{A}$ y

$$\sum_{i \in J} \beta_{i_0 + ej} b^j \in \mathcal{A}$$

es una combinación lineal de elementos $\beta_{i_0 + ej} \in O_{\mathbf{F}}^{\times}$ (supusimos $\nu_{\mathbf{F}}(\beta_{i_0 + ej}) = 0$) el cual tiene un polinomio minimal de grado f (el polinomio característico de $\overline{b}_0$ es $c_{\overline{b}_0}(x) = (r(x))^e$ con $r(x) \in k_{\mathbf{F}}[x]$ irreducible de grado f) entonces módulo $\mathcal{P}$ tenemos que: $\sum_{i \in J} \overline{\beta_{i_0 + ej} b_0^j}$ es invertible. Luego, aplicando el ejercicio

2 de 2.3.6. se tiene que $k = \sum\limits_{i\in J}\beta_{i_0+ej}b_0^j$ es invertible en $\mathcal{A}$. Así $a = b^{i_0}k$ y entonces: $p(b) = \sum\limits_{i\in I}\alpha_i b^i + \sum\limits_{i\notin I}\alpha_i b^i$. Luego

$$p(b) = b^{i_0}k + \sum_{i\notin I}\alpha_i b^i$$

y como b es $e-$cuspidal entonces (ejercicio 3 de 2.3.6.) b es invertible y así:

$$k^{-1}b^{-i_0}p(b) - 1 = \sum_{i\notin I}k^{-1}b^{-i_0}\alpha_i b^i$$

Ahora, $b \in \mathcal{P}^{-n}$ entonces $b^i \in \mathcal{P}^{-ni}$ y $b^{-i_0} \in \mathcal{P}^{ni_0}$ y $b^{i_0}b^i \in \mathcal{P}^{ni_0-ni} \subset \mathcal{P}$. En efecto, como $i \notin I$ entonces $(-n)i + \nu_{\mathbf{F}}(\alpha_i)e > (-n)i_0 + \nu_{\mathbf{F}}(\alpha_{i_0})e$ y al igual que antes (módulo multiplicar por una constante el polinomio $p(x)$) podemos suponer que $\nu_{\mathbf{F}}(\alpha_i) = \nu_{\mathbf{F}}(\alpha_{i_0}) = 0$ y por lo tanto $-ni > -ni_0$, esto es $ni_0 - ni > 0$ lo cual implica$\mathcal{P}^{ni_0-ni} \subset \mathcal{P}$.

Luego

$$k^{-1}b^{-i_0}p(b) = 1 + \sum_{i\notin I}k^{-1}b^{-i_0}\alpha_i b^i \in \mathcal{U}$$

y así

$$p(b) = kb^{i_0}\left(1 + \sum_{i\notin I}k^{-1}b^{-i_0}\alpha_i b^i\right)$$

es un elemento invertible. Por lo tanto b tiene un polinomio característico irreducible, esto es b es elíptico y como $N_G(\mathcal{U}) =< \pi > \mathcal{U}$ y $b \in \mathcal{U}$ entonces $\mathbf{F}[b]^x \subset N_G(\mathcal{U})$ ($b^i \in \mathcal{U} = \mathcal{A}^\times$ y así $\sum \alpha_i b^i \in \mathcal{U}$)

2. De lo anterior es inmediato que $\mathbf{F}[b] \supset \mathbf{F}$ y $[\mathbf{F}[b] : \mathbf{F}] = N = ef$.

Definamos ahora $w : M_N(\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{Z}\cup\{\infty\}$ por $w(x) = \text{Sup}\{n \in \mathbf{Z} \mid x \in \mathcal{P}^n\}$. Claramente tenemos que w es una valuación del anillo $M_N(\mathbf{F})$, esto es:

i) $w(xy) = w(x) + w(y)$

y

ii) $w(x + y) \geq \min\{w(x), w(y)\}$

Además se tiene que $w(b) = -n$ y que si $x \in \mathbf{F}^\times$ entonces $w(x) = w(\varpi_{\mathbf{F}}^{\nu_{\mathbf{F}}(x)}u)$ con $u \in O_{\mathbf{F}}^\times$ así, $w(x) = w(\pi^{e\nu_{\mathbf{F}}(x)}u1_N)$ y $u1_N \in \mathcal{U} \subset \mathcal{A}$, entonces $w(x) = e\nu_{\mathbf{F}}(x)$.

Así tenemos que $w : \mathbf{F}[b]^{\times} \longrightarrow \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ es un homomorfismo ($\mathbf{F}[b]^{\times} \subset M_N(\mathbf{F})$) y es sobreyectivo. En efecto, $(w(b), w(\varpi_{\mathbf{F}}) = 1$ entonces dado cualquier $n \in \mathbf{Z}$ existen $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ tal que $\alpha w(b) + \beta w(\varpi_{\mathbf{F}}) = n$ y por lo tanto $b^{-\alpha}\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta}$ es un elemento de $\mathbf{F}[b]^{\times}$ tal que $w(b^{-\alpha}\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta}) = \alpha w(b) + \beta w(\pi_{\mathbf{F}}) = n$.

Con todo esto podemos concluir que w es una valuación sobre $\mathbf{F}[b]$ la cual es una extensión de $\nu_{\mathbf{F}}$, esto es, $w = \nu_{\mathbf{F}} \circ \mathbf{N}$ donde $\mathbf{N}$ es la norma de la extensión.

Así, podemos concluir que $e(\mathbf{F}[b]/\mathbf{F}) = w(\varpi_{\mathbf{F}}) = e$ y entonces $\left[k_{\mathbf{F}[b]} : k_{\mathbf{F}}\right] = f$ ya que $[\mathbf{F}[b] : \mathbf{F}] = ef$.

3. Claramente tenemos que:

$\mathbf{F}[b] \cap \mathcal{A} = \left\{x \in \mathbf{F}[b] \mid w_{\mathbf{F}[b]}(x) \geq 0\right\} = O_{\mathbf{F}[b]}$ y como $\mathbf{F}[b] \supset \mathbf{F}[b] \cap \mathcal{P}^n \supset \mathbf{F}[b] \cap \mathcal{P}^{n+1} \supset \{0\}$, $n \in \mathbf{Z}$ es un retículo de $O_{\mathbf{F}[b]}-$módulos y el único retículo de $O_{\mathbf{F}[b]}-$módulos de $\mathbf{F}[b]$ es $P^n_{\mathbf{F}[b]}$ entonces tenemos:

$$P^n_{\mathbf{F}[b]} = \mathbf{F}[b] \cap \mathcal{P}^n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}$$

4. Desde (1) tenemos que $b \in \mathcal{A}^{\times} = \mathcal{U}$ y así entonces $b \in N_G(\mathcal{U}) =< \pi > \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathbf{F}[b]^{\times} \subset N_G(\mathcal{U}) = \mathcal{K}$.

Observemos que la filtración habitual de $\mathbf{F}[b]^{\times}$, esta es $O^{\times}_{\mathbf{F}[b]} = U \supset U^1 \supset \ldots\ldots \supset U^n \supset \ldots$ donde $U^n = 1 + P^n_{\mathbf{F}[b]}$ viene inducida desde la filtración de $\mathcal{K} \supset \mathcal{U} \supset \mathcal{U}^1 \supset \ldots\ldots \supset \mathcal{U}^n \supset \ldots$ donde $\mathcal{U}^n = 1 + \mathcal{P}^n$. En efecto,

$$\mathbf{F}[b] \cap \mathcal{U}^n = \mathbf{F}[b] \cap (1 + \mathcal{P}^n) = 1 + (\mathbf{F}[b] \cap \mathcal{P}^n) = 1 + P^n_{\mathbf{F}[b]}.$$

Ejercicio 2.3.8.

1. V es un $\mathbf{F}[b]$ $-$espacio vectorial de dimensión 1.
2. $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ es una cadena de $O_{\mathbf{F}[b]}-$retículos de rango 1.(ver Proposición 1.2.1. de [BK])

Proposición 2.3.9.

Sean b y b' dos elementos $e-$cuspidales en $M_N(\mathbf{F})$ y $g \in G$ tal que $gbg^{-1} = b^{'}$ entonces $g \in N_G(\mathcal{U})$.

Demostración:

Como $b' = gbg^{-1}$, se induce un $\mathbf{F}-$isomorfismo lineal entre $\mathbf{F}[b]$ y $\mathbf{F}[b']$, así se tiene que $O_{\mathbf{F}[b]}$ y $O_{\mathbf{F}[b']}$ son isomorfos como $O_{\mathbf{F}}-$módulos. Por otra parte, si $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ es la cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos en $V = \mathbf{F}^N$ entonces gL_i es estable por $O_{\mathbf{F}[b']}$. En efecto, usando el ejercicio 2 de 2.3.7. tenemos que:

$$O_{\mathbf{F}[b']}\left[gL_i\right] = (gOg^{-1})\left[g^{L_i}\right] = \left[g\mathcal{O}_{\mathbf{F}[b]}L_i\right] = gL_i$$

como b' es $e-$cuspidal entonces $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ es una cadena de $O_{\mathbf{F}[b']}-$retículos de rango 1 y entonces $gL_i \in \mathcal{L}$ lo que significa que $gL_i = L_{u(j)}$ para $u : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ es una reordenación de lo índices. Por lo tanto $g \in N_G(\mathcal{U})$.

Observación 2.3.10.

Desde el ejercicio 1 de 2.3.6. tenemos que si $X = \{b \in M_N(\mathbf{F}) \mid b \text{ es cuspidal}\}$ entonces $\mathcal{K} = N_G(\mathcal{U})$ actua sobre X por conjugación. ¿Es esta acción transitiva?

2.4. Elementos minimales y conjuntos rígidos.

Recordemos que dado una extensión finita $\mathbf{E}$ de $\mathbf{F}$ nosotros diremos que $b \in \mathbf{E}$ es $\mathbf{E}/\mathbf{F}-$minimal (o tan solo minimal) si:
(1) $\mathbf{E} = \mathbf{F}[b]$
(2) $(\nu_{\mathbf{E}}(b), e(\mathbf{E}, \mathbf{F})) = 1$
(3) $\overline{\beta} = \varpi_{\mathbf{F}}^{-\nu_{\mathbf{E}}(b)} b^{e(\mathbf{E},\mathbf{F})} + P_{\mathbf{E}}$ genera el cuerpo residual $k_{\mathbf{E}}$ extensión de $k_{\mathbf{F}}$.

Proposición 2.4.1.

Si $b \in \mathbf{E}$ es $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ $-$minimal entonces

$$B = \left\{ b^j \varpi_{\mathbf{F}}^{-\left[\frac{j\nu_{\mathbf{E}}(b)}{e(\mathbf{E}/\mathbf{F})}\right]} \mid j = 0, 1, ..., [\mathbf{E}/\mathbf{F}] - 1 \right\}$$

es una $O_{\mathbf{F}}-$base para $O_{\mathbf{E}}$. ([ ] denota la función parte entera)

Demostración:

Claramente tenemos que $x_j = b^j \varpi_{\mathbf{F}}^{-\left[\frac{j\nu_{\mathbf{E}}(b)}{e(\mathbf{E}/\mathbf{F})}\right]} \in O_{\mathbf{E}}$ para $j = 0, 1, ..., N-1$ si consideramos $N = [\mathbf{E}/\mathbf{F}]$.

En efecto,

$$\nu_{\mathbf{E}}(x_j) = j\nu_{\mathbf{E}}(b) + \nu_{\mathbf{E}}(\varpi_{\mathbf{E}}^{-e\left[\frac{j\nu_{\mathbf{E}}(b)}{e}\right]}) = j\nu_{\mathbf{E}}(b) - e\left[\frac{j\nu_{\mathbf{E}}(b)}{e}\right] \geq 0$$

así tenemos que $x_j \in O_{\mathbf{E}}$.

Por otra parte, como $(\nu_{\mathbf{E}}(b), e(\mathbf{E}/\mathbf{F})) = (n, e) = 1$ entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ tal que $\alpha n + \beta e = 1$ y por lo tanto el elemento $\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta} b^{\alpha}$ es tal que $\nu_{\mathbf{E}}(\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta} b^{\alpha}) = \beta e + \alpha n = 1$. Esto es, $\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta} b^{\alpha} \in P_{\mathbf{E}}$ y podemos considerarlo el elemento primo en $O_{\mathbf{E}}$.

Ahora como, $\varpi_{\mathbf{F}}^{-n} b^e$ es un elemento en $O_{\mathbf{E}}$ tal que módulo $P_{\mathbf{E}}$ es un elemento primitivo de la extensión $k_{\mathbf{E}}$ de $k_{\mathbf{F}}$, $\overline{\beta} = \varpi_{\mathbf{F}}^{-n} b^e + P_{\mathbf{E}}$ genera el cuerpo $k_{\mathbf{F}}$. Luego, usando Lema 3 en capitulo III sección **G** en [S1], tenemos que

$$\left(\varpi_{\mathbf{F}}^{-n} b^e\right)^i \left(\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta} b^{\alpha}\right)^j \qquad\qquad (0 \leq i < f; \qquad 0 \leq j < e)$$

forma una $O_{\mathbf{F}}-$base para $O_{\mathbf{E}}$.

Ahora,

$$\left(\varpi_{\mathbf{F}}^{-n} b^e\right)^i \left(\varpi_{\mathbf{F}}^{\beta} b^{\alpha}\right)^j = \varpi_{\mathbf{F}}^{-ni+\beta j} b^{ei+\alpha j}$$

y si $k = ei + \alpha j$ entonces $-ni + \beta j = -\left[\frac{kn}{e}\right]$.

En efecto, usando el hecho que $\alpha n + \beta e = 1$ tenemos:

$$-\left[\frac{(ei+\alpha j)n}{e}\right] = -\left[in + \frac{\alpha n j}{e}\right] = -in - \left[\frac{j}{e} - \beta j\right] = -in + \beta j$$

Así, el conjunto $\left\{ b^k \varpi_{\mathbf{F}}^{-\left[\frac{kn}{e}\right]} \mid k = 0, ..., N-1 \right\}$ es una $O_{\mathbf{F}}-$base para $O_{\mathbf{E}}$.

Observación 2.4.2. Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}[b]$ y $(\nu_{\mathbf{E}}(b), e(\mathbf{E}/\mathbf{F})) = 1$ y $\left\{ b^k \varpi_{\mathbf{F}}^{-\left[\frac{kn}{e}\right]} \mid k = 0, ..., N-1 \right\}$ es una $O_{\mathbf{F}}-$base para $O_{\mathbf{E}}$ entonces b es $\mathbf{E}/\mathbf{F}-$minimal.

En efecto, $\nu_{\mathbf{E}}(b^k \varpi_{\mathbf{F}}^{-\left[\frac{kn}{e}\right]}) = nk - e\left[\frac{kn}{e}\right] = 0$ si y solamente si $k = e, 2e, ...,$ $(f-1)e$ lo que equivale a decir que $\left\{ \left(b^e \varpi_{\mathbf{F}}^{-n}\right)^k + P_{\mathbf{E}} \mid k0, 1, ..., f-1 \right\}$ es una $k_{\mathbf{F}}-$base de $k_{\mathbf{E}}$.

Esto es, nuestra anterior proposición es realmente una equivalencia.

Definición 2.4.3. Sea S_{-n} el conjunto de todos los elementos b en $\mathcal{P}^{-n}$ tales que $[\mathbf{F}[b]:\mathbf{F}]=N,$ b es un elemento $\mathbf{F}[b]/\mathbf{F}-$minimal y $\mathbf{F}[b]^{\times}\subset\mathcal{K}$.

Ejercicio.2.4.4.

1. Supongamos $(n,e)=1$ y sea b un elemento cuspidal cualquiera de $\mathcal{P}^{n}/\mathcal{P}^{n+1}$. Demuestre que:

$$b\underset{K}{\sim}\begin{bmatrix} 0_f & 1_f & 0_f & \dots & 0_f \\ 0_f & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0_f \\ \vdots & & & & 1_f \\ \varpi_{\mathbf{F}}B & 0_f & \dots & \dots & 0_f \end{bmatrix}$$

tal que $\mathbf{F}[B]$ es una extensión de $\mathbf{F}$ no ramificada y $[\mathbf{F}[B]:\mathbf{F}]=f$ con $B\in M_f(\mathbf{F})$ y siendo 0_f y 1_f la matriz nula y la matriz identidad de $M_f(\mathbf{F})$.

2. Sea $b\in\mathcal{P}^{-n}$ talque $\mathbf{F}[b]/\mathbf{F}$ de grado N y $\mathbf{F}[b]^{\times}\subset K$. Pruebe que si b no es minimal entonces existe $c\in\mathcal{P}^{1-n}$ tal que $\mathbf{F}[b+c]$ no es un cuerpo de grado N.

3. Sea $b\in P^{-n}$. Demuestre que:

$$x(b+P^{1-n})x^{-1}\cap(b+P^{1-n})=\phi \qquad\qquad \forall x\notin\mathcal{K}$$

si y solamente si,
i). $[\mathbf{F}[b]:\mathbf{F}]=N$
ii). $\mathbf{F}[b]^{\times}\subset\mathcal{K}$
iii). b es minimal.

Proposición 2.4.5. Sea b un elemento en $\mathcal{P}^{-n}-\mathcal{P}^{1-n}$. El elemento, b es $e-$cuspidal de nivel$-n$ si y solamente si $b\in S_{-n.}$

Demostración:

Supongamos que b es $e-$cuspidal y $e=e(\mathbf{F}[b]/\mathbf{F})$ y $f=f(\mathbf{F}[b]/\mathbf{F})$.

Por proposición 2.3.7 tenemos que $[\mathbf{F}[b]:\mathbf{F}]=ef$ y $\mathbf{F}[b]^{\times}\subset\mathcal{K}$ y por ser $e-$cuspidal entonces $(e,n)=1$. Además, del hecho que $f=f(\mathbf{F}[b]:\mathbf{F})$ y $\varpi_{\mathbf{F}}^{n}b^{e}\in\mathcal{A}/\mathcal{P}$ es una $e-$upla de $O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}-$endomorfismos con polinomios caracteristicos irreducible sobre $k_{\mathbf{F}}$ entonces $\varpi_{\mathbf{F}}^{n}b^{e}+P_{\mathbf{E}}$ es un elemento primitivo de $k_{\mathbf{E}}/k_{\mathbf{F}}$. Así $b\in S_{-n}$.

Recíprocamente, dado $b\in S_{-n}$ entonces $b\in\mathcal{P}^{-n}-\mathcal{P}^{1-n}$ con $(n,e)=1$. Como $\beta=\varpi_{\mathbf{F}}^{n}b^{e}\in\mathcal{A}\cap\mathbf{F}[b]=O_{\mathbf{F}[b]}$ y como $\mathcal{P}\cap\mathbf{F}[b]=P_{\mathbf{F}[b]}$ entonces $\overline{\beta}\in O_{\mathbf{F}[b]}/P_{\mathbf{F}[b]}$ y $O_{\mathbf{F}[b]}/P_{\mathbf{F}[b]}\subset\mathcal{A}/\mathcal{P}$ y usando el hecho que:

$$\mathcal{A}/\mathcal{P}\overset{\psi}{\simeq}\bigoplus_{i=0}^{e-1}\mathrm{End}_{O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}}(L_i/L_{i+1})$$

donde ψ es la función definida por $\psi(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha}_0, ..., \overline{\alpha}_{e-1})$, entonces podemos definir $p_i : \mathcal{A}/\mathcal{P} \longrightarrow \mathrm{End}_{O_\mathbf{F}/P_\mathbf{F}}(L_i/L_{i+1})$ como la función proyección $p_i(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}_i$. Por otra parte sabemos que $\overline{\beta}$ es un elemento primitivo $\underline{\text{de } k_\mathbf{E}}/k_\mathbf{F}$ así que el polinomio característico de $\overline{\beta} \in \mathcal{A} \cap P_{\mathbf{F}[b]}$, $c_\beta(x)$ es tal que $\overline{c_\beta(x)} = \mathrm{Irr}(\overline{\beta}, k_\mathbf{F})^e$ y como $p_i(\overline{\beta}) = \overline{\beta}_i$entonces el polinomio característico de $\overline{\beta}_i, c_{\overline{\beta_i}}(x)$ debe ser el polinomio irreducible de $\overline{\beta}$ sobre $k_\mathbf{F}$, esto es $c_{\overline{\beta_i}}(x) = \mathrm{Irr}(\overline{\beta}, k_\mathbf{F})$ para todo $i = 0, .., e-1$. Así, $\overline{\beta}$ es una $e-$upla de endomorfismo con polinomio característico irreducible sobre $k_\mathbf{F}$.

Proposición 2.4.6. Sea $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ talque $\mathbf{E} \subset A = M_N(\mathbf{F})$ y $[\mathbf{E} : \mathbf{F}] = N$. Entonces existe un único orden principal $\mathcal{A}$ con $\mathbf{E}^x \subset \mathcal{K}(A)$.
Demostración:
La existencia es clara ya que $[\mathbf{E} : \mathbf{F}] = e \cdot f$ y así tenemos

$$\pi_\mathcal{L} = \begin{pmatrix} O_f & \dots & O_f & \varpi_\mathbf{F} & 1_f \\ 1_f & O_f & \dots & O_f & O_f \\ O_f & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_f & \dots & \dots & 1_f & O_f \end{pmatrix} \in A$$

y es claro que $\mathcal{A} = \{g \in A \mid gL_i \subset L_i\}$ y $\mathcal{P} = \pi_\mathcal{L}\mathcal{A}$ donde $\mathcal{L}$ es la cadena de $O_\mathbf{F}-$retículos canónicamente asociado a $\pi_\mathcal{L}$ con la propiedad que $\mathbf{E}^\times \subset \mathcal{K}$.

Sea ahora $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ la cadena de $O_\mathbf{F}-$retículos en $\mathbf{E}$ determinando $\mathcal{A}$. Usando proposición 1.2.1 de [B-K] para todo $i \in \mathbf{Z}$, L_i es un $O_\mathbf{E}-$retículo. Como los únicos $O_\mathbf{E}-$retículos en $\mathbf{E}$ son los ideales $P_\mathbf{E}^l, l \in \mathbf{Z}$, entonces:

$$L_i = P_\mathbf{E}^{l_i}$$

y por lo tanto existe $l_0 \in \mathbf{Z}$ tal que $L_0 = P_\mathbf{E}^{l_0}$ y si $e(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = e$ entonces $L_e = P_\mathbf{F} L_0 = P_\mathbf{E}^e L_0 = P_\mathbf{E}^{l_0+e}$ y así podemos concluir que el único orden hereditario $\mathcal{A}$ en $A = \mathrm{End}_\mathbf{F}(\mathbf{E})$ es el dado por la cadena de $O_\mathbf{F}-$retículos $\mathcal{L} = \{P_\mathbf{E}^s \mid s \in \mathbf{Z}\}$

Proposición 2.4.7. El conjunto $S_{-n} \subset \mathcal{P}^{-n}$ es un conjunto rígido para todo $n \in \mathbf{Z}$. Esto es:

1. $S_{-n} + \mathcal{P}^{1-n} \subset S_{-n}$
2. $xS_{-n}x^{-1} = S_{-n}, \qquad \forall x \in \mathcal{K}$
3. $xS_{-n}x^{-1} \cap S_{-n} = \phi, \qquad \forall x \notin \mathcal{K}$

Demostración:

1. Como $b \in S_{-n}$ es equivalente a decir que b es $e-$cuspidal, entonces $b + \mathcal{P}^{1-n}$ es un subconjunto de S_{-n}, esto último como una consecuencia de la definición de elemento $e-$cuspidal, y así tenemos que $S_{-n} + \mathcal{P}^{1-n} \subset S_{-n}$.
2. Sigue de proposición 2.3.9 y ejercicio 1 de 2.3.6.
3. Sea $b \in S_{-n}$ entonces por proposición 2.4.5 $\mathcal{A}$ es el único orden hereditario tal que $\mathbf{F}[b]^{\times} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}) = \mathcal{K}$. Si $xS_{-n}x^{-1} \cap S_{-n} \neq \phi$ entonces existe $b \in S_{-n}$ tal que $xbx^{-1} \in S_{-n}$ y $\mathbf{F}[xbx^{-1}]^{\times} \subset \mathcal{K}$. Como $\mathbf{F}[xbx^{-1}]^{\times} = xF[b]^{\times} x^{-1}$ entonces $\mathbf{F}[b]^{\times} \subset x^{-1}\mathcal{K}x = \mathcal{K}$ implica $x \in \mathcal{K}$.

2.5. Teorema de Carayol

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de Carayol en el marco del lenguaje de [B-K] . Para esto daremos algunas definiciones previas.

Definición 2.5.1. Un *estrato* en A es una 4-upla $[\mathcal{A}, n, r, b]$ en la cual $\mathcal{A}$ es un $O_{\mathbf{F}}-$orden hereditario en A, el entero $n > r$ y el elemento b de $\mathcal{A}$ es tal que $\nu_{\mathcal{A}}(b) \geq -n$, esto es $b \in \mathcal{P}^{-n} - \mathcal{P}^{1-n}$ donde $\mathcal{P}$ es el radical de Jacobson de $\mathcal{A}$.

Ejemplo.2.5.2. Sea $b \in S_{-n}$, esto es $b \in \mathcal{P}^{-n}$, $[\mathbf{F}[b] : \mathbf{F}] = N$ b es $\mathbf{F}[b] / \mathbf{F}-$mini-mal y $\mathbf{F}[b]^{\times} \subset \mathcal{K}$. Así podemos considerar el estrato muy cuspidal $[\mathcal{A}, n, r, b]$ con $n > r \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. De este modo $\psi_b \in \widehat{\mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}}$ y lo llamaremos estrato muy cuspidal pues $\mathcal{U}^{n+1} \subset \operatorname{Ker} \psi_b$ y $\psi_{b|\mathcal{U}^n} = \psi_b$.

Definición 2.5.3. Diremos que los estratos $[\mathcal{A}_1, n_1, r_1, b_1]$ y $[\mathcal{A}_2, n_2, r_2, b_2]$ son *equivalentes*, y anotaremos esto por $[\mathcal{A}_1, n_1, r_1, b_1] \sim [\mathcal{A}_2, n_2, r_2, b_2]$, si $b_1 + \mathcal{P}_1^{-r_1} = b_2 + \mathcal{P}_2^{-r_2}$ donde $\mathcal{P}_i$ es el radical de Jacobson de A_i para $i = 1, 2$.

Proposición 2.5.4. Sean $[\mathcal{A}_i, n_i, r_i, b_i]$, $i = 1, 2$ estratos en A y supongamos que ellos son equivalentes. Entonces $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ y $r_1 = r_2$. Además, si $\nu_{\mathcal{A}_i}(b_i) = -n_i$ para $i = 1, 2$, entonces se tiene que $n_1 = n_2$.

Demostración:

Como los estratos son equivalentes entonces $b_1 - b_2 + \mathcal{P}_1^{-r_1} = \mathcal{P}_2^{-r_2}$ lo cual implica que $b_1 - b_2 \in \mathcal{P}_2^{-r_2}$ de donde se concluye que $\mathcal{P}_1^{-r_1} = \mathcal{P}_2^{-r_2}$. Por otra parte tenemos que $\left\{x \in A \mid x\mathcal{P}_1^{-r_1} \subset \mathcal{P}_1^{-r_1}\right\}$ es el orden hereditario $\mathcal{A}_1$. Claramente este conjunto contiene al orden hereditario $\mathcal{A}_1$ y dado $x \in A$ talque $x\mathcal{P}_1^{-r_1} \subset \mathcal{P}_1^{-r_1}$ entonces $x\mathcal{P}_1^{-r_1}\mathcal{P}_1^{r_1} \subset \mathcal{P}_1^{-r_1}\mathcal{P}_1^{r_1}$, y como $\mathcal{P}_1^{-r_1}$ es un ideal fraccionario de $\mathcal{A}_1$, se tiene $x\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_1$ lo cual significa que $x \in \mathcal{A}_1$. Con esto es claro que si $\mathcal{P}_1^{-r_1} = \mathcal{P}_2^{-r_2}$ entonces $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ y así $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ y $r_1 = r_2$. Además, si $\nu_{\mathcal{A}_i}(b_i) = -n_i$ entonces se tiene $n_1 = n_2$.

Observación 2.5.5. Dado un estrato $[\mathcal{A}, n, r, b]$ en A con la condición que $n \geq r \geq \left[\frac{n}{2}\right] > 0$ entonces el carácter $\psi_b \in \widehat{\mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}}$ depende solamente de la clase de equivalencia del estrato. Esto es, una clase de equivalencia del estrato $[\mathcal{A}, n, r, b]$ es lo mismo que decir el carácter $\psi_b \in \widehat{\mathcal{U}^{r+1}/\mathcal{U}^{n+1}}$, y más aún, si $\nu_{\mathcal{A}}(b) = -n$ equivale a tener un carácter ψ_b no trivial sobre $\mathcal{U}^n$.

Definición 2.5.6. Sea $[\mathcal{A}, n, r, b]$ un estrato en A. Diremos que este estrato es *puro* de nivel $-n$ si:
1. El álgebra $\mathbf{E} = \mathbf{F}[b]$ es un cuerpo.
2. $\mathbf{E}^\times \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$
3. $\nu_{\mathcal{A}}(b) = -n$

Si además se cumple:

4. b es $\mathbf{E}/\mathbf{F}-$minimal entonces diremos que $[\mathcal{A}, n, r, b]$ es un *estrato muy cuspidal* de nivel $-n$.

Observación 2.5.7. Es conveniente notar que si $[\mathcal{A}, n, r, b]$ es un estrato muy cuspidal, como $b \in S_{-n}$, entonces el carácter ψ_b, de acuerdo a Carayol [Ca], es un carácter $e-$cuspidal.

Definición 2.5.8. Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario en A. Una representación σ de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ es llamada una *representación muy cuspidal de nivel -n* de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ si:
1. $\mathcal{U}^{n+1} \subset \operatorname{Ker} \sigma$
2. $\sigma_{|\mathcal{U}^n} = \bigoplus_{b \in S_{-n}} d(b)\psi_b$

donde $d(b)$ es la multiplicidad de ψ_b en σ. Esto es, $d(b) = \dim_{\mathbf{C}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}^n}(\sigma, \psi_b))$.

Teorema 2.5.9. (Carayol)

Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario en A y σ una representación muy cuspidal irreducible de nivel $-n$ de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Entonces:

1.- La representación $\pi_\sigma = \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}^{G} \sigma$ es una representación admisible super-cuspidal irreducible de G.

2.- Si σ_1 y σ_2 son dos representaciones muy cuspidales irreducibles de nivel $-n$ de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ no equivalentes (no isomorfos) entonces π_{σ_1} no es equivalente a π_{σ_2}.

Demostración:

Usando el teorema de Mackey tenemos que:

$$\mathrm{Hom}_G(c-\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G\sigma_1, c-\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G\sigma_2) \simeq \bigoplus_{x\in\mathcal{K}\diagdown G\diagup\mathcal{K}} \mathrm{Hom}_{x^{-1}\mathcal{K}x\cap\mathcal{K}}(\sigma_1,\sigma_2^x)$$

Si $x=1$ entonces,$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\sigma_1,\sigma_2)=1$ si y solo si σ_1 es isomorfa a σ_2.

Solo necesitamos probar que para todo $x\notin\mathcal{K}$ se tiene que,

$$\mathrm{Hom}_{x^{-1}\mathcal{K}x\cap\mathcal{K}}(\sigma_1,\sigma_2^x)=0$$

como $x\mathcal{U}^n x^{-1}\cap\mathcal{U}^n \subset x^{-1}\mathcal{K}x\cap\mathcal{K}$, y para $i=1,2$ tenemos que $\sigma_{i_{|\mathcal{U}^n}} = \bigoplus_{b\in S_{-n}} d(b)\psi_b$ entonces es suficiente probar que para cualquier $b_1,b_2\in S_{-n}$

$$\mathrm{Hom}_{x\mathcal{U}^n x^{-1}\cap\mathcal{U}^n}\left(\psi_{b_1},\psi_{b_2}^x\right)=0 \qquad (x\notin\mathcal{K})$$

Ahora, por proposición 2.2.4. $\psi_{b_1}\neq\psi_{b_2}^x$ sobre $x\mathcal{U}^n x^{-1}\cap\mathcal{U}^n$ si y solamente si $(b_1+\mathcal{P}^{1-n})\cap x(b_2+\mathcal{P}^{1-n})x^{-1}=\phi$.

Sabiendo que S_{-n} es un conjunto rígido, entonces $b_2+\mathcal{P}^{1-n}\subset S_{-n}$ y por lo tanto podemos concluir que $(b_1+\mathcal{P}^{1-n})\cap x(b_2+\mathcal{P}^{1-n})x^{-1}=\phi$, para todo $x\notin\mathcal{K}$.

Por otra parte, si $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ entonces:

$$\pi_\sigma = c-\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G\sigma$$

es una representación lisa irreducible de G. Aplicando el teorema de Jacquet [J1] podemos concluir que π_σ es admisible y por un teorema de Bushnell [Bu1] $c-\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G\sigma = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G\sigma$, y además $\pi_\sigma = c-\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G\sigma$ es supercuspidal.

Definición 2.5.10. Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario principal en A asociado a la cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos $\mathcal{L}$ y sea σ una representación irreducible muy cuspidal de nivel $-n$ de $\mathcal{K}$. Si el período de $\mathcal{L}$, $e(\mathcal{L})=1$ la representación π_σ es llamada *representación no ramificada de nivel $-n$*. Si $e(\mathcal{L})>1$ la representación π_σ es llamada *representación ramificada de nivel $-n$.*

2.6. Construcción de representaciones no ramificadas de nivel cero.

Recordemos que $\widetilde{\tau}$ es una representación cuspidal de $GL_N(k_{\mathbf{F}})$ si y solamente si $\mathrm{Hom}_{\widetilde{U}}(\widetilde{\tau},1_{\widetilde{U}})=0$ para cada radical unipotente no trivial $\widetilde{U}$ de $GL_N(k_{\mathbf{F}})$. Ver por ejemplo [G].

Definición 2.6.1. Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario principal en A asociado a la cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos $\mathcal{L}$ con periodo $e(\mathcal{L})=1$. Una representación σ de

$\mathcal{K}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}^x GL_N(O_\mathbf{F})$ es llamada una *representación muy cuspidal de* $\mathcal{K}$ *de nivel* 0 si:
1. $\mathcal{U}^1 < \operatorname{Ker}\sigma$
2. La representación σ de $GL_N(O_\mathbf{F})/\mathcal{U}^1 \simeq GL_N(k_\mathbf{F})$ es una representación cuspidal.

En primer lugar construiremos representaciones muy cuspidales σ de $\mathcal{K}$ de nivel 0. Como $e(\mathcal{L}) = 1$ entonces:
$\mathcal{A} = M_N(O_\mathbf{F})$
$\mathcal{P} = M_N(P_\mathbf{F})$
$\mathcal{U} = GL_N(O_\mathbf{F})$
$\mathcal{U}^1 = 1 + M_N(P_\mathbf{F})$
y por lo tanto la sucesión

$$1 \longrightarrow \mathcal{U}^1 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow GL_N(k_\mathbf{F}) \longrightarrow 1$$

es exacta con los homomorfismos canónicos correspondientes.

Ahora dada una representación cuspidal $(\widetilde{\tau}, V)$ de $GL_N(k_\mathbf{F})$ entonces podemos definir una representación (τ, V) de $\mathcal{U}$, la cual es irreducible si así lo es $\widetilde{\tau}$. Esto es, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{U}^1 & \longrightarrow & \mathcal{U} & \longrightarrow & GL_N(k_\mathbf{F}) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \searrow \tau & \downarrow \widetilde{\tau} & & \\ & & & & & & \operatorname{Aut}_\mathbf{C}(V) & & \end{array}$$

Observemos que $\mathcal{U}^1 < \operatorname{Ker}\tau$.

Nuestro objetivo es construir una representación σ de $\mathcal{K} = \mathbf{F}^\times U$ a partir de la representación τ, la cual debe ser muy cuspidal de nivel cero, esto significa que $\mathcal{U}^1 < \operatorname{Ker}\sigma$ y σ es una representación de $\mathcal{U}/\mathcal{U}^1 \simeq GL_N(k_\mathbf{F})$ cuspidal.

Para esto procedemos del siguiente modo:
1. $\mathcal{K} = \mathbf{F}^\times \mathcal{U}$
2. $\mathbf{F}^\times < N_\mathcal{K}(\tau) = \{x \in K \mid \tau^x = \tau \text{ sobre } U\}$
3. Como $\mathbf{F}^\times \cap \mathcal{U}$ es un subgrupo del centro $Z(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$ entonces, usando el lema de Schur, tenemos que $\tau_{|_{\mathbf{F}^\times \cap \mathcal{U}}} \simeq \overline{\theta} \cdot 1_V$ donde 1_V es el operador identidad sobre el $\mathbf{C}-$espacio vectorial V y $\overline{\theta}$ es un carácter de $\mathbf{F}^\times$.

Por otra parte sabemos que $\mathbf{F}^\times$ es localmente profinito ($\mathbf{F}^\times$ es compacto, Hausdorf, en el cual la familia de subgrupos normales abiertos forman un sistema fundamental de vecindades de 1 esto es podemos encontrar un $\theta \in \widehat{\mathbf{F}^\times}$ tal que $\theta = \overline{\theta}$ sobre $\mathbf{F}^\times \cap \mathcal{U}$ y así podemos construir la función, $\sigma : \mathbf{F}^\times \mathcal{U} \longrightarrow \operatorname{Aut}_\mathbf{C}(V)$ definida por:

$$\sigma(xu) = \theta(x)\tau(u) \qquad (xu \in \mathbf{F}^\times \mathcal{U})$$

Proposición 2.6.2. La función σ construida anteriormente es una representación muy cuspidal de nivel cero de $\mathcal{K} = \mathbf{F}^{\times}\mathcal{U}$ la cual es irreducible si y solamente si τ lo es.

Demostración:

La función σ esta bien definida ya que $x_1u_1 = x_2u_2$ implica $u_1u_2^{-1} = x_1^{-1}x_2$, así $\tau(u_1u_2^{-1}) = \theta(x_1^{-1}x_2)$ pues $\tau_{|_{\mathbf{F}^{\times}\cap\mathcal{U}}} = \theta_{|_{\mathbf{F}^{\times}\cap\mathcal{U}}}$.

Además, como $x_1, x_2 \in Z(\mathcal{U})$, se tiene

$$\begin{aligned}\sigma(x_1u_1x_2u_2) &= \sigma(x_1x_2u_1u_2)\\ &= \theta(x_1)\tau(u_1)\theta(x_2)\tau(u_2)\\ &= \sigma(x_1u_1)\sigma(x_2u_2)\end{aligned}$$

esto es (σ, V) es una representación de $\mathcal{K}$. Por otra parte, dado $u \in \mathcal{U}^1$, $\sigma(1 \cdot u) = \theta(1)\tau(u) = 1$ o sea $\mathcal{U}^1 < \operatorname{Ker}\sigma$ y σ como representación de $\mathcal{U}\diagup\mathcal{U}^1$ es $\widetilde{\tau}$ la cual es cuspidal. Así, (σ, V) es una representación muy cuspidal de nivel cero de $\mathcal{K}$.

Finalmente, usando el teorema de Mackey tenemos

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(\sigma, \sigma) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(\tau, \tau) \simeq \mathbf{C}$$

si y solamente si τ es irreducible.

Teorema 2.6.3. Sea (σ, V) una representación irreducible muy cuspidal de nivel cero de $\mathcal{K}$ construida como anteriormente, entonces

$$\pi_\sigma = \operatorname{Ind}_K^G \sigma$$

es una representación irreducible, admisible y supercuspidal de G.

Demostración: Ejercicio o ver [K2].

Definición 2.6.4. Sea $\mathcal{A}$ un orden hereditario principal en A asociado a la cadena de $O_{\mathbf{F}}-$retículos $\mathcal{L}$ de período $e(\mathcal{L}) = 1$. Sea σ una representación muy cuspidal de nivel cero de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. La representación π_σ es llamada *representación no ramificada de nivel cero.*

Observación 2.6.5

Para construir este tipo de representaciones admisibles π_σ de G de niveles mayores que cero no es necesario separar en los casos ramificados o no ramificados, pues ambas construcciones son similares y solo dependen del nivel del elemento e-cuspidal b.

Para construir estas representaciones necesitamos algunos resultados generales que tienen relación con inducir a G representaciones desde un subgrupo normal. Estos resultados son debidos a Clifford y fueron publicados en el año 1937. Ver por ejemplo [C-R], [Cl] o bien [I].

Sea G un grupo cualquiera y H un subgrupo normal de G. El grupo G actua por conjugación sobre el conjunto $\mathrm{Irr}(H)$, de todos los caracteres irreducible de H, esto es:

$$\theta^g(h) = \theta(ghg^{-1}) \qquad\qquad (g \in G,\ h \in H,\ \theta \in \mathrm{Irr}(H))$$

Claramente $\theta^g \in \mathrm{Irr}(H)$ ya que $\langle \theta^g, \theta^g \rangle_H = \langle \theta, \theta \rangle_H$. La órbita de θ, $\mathrm{Orb}_G(\theta) = \{\theta^g \mid g \in G\}$ corresponde ser el conjunto de todos los carácteres conjugados distintos de θ y $\mathrm{Stab}_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta \text{ en } H\}$ es un subgrupo de G que contiene a H. En efecto, $\theta^g(h) = \theta(ghg^{-1}) = \theta(h)$ para $h, g \in H$ ya que θ es una función de clase. Además, $|\mathrm{Orb}_G(\theta)| = [G : \mathrm{Stab}_G(\theta)]$.

Teorema 2.6.6. (Clifford)
Sea $H \triangleleft G$ y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Si $\left\langle \theta, \mathrm{Res}_H^G \chi \right\rangle_H \geq 1$, para $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$, entonces:

$$\mathrm{Res}_H^G \chi = \left\langle \theta, \mathrm{Res}_H^G \chi \right\rangle \sum_{g \in G / \mathrm{Stab}_G(\theta)} \theta^g$$

Demostración:
Por reciprocidad de Frobenius, $\left\langle \theta, \mathrm{Res}_H^G \chi \right\rangle_H = \left\langle \mathrm{Ind}_H^G \theta, \chi \right\rangle_G \geq 1$, esto es, χ es un carácter irreducible de G el que es un constituyente en la representación $\mathrm{Ind}_H^G \theta$.

Por otra parte, como $H \triangleleft G$, entonces

$$\mathrm{Ind}_H^G \theta = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \theta^g$$

y así, $\left\langle \sum_{g \in G} \theta^g, \psi \right\rangle_H = 0$ para $\psi \notin \mathrm{Orb}_G(\theta)$ y por lo tanto

$$\left\langle \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \theta, \psi \right\rangle_H = 0$$

lo cual implica que $\left\langle \mathrm{Res}_H^G \chi, \psi \right\rangle_H = 0$. Esto quiere decir que todo constituyente irreducible de $\mathrm{Res}_H^G \chi$ esta en la $\mathrm{Orb}_G(\theta)$ y por lo tanto,

$$\mathrm{Res}_H^G \chi = \sum_{g \in G / \mathrm{Stab}_G(\theta)} \left\langle \theta^g, \mathrm{Res}_H^G \chi \right\rangle_H \cdot \theta^g$$

pero

$$\begin{aligned}\left\langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \theta^g \right\rangle_H &= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h)\theta(ghg^{-1})\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{h'\in H}\chi(g^{-1}h'g)\theta(h')\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{h'\in H}\chi(h')\theta(h')\\ &= \left\langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \theta \right\rangle_H\end{aligned}$$

y así podemos finalmente concluir que:

$$\operatorname{Res}_H^G \chi = \left\langle \theta, \operatorname{Res}_H^G \chi \right\rangle \sum_{g\in G/\operatorname{Stab}_G(\theta)} \theta^g$$

Corolario 2.6.7. Sea $H \triangleleft G$ y $\theta \in \operatorname{Irr}(H)$. Sea $\psi \in \operatorname{Irr}(\operatorname{Stab}_G(\theta))$ tal que $\left\langle \operatorname{Res}_H^{\operatorname{Stab}_G(\theta)} \psi, \theta \right\rangle_H \neq 0$ entonces $\operatorname{Ind}_{\operatorname{Stab}_G(\theta)}^G \psi$ es una representación irreducible de G tal que $\left\langle \operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_{\operatorname{Stab}_G(\theta)}^G \psi, \theta \right\rangle_H \neq 0$.

Demostración:

Sea $\psi \in \operatorname{Irr}(\operatorname{Stab}_G(\theta))$ con la condición que $\langle \theta, \psi_H \rangle_H \neq 0$, donde $\psi_H = \operatorname{Res}_H^{\operatorname{Stab}_G(\theta)} \psi$.

Por otra parte, si $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ tal que $\left\langle \chi, \psi^G \right\rangle_G \neq 0$, con $\psi^G = \operatorname{Ind}_{\operatorname{Stab}_G(\theta)}^G \psi$, entonces usando reciprocidad de Frobenius tenemos que $\langle \chi_T, \psi \rangle_{\operatorname{Stab}_G(\theta)} \neq 0$. Ahora, como $\langle \theta, \psi_H \rangle_H \neq 0$ entonces $\langle \theta, \chi_H \rangle_H = e \neq 0$ y por el teorema de Clifford,

$$\chi_H = e \sum_{g\in G/\operatorname{Stab}_G(\theta)} \theta^g$$

así,

1. $\chi(1) = \chi_H(1) = e\,[G : \operatorname{Stab}_G(\theta]\,\theta(1) = et\theta(1)$. Nuevamente por teorema de Clifford tenemos que

   $$\psi_H = f \sum_{g\in \operatorname{Stab}_G(\theta)/\operatorname{Stab}_G(\theta)} \theta^g = fe$$

   donde $f = \langle \theta, \psi_H \rangle_H$ y por lo tanto,

2. $\psi(1) = \psi_H(1) = f\theta(1)$. Además, como $\langle \psi, \chi \operatorname{Stab}_G(\theta) \rangle \neq 0$ y $\psi_H = f\theta$ entonces $f \leq e$.

Finalmente, de (1) y (2) tenemos que:

$$et\theta(1) = \chi(1) \leq \psi^G(1) = t\psi(1) = tf\theta(1) \leq te\theta(1)$$

y así, $\psi^G(1) = \chi(1)$ lo cual implica $\chi = \psi^G$.

Observación 2.6.8. Si $H \triangleleft G$, $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ y denotamos por $\mathcal{S} = \{\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_G(\theta)) \mid \langle \theta, \psi_H \rangle_H \neq 0\}$ y $\mathcal{G} = \{\psi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \langle \theta, \chi_H \rangle_H \neq 0\}$ entonces tenemos que:

1. Si $\psi^G = \chi$, con ψ en $\mathcal{S}$, entonces $\langle \theta, \psi_H \rangle_H = \langle \theta, \chi_H \rangle_H$. Claramente, de la demostración anterior, se tiene:

$$\langle \theta, \chi_H \rangle_H = e = f = \langle \theta, \psi_H \rangle_H$$

2. Si $\psi^G = \chi$, con ψ en $\mathcal{S}$, entonces ψ es la única constituyente irreducible de $\chi_{\mathrm{Stab}_G(\theta)}$ la cual esta en $\mathcal{S}$. En efecto, si $\psi_1 \in \mathcal{S}$ con $\psi_1 \neq \psi$ y $\left\langle \psi_1, \chi_{\mathrm{Stab}_G(\theta)} \right\rangle \neq 0$ entonces $\left\langle \psi + \psi_1, \chi_{\mathrm{Stab}_G(\theta)} \right\rangle \neq 0$ y así tenemos que, $\langle \theta, \chi_H \rangle_H \geq \langle \theta, (\psi + \psi_1)_H \rangle_H = \langle \theta, \psi_H \rangle_H + \left\langle \theta, \psi_{1_{|_H}} \right\rangle_H > \langle \theta, \psi_H \rangle_H$ lo que es una contradicción con (1). Luego $\psi_1 = \psi$.

3. La función $\psi \longrightarrow \psi^G$ es una biyección de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{G}$. La función $\psi \longrightarrow \psi^G$ esta bien definida por el corolario 2.6.7 y su imagen esta en $\mathcal{G}$ por (1). Es una función inyectiva por (2). Solo nos falta probar que es una función sobreyectiva. Para esto, sea $\chi \in \mathcal{G}$, como $\langle \theta, \chi_H \rangle_H \neq 0$ debe existir alguna $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_G(\theta))$ tal que $\left\langle \psi, \chi_{\mathrm{Stab}_G(\theta)} \right\rangle_{\mathrm{Stab}_G(\theta)} \neq 0$ con $\langle \theta, \psi_H \rangle_H \neq 0$. Así, $\psi \in \mathcal{S}$ y $\left\langle \chi, \psi^G \right\rangle_G \neq 0$. Por lo tanto $\chi = \psi^G$.

2.7. Construcción de representaciones de nivel$-n$, con n impar.

Ahora volvamos a considerar $b \in S_{-n}$ con n un número entero impar. Esto significa que podemos considerar los estratos muy cuspidales $[\mathcal{A}, n, r, b]$ con $n > r \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. Esto es:
1. $\mathbf{F}[b] \subset A$
2. $\mathbf{F}[b]^\times \subset \mathcal{K}$
3. $\nu_{\mathcal{A}}(b) = -n$
4. b es $\mathbf{F}[b]/\mathbf{F}-$miniminal.

Como $\left[\frac{n}{2}\right]$denota el mayor entero menor o igual a $\frac{n}{2}$ y n es impar entonces $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$. Así podemos considerar el estrato muy cuspidal $\left[\mathcal{A}, n, \frac{n-1}{2}, b\right]$ y podemos considerar ψ_b como un carácter de $\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}} \diagup \mathcal{U}^{n+1}$. Esto significa que tenemos la siguiente torre de subgrupos:

$$\begin{array}{c} \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ \vee \\ \mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(\psi_b) \\ \triangledown \\ \mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}} \\ \triangledown \\ \vdots \\ \triangledown \\ \mathcal{U}^n \\ \triangledown \\ \mathcal{U}^{n+1} \end{array}$$

No olvidemos, definición 2.5.8, que σ es una representación muy cuspidal irreducible de nivel$-n$ de $\mathcal{K}$ si σ es una representación irreducible de $\mathcal{K}$ que además cumple: $\mathcal{U}^{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\sigma$ y $\sigma_{|\mathcal{U}^n} = \bigoplus_{b \in S_{-n}} d(b)\psi_b$. Y así, por el teorema 2.5.9 $\pi_\sigma = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^G \sigma$ es una representación admisible supercuspidal irreducible de G. Por lo tanto, para construir representaciones admisibles supercuspidales de G debemos saber construir representaciones irreducibles muy cuspidales de $\mathcal{K}$.

Ahora, observando la torre de subgrupos anteriores vemos que estamos en el marco del teorema 2.6.6 (Teorema de Clifford) y del corolario 2.6.7.

Proposición 2.7.1. Sea $b \in S_{-n}$ y $\overline{b} = b + \mathcal{P}^{-n+p}$ en $\mathcal{P}^{-n} \diagup \mathcal{P}^{-n+p}$ para $p \geq 1$. El subgrupo $\mathcal{K} = N_G(\mathcal{U})$ de G actúa por conjugación sobre $\mathcal{P}^{-n} \diagup \mathcal{P}^{-n+p}$ siendo el estabilizador de $\overline{b}$ el subgrupo de $\mathcal{K}$, $H_{b,p} = \mathbf{F}[b]^\times \mathcal{U}^p$. (Observe que $\mathbf{F}[b]^\times$ normaliza $\mathcal{U}^p$ lo que justifica la notación).

Demostración:

La acción es clara ya que $xbx^{-1}(L_i) = xb(L_{i+j(x^{-1})}) \subset x(L_{i+j(x^{-1})-n}) = L_{i-n}$ y así $xbx^{-1} + \mathcal{P}^{-n+p} \in \mathcal{P}^{-n} \diagup \mathcal{P}^{-n+p}$.

Es claro también que $\mathbf{F}[b]^\times \mathcal{U}^p \subset \mathrm{Stab}_G(\overline{b}) = H_{b,p}$. En efecto, si $x \in \mathbf{F}[b]^\times$ entonces $xbx^{-1} = b$, esto es $\mathbf{F}[b]^\times \subset H_{b,p}$.

Por otra parte, si $u \in \mathcal{U}^p$ entonces $u\overline{b}u^{-1} = \overline{b}$ si y solamente si $zb - bz \in \mathcal{P}^{-n+p}$ lo cual es evidente ya que $z \in \mathcal{P}^p$ y $b \in \mathcal{P}^{-n}$. Así, $\mathcal{U}^p \subset H_{b,p}$ y por lo tanto $\mathbf{F}[b]^\times \mathcal{U}^p \subset H_{b,p}$.

Ahora consideramos las filtraciones:

$$H_{b,p} \supset H_{b,p} \cap \mathcal{U} \supset \cdots \supset H_{b,p} \cap \mathcal{U}^i \supset \cdots$$

y

$$\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p \supset \mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p\cap\mathcal{U} \supset \cdots \supset \mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p\cap\mathcal{U}^i \supset \cdots$$

Para $i \geq p$ tenemos que:

$$\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p\cap\mathcal{U}^i = H_{b,p}\cap\mathcal{U}^i = \mathcal{U}^i$$

La igualdad entre $H_{b,p}$ y $\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p$ será obtenida si mostramos que para $i < p$ la inyección

$$\frac{\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p\cap\mathcal{U}^i}{\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^p\cap\mathcal{U}^{i+1}} \longrightarrow \frac{H_{b,p}\cap\mathcal{U}^i}{H_{b,p}\cap\mathcal{U}^{i+1}}$$

es un isomorfismo.

Volviendo a nuestra torre de subgrupos tenemos:

$$\begin{array}{r} \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ \vee \\ \mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(\psi_b) \\ \triangledown \\ \mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}} \\ \triangledown \\ \vdots \\ \triangledown \\ \mathcal{U}^n \\ \triangledown \\ \mathcal{U}^{n+1} \end{array}$$

y $\mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(\psi_b) = \left\{x \in \mathcal{K} \mid \psi_b^x = \psi_b \text{ en } \mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}\right\}$. Como tener $x \in \mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(\psi_b)$ equivale a tener $\psi_{x^{-1}bx} = \psi_b$ en $\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}$ y esto es equivalente a que $x^{-1}bx = b$ con lo cual se concluye que $\mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(\psi_b) = \mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(b)$.

Por otra parte, como $n > r \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ y n es impar entonces,

$$\mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{\frac{1-n}{2}} \simeq \mathcal{P}^{\frac{n+1}{2}}/\mathcal{P}^{n+1} \simeq \mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}/\mathcal{U}^{n+1}$$

y

$$\mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{\frac{1-n}{2}} \simeq \mathcal{P}^{-n}/\mathcal{P}^{-n+\frac{1-n}{2}}$$

entonces usando la proposición 2.7.1 tenemos que:

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{K}}(\psi_b) = H_{b,\frac{n+1}{2}} = \mathbf{F}[b]^{x}\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}$$

Ejercicio 2.7.2. Verifique que $\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}$ es un subgrupo abierto de G el cual contiene al centro $Z(G)$ de G y es compacto módulo el centro.

Ahora, $\mathbf{F}[b]^{\times} \cap \mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}} = U_{\mathbf{F}[b]}^{\frac{n+1}{2}}$ y como $\mathbf{F}[b]^{\times}$ es un grupo abeliano y localmente profinito entonces podemos tomar $\theta = \psi_b$ en $U_{\mathbf{F}[b]}^{\frac{n+1}{2}}$. Así tenemos que la fórmula $\theta\psi_b(xu) = \theta(x)\psi_b(u)$ para $xu \in \mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}$ define un carácter en $H_{b,\frac{n+1}{2}}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\theta\psi_b(xux'u') &= \theta\psi_b(xx'x'^{-1}ux'u') \\
&= \theta(xx')\psi_b^{x'^{-1}}(u)\psi_b(u') \\
&= \theta(x)\theta(x')\psi_b(u)\psi_b(u') \\
&= \theta\psi_b(xu)\theta\psi_b(x'u')
\end{aligned}$$

y además se tiene que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}[b]^{x}\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}}(,\theta\psi_b) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}}(\psi_b,\psi_b) \simeq \mathbf{C}$$

lo que significa que $\theta\psi_b$ es un carácter irreducible de $\mathbf{F}[b]^{\times}\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}$.

Usando el corolario 2.6.7 tenemos que

$$\sigma = \mathrm{Ind}_{H_{b,\frac{n+1}{2}}}^{\mathcal{K}} \theta\psi_b$$

es una representación irreducible de $\mathcal{K}$.

Teorema 2.7.3. Sea $\left[\mathcal{A}, n, \frac{n-1}{2}, b\right]$ un estrato muy cuspidal y sea σ la representación irreducible de $\mathcal{K}$ construida anteriormente. Entonces la representación

$$\pi_\sigma = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^{G} \sigma$$

es una representación admisible supercuspidal irreducible de G.

Demostración:

La representación σ es una representación muy cuspidal irreducible de nivel $-n$ de $\mathcal{K}$ En efecto, $\mathcal{U}^{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\sigma$ ya que usando el Teorema de Clifford

$$\sigma_{|_{\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}}} = \langle\psi_b, \sigma\rangle \sum_{g\in\mathcal{K}/\mathbf{F}[b]\mathcal{U}^{\frac{n+1}{2}}} \psi_b^g$$

y entonces se tiene además que $\sigma_{|\mathcal{U}^n} = \bigoplus_{b\in S_{-n}} d(b)\psi_b$.

Aplicando teorema 2.5.9 tenemos que π_σ es irreducible supercuspidal de G.

2.8. Construcción de representaciones de nivel$-n$, con n par.

Sea b un elemento en S_{-n}. Esto es, consideremos el estratum muy cuspidal $[\mathcal{A}, n, r, b]$ con $n > r \geq [\frac{n}{2}]$. Como n es un número par entonces $[\frac{n}{2}] = \frac{n}{2}$.

Ahora podemos considerar el estratum muy cuspidal $[\mathcal{A}, n, \frac{n}{2}, b]$ y así tenemos ψ_b como un carácter en $\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \diagup \mathcal{U}^{n+1}$.

Definamos el subgrupo de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$

$$H_{b,\frac{n}{2}} = \{x \in \mathcal{K} \mid \psi_b^x = \psi_b \text{ en } \mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}\}$$

entonces tenemos los siguientes resultados:

1. El grupo $\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$ es un subgrupo normal de $H_{b,\frac{n}{2}}$.

2. Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}[b]$ entonces el grupo $H_{b,\frac{n}{2}} = \mathbf{E}^{\times}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$. Además $H_{b,\frac{n}{2}}$ es un subgrupo abierto de G el cual contiene al centro $Z(G)$ de G y es compacto módulo el centro. Ver, por ejemplo, proposición 3.6. en [Ca].

   Observemos que para construir una representación σ de $\mathcal{K}$ no es directo como en el caso anterior donde σ es obtenido directamente usando el teorema de Clifford, ver en 2.7. Ahora ψ_b es un carácter en $\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \diagup \mathcal{U}^{n+1}$ y $\mathbf{E}^{\times}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \subset H_{b,\frac{n}{2}} = \mathbf{E}^{\times}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$. Así nosotros tenemos que construir una representación λ de $H_{b,\frac{n}{2}}$ tal que ψ_b está en $\lambda_{|\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}}$ y entonces, usando el Teorema de Clifford, obtenemos $\sigma = \mathrm{Ind}_{H_{b,\frac{n}{2}}}^{\mathcal{K}} \lambda$ como una representación irreducible de $\mathcal{K}$.

3. Como $U_{\mathbf{E}}^1 \cap \mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} = U_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}+1}$, y $U_{\mathbf{E}}^1$ es un grupo localmente profinito abeliano, podemos tomar $\theta \in \widehat{U_{\mathbf{E}}^1}$ tal que $\theta = \psi_b$ en $U_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}+1}$. Esto se obtiene, al igual que antes, ya que la fórmula

$$\theta\psi_b(xu) = \theta(x)\psi_b(u) \qquad\qquad (xu \in U_{\mathbf{E}}^1\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1})$$

   define un carácter en $U_{\mathbf{E}}^1\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}$.

4. El grupo $U_{\mathbf{E}}^1\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}$ es un subgrupo normal de $U_{\mathbf{E}}^1\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$ y por lo tanto,

$$U_{\mathbf{E}}^1\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}/U_{\mathbf{E}}^1\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \simeq \mathcal{U}^{\frac{n}{2}}/U_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}$$

   y además, la función la cual envía x en $x-1$ define el isomorfismo

$$\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}/U_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \simeq \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}/(P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1})$$

5. El grupo aditivo $\overline{V} = \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}/(P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1})$ es un $O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}-$espacio vectorial de dimensión finita.

6. Dado $x, y \in \overline{V}$ podemos definir la función,

$$\langle x, y\rangle = \operatorname{tr}(b(xy - yx))$$

la cual es una forma alternada no degenerada sobre $O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}$.

Demostración: En efecto, si $x \in \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}$ y $\operatorname{tr}(b(xy - yx)) = 0$ para cualquier $y \in \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}$ entonces $\operatorname{tr}(bx - xb)y) = 0$ para cualquier $y \in \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}$. Así $bx - xb$ es un elemento en $\mathcal{P}^{1-\frac{n}{2}}$ y por proposición 3.5. en [Ca], como $b \in \mathcal{P}^{-n}$, tenemos que $x \in \mathbf{E} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1}$. Por lo tanto, $x \in P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1}$ lo cual implica que la forma es no degenerada. Claramente es una forma alternada y además dado $x, y \in \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}$ y $\alpha, \beta \in P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1}$ entonces

$$\langle x + \alpha, y + \beta\rangle = \langle x, y\rangle$$

7. Sea W un subgrupo de $\mathcal{P}^{\frac{n}{2}}$ conteniendo $P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1}$ tal que

$$\overline{W} = W/(P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1})$$

es un subespacio de $\overline{V}$ totalmente isotrópico maximal relativo a la forma alternada dada anteriormente. Sea $H = 1 + W$. Entonces tenemos:

$$U_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \triangleleft H \triangleleft \mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$$

y

$$U_{\mathbf{E}}^{1}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1} \triangleleft U_{\mathbf{E}}^{1}H \triangleleft U_{\mathbf{E}}^{1}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$$

8. Como $\overline{W}$ es un subespacio isotrópico de $\overline{V}$ entonces $\langle x, y\rangle = 0$ para cualquier $x, y \in \overline{W}$.

9. Dado $x, y \in \mathcal{P}^{\frac{n}{2}}$ entonces

$$[1 + x, 1 + y] - 1 \equiv xy - yx \pmod{\mathcal{P}^{n+1}}$$

y además $xy - yx \in \mathcal{P}^n$. Ahora, si $x, y \in W$, usando (8) y que $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1}$ concluimos:

$$\psi_b([1 + x, 1 + y]) = \psi(\langle x, y\rangle) = 1.$$

Entonces $[H,H]\cap U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}\subset \operatorname{Ker}\theta\psi_b$. Por lo tanto podemos extender $\theta\psi_b$ desde $U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}$ a χ sobre $U^1_{\mathbf{E}}H$.

10. El grupo

$$N_{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}(\chi)=\{x\in U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}\mid \chi^x=\chi \text{ en } U^1_{\mathbf{E}}H\}$$

es $U^1_{\mathbf{E}}H$.

Demostración: Supongamos que existe $g_0\in U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}-U^1_{\mathbf{E}}H$ tal que $\chi^{g_0}=\chi$ en $U^1_{\mathbf{E}}H$. Entonces

$$U^1_{\mathbf{E}}H<U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle<U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$$

y como $U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle/U^1_{\mathbf{E}}H$ es cíclico y $\chi^x=\chi$ en $U^1_{\mathbf{E}}H$ para cualquier $x\in U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle$ entonces χ se extiende a $\widetilde{\chi}$ en $U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle$.

Ahora, dado $x,y\in U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle$ tenemos que

$$\widetilde{\chi}([x,y])=1$$

y análogamente a (9)

$$\widetilde{\chi}([x,y])=\psi(\langle x-1,y-1\rangle)=1$$

entonces $\mathcal{D}=\{\langle x-1,y-1\rangle\mid x,y\in U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle\}\subset\operatorname{Ker}\psi$. Además, $\mathcal{D}/P_{\mathbf{F}}$ es un $O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}-$subespacio de $O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}$ y como, si $\mathcal{D}/P_{\mathbf{F}}=O_{\mathbf{F}}/P_{\mathbf{F}}$ entonces ψ es no trivial sobre $O_{\mathbf{F}}$, tenemos que $\mathcal{D}\subset P_{\mathbf{F}}$. Por lo tanto, $\langle x-1,y-1\rangle\in P_{\mathbf{F}}$ para cualquier $x,y\in U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle$.

Luego, el subespacio de $\overline{V}$ asociado a $U^1_{\mathbf{E}}H\langle g_o\rangle$ es isotrópico lo cual es una contradicción ya que el subespacio de $\overline{V}$ asociado a $U^1_{\mathbf{E}}H$ es isotrópico maximal. Asi, podemos concluir que

$$N_{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}(\chi)=U^1_{\mathbf{E}}H$$

11. Desde (10) y usando el hecho que $U^1_{\mathbf{E}}H\lhd U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$ se obtiene que la representación

$$\kappa=\operatorname{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}H}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}\chi$$

es un representación irreducible de $U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$.

12. La representación κ es independiente de $U^1_{\mathbf{E}}H$ y de χ. En efecto,

$$\mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}\theta\psi_b = \mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}H}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}(\mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}}^{U^1_{\mathbf{E}}H}\theta\psi_b)$$

Como $U^1_{\mathbf{E}}H/U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}$ es un grupo abeliano entonces el número de representaciones en $U^1_{\mathbf{E}}H/U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}$ es $[U^1_{\mathbf{E}}H : U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}]$ y el número de representaciones conjugadas de χ es $[U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}} : U^1_{\mathbf{E}}H]$. Como H es isotrópico maximal entonces $[U^1_{\mathbf{E}}H : U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}] = [U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}} : U^1_{\mathbf{E}}H]$. Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}}^{U^1_{\mathbf{E}}H}\theta\psi_b = \bigoplus \chi_i$$

donde χ_i es conjugada a χ.

Ahora, como $\mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}H}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}\chi_i \simeq \mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}H}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}\chi = \kappa$ nosotros tenemos que,

$$\mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}\theta\psi_b = \mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}H}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}(\bigoplus \chi_i) = \bigoplus \mathrm{Ind}_{U^1_{\mathbf{E}}H}^{U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}\chi_i = \bigoplus \kappa$$

13. Sea r el orden del grupo $\mathcal{P}^{\frac{n}{2}}/(P_{\mathbf{E}}^{\frac{n}{2}} + \mathcal{P}^{\frac{n}{2}+1})$, esto significa que r es una potencia de p, y $e = e(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. Como $\mathbf{E}^\times\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}/\mathbf{F}^\times U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}} \simeq Z/eZ \times k^\times_{\mathbf{E}}/k^\times_{\mathbf{F}}$ y el máximo común divisor de $e, \frac{q_F^f-1}{q_F-1}$ y r es igual a 1 entonces la representación κ se extiende a una representación irreducible λ sobre $\mathbf{E}^\times\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$. Además, cualquier representación irreducible λ' de $\mathbf{E}^\times\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$ tal que $\lambda'_{|U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}}$ contiene a κ es equivalente a $\lambda \otimes \varphi$ donde $\varphi \in (\mathbf{E}^\times\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}/U^1_{\mathbf{E}}\mathcal{U}^{\frac{n}{2}})^\wedge$. Ver 5.4. y 5.7. en [Ca].

14 Ahora hemos construido una representación irreducible λ de $H_{b,\frac{n}{2}} = \mathbf{E}^\times\mathcal{U}^{\frac{n}{2}}$ tal que $\lambda_{|\mathcal{U}^{\frac{n}{2}+1}}$ contiene a ψ_b. Al igual que antes, usando el Teorema de Clifford, podemos probar que $\sigma = \mathrm{Ind}_{H_{b,\frac{n}{2}}}^{\mathcal{K}}\lambda$ es una representación irreducible de $\mathcal{K}$.

Teorema 2.8.1. Sea $\left[\mathcal{A}, n, \frac{n}{2}, b\right]$ un estratum muy cuspidal y σ una representación irreducible de $\mathcal{K}$ construida como anteriormente. Entonces la representación

$$\pi_\sigma = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}^{G}\sigma$$

es una representación admisible supercuspidal irreducible de G.
Demostración: Es análoga a la demostración del Teorema 2.7.3.

Observación: Sea b un elemento en S_{-n}. Si existe un elemento $g \in G$ tal que $b' = gbg^{-1}$ entonces $\mathcal{A}' = g\mathcal{A}g^{-1}$ y así el estrato $[\mathcal{A}, n, [\frac{n}{2}], b]$ y $[\mathcal{A}', n, [\frac{n}{2}], b']$

son conjugados. Además, si $\left[\mathcal{A}, n, [\frac{n}{2}], b\right]$ es un stratum muy cuspidal entonces $[\mathcal{A}', n, [\frac{n}{2}], b']$ también lo es. Finalmente, si $\left[\mathcal{A}, n, [\frac{n}{2}], b\right]$ y $[\mathcal{A}', n, [\frac{n}{2}], b']$ son estratum muy cuspidales conjugados entonces las representaciones π_σ and $\pi_{\sigma'}$ construidas anteriormente son equivalentes.

BIBLIOGRAFíA

References

[Bo] A. Borel, *Automorphic L-functions,* Automorphic Forms, Representations and L-functions, Proc. Symps., Pure Math., Vol. **33**, part 2, Amer. Math. Soc., 1979, 27-33.

[Bu1] C.J. Bushnell, *Induced representations of locally profinite groups*, J. Alg., **134**, (1990), 104-114.

[Bu2] C.J. Bushnell, *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of $GL_N(F)$*, J. Fur Reine und Angew. Math. **375/376**, (1987), 184-210.

[B-F] C.J. Bushnell and A. Fröhlich, *Non abelian congruence Gauss sums and p-adic simple algebras*, Proc. London Math. Soc., **50**, (1985), 207-264.

[B-K] C.J. Bushnell and Philip C. Kutzko, *The admissible dual of $GL_N(F)$ via compact open subgroups,* Annals of Mathematics Studies, Number **129**, Princeton University Press, (1993).

[Ca] H. Carayol, *Représentations cuspidales du groupe linéaire,* Ann. Sci. École Norm. Sup., Vol. **17**, (1984), 191-225.

[Cr] P. Cartier, *Representations of p-adic groups: a survey,* Proc. of Symposia in Pure Math., Amer. Math. Soc., **23**, (1979), 111-155.

[Cs] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups,* Preprint.

[Cl] A. B. Clifford, *Representations induced in an invariant subgroup*, Ann. of Math. **38** (1937), 533-550.

[C-R] Ch. W. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, 1966.

[G] S. I. Gelfand, *Representations of the full linear group over a finite field*, (Russian) Mat. Sbornik, **83** (1970), 15-41.

[G-K] I.M. Gelfand and D.A. Kazhdan, *Representations of the group $GL_N(F)$ where F is a local field*, Proc. of the Summer School on Group Representations, Bolyai János Mathematical Society, Budapest, (1971).

[I] I.M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups,* Academics Press, New York, 1976.

[J1] H. Jacquet, *Sur les représentations des grupes réductifs p-adiques,* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér A **280**, *(1975), 1271-1272.*

[J2] H. Jacquet, *Representations des groupes lineaires p-adiques,* Corso tenuto a Montecatini T. dal 25 giugno al 4 luglio 1970.

[K1] Philip C. Kutzko, *Mackey's theorem for nonunitary representations*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol **64**, (1977), 173-175.

[K2] Philip C. Kutzko, *On the supercuspidal representations of $GL_2(F)$*, Amer. J. Math., **100**, (1978), 43-60.

[K3] Philip C. Kutzko, *Towards a classification of the supercuspidal representations of $GL_N(F)$*, J. London Math. Soc., Vol **37**, (1988), 265-274.

[K-M] Philip C. Kutzko and David C. Manderschied, *On intertwining operators for $GL_N(F)$, F a non archimedean local field*, Duke Math. J., **57**, (1988), 275-293.

[K-Mo] Philip C. Kutzko and A. Moy, *On the local Langlands conjecture in prime dimension.* Annals of Mathemathics, **121**, (1985), 495-517.

[P] L. Pontrjagin, *Topological Groups,* Princeton, 1939.

[S1] J. P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, 1962.

[S2] J. P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[Sh] Stephen S. Shatz, *Profinite Groups, Arithmetic and Geometry*, Annals of Mathemathics Studies, Number **67**, Princeton University Press.

Roberto Johnson
Instituto de Matemáticas, Universidad Católica de Valparaíso
Casilla 4059, Valparaíso, CHILE.
rjohnson@ucv.cl