UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS DE MATEMÁTICA

N° 61/2012

XXXV Reunión de Educación Matemática
Unión Matemática Argentina

Notas de Cursos

6 al 8 de agosto de 2012, Córdoba, Argentina.

Carlos D'Andrea – Cristina Esteley, Isabel Marguet, Analía Cristante
Gastón Andrés García – Virginia Montoro
Gabriel Soto – Liliana Tauber, Mariela Cravero

Universidad Nacional de Córdoba

1613 - 2013 400 AÑOS

FAMAF

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Editores: Jorge G. Adrover – Gastón A. García

CIUDAD UNIVERSITARIA – (5000) CÓRDOBA
REPÚBLICA ARGENTINA

Prefacio

Los Congresos Latinoamericanos de Matemáticos (CLAM) son los encuentros matemáticos latinoamericanos de mayor envergadura e importancia en la región: incluyen sesiones de conferencias y comunicaciones en la mayoría de las áreas, junto con una serie de conferencias plenarias dictadas por distinguidos especialistas internacionales y cursos para estudiantes de posgrado y jóvenes investigadores.

Organizado cada cuatro años en alguno de los países de las sociedades miembros de la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA), los tres primeros congresos se realizaron en Brasil, México y Chile en ese orden. La Unión Matemática Argentina (UMA) obtuvo el honor de organizar el IV CLAM, del 6 al 10 de agosto de 2012.

Como adhesión a este significativo evento, la UMA decidió además modificar la fecha de su Reunión Anual, tradicionalmente a fines de septiembre, y realizarla sólo por 2012 en agosto, más precisamente del 5 al 8, para permitir una amplia participación de la comunidad argentina en ambos encuentros. Una sustancial parte de la Reunión Anual es constituida por la rica oferta de diversos cursos para Profesores y Estudiantes. Muchos de los Profesores a cargo de los cursos correspondientes a esta Reunión han redactado notas que sirven de apoyo a los mismos. En este volumen ponemos a disposición de los asistentes al curso y de potenciales interesados las notas de seis cursos de la Reunión de Educación Matemática, a saber:

- "Explorando construcciones geométricas con GeoGebra", por Cristina Esteley, Isabel Marguet y Analía Cristante.
- "Secciones cónicas: ¿y esto,... para qué me sirve?", por Gabriel Soto.
- "Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras", por Carlos D'Andrea.
- "Generación de las ideas fundamentales de la Alfabetización Estadística a través del trabajo con proyectos", por Liliana Tauber y Mariela Cravero.
- "Números, entre la creación y el descubrimiento", por Gastón García.
- "Introducción a la investigación en Educación Matemática", por Virginia Montoro.

Agradecemos a los autores de las diversas notas por su desinteresado esfuerzo; a la instituciones que han permitido la realización de las Reuniones mencionadas y la edición de este volumen; y finalmente a Emilio Lauret por su dedicación en la coordinación de la reunión de todo el material.

Nicolás Andruskiewitsch

Córdoba, 10 de julio de 2012

Contenidos

- *Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras*
  Carlos D'Andrea 1

- *Explorando construcciones geométricas con GeoGebra*
  Cristina Esteley, Isabel Marguet y Analía Cristante 19

- *Números, entre la creación y el descubrimiento*
  Gastón Andrés García 29

- *Introducción a la investigación en Educación Matemática*
  Virginia Montoro 57

- *Secciones cónicas: ¿y esto,... para qué me sirve?*
  Gabriel Soto 69

- *Generación de las ideas fundamentales de la Alfabetización Estadística a través del trabajo con proyectos*
  Liliana Tauber y Mariela Cravero 93

JUEGOS MATEMÁTICOS Y ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS GANADORAS

CARLOS D'ANDREA

La matemática tiene una rama que se llama "Teoría de juegos". Sí: teoría de juegos. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece juegos en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes en el colegio? [7]

Índice

1. Introducción 1
2. Para "entrar en calor" 3
3. Análisis de posiciones "ganadoras" y "perdedoras" 4
4. Búsqueda de regularidades y/o patrones 11
5. Estrategias para no perder 14
6. Un mismo análisis para juegos en apariencia distintos 15
7. Para seguir jugando 17
7.1. Recursos en línea 18
Referencias 18

1. Introducción

Jugar es una actividad típica no solamente del ser humano. Varias especies de animales enseñan a sus cachorros a comer, a moverse, a socializar, a cazar... a través del juego. Este forma parte de nuestra vida cotidiana, lo encontramos con frecuencia a nuestro alrededor: en el casino, las loterías, el mercado de valores,... Hay juegos individuales y juegos colectivos. Los hay físicos o más intelectuales. Juegos donde se juega "a ganar" y otros de tipo cooperativo. Están los crucigramas, el sudoku, el ajedrez, el cubo de Rubik, el "go"...

En matemática hay un espacio dedicado al estudio de la teoría de juegos, no solo por sus aspectos combinatorios y/o lógicos, sino porque también nos sirven para explicar mejor fenómenos económicos y sociales que ocurren a diario a nuestro alrededor, y también porque este estudio nos sirve para tomar decisiones de manera más acertada. No es casualidad que la teoría de juegos no se enseñe solamente en las facultades de matemáticas, sino que también forma parte del currículo obligatorio en academias militares y facultades de economía e informática.

Y, por supuesto, está el valor didáctico del juego. De pequeños jugábamos con piedras o bolillas, con papeles de periódico o cartón. La mayoría de las veces jugábamos para ganar. Y para ganar en un juego es necesario recurrir a habilidades que tienen mucho que ver con las matemáticas. Hay que observar las jugadas, contar, deducir, generalizar resultados, planificar con ello futuras jugadas, investigar posibles nuevos métodos o estrategias. Los expertos en determinados juegos tienen sus propios recursos, sus propios "trucos" que les sirven para garantizar que van a ser los vencedores de la partida.

En este curso pretendemos apuntar un poco en esta última dirección. Los juegos que presentamos aquí serán —en todos los casos— juegos para dos jugadores, y en la mayoría de ellos se tratará de juegos "con estrategia", es decir que las reglas del juego están dadas de tal manera que uno de los dos jugadores puede conseguir ganar siempre si juega de una determinada manera, independientemente de lo que el otro jugador pueda hacer.

Está claro que este tipo de juegos "con estrategia" no son los más comunes o los que el que sigue estas notas probablemente haya jugado en su vida, ya que un juego del cual ya se sabe quién va a ganar antes de jugarlo probablemente no tenga ningún tipo de interés desde un punto de vista lúdico. Pero es justamente por ello que estos juegos tienen un gran valor didáctico —más allá de toda la matemática que uno puede aprender con ellos— ya que permiten acercarnos con un ojo crítico a una situación en apariencia ingenua —un juego— pero que en el fondo esconde una situación de ventaja para uno de los jugadores. Nuestra vida cotidiana está rodeada de situaciones parecidas a éstas: hay leyes, contratos y acuerdos que si uno no mira "la letra chica" luego se puede encontrar con sorpresas.

Estas páginas están organizadas de la manera siguiente. Comenzamos en la sección 2 proponiendo unos problemas "para entrar en calor". El análisis de estos juegos se hará más adelante. Lo hacemos así ya que pensamos que la mejor manera de entender y aprender matemática a partir de estos juegos es justamente dedicándoles suficiente tiempo como para familiarizarse y jugar con cada uno de ellos. Así que recomendamos a quien siga este escrito que no solamente le dedique tiempo y paciencia a jugar los cinco juegos de esa sección, sino a cada uno de los que aparecerán en esta nota, que seguramente sacará mucho más provecho de lo que pueda aprender por sí mismo que de lo que le sea explicado después.

En la Sección 3 aprenderemos a confeccionar tablas de posiciones "ganadoras" y "perdedoras", que nos servirán para analizar varios juegos que se adaptan bien a este análisis, sobre todo los juegos "de tablero". Obviamente, no todo juego podrá ser abordado de esta manera, y a veces observar regularidades o patrones puede ayudar a la hora de diseñar una estrategia. Este es el contenido de la Sección 4. En la sección siguiente analizaremos el "Ta-Te-Ti", un juego popular y milenario donde no se gana ni se pierde si ambos jugadores lo hacen correctamente . Acabaremos con los juegos mostrando en la seccion 6 cómo algunas situaciones en apariencia "nuevas" pueden resolverse usando un análisis similar a lo hecho en las secciones anteriores. Y finalmente propondremos en la última sección más bibliografía sobre el tema, así como sitios de internet donde se puede encontrar más material para profundizar lo que proponemos aquí, y también sugerencias para llevar al aula.

Agradecimientos: Estas notas nacieron en las sesiones de preparación para la olimpiadas matemáticas organizadas por la Universidad de Barcelona. Buena parte del material es extraído del "folklore". Varios juegos los he aprendido leyendo los libros de la serie "Matemática, estás ahí?" y "¿Cómo, esto también es matemática?" escritos por Adrián Paenza, además de varias conversaciones con él sobre estos temas. Le agradezco además los valiosos comentarios que ha hecho a este texto, y como también especialmente a José Ignacio Burgos, Lisi D'Alfonso, Emiliano Gomez, Gabriela Jerónimo, Pablo Mislej y

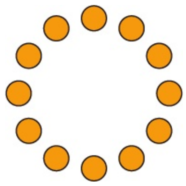


Figura 1. El círculo de monedas

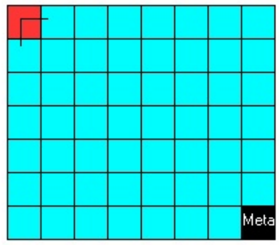


Figura 2. Tablero de "la torre" y "la reina"

Juan Pablo Pinasco por haberse leido pacientemente estas notas y realizado sugerencias para mejorar esta presentación.

2. Para "entrar en calor"

Para tener una mejor comprensión del análisis que haremos más adelante, proponemos los siguientes cinco juegos que esperamos que quien siga estas notas pueda experimentar con ellos jugando con otra persona. Al jugar, se debería intentar descubrir si existe alguna estrategia para ganar o al menos para no perder si es que uno juega correctamente.

Como parte de la comprensión del problema, también se sugiere ensayar con relajar las reglas del juego, ya sea olvidando alguna de ellas, o bien jugando con menos cantidad de elementos que los que el juego indica inicialmente.

Juego 2.1 (**El círculo de monedas**). *Se ponen* 12 *monedas en un círculo como se indica en la figura 1. Dos jugadores se turnan para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío. La persona que saca la/s última/s moneda/s es la ganadora.*

Juego 2.2 (**La torre**). *Se juega en un tablero como el del ajedrez, pero con* 7×8 *casillas. Una ficha (que llamaremos "la torre") se sitúa en el extremo superior izquierdo. La meta es la casilla del extremo inferior derecho.*

Cada jugador en su turno mueve la torre en uno de los dos sentidos: o bien horizontal-hacia la derecha, o bien vertical-hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero un espacio al menos. Gana el jugador que llega a la meta.

Juego 2.3 (**La Reina**). *Se juega en un tablero de* 7×8 *casillas como en el juego anterior y una ficha (que ahora llamaremos "la reina") en el extremo superior izquierdo. La meta está en el extremo inferior derecho.*

Cada jugador en su turno mueve la reina en uno de los tres sentidos: horizontal-hacia a la derecha, vertical-hacia abajo, y también diagonal-hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero un espacio al menos. Gana el jugador que llega a la meta.

Juego 2.4 (**El 1 y el 2**). *Se escriben diez números* $1's$ *y diez números* $2's$ *en el pizarrón. En cada turno, un jugador borra dos cualesquiera de los números que están escritos. Si los números borrados son idénticos, se los reemplaza con un* 2*. Si son diferentes, se reemplazan con un* 1*. La persona que comienza el juego gana si queda un* 1 *al final. El segundo jugador gana si queda un* 2 *al final.*

Juego 2.5 (**Sumar 15**). *Se tienen los números* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *y* 9*. Por turnos, cada uno de los jugadores elige un número de la lista, y se queda con él (el número se*

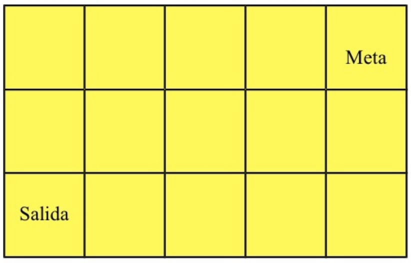


Figura 3. Tablero de la persecución cartesiana

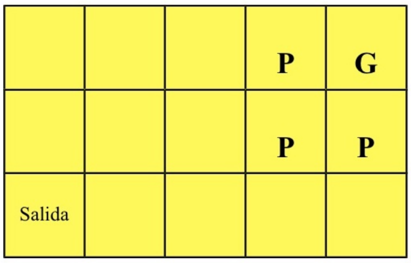


Figura 4. Casillas "perdedoras"

retira de la lista de disponibles). El primero que consigue sumar 15 *usando tres de los números que eligió, gana el juego.*

3. Análisis de posiciones "ganadoras" y "perdedoras"

Algunos juegos admiten un análisis "desde atrás hacia adelante", como si uno tomara una película y decidiera mirarla desde el final hacia el principio. En este caso, lo que haremos será comenzar suponiendo el juego terminado y con un ganador ya establecido. A partir de allí, intentaremos reconstruir cómo se llegó a esa posición y de qué manera pudo haber uno ganado o perdido. Este análisis hoy en día se puede realizar sobre cualquier juego con unas reglas coherentes y no contradictorias con ayuda de una computadora, de una manera "sencilla" (si uno tuviera infinita memoria en la máquina y además infinita paciencia, ya que analizar todos los casos de un posible juego puede ser un proceso muy largo, aún para un procesador de los más modernos), y de hecho no es un mal ejercicio intentar "programar" alguno de los juegos que aparecen en esta nota, para poder apreciar la gran capacidad computacional de la que disponemos actualmente.

Pero nosotros iremos en otra dirección, haremos ese análisis "a mano", que además de disfrutar del placer de entender cómo se estudia y encuentra una estrategia para jugar sin equivocarse, también podremos extender nuestro análisis de manera muy sencilla a juegos más generales.

Juego 3.1 (**Persecución cartesiana**). *Se juega sobre el tablero que se ve en la figura 3. El primer jugador hace una marca en la casilla de salida. En su turno cada jugador puede hacer una marca en una casilla situada*

- *directamente encima*
- *directamente a la derecha*
- *en diagonal (encima y a la derecha)*

de la última marca hecha por su oponente. Gana el primer jugador que consiga llegar a la meta.

Análisis del juego y solución. Veamos cómo un simple análisis "de atrás hacia adelante" nos permitirá decidir quién tiene estrategia ganadora y cómo ha de jugar.

Claramente, quien arribe a la "meta" ha ganado el juego, así que ésta es —por excelencia— la casilla "ganadora" y la denotaremos con una "**G**" (ver figura 4). ¿Cómo se llega a esta casilla? Se puede acceder a ella de tres maneras:

- o bien desde la casilla que está inmediatamente a la izquierda de la meta;
- o bien desde la casilla que está inmediatamente debajo de la meta;
- o bien desde la casilla que se encuentra "diagonalmente" debajo y a la izquierda de la meta.

A cualquiera de estas tres casillas la llamaremos “perdedora”. ¿Por qué? Pues porque si arribo a alguna de ellas, el jugador siguiente —si juega sin equivocarse, claro— llegará a la meta. Es decir, ganará. Por eso las denotaremos con una “**P**”, son casillas adonde si quiero ganar este juego, no debería poner mis fichas nunca. O dicho de otra manera más concreta, si arribo a alguna de estas casillas, es seguro que voy a perder si mi rival sabe jugar inteligentemente.

A partir de ahora el análisis se vuelve un poco más delicado, pero con un poco de paciencia y sin perder de vista las reglas del juego, podremos hacer un análisis global.

¿Cuándo puedo marcar una casilla como “ganadora”? Es fácil ver que las posiciones “**G**” son aquellas para las cuales el jugador siguiente —juegue como juegue— estará forzado a moverse a una posición “**P**”. Un simple análisis nos muestra que las posiciones ganadoras provienen de las siguientes situaciones “previas” (aquí el juego siempre se analiza desde el punto superior derecho —la meta— hacia “atrás”, es decir hacia la izquierda y hacia abajo), ver figura 5.

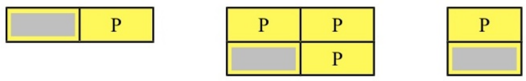


Figura 5. Posiciones que definen una casilla “ganadora” (el primer y el tercer grupo están sobre un “borde” del tablero)

Por otro lado, una situación “**P**” se puede marcar cada vez que tenga a mi derecha, o arriba, o arriba-a la derecha *alguna* (no necesariamente todas) posición ganadora. Es claro que esto es así ya que si mi rival conoce bien el juego, y yo arribo a una casilla “perdedora”, él se ocupará en su turno siguiente de mover la ficha a una posición ganadora (ver figura 6).

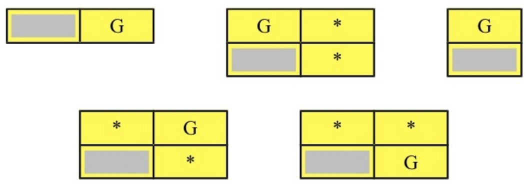


Figura 6. Posiciones que definen una casilla “perdedora”

Teniendo en cuenta estas reglas, es posible “llenar” el tablero de **G**’s y **P**’s que nos indicarán qué tipo de casilla es cada una de las 15 que hay en juego. A partir de la figura 4, y utilizando el análisis que aparece en la figura 6, vemos inmediatamente que las posiciones extremas (arriba a la izquierda y abajo a la derecha) de las que ya habíamos completado, son “ganadoras” (ver figura 7).

Sigamos un paso más, y veamos que se pueden completar también las dos casillas “del medio” que nos dejó el tablero en el análisis de la figura 7. En este caso, se tratarán de casillas “perdedoras” ya que de cada una de ellas mi rival —jugando inteligentemente— puede arribar a una casilla ganadora. Así que tenemos nuevamente una situación como la que se describe en la figura 8.

Analizamos un paso más para asegurarnos de haber comprendido las reglas de la resolución. La casilla que queda vacía en la fila y columna número 3 está en posición “ganadora”: desde allí, no importa lo que haga mi rival, irá a parar a una casilla **P** (ver figura 9).

		G	**P**	**G**
			P	**P**
Salida				**G**

FIGURA 7. Nuevas posiciones "ganadoras"

		G	**P**	**G**
		P	**P**	**P**
Salida			**P**	**G**

FIGURA 8

A partir de aquí ya podemos continuar el análisis, siempre "desde arriba hacia abajo" y "desde la derecha hacia la izquierda", utilizando las reglas mencionadas anteriormente. Si lo hacemos correctamente, arribaremos a un tablero como el de la figura 10.

¿Qué quiere decir la posición **G** al principio? Uno estaría tentado de decir que conviene ser el primero ya que uno arranca en una posición ganadora. Pero es fácil ver mirando ahora la figura 10, que cualquier movimiento que haga la persona que comienza, caerá en una posición "perdedora"! Así que, en este juego, tiene estrategia ganadora la persona que no empieza jugando. Esto es así pues hemos dado valor a las casillas como si hubiéramos arribado allí (la última casilla es "ganadora" para el que consiga poner su ficha allí), y como a la casilla inicial no no arriba nunca sino que se comienza de allí, podríamos pensar que el que juega segundo hace su primer movida poniendo la ficha en la casilla de salida, y eso le garantiza la victoria.

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el jugador que no comienza el juego. La estrategia viene dada por el tablero de la figura 10.

Ejercicio 3.2. Jugar con un compañero varias veces este juego, utilizando la tabla. Intercambiar las posiciones de primero y segundo entre los jugadores. El que juega primero, que intente "demorar" lo más posible la *agonía*. ¿Cuál es la mayor cantidad de "pasos" que puede durar una partida de este juego?

Ejercicio 3.3. Hacer el análisis equivalente al de la figura 10 para un tablero de 4 filas y 7 columnas. ¿Quién tiene estrategia ganadora ahora?

Ejercicio 3.4. Encontrar los valores de m y n para los cuales tiene estrategia ganadora el jugador que comienza jugando en un tablero de m filas y n columnas. Demostrar esta afirmación (el principio de inducción puede ser de utilidad en este caso).

Ejercicio 3.5. Hacer el análisis de los tableros de los juegos 2.2 y 2.3 de la sección 2.

No necesariamente los juegos que admiten un análisis de casillas "ganadoras" y "perdedoras" como el anterior y los de la sección 2 han de ser sobre un tablero donde las

		G	**P**	**G**
		P	**P**	**P**
Salida		**G**	**P**	**G**

FIGURA 9

G	**P**	**G**	**P**	**G**
P	**P**	**P**	**P**	**P**
G	**P**	**G**	**P**	**G**

FIGURA 10

casillas aparecen físicamente. El siguiente es un ejemplo de un juego que puede ser analizado de manera similar al anterior, aunque no involucra ningún tablero.

Juego 3.6 (**La carrera del cien**). *El que empieza dice un número cualquiera del* 1 *al* 10. *El otro jugador le suma al número que dijo su oponente un número del* 1 *al* 10 *y dice el resultado. Continúan jugando así, por turnos. Gana el que primero diga* 100.

Análisis del juego y solución. Para analizar este juego podemos construir un "tablero" como el de la figura 11 conteniendo los 100 números del 1 al 100. No hace falta que sea cuadrado el tablero, lo importante es que contenga los primeros cien números naturales.

Tal como hemos hecho en el juego anterior, indicaremos con **G** y **P** las casillas "ganadoras" y "perdedoras" respectivamente, y también haremos un análisis "de atrás hacia adelante". Con este criterio, está claro que quien arribe a conseguir el número 100 habrá ganado el juego, o sea que el 100 es **G**. También está claro que si uno de los dos jugadores arriba a cualquiera de los números 90, 91, 92, 93, ..., 99 sería el "perdedor". ¿Por qué? Pues porque desde cualquiera de estas posiciones —siempre siguiendo las reglas del juego— uno puede llegar al número 100 sumándole un número entre 1 y 10 según las reglas del juego. Luego, las "casillas" entre el 90 y el 99 son "perdedoras".

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90 P
91 P	92 P	93 P	94 P	95 P	96 P	97 P	98 P	99 P	100 G

FIGURA 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89 G	90 P
91 P	92 P	93 P	94 P	95 P	96 P	97 P	98 P	99 P	100 G

FIGURA 12

Y ahora haremos una observación importante, que será crucial para "resolver" todo el "tablero". Afirmamos que la "casilla" número 89 es "ganadora". En efecto, esto es así ya que si yo consigo llegar a este número, no importa lo que pueda hacer mi rival, él conseguirá en el paso siguiente uno de los números entre 90 y 99, que son todos números "perdedores". Luego, esta casilla me deja en posición de ganar (ver figura 12).

A partir de esta observación, es fácil ver que el análisis del juego "se repite" para atrás (como si reemplazara la casilla 100 por la 89). Notar que entonces las casillas del 78 al 88 serán "perdedoras", la número 77 entonces ganadora... y así sucesivamente se llena el tablero como indica la figura 13. Notar que el número 1 está en posición ganadora, y es uno de los diez primeros números que puede elegir la persona que juega primero, así que éste es un juego con "ventaja para el que juega primero"

1 G	2 P	3 P	4 P	5 P	6 P	7 P	8 P	9 P	10 P
11 P	12 G	13 P	14 P	15 P	16 P	17 P	18 P	19 P	20 P
21 P	22 P	23 G	24 P	25 P	26 P	27 P	28 P	29 P	30 P
31 P	32 P	33 P	34 G	35 P	36 P	37 P	38 P	39 P	40 P
41 P	42 P	43 P	44 P	45 G	46 P	47 P	48 P	49 P	50 P
51 P	52 P	53 P	54 P	55 P	56 G	57 P	58 P	59 P	60 P
61 P	62 P	63 P	64 P	65 P	66 P	67 G	68 P	69 P	70 P
71 P	72 P	73 P	74 P	75 P	76 P	77 P	78 G	79 P	80 P
81 P	82 P	83 P	84 P	85 P	86 P	87 P	88 P	89 G	90 P
91 P	92 P	93 P	94 P	95 P	96 P	97 P	98 P	99 P	100 G

FIGURA 13

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el jugador que comienza el juego. Debe elegir el número 1 en su primera jugada, y a partir de allí seguir la estrategia dada por la tabla de la figura 13.

Ejercicio 3.7. Hacer el análisis del juego si la "meta" es llegar al número 35 siguiendo las mismas reglas del juego. ¿Sigue teniendo estrategia ganadora el primer jugador? ¿Y si la meta fuera el 77?

Ejercicio 3.8. Mirando el tablero de la figura 13, uno podría conjeturar que las posiciones ganadoras son números congruentes entre sí módulo 11. ¿Es cierto esto? ¿Podrías demostrarlo?

Ejercicio 3.9. Resolver en función de $n < m$, el juego "general" donde se ha de arribar al número m eligiendo primero un número entre 1 y n, y a partir de allí sumando cualquier número entre 1 y n.

El juego anterior podría resolverse también analizando unos primeros casos (por ejemplo "jugando" solamente con los números del 1 al 20), e intentando deducir alguna regla general que nos sirva para tener que llegar al 100 sin tener que hacer todo el análisis de la figura 11. Veremos más de esto en la sección siguiente, donde la estrategia para analizar el juego viene de mirar algunas regularidades o patrones en el juego. De momento lo utilizaremos en la siguiente situación.

Juego 3.10 (**Descenso hacia el** 0). *Se comienza con el número* 1000 *escrito en el pizarrón. En cada turno, uno de los jugadores sustrae al número que está escrito, un* *número natural menor o igual que él, que sea potencia de* 2*. El resultado se escribe nuevamente en el pizarrón, y el número anterior es borrado. El jugador que llega a* 0 *gana.*

Análisis del juego y solución. Supongamos que el número más alto que estuviera escrito en la pizarra es el 10 y no el 1000. Entonces podremos hacer un análisis más sencillo de las posiciones "ganadoras" y "perdedoras" del juego. A primera vista, está claro que el 0 es **G** y que las potencias de $2: 1, 2, 4$ y 8 son **P**'s:

0	**G**
1	**P**
2	**P**
3	?
4	**P**
5	?
6	?
7	?
8	**P**
9	?
10	?

Ahora continuamos el análisis en una segunda ronda: los números que serán "ganadores" serán aquellos a los que, sin importar lo que haga el jugador rival, arribará a una posición "perdedora". Por ejemplo, el 3 será **G** ya que las posibilidades para el rival cuando le toque jugar son

- $3 - 1 = 2$, que es **P**;
- $3 - 2 = 1$, que también es **P**.

Por otro lado, el 5 es **P**, porque si llego a ese número, el jugador rival puede restarle 2 y quedar en una casilla "ganadora".

Habiendo analizado qué tipo de posiciones les toca al 3 y al 5, podemos concluir que el 6 también es **G**. Esto es así ya que las posibles movidas del rival a partir del 6 son

- $6 - 1 = 5$, que es **P**,
- $6 - 2 = 4$, que es **P**,
- $6 - 4 = 2$, que también es **P**.

El análisis del juego queda —de momento— así:

0	**G**
1	**P**
2	**P**
3	**G**
4	**P**
5	**P**
6	**G**
7	?
8	**P**
9	?
10	?

Y aplicando el mismo análisis que hemos hecho anteriormente al 7, al 9 y al 10 *en ese orden*, llegamos a la siguiente tabla donde hemos resaltado las posiciones "ganadoras":

0	**G**
1	**P**
2	**P**
3	**G**
4	**P**
5	**P**
6	**G**
7	**P**
8	**P**
9	**G**
10	**P**

Uno podría ahora continuar con esta tabla hasta llegar al número 1000, que seguramente si lo hace con bastante paciencia arribará a responder la pregunta inicial de quién tiene estrategia ganadora. Pero a simple vista, conjeturamos que las posiciones "ganadoras" son aquellas que son múltiplos de 3, lo cual es verdad en general. Invitamos al lector a intentar demostrar este hecho antes de continuar leyendo lo que sigue.

Proposición: En este juego, las posiciones "ganadoras" son los números múltiplos de 3*, y el resto de los números es* **P**.

Demostración: Obviamente ni 1, ni 2, ni 4, ni $8, \ldots$ ninguna de las potencias de 2 puede ser un múltiplo de 3 ya que en su factorización solo aparecen múltiplos de 2. De hecho, algunas dejan resto 2 y otras dejan resto 1 en la división por 3. La posición "ganadora" (el 0) es un múltiplo de 3. Luego,

- Si estoy parado en una posición que sea un múltiplo de 3, haga lo que haga mi rival, acabará en una posición que NO es un múltiplo de 3.
- Por otro lado, si estoy en una posición que no es un múltiplo de 3, siempre puedo (restando 1 o 2 por ejemplo), arribar a una posición que sea múltiplo de 3.

En definitiva, si estoy parado en una posición de la forma $3k$ con $k > 0$ (múltiplo positivo de 3), haga lo que haga mi rival, yo podré nuevamente volver a otra posición de la forma $3k'$ con $k' < k$. Como "la" posición ganadora será $0 = 3 \times 0$, entonces si estoy parado en una posición de la forma $3k$ en algún momento, me puedo asegurar de mantenerme siempre en "múltiplos de 3" hasta arribar al 0. Así que los números de la forma $3k$ son **G**'s.

Por otro lado, si estoy en una posición que no es múltiplo de 3, como en el paso siguiente el jugador rival —si juega con este mismo esquema— podrá llevarme hasta una posición de la forma $3k$, se situará él en una posición **G**. De esto se deduce que los números que no son múltiplos de 3 son **P**, ya que a partir de cualquiera de ellos se puede arribar a una **G**. $\square$

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el jugador que comienza el juego. La estrategia será la siguiente: primero le restará al 1000 una potencia de 2 que deje resto 1 en la división por 3 (como 1 o 4...), ya que al hacerlo le quedará un múltiplo de 3 en el pizarrón. Luego irá "bajando" en el juego forzando siempre la aparición de un múltiplo de 3 en su turno.

Ejercicio 3.11. Demostrar que si las reglas del juego se hubieran modificado de la manera siguiente, *"en cada paso restamos* 1 *o* 2 *del número que está escrito en la* *pizarra"*, habríamos arribado igualmente al mismo análisis y estrategia que en el juego original.

Ejercicio 3.12. Elegimos ahora un número $k < 1000$. Supongamos que el juego se acaba cuando uno "llega" a conseguir en la pizarra el número k. ¿Quién tiene estrategia ahora? ¿Y si en lugar de "conseguir el número k" cambiamos las reglas por "conseguir el número k o uno menor que él"? ¿Quién tiene estrategia ahora?

Ejercicio 3.13. Resolver el problema general: dados $k < n$, se comienza con el número n escrito en la pizarra y se acaba al arribar a k, bajando "en potencias de 2". Decidir en función del dato (k, n) qué jugador tiene estrategia ganadora.

Ejercicio 3.14. ¿Y si se *bajara* en potencias de 3? ¿Cómo sería el análisis del juego?

4. Búsqueda de regularidades y/o patrones

No todo juego admite una tabla de análisis como veníamos haciendo hasta ahora. En varios de ellos como el que vamos a ofrecer a continuación, la cantidad de configuraciones posibles es o bien muy grande o bien imposible de analizar "de atrás hacia adelante" como hicimos en la sección anterior. Y es por ello que otro tipo de estudio se hace necesario. El que presentamos aquí se basa en el hecho de que en algunas ocasiones, el planteo del juego esconde alguna simetría o regularidad (como el hecho de ser múltiplo de 3 que fue analizado en el juego 3.10) que puede ser utilizada para diseñar la estrategia. Estas regularidades pueden ser geométricas, aritméticas o de cualquier otra naturaleza. Veamos algunos ejemplos.

Juego 4.1 (**La mesa circular**). *Estás sentado frente a tu adversario, separados por una mesa redonda de aproximadamente 1 metro de diámetro. Cada uno tiene varias monedas del mismo tamaño, las suficientes como para cubrir toda la mesa. El juego consiste en ir colocando las monedas una a una, por turnos, sobre la mesa. Las monedas no pueden tocarse ni superponerse en lo más mínimo. Además, debe quedar toda la superficie de la moneda sobre la mesa. La primer persona que ya no pueda poner una moneda sobre la mesa, pierde. Al colocar nuevas monedas sobre la mesa, éstas no pueden desplazar las que están previamente colocadas.*

Análisis del juego y solución. Aquí claramente no existe una "meta" ni "posición ganadora" única como en los casos anteriores. De hecho, la cantidad posible de configuraciones es infinita e imposible de analizar de la manera en la que la veníamos haciendo.

Sin embargo, este juego tiene una regularidad muy notoria asociada al concepto de "simetría central". Notar que una vez "conquistado" el centro de la mesa circular (como en la figura 14), cada movimiento del rival podrá ser "simetrizado" respecto de este centro. De esta manera, si el primer jugador pone su primer moneda exactamente en el centro del círculo, cada vez que su rival pueda ubicar una moneda en algún sector de la mesa, él podrá hacer lo mismo, ubicándola en el sector opuesto de la mesa con respecto al centro (el punto simétrico respecto del centro, ver figura 15).

Es fácil ver entonces que —jugando de esta manera— si hay un lugar "vacío" donde el rival puede poner una moneda, entonces también habrá un espacio "vacío" del mismo tamaño en el otro extremo de la mesa, el simétrico respecto al centro. Y entonces la persona que no podrá colocar más monedas será la que no ha comenzado, si es que el primer jugador ha jugado siempre siguiendo esta estrategia.

Respuesta: Tiene estrategia ganadora la persona que comienza el juego. La estrategia consiste en colocar la primer moneda coincidiendo con el centro del círculo, y a partir de allí jugar "simétricamente" con respecto a este centro, por cada movida del rival.

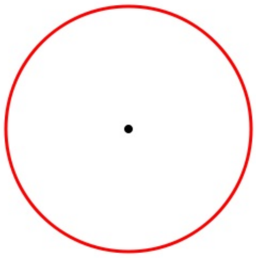


FIGURA 14. El centro de la mesa circular

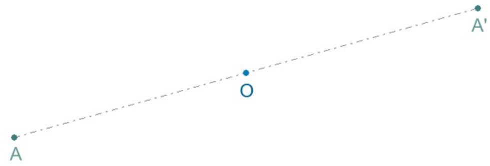


FIGURA 15. Simetría central

Observación 4.2. Notar que la única propiedad geométrica que hemos utilizado del círculo aquí es que tiene un centro de simetría. Si la mesa hubiera sido cuadrada, o rectangular u ovalada (o de cualquier otra forma que tuviera un centro de simetría), el análisis anterior también se aplicaría a esa mesa, y la misma estrategia serviría para ganar al primer jugador.

Ejercicio 4.3. El juego "el círculo de monedas" (juego 2.1) también tiene una cierta "simetría central". Analizarlo, decidir quién tiene una estrategia ganadora, y cuál es esa estrategia.

El siguiente es un juego muy popular que aparece como lo presentamos aquí en una de las obras de Martin Gardner [3].

Juego 4.4 (**El zorro y el ganso**). *Se juega en el tablero que muestra la figura 16.*

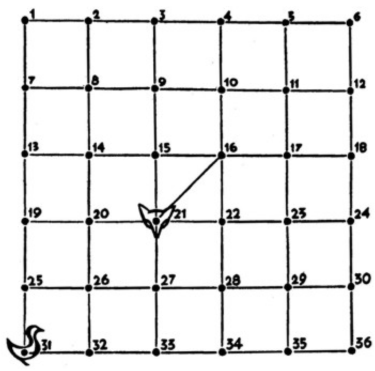


FIGURA 16. El zorro y el ganso

Hay que poner dos fichas distintas entre sí, una en el lugar donde está el retrato del zorro; y otra en donde está el retrato del ganso. Uno de los jugadores moverá al zorro, el otro moverá al ganso. Una "movida" consiste en deslizar la ficha desde un punto hasta otro adyacente, siguiendo una de las líneas negras trazadas en el tablero. El zorro intentará capturar al ganso desplazándose hacia el punto ocupado por el ganso. El ganso debe intentar impedir que esto suceda. Si el zorro captura al ganso en diez movimientos o menos (es decir, en diez movimientos del zorro), ganará el juego. Si no logra su objetivo, ganará el ganso. El primer movimiento del juego lo hace el zorro.

Análisis del juego y solución. Después de jugar un rato este juego, parecería ser una misión imposible atrapar al ganso. Y esto ocurre por la sencilla observación siguiente: al ser el zorro el primero en moverse, un primer instinto será acercarse al ganso, y luego se quedará —después de la primer movida— a 3 "pasos" de distancia del ganso.

El ganso se moverá un paso en alguna de sus direcciones permitidas, y luego el zorro intentará perseguirlo dando un paso más. Pero nuevamente quedará a una cantidad IMPAR de “pasos” del ganso, ya que cada uno ha dado un paso en alguna dirección. La posición “ganadora” en este juego para el zorro es cuando él se encuentra a 0 pasos del ganso, y 0 es un número par, o sea que la misión parece imposible.

A MENOS QUE el zorro utilice la diagonal que se encuentra en el centro del tablero, la paridad en la “distancia” entre el zorro y el ganso no cambiará. Notar que una vez atravesada esa diagonal (¡una sola vez!), podrá dedicarse a perseguir al ganso tranquilamente, que en menos de 10 movidas lo atrapará independientemente de lo que haga el ganso (y evitando —claro— que el ganso cruce la diagonal).

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el zorro. En su primer movida debe cruzar la diagonal del centro del tablero, y luego perseguir al ganso sin volver a cruzar esa diagonal ni dejar que el ganso la cruce.

Ejercicio 4.5. ¿Y si el que comenzara el juego ahora fuera el ganso? ¿Sigue teniendo estrategia ganadora el zorro? ¿Cuál es esta estrategia?

Juego 4.6 (**Dividiendo**). *Sobre una mesa hay tres puñados de fósforos. Uno contiene* 10 *fósforos, un segundo grupo,* 15*, y el tercero,* 20 *fósforos. En cada turno uno de los dos jugadores elige uno de los puñados que hay sobre la mesa y lo divide en dos grupos más pequeños, sin importar la cantidad que haya en cada uno de ellos. Pierde el jugador que ya no puede dividir más.*

Análisis del juego y solución. Este juego es bastante simple de “resolver” si uno tiene en cuenta un par de hechos muy simples que se deducen directamente a partir de las reglas el juego:

- *Independientemente de cómo se haya jugado, la posición final del juego será de* 45 *grupos distintos conteniendo* 1 *fósforo cada uno.*

  En efecto, si no estuviéramos en esta situación (que uno podría llamar “ganadora”), es porque algún grupo tiene al menos 2 fósforos, y esto implica entonces que el juego no puede acabar allí ya que siempre el jugador cuyo turno es el próximo tiene al menos un grupo (el que tiene 2 o más fósforos) para dividir.

  O sea que en este juego —a diferencia de los anteriores— existe *“una”* sola posición ganadora. El otro invariante que nos interesa tener en cuenta es:
- *En cada paso, el número de puñados de fósforos aumenta en uno.*

  Efectivamente, las reglas del juego dicen que a cada paso hay que elegir uno de los grupos sobre la mesa y dividirlo en 2 montones más. Y un razonamiento muy sencillo demuestra que en cada paso, “pierdo” un grupo para “crear” dos mas. El número total de grupos naturalmente aumenta en uno.

Estas dos afirmaciones son suficientes para analizar el juego. Cada vez que haga su “movida” el primer jugador, se pasará de una cantidad impar (tres al principio) a una cantidad par de montones. Y cada vez que haga su movida el segundo jugador, se pasará de una cantidad par (cuatro al principio) a una cantidad impar de puñados. Como la jugada “ganadora” contiene 45 puñados, y este es un número impar, entonces ganará inexorablemente el segundo jugador. Notar que en este juego... ¡no hace falta hacer ningún tipo de análisis para buscar una estrategia ganadora! Hagan lo que hagan tanto el primer jugador como el segundo, habrá $42 = 45 - 3$ jugadas, y ganará la persona que no comience con el juego.

Respuesta: Gana el segundo jugador, independientemente de cómo se desarrolle el juego.

Ejercicio 4.7. Resolver el juego "generalizado" donde hay k puñados de fósforos con n_1, n_2, $\ldots, n_k$ fósforos cada uno, y las mismas reglas del juego de antes.

Ejercicio 4.8. Demostrar que en el juego "el 1 y el 2" (juego 2.4), la cantidad de 1's en el pizarrón siempre se mantiene par después de cada jugada. Usar este hecho para decidir quién es el ganador. ¿Hay alguna estrategia?

5. Estrategias para no perder

Uno podría creer a esta altura que todo juego admite una estrategia ganadora y solo es cuestión de encontrarla si es que uno quiere jugarlo bien. Lamentablemente, no es así en la mayoría de los casos. Por ejemplo, muchos de los juegos que involucran el azar (naipes, o lanzamiento de dados, o la lotería) no admiten un análisis como los que hemos venido realizando, y precisamente buena parte del interés en estos juegos es el hecho de que "la suerte" puede estar a favor de cualquiera, buenos o malos jugadores, principiantes o más "entrenados".

Sin embargo, hay una clase de juegos para los cuales alguno de los dos jugadores —o los dos— tiene una estrategia "para no perder", que esencialmente implica que —si juega bien— podrá ganar o "empatar", pero nunca perder. El Ta-Te-Ti (juego 5.1) es uno de ellos, y veremos su análisis en breve. Otro juego que sorprendentemente tiene estrategia para no perder —si ambos jugadores juegan "sin equivocarse"— es el de las damas ("checkers" en inglés), que en el año 2007 nos hemos enterado (ver [9], y también la nota sobre "el fin de las damas" en [8]) que tiene estrategia para no perder.

También hay una gran familia de juegos de los que no se conoce estrategia aún. El ajedrez es uno de ellos (aunque con la capacidad computacional de estos días es probable que se sepa tarde o temprano si hay o no una tal estrategia. De momento ya hemos llegado a una situación en la que las computadoras pueden jugar mejor que los seres humanos a fuerza de hacer una cantidad inmensa de "análisis locales" y estudios de miles de millones de "posiciones ganadoras"). Otro es el "Go", un juego de origen chino muy popular en estos días. De más está decir que la búsqueda de algoritmos y estrategias para resolver estos y otros juegos populares es un tema de investigación corriente en la rama de las matemáticas que se conoce como teoría de juegos.

En esta sección analizaremos solamente uno de los juegos más populares del planeta, el "Ta-Te-Ti" o "tres en línea" (Tic-Tac-Toe en inglés), del cual se cree que ya lo jugaban los antiguos egipcios [10].

Juego 5.1 (**Ta-Te-Ti**). *Se juega sobre un tablero de* 3×3 *como indica la figura 17. Por turnos dos jugadores van marcando o poniendo fichas en el tablero, el mismo tipo de marca o ficha para cada jugador. Gana el primero que consigue "tres en línea".*

<u>*Análisis del juego y solución.*</u> Después de jugar un rato pareciera quedar claro que tiene "ventaja" el que comienza, y que de alguna manera conviene poner la primer marca o ficha en el centro.

Sin embargo, esto no produce ninguna estrategia ganadora, y de hecho es fácil ver que si uno comienza sin ocupar la casilla del centro, igual puede conseguir "no perder". Y —obviamente— si comienza ocupando la casilla del centro tampoco es seguro que gane.

Lo que nos servirá para analizar este juego es algo que llamaremos "respuesta de bloqueo": tiene cierta ventaja el que hace la primera jugada, pero esta ventaja se verá anulada si el segundo jugador efectúa una respuesta de bloqueo.

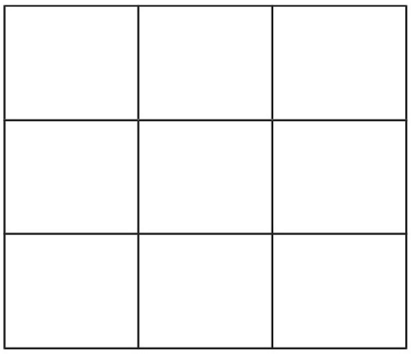


Figura 17. Ta-Te-Ti

Para la primera jugada hay esencialmente 3 posibilidades: al centro, en un vértice del cuadrado, o en uno de los cuatro costados que no es vértice. Para cada una de ellas el jugador siguiente tiene respuestas de bloqueo, que consisten en jugar en cualquiera de las posiciones pintadas en la figura 18.

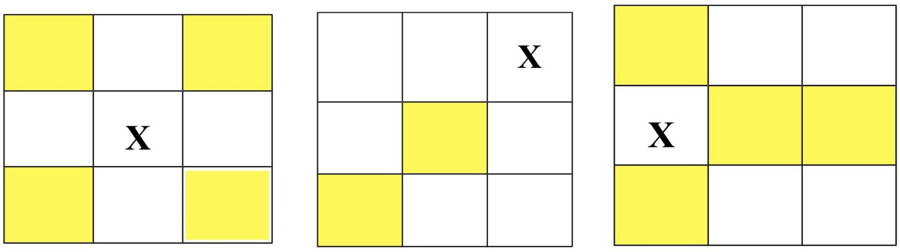


Figura 18. "Respuestas de bloqueo" en el Ta-Te-Ti

Se puede comprobar con un poco de paciencia pero sin ninguna dificultad, siguiendo las distintas jugadas con algún tipo de diagrama (de árbol por ejemplo), que a cada nueva jugada del primer jugador, el segundo tiene siempre disponible una respuesta de bloqueo. Recíprocamente, se puede ver también de una manera sencilla que por cada jugada de quien no haya empezado el juego, el primer jugador también tiene disponible una respuesta de bloqueo.

Respuesta: En este juego, si ambos jugadores juegan sin equivocarse, siempre se acaba en "empate".

Ejercicio 5.2. Analizar la variante del juego donde cada jugador solamente tiene 3 fichas, y es posible desplazarlas en el tablero ocupando las casillas vacías vecinas (vertical, horizontal y diagonalmente).

Ejercicio 5.3. Analizar el juego del "Ta-Te-Ti tridimensional" que se juega en un "tablero" de $3 \times 3 \times 3$ con la misma regla de que gana el primero que consigue "tres en línea". Demostrar que en esta variante, el que comienza tiene estrategia ganadora si ubica la primera marca o ficha en el centro.

6. Un mismo análisis para juegos en apariencia distintos

No pretendemos cubrir en estas páginas todas las posibles estrategias que existen para abordar todos los juegos que admiten alguna estrategia para ganar o para no perder. Eso sería una misión imposible, ya que hay miles de situaciones cuyo análisis puede ser complicadísimo. Sin embargo, conviene tener un ojo atento para poder detectar situaciones cuyo planteo en principio parece bastante extraño, pero en realidad admiten el mismo análisis que varios de los ya conocidos. En esta sección analizaremos algunos de ellos; el juego de "sumar 15" (juego 2.5) será uno de ellos.

Juego 6.1 (**Más fósforos**). *Sobre una mesa se colocan dos puñados de* 5 *fósforos cada uno. Cada jugador, por turno, puede sacar un solo fósforo de uno de los dos grupos, o* 1 *fósforo de cada puñado. Pierde el jugador que saca el último fósforo.*

Análisis del juego y solución. Este juego también admite un análisis "de tablero" tal como hicimos con la "persecución cartesiana" (juego 3.1). De hecho, si nos construimos un tablero de 6×6 como en la figura 19, donde numeramos las filas y las columnas desde el 0 hasta el 5 en el orden que se muestra allí. La posición (i, j) significará en el juego que hay i fósforos en uno de los puñados y j fósforos en el otro. Claramente, la posición "perdedora" es la $(0, 0)$, y a partir de allí se puede hacer el mismo análisis "hacia atrás" siguiendo exactamente las mismas reglas que se ilustran en la figura 5 para las posiciones "ganadoras" y en la figura 6 para las "perdedoras". Acabaremos con un tablero como el de la figura 19 De este análisis se desprende fácilmente que las

5	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	
G	*P*	*G*	*P*	*G*	*P*	*0*
P	*P*	*P*	*P*	*P*	*G*	*1*
P	*G*	*P*	*G*	*P*	*P*	*2*
P	*P*	*P*	*P*	*P*	*G*	*3*
P	*G*	*P*	*G*	*P*	*P*	*4*
P	*P*	*P*	*P*	*P*	*G*	*5*

FIGURA 19. Tabla de posiciones del Juego 6.1

posiciones "ganadoras" son muy pocas, y que la estrategia ganadora la tiene el primer jugador, que ha de quitar un fósforo de cada grupo para situarse en una posición ganadora.

Respuesta: La estrategia ganadora la tiene el primer jugador, quien debe en la primera jugada quitar un fósforo de cada puñado, y luego seguir jugando según indica la tabla de la figura 19.

Ejercicio 6.2. Hacer el análisis general, dados dos puñados con n y m fósforos respectivamente ¿Qué jugador tiene estrategia y cómo ha de jugar?

Ejercicio 6.3. ¿Y si hubieran 3 puñados con 5 fósforos cada uno? ¿Y si hubieran 3 puñados con n, m y k fósforos respectivamente? Analizar las variantes "sacando uno de cada grupo o uno de cada par de grupos", y después "sacando uno de cada grupo o uno de los tres grupos".

Ejercicio 6.4. ¿Cómo sería el análisis si el que gana es el que saca el último fósforo?

Juego 6.5 (**Ocho ciudades**). *Se tiene un mapa con 9 rutas conectando 8 ciudades como en la figura 20, y dos lápices: uno rojo y el otro azul. Por turnos cada jugador selecciona una carretera pintándola con su color. Gana el jugador que consigue pintar del mismo color tres carreteras que pasen por una misma ciudad.*

Como siempre, recomendamos al lector “jugar” previamente este juego para intentar encontrar alguna regularidad o similaridad con algún juego anterior.

Análisis del juego y solución. Insólitamente, este juego y el “Ta-Te-Ti” (juego 5.1) admiten el mismo análisis si uno enumera las rutas como en la figura 21, y observa la numeración de cada una de las carreteras y la correspondencia con la tabla de 3×3 que figura al lado. En esta correspondencia, seleccionar una carretera será equivalente a tachar una casilla del casillero. Luego, seleccionar todas las carreteras que pasan por una misma ciudad significará conseguir “tres en línea” en el casillero.

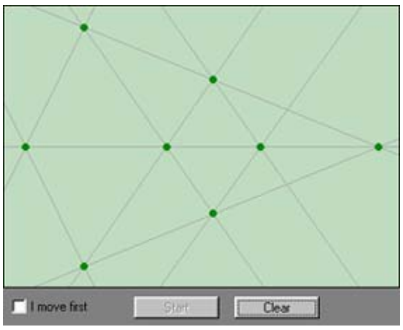


Figura 20. Las 8 ciudades

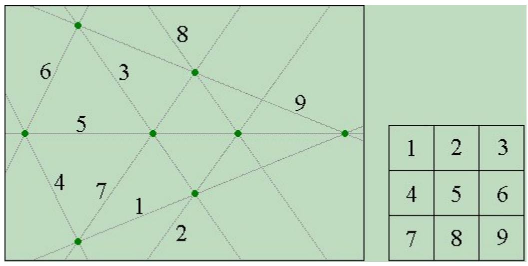


Figura 21. Las 8 ciudades y el Ta-Te-Ti

Respuesta: No hay estrategia ganadora, pero el que comienza tiene una estrategia “para no perder” si sigue la misma estrategia del Ta-Te-Ti aplicada a la numeración que se muestra en la figura 21.

Ejercicio 6.6. Mostrar que el juego de “sumar 15” (juego 2.5), puede ser analizado de la misma manera que el Ta-Te-Ti (y que el juego anterior) si uno utiliza el siguiente “tablero”:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

7. Para seguir jugando

Existe una vasta cantidad de material escrito disponible sobre temas como juegos matemáticos, estrategias, puzzles, sudokus, etc. Por citar un ejemplo, podemos mencionar la abundante obra de Martin Gardner que está publicada en varios libros, entre ellos [3, 4, 5]. De hecho, desde 1956 hasta 1981 Gardner escribió artículos mensuales sobre matemática recreativa para la prestigiosa revista Scientific American. Todos estos artículos fueron editados recientemente en formato de CD-Rom en [6] por la Sociedad Matemática Norteamericana.

Hemos puesto el ejemplo de Gardner por citar uno de ellos, quizás uno de los más prolíficos en el tema de la matemática recreativa. Pero hay mucho más material disponible no solo en forma de libro sino interactivamente, y en línea. La lista que aparece más abajo es una muy breve muestra de lo que se puede encontrar buscando por internet (en castellano) utilizando cualquier buscador de temas. Hay disponibles miles de juegos para jugar de a uno, de a dos, y también para jugar contra la computadora. También hay sugerencias para llevar al aula y jugar con los alumnos. En definitiva, hay una cantidad inmensa de material "libre" disponible sobre el tema en la red, solo cuestión de buscarla y aprovecharla.

Para aquéllos que quieran profundizar sus conocimientos con un enfoque más académico, recomendamos los libros [1] y [2], que contienen modelos matemáticos de juegos y aplicaciones más generales.

7.1. Recursos en línea.

"Matemática para Divertirse", juegos y problemas propuestos por Martin Gardner y recopilados por Patricio Ramos en
`http://www.librosmaravillosos.com/matematicaparadivertirse/seccion06.html`

"Taller de Juegos de Estrategia", puesto en línea por Benjamín Buriticá Trujillo de la Universidad de Antioquia:
`http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/curiosidad_05.html`

"Mueve Fichas". Juegos Matemáticos y Estrategias. Material elaborado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática:
`http://venxmas.fespm.es/temas/mueve-ficha-juegos-matematicas-y.html?lang=es`

"Juegos de estrategia e ingenio: una experiencia temprana de investigación". Material interactivo elaborado por el Ministerio de Educación de España como actividad para desarrollar en el aula a nivel de educación secundaria:
`http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2002/estrategias/`

Referencias

[1] J. Beck. *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory.* Cambridge University Press, 2008.

[2] Thomas Ferguson. *Game Theory.* UCLA 2008, libro electrónico disponible en línea en `http://www.e-booksdirectory.com/details.php?ebook=2592`.

[3] Martin Gardner. *Entertaining Mathematical Puzzles.* Dover, 1961.

[4] *Aha! Insight.* W.H.Freeman and Company, New York, 1978.

[5] Martin Gardner. *My Best Mathematical and Logic Puzzles.* Dover, 1994. ISBN 0486281523.

[6] *Martin Gardner's Mathematical Games.* The Mathematical Association of America CD-ROM ISBN 0883855453.

[7] Adrián Paenza. *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 3,14.* 2007, Siglo Veintiuno Editores. Colección "Ciencia que Ladra..." ISBN 9789876290173.

[8] Adrián Paenza. *¿Cómo, esto también es matemática?* 2011, Editorial Sudamericana. ISBN 9789500736787

[9] Jonathan Schaeffer, Neil Burch, Yngvi Björnsson, Akihiro Kishimoto, Martin Müller, Robert Lake, Paul Lu, Steve Sutphen. *Checkers Is Solved.* Science, Vol. 317 no. 5844 pp. 1518–1522, 2007. DOI: 10.1126/science.1144079.

[10] Claudia Zaslavsky. *Tic Tac Toe: And Other Three-In-A Row Games from Ancient Egypt to the Modern Computer.* Crowell, 1982. ISBN 0690043163.

Departament d'Àlgebra i Geometria, Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona. Gran Via 505 , 08007, Barcelona. España

E-mail address: `cdandrea@ub.edu`

EXPLORANDO CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON GEOGEBRA

CRISTINA ESTELEY, ISABEL MARGUET, ANALÍA CRISTANTE

Índice

1. Sentido del Curso 19
2. Acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría 19
3. Acerca de GeoGebra 20
4. Problemas intramatemáticos y de aplicación 22
5. A modo de cierre 24
6. Otras actividades de exploración 25
Referencias 28

1. Sentido del Curso

Este curso está pensado principalmente para que, profesores de educación primaria, pongan en juego conocimientos geométricos en un ambiente de aprendizaje que conjuga actividades de exploración y análisis y mediadas por el software GeoGebra. Tales actividades se organizan tomando como referencia objetos geométricos u objetos o fenómenos reales que pueden vincularse con la geometría.

Si bien, durante estas notas se abren breves discusiones y análisis didácticos, las actividades propuestas se focalizan en un trabajo geométrico para profesores de educación primaria. Cabe indicar que para la selección y organización de las tareas, se tiene en cuenta por un lado recomendaciones y contenidos del actual diseño curricular de la Provincia de Córdoba [6] para la educación primaria (versión, 2012-2015) y por otro lado, problemas presente en textos de Matemática para educación primaria en uso en diversas escuelas del ámbito local. En este sentido, las actividades propuestas no están pensadas para que sean llevadas a cabo por sus alumnos tal cual son presentadas en el curso. Estas decisiones se toman con la intención de poner en evidencia las potencialidades del software para trabajar con geometría para un adulto en situación de aprendizaje.

Con estas ideas en mente, a continuación presentamos: algunos aspectos vinculados con la enseñanza o el aprendizaje de la geometría que dan sustento a nuestro trabajo; una breve introducción las característica principales de GeoGebra; un grupo de problemas a resolver en el curso y un listado de problemas para ser resueltos fuera del curso.

2. Acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría

En términos generales y concentrándonos en el trabajo geométrico para la educación primaria, es factible considerar a la Geometría como un cuerpo de conocimientos que posibilitan un análisis, organización y sistematización de los conocimientos espaciales

(Alsina et al. [1]). En este sentido, es importante reconocer la riqueza que puede significar la observación espontánea de objetos, formas, diseños o transformaciones presentes en nuestros entornos cotidianos y la experimentación con tales objetos.

En el ámbito de la enseñanza de la geometría, la observación y experimentación deberían ser procesos a privilegiar. En este ámbito la observación toma un carácter muy especial entendiendo a la misma no solo como el acto de mirar o fijarse sino como un proceso por medio del cual se intenta *notar lo* ***común*** *que puede haber en situaciones diversas (movimientos, figuras, formas, etc.), notar lo* ***diferente*** *entre objetos o acciones, notar lo característico de cada cosa* (Alsina et al. [1]). Esto es, la observación aparece como uno de los medios esenciales para iniciar procesos de comprensión. Por el modo en que hemos caracterizado a la Geometría, parece valioso observar los objetos presente en nuestro entorno tal como se presentan pero también es importante observar las representaciones que el hombre realiza de esos objetos o de la naturaleza. En este sentido, en situación de enseñanza, es valioso contar con material didáctico, actuar sobre este material, manipularlo y observar al experimentar con ellos, comparar acciones y resultados, distinguir aquello que se mantiene de lo que se transforma, reconocer similitudes y diferencias. Y, a partir de las acciones y observaciones, registrar ideas, abstraer, conjeturar, justificar y validar apelando a las posibilidades de quienes están aprendiendo y/o a las particularidades del entorno escolar o los medios disponibles.

Esta perspectiva respecto al trabajo geométrico en el ámbito escolar, es compatible con las recomendaciones presentes en los actuales diseños curriculares en los que se enfatiza la validación[1] como actividad matemática y especifica que el trabajo para justificar las soluciones obtenidas de problemas geométricos debe pretender la producción de conjeturas o la validación de un resultado por parte de los estudiantes. Y se acota los sentidos y características de los procesos de validación en la educación primaria puntualizando que en un primer momento, las validaciones seguramente van a basarse en argumentaciones empíricas: verificaciones realizadas a partir de la superposición de una copia con el original o realizando mediciones. Pero el objetivo es que el trabajo avance, pasando a la validación mediante conocimientos matemáticos, haciendo uso de las propiedades de las figuras planas o de alguno de sus elementos constitutivos o bien producir argumentos basados en propiedades de las figuras que les permitan anticipar y justificar sus construcciones (Documentos Curriculares [6] para la Educación Primaria 2012-2015, Provincia de Córdoba). Algunos de estos aspectos intentamos hacerlos evidente apelando a GeoGebra.

3. Acerca de GeoGebra

GeoGebra, a semejanza de otros programas de Geometría dinámica, mantiene la sencillez y el dinamismo de los mismos, añadiendo algunos valores como: ser de libre acceso[2], multiplataforma y sobre todo, permite trabajar casi todos los contenidos presentes en los Diseños Curriculares vigentes.

Es importante indicar que, si bien para este curso privilegiamos el uso del software para trabajar con geometría, GeoGebra, como su nombre lo indica, no sólo es un software que permite el trabajo con contenidos geométricos (*Geo*) sino que también

[1]Para mayores detalles sobre el sentido de la validación para el primer y segundo ciclo, ver p. 117 de los Documentos Curriculares [6] versión 2012-2015.

[2]`www.geogebra.org/cms/es`. La anterior es la dirección de una página de Internet que le permite bajar gratuitamente GeoGebra. Ustedes puede encontrar GeoGebra o GeoGebra Prim (para primario). Ambos software son equivalentes. En GeoGebra Prim se limita la cantidad de herramientas disponibles inmediatamente en la barra de herramientas pero que pueden ser activadas cuando sea necesario.

posibilita la interacción con contenidos algebraicos (*Gebra*), analíticos y estadísticos. En definitiva *GeoGebra*, supone una excelente opción para hacer unas matemáticas dinámicas sobre todo en los niveles educativos primario y secundario.

Es evidente que *GeoGebra* no tiene la exclusividad como recurso para enseñar matemática, pero la gran variedad de opciones que ofrece hacen que su uso, no sea solo para dibujar o construir. Como ilustraremos a través de algunos ejemplos, permite proponer a los alumnos tareas de investigación y experimentación, que en la mayoría de los casos no requerirán demasiados conocimientos técnicos ya que bastará con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos sencillos para afrontarlas.

Con *GeoGebra* se pueden realizar construcciones muy diversas y de diferente grados de complejidad, aunque lo ideal o recomendable es comenzar con propuestas sencillas, sobre todo cuando se trata de incorporarlo al aula, dejando para más adelante las propuestas que requieran un mayor esfuerzo en la construcción.

Esto facilitará que apenas se pierda tiempo en los procesos técnicos y por tanto, se pueda dedicar todo el tiempo y el esfuerzo a la parte didáctica que es la que requiere el aprendizaje de los alumnos. Además, siempre nos queda la opción de aprovechar las excelentes construcciones disponibles en Internet, a las que solo hay que acceder para utilizarlas, aunque en ocasiones, quizás interese adaptarlas a las características de nuestros alumnos o de los contenidos que se deseen trabajar.

Al utilizar *GeoGebra* se podrá plantear en cada momento, la realización de cualquier construcción geométrica que ayude al alumno a familiarizarse con el significado de dinamismo y sobre todo a comprender la diferencia entre dibujar y construir.

Realizar una construcción a diferencia de dibujar supone establecer unas relaciones entre los objetos que intervienen, de manera que al mover cualquier objeto inicial se mantendrán las relaciones (matemáticas) entre los objetos de la construcción.

Sintéticamente en relación a GeoGebra, podemos indicar que:

A. Desde su aspecto geométrico, es un editor gráfico interactivo que:

- Permite crear elementos geométricos básicos como puntos, rectas o circunferencias y, a partir de éstos realizar otras construcciones como rectas paralelas, perpendiculares, bisectrices, etc.
- Da la posibilidad de dibujar figuras geométricas en la pantalla de la computadora pero no de una manera estática. Su capacidad de arrastre de las figuras construidas favorece la búsqueda de propiedades que permanecen invariantes durante la deformación. Es entonces en este sentido que la naturaleza de las figuras es diferente a la de las realizadas con lápiz y papel.
- Asume dos principios básicos: a) *Dudar de lo que se ve:* no tomar como verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad durante el arrastre. b) *Ver más de lo que se ve:* estudiar una figura para descubrir relaciones que no están presentes a simple vista (enriqueciendo la figura con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación).

B. Desde su aspecto algebraico:

- Permite una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las construcciones geométricas; visualiza a la vez un punto en el plano cartesiano y sus coordenadas numéricas, una circunferencia y su ecuación, la gráfica de una función y su expresión analítica, etc. Es decir, GeoGebra permite la doble percepción de los objetos. Cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica

(Geometría) y otra en la Vista Algebraica (Álgebra), tal como se muestra en Figura 1.

Luego de esta breve introducción acerca de GeoGebra presentamos y analizamos algunos problemas que ilustran el potencial del software para abrir espacios de reflexión en ambiente de aprendizaje geométrico.

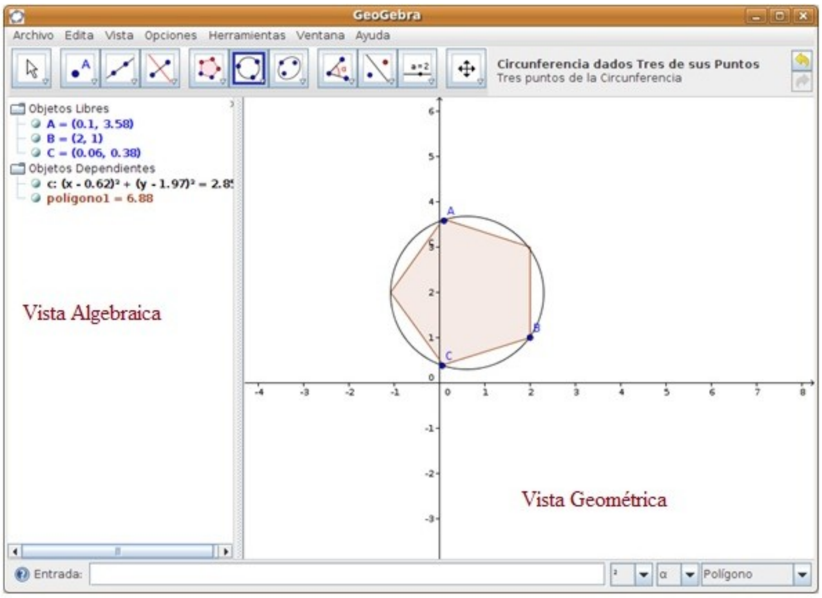


FIGURA 1. Vistas en GeoGebra

4. Problemas intramatemáticos y de aplicación

4.1. Construcciones con cuadriláteros. Para comenzar y siguiendo lo dicho más arriba respecto de minimizar la parte técnica para priorizar la parte didáctica , vamos a proponer un problema que nos va a permitir poner en juego algunas competencias que nos parecen importante trabajar en las clases de matemática, tales como la experimentación, la elaboración de conjeturas y las argumentaciones.

Problema 1. En primer lugar construya un cuadrilátero cualquiera ABCD, utilizando la herramienta Polígono. Luego determine los puntos medios de cada uno de los lados de dicho cuadrilátero (hay un comando que le permite hacerlo de manera directa). Por último una esos puntos medios con segmentos (utilizando el comando correspondiente) y dibuje el cuadrilátero determinado por los mismos. Como puede observar esta construcción no encierra dificultad y nos permite centrarnos en dos aspectos que pretendemos trabajar:

- Estudio o reconocimiento de invariancias del cuadrilátero interior y,
- Análisis de las características que debiera tener el cuadrilátero original para obtener algún cuadrilátero especial en su interior.

Para llevar adelante el estudio y análisis antes señalados le proponemos que realicen las siguientes actividades:

a) Mueva los vértices del cuadrilátero original, observe el cuadrilátero interior, mida los lados de dicho cuadrilátero y haga alguna conjetura sobre qué tipo de cuadrilátero es éste. Justifique empíricamente su conjetura. Demuestre su conjetura usando propiedades de objetos geométricos. Para justificar su conjetura le sugerimos que trace una de las diagonales del cuadrilátero original, quedando determinados así dos triángulos que tienen a esa diagonal como lado en común. Observe que los lados del cuadrilátero interior, que están a uno y otro lado de dicha diagonal, miden la mitad de lo que mide esa diagonal (y además son paralelos a ella). Haga lo mismo con la otra diagonal, y seguramente ya estará en condiciones de confirmar su conjetura.

b) Mueva la construcción hasta lograr que el cuadrilátero interior sea un rombo, un rectángulo o un cuadrado. Conjeture en todos los casos de qué clase es el cuadrilátero original para que tal cosa suceda.

c) Analice las siguientes afirmaciones:
   - Si el cuadrilátero original es un rectángulo (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), el cuadrilátero interior es un rombo (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares).
   - Si el cuadrilátero original es un rombo (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares), el cuadrilátero interior es un rectángulo (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales).
   - Si el cuadrilátero original es un trapecio isósceles (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), el cuadrilátero interior es un rombo (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares).
   - Si el cuadrilátero original es un romboide (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares), el cuadrilátero interior es un rectángulo (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales).
   - Si el cuadrilátero original tiene diagonales iguales (equidiagonal), el cuadrilátero interior es un rombo (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares).
   - Si el cuadrilátero original tiene diagonales perpendiculares (ortodiagonal), el cuadrilátero interior es un rectángulo (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales).
   - Si el cuadrilátero original tiene diagonales iguales y perpendiculares (equiortodiagonal), el cuadrilátero interior es un cuadrado (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares).

4.2. Construcciones en base a circunferencias.

Problema 2. Construir la figura que se describe en este instructivo:

- Trace un segmento de 12 cm de longitud. Llame A al extremo de la izquierda y B al extremo de la derecha.
- Marque el punto medio del segmento AB y llámelo C.
- Marque el punto medio del segmento AC y llámelo D.
- Al punto medio del segmento CB y llámelo E.
- Con centro en el punto D y con un radio de 3 cm trace una circunferencia.
- Con centro en el punto E y con un radio de 3 cm trace otra circunferencia. Con centro en el punto C y con un radio de 6 cm trace otra circunferencia

(Problema con instructivo para 4º grado extraído de: I. Saiz y C. Parra [7]).

Problema 3. Construir la figura que se describe en este instructivo:

- Trace un segmento AB de 5 cm.
- Con centro en B, trace una circunferencia de 3 cm de radio.
- Marque un punto C sobre el segmento AB, que se encuentre más cerca de B que de A. Trace una circunferencia con centro en A y que pase por C.

- Dibuje un triángulo con vértices en A, B y el punto de intersección de ambas circunferencias. Queda así dibujado el triángulo ABD.

a) ¿Se puede saber, sin medir, cuál es la longitud de cada uno de los lados el triángulo ABD? Justifique.
b) Mueva el punto C, acercándolo o alejándolo de B. ¿Cómo cambia la longitud de los lados del triángulo ABD? Explique.
c) Moviendo el punto C, busquen ubicaciones en las que se formen triángulos y otras en las que no se forme ninguno. ¿Es cierto que para que se formen triángulos, el lado AD debe ser mayor que 2 cm? ¿Por qué?

(Problema extraído de: Broitman et al. [5])

4.3. Problema de aplicación con construcciones.

Problema 4. Iván vive en un bosque a 100 m del árbol más viejo de todo el bosque y próximo a la casa del guardabosques según se ilustra en el siguiente esquema:

a) Su amigo José decide mudarse al bosque a 200 m de distancia de la casa de Iván. Reproduce con GeoGebra el esquema anterior y dibuja todos los lugares posibles que tiene Iván para construir su casa.
b) José decide construir su casa a 200 m de la casa de Iván, de tal modo que la casa de Iván, la suya y la casa del guardabosque queden sobre una misma línea. Con esta información, decide el lugar de emplazamiento de la casa de José.
c) Tiempo después que José se instala en su casa, un tercer amigo llamado Pablo, decide mudarse al mismo bosque y quiere que su casa diste 200 m de la casa de Iván y 200 m de la casa de José, es decir que las tres casas queden equidistantes. ¿En cuántos lugares puede asentar su casa Pablo?

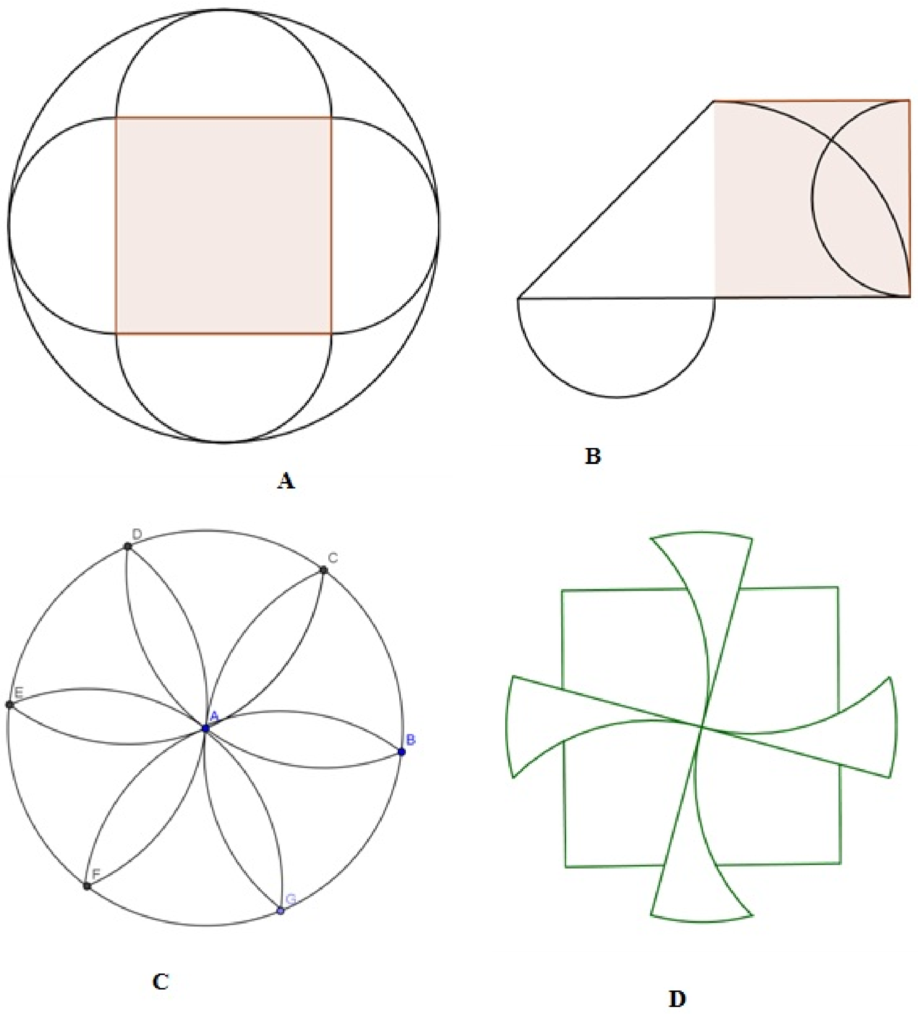
4.4. Copiado de figuras.

Problema 5. Copiar cada una de las figuras de Cuadro 1. Las figuras A, B y D se adaptaron de: Broitman et al. [2], [3] y [4]. La figura C está tomada de: I. Saiz y C. Parra [7].

5. A modo de cierre

Las ideas y propósitos que han impulsado este curso han sido, de algún modo, ilustradas con las actividades propuestas. Hemos puesto en evidencia procesos de experimentación, observación, manipulación, análisis, elaboración de conjeturas y justificación. En la mayoría de los casos hemos apelado a situaciones intramatemáticas respetando modos de trabajos escolares adaptados para adultos.

Esperamos que puedan continuar con estos modos de hacer matemática en sus aulas o fuera de ellas. Para aquellos que no disponen de nuevas tecnologías los invitamos a trabajar con materiales concretos de otra naturaleza y organizar con ellos actividades de exploración.



CUADRO 1

Dejamos también una lista de problemas para que puedan seguir familiarizándose con GeoGebra.

6. Otras actividades de exploración

Trabajando con triángulos.

1.
    - Con el comando **Recta por dos puntos** construya una recta por A y B, luego por un punto C, exterior a esta recta trace una paralela a la misma.
    - Trace con el comando **segmento entre dos puntos** todos los segmentos para determinar un triángulo, incluido el que dio origen a la recta inicial.
    - Incluya en la recta b, con el comando **Nuevo punto** dos puntos, uno a cada lado de C, de esta manera le quedarán determinados los puntos D y E. Luego de haber seguido los pasos anteriores, debe haber obtenido una figura como la que se muestra en Figura 2.
    - Con el comando **Ángulo** marque todos los ángulos del triángulo: BAC, ACB y CBA y también los ángulos ECA y BCD. (Recuerde que los ángulos se toman en sentido antihorario).
    - Moviendo el punto C sobre la recta paralela a AB, responda

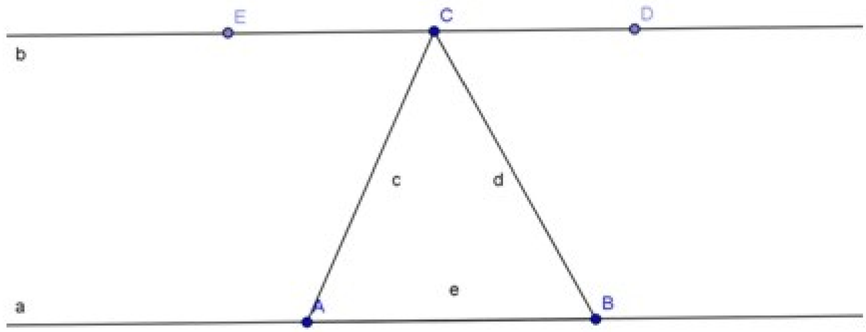
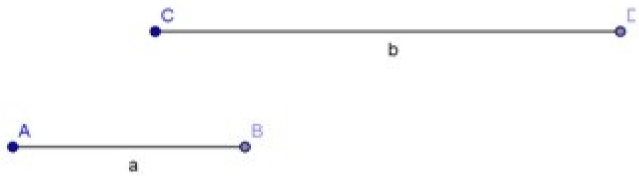


Figura 2

   a) ¿Cómo resultan los ángulos CAB y ECA?
   b) ¿Cómo resultan los ángulos ABC y BCD?

   Nota: esta es una forma de demostrar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

2. Con un instructivo similar al anterior podemos mostrar que el área de un triángulo formado por el segmento AB y el tercer vértice sobre una paralela a la recta que contiene a A y a B, es siempre la misma. Para lo cual primero deberemos definir con el comando **Polígono** al triángulo ABC tocando consecutivamente los puntos A,B, C y nuevamente A y luego **Área**.
3. Dados estos dos segmentos, construya un triángulo de modo que ellos sean dos de sus lados:



   - ¿Es cierto que se puede construir más de uno? ¿Por qué?
   - ¿Cuánto tiene que medir, como mínimo, el tercer lado para que exista el triángulo? ¿Y su máximo valor?
4. Construya un triángulo con un ángulo de 90º y otro de 35º ¿Es cierto que se puede construir más de uno? ¿Por qué? ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
5. ¿Convergen en un punto las rectas que contienen a las alturas de un triángulo? Si la respuesta es afirmativa: ¿dónde se encuentra ese punto en los triángulos
   - Rectángulos?
   - Acutángulos?
   - Obtusángulos?

Trabajando con circunferencias.

6. ¿Siempre es posible construir una circunferencia que pase por dos puntos? ¿La solución es única?
7. En una circunferencia de centro A marque dos puntos: C y B. A continuación determine los ángulos CDB, CEB, CFB, CGB, CHB, todos con vértices en puntos de la circunferencia y lados que pasan por los puntos C y B, tal como se muestra en Figura 3.
   a) Indique la medida de cada uno de esos ángulos.
   b) Formule una hipótesis y verifíquela en otra circunferencia.

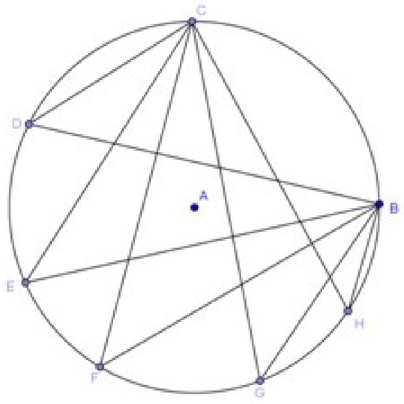


Figura 3

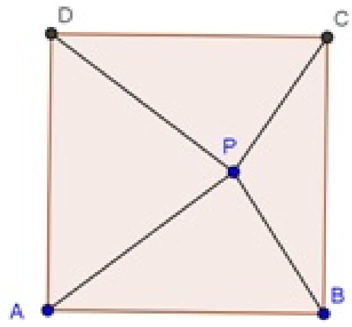
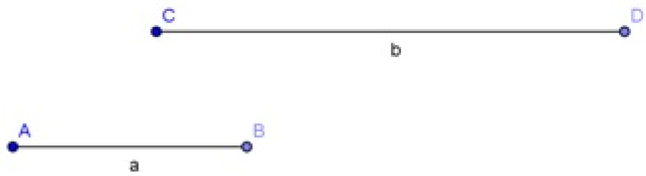


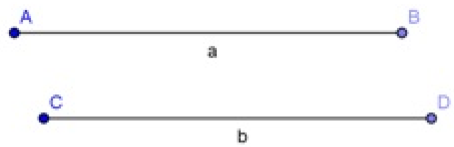
Figura 4

Trabajando con cuadriláteros.

8. Construya un cuadrado sin utilizar el comando **Polígono Regular**.
9. a) Construya, un cuadrilátero con todos sus ángulos agudos. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden construir que cumplan esta condición?
   b) ¿Y que tengan tres ángulos agudos?, ¿y dos?
10. Estos segmentos son las diagonales de un **rombo**:



    ¿Es cierto que se puede construir más de un rombo con la información dada? ¿Por qué? ¿Y si la consigna hubiese dicho un **romboide**?
11. Estos segmentos son las diagonales de un **rectángulo**



    ¿Es cierto que se puede construir más de uno?, ¿por qué?, ¿y si la consigna hubiese dicho un **cuadrado**?
12. Considere el cuadrado ABCD mostrado en Figura 4 y un punto P interior al mismo. Al unir P con los vértices quedan determinados cuatro triángulos.

    Analice dónde habría que ubicar al punto P, dentro del cuadrado para lograr que:
    a) El área del APB sea mayor que el área del DPC.
    b) La suma de las áreas de ABP y CDP sea mayor que la suma de las áreas de los otros dos triángulos.
13. A veces es posible trazar una circunferencia que pase por los cuatro vértices de un cuadrilátero, como sucede con la circunferencia de centro C y el cuadrilátero EFGH y otras veces no lo es, como sucede con la circunferencia de centro C_1 y

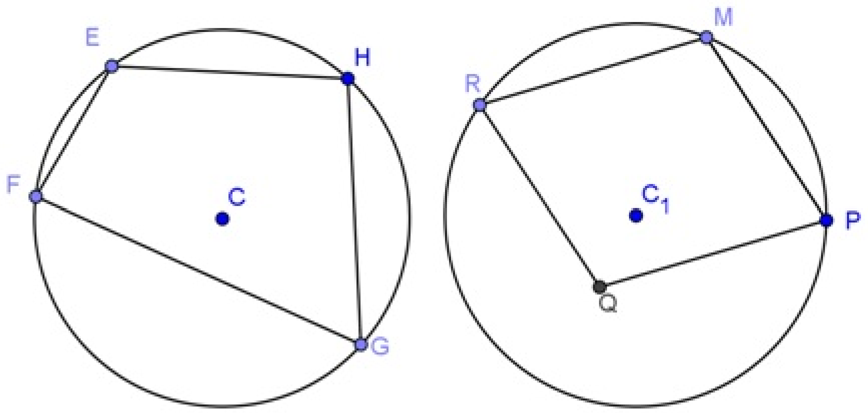


FIGURA 5

el paralelogramo MPQR (ver Figura 5). Cuando logramos encontrar una circunferencia que pase por los cuatro vértices de un cuadrilátero, decimos que éste quedó inscripto en la circunferencia. Explore y responda: ¿qué características tiene que tener ese cuadrilátero para que sea inscriptible en una circunferencia?

Nota: Parte de lo discutido sobre GeoGebra se toma de: `http://www.geogebra.org/cms/` (página consultada en junio de 2012).

REFERENCIAS

[1] C. Alsina, C. Burgués, J. Fortuny (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Editorial Síntesis. España.
[2] C. Broitman, M. Escobar, V. Grimaldi, A. Novembre, I. Sancha (2010). *Estudiar Matemática en 4º*. Editorial Santillana. Argentina.
[3] C. Broitman, M. Escobar, V. Grimaldi, A. Novembre, I. Sancha (2010). *Estudiar Matemática en 5º*. Editorial Santillana. Argentina.
[4] C. Broitman, M. Escobar, V. Grimaldi, A. Novembre, I. Sancha (2010). *Estudiar Matemática en 6º*. Editorial Santillana. Argentina.
[5] C. Broitman, H. Itzcovich, M. Becerril, B. Duarte, P. García, V. Grimaldi, H. Ponce (2011). *Matemática en 7º primaria CABA/ 1º Secundaria*. Editorial Santillana. Argentina.
[6] *Diseños Curriculares de la Educación Primaria* (versión 2012-2015). Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa (`http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionPrimaria/Primaria.html`. Consultada en abril de 2012)
[7] I. Saiz, C. Parra (2010). *Hacer Matemática en 4º*. Editorial Estrada. Argentina.

C. ESTELEY: FAMAF — UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
E-mail address: `esteley@famaf.unc.edu.ar`

I. MARGUET: COLEGIO 25 DE MAYO, CÓRDOBA
E-mail address: `isabelmarguet@yahoo.com.ar`

A. CRISTANTE: COLEGIO 25 DE MAYO, CÓRDOBA
E-mail address: `analiamarangoni@hotmail.com`

NÚMEROS, ENTRE LA CREACIÓN Y EL DESCUBRIMIENTO

GASTÓN ANDRÉS GARCÍA

RESUMEN. En el transcurso de la historia de la humanidad, los números surgieron naturalmente para aplicaciones prácticas: contar y enumerar. A medida que las civilizaciones avanzaban en su desarrollo, y en particular la matemática que éstas usaban, se han ido creando por necesidad nuevos conjuntos de números que contenían a los que se estaban usando hasta ese momento y que servían para nuevas aplicaciones. En este breve curso describiremos primero el sistema de numeración maya, y mostraremos que este sistema se puede entender en el marco más general de desarrollos s-ádicos. Luego nos concentraremos en la construcción de los distintos conjuntos de números de acuerdo a los desarrollos s-ádicos que se usen para describir los Naturales y Enteros y finalizaremos con la construcción de los Racionales y los Racionales p-ádicos. Sobre el final, introducimos una breve discusión sobre los números Reales y los números p-ádicos. Intentaremos hacer todo esto tratando de encontrar un balance justo entre la intuición y la formalidad. Luego de desandar estos caminos, quizás los participantes del curso se atrevan a responder si los números son una construcción formal del ser humano o ya estaban allí y fueron simple descubiertos. O quizás no...

ÍNDICE

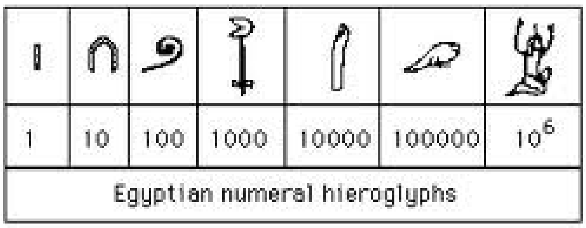
Introducción 29
1. Sistemas de numeración 31
1.1. Los números mayas 31
1.2. Ejercicios 35
1.3. Naturales, enteros y desarrollos en distintas bases 36
1.4. Ejercicios 45
2. Conjuntos de números 45
2.1. Racionales y Reales 45
2.2. Representación decimal de los números racionales 47
2.3. Números reales 49
2.4. Ejercicios 50
2.5. Racionales s-ádicos y números p-ádicos 50
2.6. Ejercicios 55
Referencias 56

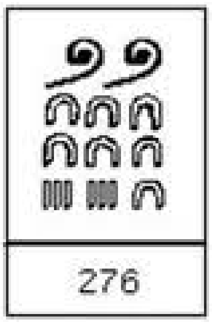
INTRODUCCIÓN

Inicialmente, para poder realizar sus actividades cotidianas, el ser humano ha utilizado métodos básicos de conteo y numeración, como marcas en piedras y bastones, nudos en una cuerda, etc. A medida que la complejidad de los cálculos ha ido avanzando, un sistema de representación más práctico fue necesario.

Este trabajo fue financiado parcialmente por ANPCyT-Foncyt, CONICET, Ministerio de Ciencia y Tecnología (Córdoba) y Secyt (UNC).

Independientemente, distintos pueblos en distintos lugares y épocas han encontrado básicamente la misma solución. Ésta consiste en la simple idea de realizar una marca distinta cuando se alcanza un determinado número. Este número recibe el nombre de *base*. Una vez alcanzado este número, se sigue añadiendo unidades hasta que se vuelve a alcanzar por segunda vez y se añade otra marca de la segunda clase. Este proceso se puede realizar nuevamente, obeniendo una nueva marca para otra cantidad. Dicho número se transforma en otra base del sistema. En las siguientes figuras se muestran las distintas bases utilizadas y cómo se componen los números de acuerdo a las figuras.





La base que más se ha utilizado ha sido 10, como la que usamos actualmente. Sin embargo, hay algunas excepciones, como la numeración maya que usaba 20 y 5 como bases. Para comprender la manera de realizar los cálculos según los mayas, describiremos su sistema de numeración y mostraremos en la primera subsección cómo operar con ellos.

El sistema occidental actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. El gran mérito fue la introducción del concepto y símbolo del cero, lo que permite un sistema en el que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número por grande que sea y simplificar la forma de efectuar las operaciones.

FIGURA 1. Sistema de numeración griego

Estas notas se dividen conceptualmente en dos secciones. En la primera se introduce la noción de base para la descripción de un sistema numérico y se trabaja explícitamente el ejemplo de los números mayas. A continuación mostramos cómo describir y operar con números enteros sobre cualquier base no nula, de la misma forma que acostumbramos a trabajar en base 10. Para ello, recordaremos primero algunos resultados básicos de los números naturales y enteros, como es el algoritmo de división, y mostraremos cómo utilizar la escritura de cualquier número entero usando una base determinada, distinta de cero. La misma se denomina *desarrollo s-ádico* del número, si s denota la base.

La segunda sección se concentra en el método de agregar inversos a los sistemas y en menor medida a la completación de los mismos. Específicamente, describiremos el método para incorporar inversos a nuestro sistema de numeración; en el caso de los enteros obtenemos los racionales, y en el caso de los enteros s-ádicos, dependerá de la base s la existencia de un inverso. Finalmente, discutiremos brevemente y en forma intuitiva la completación del sistema de numeración. Así se obtienenen los reales en el caso de los racionales, y más generalmente, los números p-ádicos en los otros casos descriptos.

Las notas van acompañadas con una serie de ejercicios que consideramos útiles para comprender mejor los temas que aquí se exponen.

1. Sistemas de numeración

En esta sección analizaremos los sistemas de numeración estudiando primero el ejemplo de los números mayas y después la descripción de los números enteros usando cualquier base, es decir, los desarrollos s-ádicos. Finalmente mostraremos las técnicas que se utilizan para realizar las operaciones de suma, resta y producto; las mismas resultan ser completamente análogas a las ya conocidas en base 10.

1.1. Los números mayas. Comenzaremos describiendo el sistema de numeración que utilizaban los mayas. Se cree que el desarrollo del sistema se debió a la necesidad de medir el tiempo, y particularmente para cálculos astronómicos, más que a una razón meramente operativa.

El sistema se basa en agrupar repeticiones de tres símbolos distintos en diferentes niveles. Así todos los números se pueden escribir combinando los símbolos **caracol** para el cero, **punto** para el uno y **raya** para el cinco. Para facilitar la descripción, dibujaremos $\odot$ para el símbolo del caracol. Así tenemos,

Símbolo	Número arábigo
$\odot$	0
$\bullet$	1
—	5

Para describir números mayores o iguales a 20, se utilizan los niveles. Con el primer nivel, denotamos los números del 0 al 19, con el segundo, los múltiplos de 20, con el tercero los múltiplos de $20 \times 20 = 400$ y así sucesivamente. Los niveles se suelen separar por líneas para evitar confusiones. Sin embargo, si el numero queda bien determinado, se las suele omitir. Por ejemplo,

Símbolo	Número arábigo	Símbolo	Número arábigo
$\bullet$	$1 \cdot 20^1$	—	$5 \cdot 20^1$
$\odot$	$0 \cdot 20^0 \quad = 20$	$\bullet\ \bullet\ \bullet$	$3 \cdot 20^0 \quad = 103$
$\bullet$	$1 \cdot 20^1$	$\bullet$	$1 \cdot 20^3$
$\bullet$		$\odot$	$0 \cdot 20^2$
—	$11 \cdot 20^0 \quad = 31$	—	$5 \cdot 20^1 \quad = 8100$
—		$\odot$	$0 \cdot 20^0$

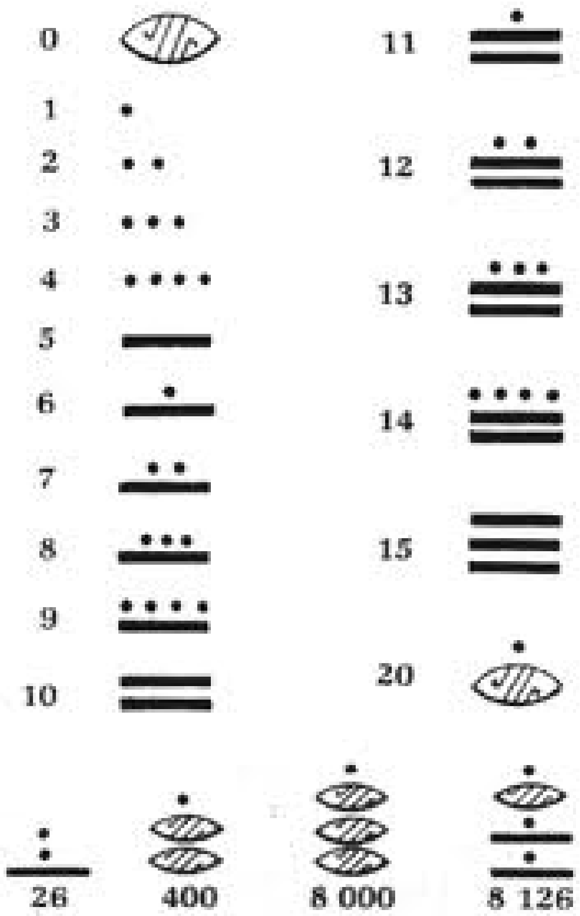


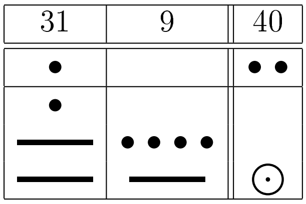
FIGURA 2. Sistema de numeración maya

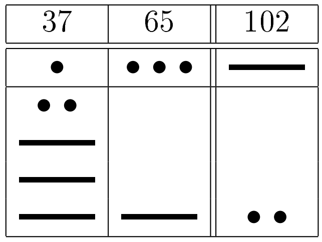
Como es de suponer, existe un método para convertir un número arábigo a número maya. Sin embargo, mostraremos el método en la sección de desarrollos s-ádicos, pues nuestro primer interés es describir las operaciones usuales utilizando directamente el sistema de numeración maya y no pasar por su descripción en números arábigos.

1.1.1. Operaciones con números mayas. En esta subsección describiremos las operaciones básicas con números mayas. Al final de la misma se pueden encontrar ejercicios que ayuden a comprender el método. Una descripción más general se podrá ver más adelante cuando se estudien desarrollos s-ádicos, ya que los números mayas se pueden interpretar como números 20-ádicos.

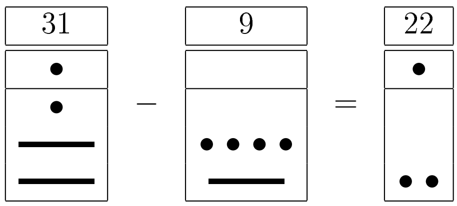
Suma. La suma se realiza simplemente juntando los símbolos en cada nivel, reemplazándolos luego por los símbolos correspondientes en el nivel correspondiente si se tienen más de 5 puntos o más de 4 rayas, respectivamente. En particular, cada vez que se tienen cuatro rayas en un nivel, hay que reemplazarlas por un punto en el nivel siguiente y por un caracol en el nivel inferior si no hay otro símbolo.

Para realizar la suma esquemáticamente, pondremos los números uno al lado del otro en columnas, dado por entendido que sumaremos a ambos. Luego, en una tercera columna acumulamos los símbolos por filas y realizamos la reducción. Por ejemplo,

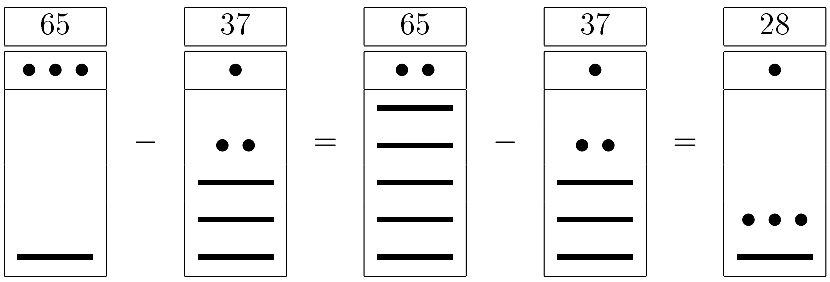




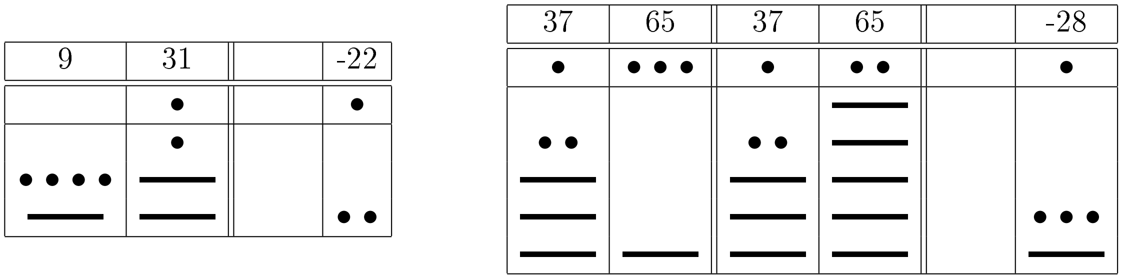
Resta. Para realizar la resta entre dos números mayas se procede de forma similar a la suma. Se colocan ambos números en dos columnas consecutivas, a la izquierda el minuendo y a la derecha el sustraendo. Para proceder con la operación, se restan a los elementos de la primera columna, los elementos de la segunda columna, fila por fila, comenzando con la fila de mayor nivel. En caso que en una fila los elementos de la primera columna sean menores que los de la segunda columna, se debe bajar un punto de la fila superior de la primera columna y transformarlo en 4 rayas en la fila inferior, y proceder con la operación. Una vez concluida la sustracción en una fila se procede a la siguiente hasta terminar el proceso. Para hacer más esquemática la sustracción, muchas veces diagramamos el paso de descenso de una unidad de una fila superior a una inferior copiando nuevamente ambas columnas y dibujando un punto menos en el nivel superior y 4 rayas en el nivel inferior. Veamos unos ejemplos que clarifiquen el proceso. En estos primeros ejemplos, supondremos que el minuendo es mayor que el sustraendo.



En el siguiente ejemplo veremos en el método cómo podemos bajar las veintenas a las casillas inferiores inmediatas, convertidas en conjuntos de cuatro rayas o en grupos de veinte puntos:

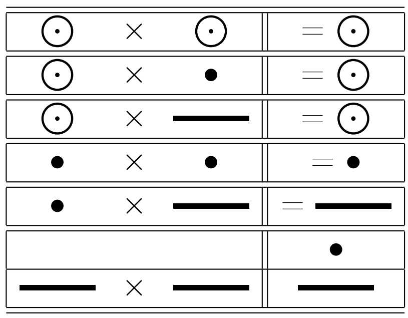


Para realizar sustracciones sin conocer qué número es mayor, procedemos de la misma forma, salvo que mantendremos ambas columnas en la operación hasta terminarla. La resta termina una vez que no hayan quedado símbolos en una columna. Así, si han quedado símbolos en la segunda columna y no en la primera, el resultado es negativo. Por ejemplo, si escribimos esquemáticamente la operación, sabiendo que a la primera columna le restamos la segunda, tendríamos

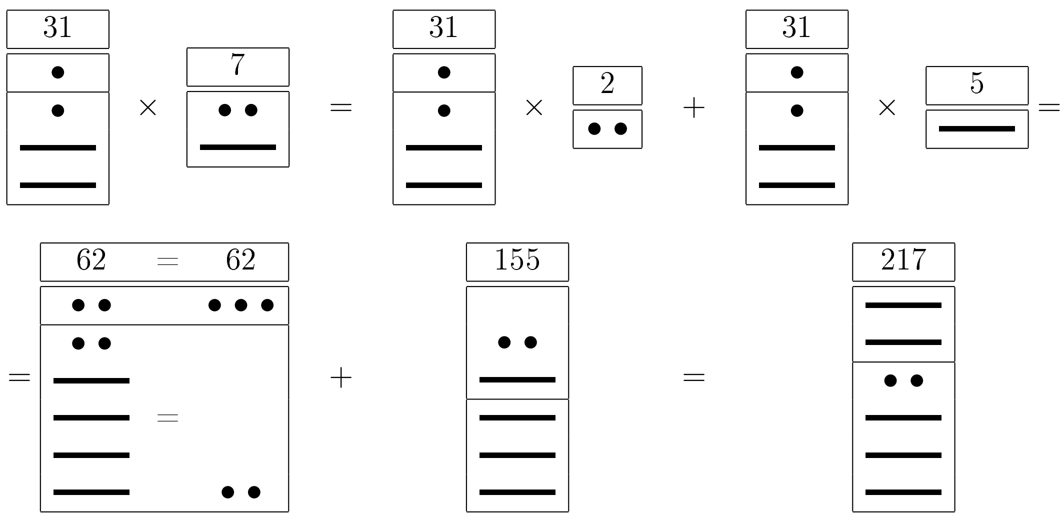


Producto. Algunos autores creen que los mayas realizaban el producto de dos números a través de la suma, por ejemplo, para hacer 256×76, sumaban 76 veces 256. Sin embargo, si consideramos que los mayas manejaban cifras astronómicas, esto es difícil de creer. En la literatura se encuentran varios algoritmos para calcular el producto de dos números mayas, muchos de ellos pasando por una reducción a base 10. Como en estas notas hablaremos de desarrollos s-ádicos más adelante, intentaremos dar aquí un método rudimentario que nos acerque a una descripción apropiada para nuestros propósitos.

Antes que nada, debemos describir el producto entre los distintos símbolos básicos. A estos resultados los tomaremos como reglas básicas del producto:



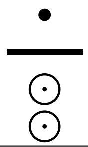
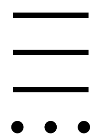
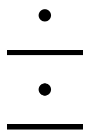
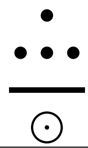
Para poder realizar productos entre símbolos más complejos, simplemente tenemos que separar los símbolos en sumas de los símbolos elementales y respetar la siguiente *regla básica*: cada vez que hago el producto de los símbolos de la fila n de una columna con los de la fila m de la otra columna, debo poner el resultado en la fila $n+m-1$. Por ejemplo,



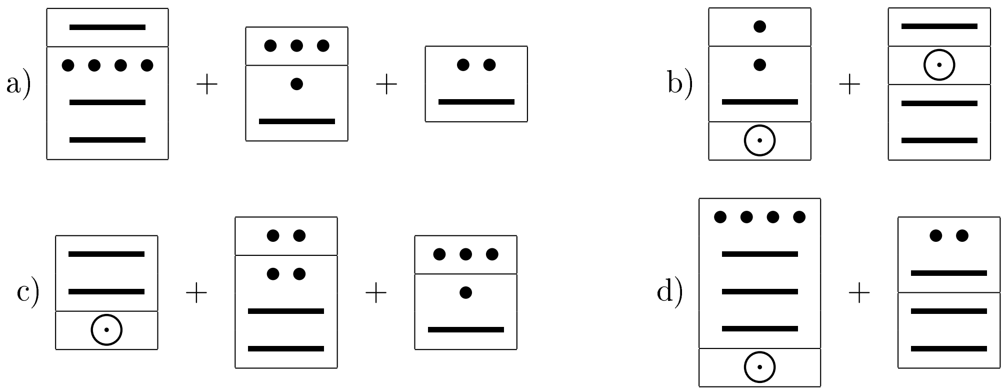
Finalizamos esta subsección con una lista de ejercicios para que el lector pueda ejercitar las operaciones básicas con números mayas.

1.2. Ejercicios.

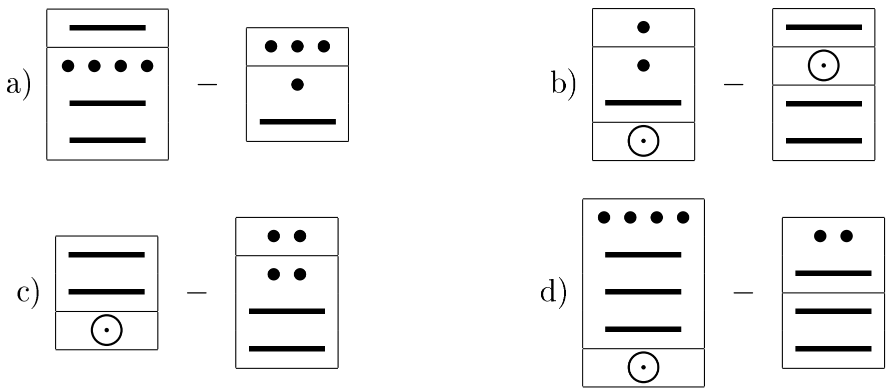
1. Escribir los siguientes números mayas en números arábigos:

Símbolo	Número arábigo	Símbolo	Número arábigo
			
			

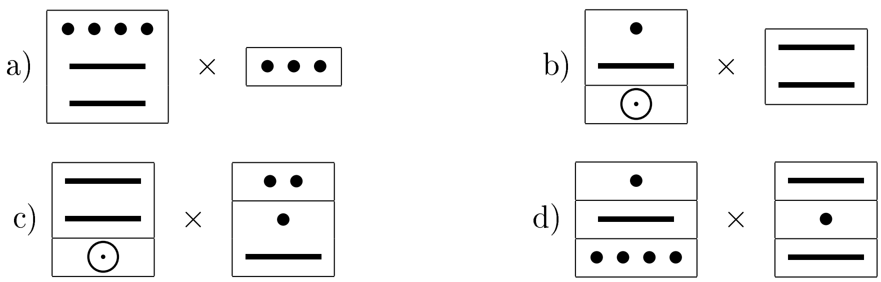
2. Realizar las siguientes sumas de números mayas.



3. Realizar las siguientes restas de números mayas.



4. Realizar los siguientes productos de números mayas.



1.3. Naturales, enteros y desarrollos en distintas bases. Comenzaremos esta sección recordando algunas propiedades básicas de los números naturales y enteros.

1.3.1. Definiciones básicas. Desde chicos, todos tenemos una idea intuitiva de los números naturales. Si le preguntamos a cualquier persona cuáles son estos números, seguramente nos dirán $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, etc. La primera aproximación a los números naturales se obtiene al contar elementos de un conjunto finito. Para describir la cantidad de elementos de un conjunto que no tiene elementos, agregamos el símbolo 0 a nuestro conjunto. Así, si $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales, con $\mathbb{N}_0$ denotamos el conjunto de los números naturales más el elemento 0, esto es $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Existen varias definiciones formales de los números naturales, sin embargo, por la naturaleza del curso sólo daremos una idea de una de las mismas.

A fines del siglo XIX, Giuseppe Peano (1858–1932) dio una definición axiomática de los números naturales. La clave de la definición de Peano es la noción de sucesor: todo número natural tiene un sucesor, que se obtiene sumándole 1. Para entender los axiomas de Peano, observemos que el conjunto de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

1. El 1 es el único número natural que no es sucesor de ningún número natural.
2. Si a y b son dos números naturales distintos, el sucesor de a es distinto del sucesor de b.
3. Si K es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in K$ y vale que el sucesor de cualquier elemento de K también está en K, entonces $K = \mathbb{N}$.

Peano descubrió que estas propiedades alcanzan para definir a los números naturales, en el sentido de que cualquier conjunto con una función sucesor que satisfaga las 3 propiedades anteriores es *equivalente* al conjunto de números naturales.

El conjunto de los números naturales tiene dos operaciones importantes: suma y producto. Como sabemos, la suma y el producto de números naturales son operaciones asociativas y conmutativas. El 1 es el neutro para el producto, y la suma no tiene elemento neutro en $\mathbb{N}$, pero sí en $\mathbb{N}_0$: el 0. Además, estas dos operaciones están relacionadas por la propiedad distributiva.

Por otro lado, si restamos dos números naturales $m - n$, su resultado sigue siendo un número natural si m es mayor a n. Sin embargo, si m es menor o igual que n, su resultado no es un número natural. Diversas situaciones de la realidad llevan a considerar operaciones como éstas, por lo tanto, resulta natural la necesidad de incorporar otros símbolos para poder realizarlas. Por ejemplo, si tenemos \$3.500 en el banco, no podemos emitir un cheque por \$4.750, salvo que el banco nos preste la diferencia, en cuyo caso generaríamos una deuda con el banco. Para informarnos de esta situación, el banco nos mandaría en el próximo resumen de cuenta el detalle donde conste que, en este caso, el saldo de nuestra cuenta sería de \$3.500 - \$4.750 = -\$1.250, es decir que le deberíamos \$1.250 al banco.

Sin embargo, con agregar los números naturales negativos nos bastaría, pues si m es menor que n, entonces $m - n = -(n - m)$ y $n - m$ es un número natural. Se definen entonces los números enteros $\mathbb{Z}$ como la unión de los números naturales, el 0 y los números naturales negativos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}.$$

Observar que, de acuerdo a nuestra introducción, un número entero negativo puede ser definido como la diferencia de dos números naturales. Por ejemplo $-2 = 3 - 5$, de donde puede asociarse el número -2 con el par ordenado $(3, 5)$. El problema es que

$(4,6)$, $(11,13)$ y otros infinitos pares ordenados también dan como resultado -2 al restar sus componentes. ¿De qué forma podemos definir sin ambigüedad -2?

Teniendo en cuenta que distintos pares ordenados (m,n), (m',n') de números naturales pueden tener la misma diferencia, entonces le asignaremos el mismo número entero si

$$m - n = m' - n'.$$

Como hemos dicho anteriormente, el inconveniente es que las restas no pueden efectuarse en $\mathbb{N}$ si $m \leq n$. Pero este problema se puede solucionar si escribimos la ecuación anterior de la forma

$$m + n' = m' + n,$$

y esta operación es correcta en $\mathbb{N}$, ya que la suma de cualquier par de naturales es un número natural.

Entonces, estamos en condiciones de definir en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación $\sim$ dada por:

$$(m,n) \sim (m',n') \text{ si y sólo si } m + n' = m' + n.$$

No es difícil ver que esta relación es de equivalencia; por lo tanto, produce en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una partición en clases de equivalencia, cada una de las cuales puede ser asociada a un único número entero y viceversa. Si denotamos por $[(m,n)]$ la clase de equivalencia del par (m,n), para cada par de naturales m y n, resulta, por ejemplo que

$$(4,7) \sim (1,4) \sim (22,25) \sim (185,188).$$

Se define entonces $m - n \in \mathbb{Z}$ como cualquier representante de la clase $[(m,n)]$. Explícitamente, se define el opuesto de cada número natural n como:

$$-n = [(1, n+1)].$$

Además, el cero puede obtenerse como $0 = [(n,n)]$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

1.3.2. Algoritmo de división y Teorema Fundamental de la Aritmética. Como estas notas están referidas a distintas representaciones de los sistemas de numeración, supondremos que el lector está familiarizado con las operaciones básicas en $\mathbb{Z}$ y recordaremos dos teoremas fundamentales que nos servirán en las secciones siguientes. Para más detalles de las operaciones en $\mathbb{Z}$ con esta definición, ver [5].

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Recordemos que decimos que a divide a b si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q$. En ese caso, decimos que q es el *cociente* de la división de b por a.

Para expresar simbólicamente este hecho, se escribe $a|b$. También se dice que b es divisible por a, o que a es un divisor de b. Por ejemplo, 2 divide a 2 (en efecto, $2 = 1 \cdot 2$); 2 también divide a $4, 6, 8, 20, -2, -10, -12$, y a todos los números pares. Justamente, un número es *par* si es divisible por 2.

En la escuela primaria, hemos aprendido a realizar divisiones de números naturales dando como resultado su cociente y su resto. Por lo dicho anteriormente, si su resto es 0, decimos que el divisor divide al dividendo. Por ejemplo, la división 2351 por 5 se hace como sigue

$$\begin{array}{l|l} 2351 & \underline{\ \ 5\ \ \ \ } \\ \ 35 & \ \ 470 \\ \ \ 01 & \\ \ \ \ \ \underline{1} & \end{array}$$

En este caso, escribimos $2351 = 5 \cdot 470 + 1$ y decimos que el cociente de dividir 2351 por 5 es 470 y su resto es 1. Este proceso se puede realizar para cualquier par de números enteros a y b con la única condición que b no sea nulo. Al mismo se lo denomina el algoritmo de división y se enuncia como sigue:

Teorema 1.1. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = q \cdot b + r$ y $0 \leq r < |b|$. Además, q y r son únicos con esta propiedad, es decir, si $a = q \cdot b + r = q' \cdot b + r'$ con $0 \leq r, r' < |b|$, entonces $q = q'$ y $r = r'$. En este caso, q se denomina el cociente y r el resto de la división de a por b.*

El algoritmo de división será de suma utilidad en la descripción de los desarrollos s-ádicos de la siguiente sección.

Recordemos que un número entero $p \neq 0$ se dice *primo* si acepta solamente 4 divisores; los mismos son exactamente $1, -1, p$ y $-p$. Por ejemplo, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ son los números primos menores que 20. En la actualidad, el mayor número primo conocido es $2^{43112609} - 1$ que tiene 12.978.189 de dígitos (43.112.609 es primo). Éste fue descubierto en el año 2008 gracias a GIMPS (ver `http://www.mersenne.org/`), un proyecto de computadoras en red que se dedica a buscar números primos grandes. Por el descubrimiento GIMPS obtuvo el premio ofrecido por la EFF de u$s 100.000. Aún se halla vacante el premio de u$s 250.000 a quien descubra el primer número primo con más de 1.000.000.000 de dígitos, ver `https://www.eff.org/awards/coop`.

Los números primos cumplen un rol crucial en la descripción de los números enteros. Esto se ve claramente en el Teorema Fundamental de la Aritmética, que afirma que todo número entero no nulo se escribe, salvo un signo, como el producto de un número finito de números primos positivos. A esta descripción se la suele llamar *factorización* del número entero.

Finalizamos esta subsección recordando el teorema fundamental de la aritmética.

Teorema 1.2. *Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0, 1, -1$. Entonces existen números primos positivos $p_1, \ldots, p_s$ tales que*

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s \text{ si } a \in \mathbb{N} \qquad o \qquad a = -p_1 \cdot p_2 \cdots p_s \text{ si } a \in -\mathbb{N}.$$

Más aún, la factorización es única salvo el orden.

1.3.3. Desarrollos s-ádicos. Usualmente escribimos los números enteros en sistema decimal, es decir, en cifras cuyos dígitos van del 0 al 9:

$$10; 1235; 928,$$

y desde pequeños aprendimos a operar con ellos. Los métodos para operar con los números racionales se basan en el hecho que éstos se expresan en forma decimal

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 10, \\ 1235 &= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5, \\ 928 &= 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8. \end{aligned}$$

Así, $3,1416 \cdot 10 = 31,416$ se puede ver como

$$(3 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}) \cdot 10 = 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} = 31,416.$$

Además de utilizar la base 10, esto puede hacerse con cualquier número entero s no nulo. La idea es expresar cualquier número entero m como una expresión polinómica en s cuyos coeficientes sean números naturales mayores o iguales a 0 y menores a $|s|$. A este desarrollo se lo denomina *desarrollo s-ádico* de z. Por ejemplo,

$$2351 = 3 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1,$$

es el desarrollo 5-ádico de 2351.

Para encontrar los desarrollos s-ádicos de un número entero m se utiliza el algoritmo de división de la siguiente manera: primero se divide m por s. Luego, al cociente de dicha división se lo divide por s y así sucesivamente hasta llegar a un cociente que sea menor que s. La sucesión (en orden inverso) dada por los restos de las sucesivas divisiones son los coeficientes de la expresión en potencias de s. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lllll}
2351 & |\underline{\ 5\ \ \ } & & & \\
\ 35 & \ 470 & |\underline{\ 5\ \ \ } & & \\
\ \ 01 & \ \ 20 & \ 94 & |\underline{\ 5\ \ \ } & \\
\ \ \ \underline{1} & \ \ \ \underline{0} & \ 44 & \ 18 & |\underline{\ 5\ \ \ } \\
 & & \ \ \underline{4} & \ \ \underline{3} & \ \ \underline{3}
\end{array}$$

Los sucesivos restos, en orden inverso, dieron 3 3 4 0 1, quienes son exactamente los coeficientes de la expresión dada anteriormente. Veamos por qué sucede esto. Utilizando el algoritmo de división escribimos en cada paso al dividendo como la suma del cociente por el divisor más el resto:

$$\begin{aligned}
2351 &= 470 \cdot 5 + 1 = (94 \cdot 5 + 0) \cdot 5 + 1 = 94 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 \\
&= (18 \cdot 5 + 4) \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 = 18 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 \\
&= (3 \cdot 5 + 3)5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 == 3 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1
\end{aligned}$$

Escribimos entonces $2351 = (2351)_{10} = (33401)_5$ para especificar sobre qué base está escrito el desarrollo s-ádico. Aunque resulte redundante escribir $2351 = (2351)_{10}$, lo haremos cuando queramos acentuar la base del desarrollo. Así,

$$\begin{aligned}
2351 &= (2351)_{10} = (100100101111)_2 \\
37 &= (37)_{10} = (201)_6 \\
1024 &= (1024)_{10} = (714)_{12}
\end{aligned}$$

Teorema 1.3. *Sea $s \in \mathbb{N},\ s > 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una expresión polinomial en s, llamado el desarrollo s-ádico de n, del tipo siguiente*

$$n = \sum_{i=0}^{t} a_i s^i = a_t s^t + \cdots + a_1 s + a_0,$$

donde $a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_i < s$. Dicho desarrollo es único, en el siguiente sentido: si

$$\sum_{i=0}^{t} a_i s^i = \sum_{j=0}^{h} b_j s^j, \qquad 0 \leq i, j < s,\ a_t \neq 0 \neq b_h,$$

entonces $t = h$ y $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq t = h$. En tal caso decimos que $(a_t a_{t-1} \cdots a_1 a_0)_s$ es el desarrollo de n en base s.

Demostración. Probaremos el teorema por inducción global. Si $n = 1$, el desarrollo s-ádico de 1 es $1.s^0$ y el teorema es cierto. Supongamos que el teorema ha sido probado para todos los enteros positivos menores que un cierto entero positivo k y probemos que el teorema es cierto para k.

Por el algoritmo de división tenemos que

$$k = s \cdot q + r, \qquad 0 \leq r < s.$$

Más aún, podemos suponer que $s < k$ pues si $k \leq s$, entonces su desarrollo s-ádico es

$$\begin{aligned}
k &= 0 \cdot s + k, \quad \text{si } k < s, \\
k &= 1 \cdot s + 0, \quad \text{si } k = s.
\end{aligned}$$

Luego, de suponer que $s < k$ se sigue que $0 < q$. Por lo tanto, como $1 < s$ tenemos

$$q < q \cdot s \leq q \cdot s + r = k.$$

Por otro lado, por hipótesis inductiva, el teorema vale para q, es decir, existe una expresión polinomial en s tal que

$$q = \sum_{i=0}^{t} a_i s^i = a_t s^t + \cdots + a_1 s + a_0, \quad 0 \leq a_i < s$$

Así,

$$\begin{aligned} k = q \cdot s + r &= \left(\sum_{i=0}^{t} a_i s^i \right) \cdot s + r = (a_t s^t + \cdots + a_1 s + a_0) \cdot s + r \\ &= a_t s^{t+1} + \cdots + a_1 s^2 + a_0 s + r, \end{aligned}$$

que es un desarrollo s-ádico de k, lo que prueba la primera parte del teorema.

Veamos la unicidad. Supongamos que existen dos desarrollos s-ádicos

$$\sum_{i=0}^{t} a_i s^i = \sum_{j=0}^{h} b_j s^j, \qquad 0 \leq i, j < s, \ a_t \neq 0 \neq b_h.$$

Entonces

$$a_0 + \left(\sum_{i=1}^{t} a_i s^{i-1} \right) \cdot s = b_0 + \left(\sum_{j=1}^{h} b_j s^{j-1} \right) \cdot s.$$

Como $0 \leq a_0, b_0 < s$, de la unicidad en el algoritmo de división se sigue que

$$a_0 = b_0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{t} a_i s^{i-1} = \sum_{j=1}^{h} b_j s^{j-1}.$$

Aplicando la hipótesis inductiva en el término de la derecha, resulta que $t = h$ y $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq h = t$, y el teorema queda demostrado. □

Observación 1.4. La escritura decimal que estamos acostumbrados a usar en los números enteros no es ni más ni menos que el desarrollo 10-ádico.

1.3.4. Operaciones con desarrollos s-ádicos. Las operaciones, suma, resta, multiplicación y división, se realizan de manera muy similar a las operaciones en desarrollo decimal o 10-ádico. En esta sección discutiremos cómo se realizan estas operaciones en otras bases.

Suma. Calculemos la siguiente suma: $(4412)_5 + (301)_5$. Para comprender la regla, escribamos primero los desarrollos como expresiones polinómicas y realicemos la suma

$$\begin{aligned} (4412)_5 &= 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2 \\ (301)_5 &= \underline{\phantom{4 \cdot 5^3 + {}} 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1} \\ & \ 4 \cdot 5^3 + 7 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 \end{aligned}$$

El resultado obtenido es $4 \cdot 5^3 + 7 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3$, que no es un desarrollo s-ádico pues hay un coeficiente que es mayor que 5. Sin embargo, $7 = 5 + 2$, luego $7 \cdot 5^2 = (5 + 2) \cdot 5^2 =$

$1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2$ y así

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5^3 + 7 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 &= 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 \\ &= 5 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 \\ &= 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 \end{aligned}$$

Luego, $(4412)_5 + (301)_5 = (10213)_5$. Claramente, la suma se realiza de forma análoga a la que estamos acostumbrados. Sumamos las cifras correspondientes y cada vez que superamos s, en este caso 5, debemos sumar 1 a la cifra siguiente, es decir, utilizando congruencias y "llevandose unidades". Para realizar las operaciones, no especificaremos la base sobre la cual estamos trabajando para no entorpecer la notación.

$$\begin{array}{rccccc} & {}^{+1} & 4^{+1} & 4 & 1 & 2 \\ + & & & 3 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Calculemos ahora la suma $(345)_6 + (523)_6 + (1155)_6$:

$$\begin{array}{rcccc} & {}^{+1} & 3^{+2} & 4^{+2} & 5 \\ & & 5 & 2 & 3 \\ + & 1 & 1 & 5 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}$$

Así $(345)_6 + (523)_6 + (1155)_6 = (2511)_6$.

Orden en desarrollos s-ádicos. Sabemos que en los enteros existe un orden. ¿Cómo se refleja este orden en los desarrollos s-ádicos?

Sean $a = (a_t a_{t-1} \cdots a_1 a_0)_s$ y $b = (b_h b_{h-1} \cdots b_1 b_0)_s$ dos números naturales expresados en base s y supongamos que $a \neq b$. Luego, $a = a_t s^t + a_{t-1} s^{t-1} + \cdots + a_1 s + a_0$, $b = b_h s^h + b_{h-1} s^{h-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ y por el orden en los naturales tenemos que $a < b$ si y sólo si

$$\begin{aligned} a_t s^t + a_{t-1} s^{t-1} + \cdots + a_1 s + a_0 &< b_h s^h + b_{h-1} s^{h-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ &\Leftrightarrow t < h \text{ o } t = h \text{ y } a_m < b_m, \end{aligned}$$

donde $m = \max\{1 \leq i \leq t = h |\ a_i \neq b_i\}$; tal m existe pues estamos suponiendo que $a \neq b$. Esto se refleja en el desarrollo en base s como el orden lexicográfico (o el orden del diccionario):

$$(a_t a_{t-1} \cdots a_1 a_0)_s < (b_h b_{h-1} \cdots b_1 b_0)_s \Leftrightarrow t < h \text{ o } t = h \text{ y } a_m < b_m,$$

donde $m = \max\{1 \leq i \leq t = h |\ a_i \neq b_i\}$. Por ejemplo, $(2020)_3 > (121)_3$, $(201)_3 > (121)_3$ y $(210)_3 > (200)_3 > (21)_6$.

Resta. Primero describiremos la operación de la resta utilizando el orden dado en la subsección anterior, de manera tal de asegurarnos que el resultado sea un número natural. Consideremos primero un ejemplo: tomemos $60 = (2020)_3$ y $16 = (121)_3$. Claramente, $60 - 16 = 44$ y $44 = (1122)_3$. Pues bien,

$$\begin{array}{rrl} & (2020)_3 = & 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0 \\ - & (121)_3 = & \qquad\quad\ 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \\ \hline & & 2 \cdot 3^3 - 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 - 1 \end{array}$$

Al igual que para la suma, el resultado obtenido no es un desarrollo 3-ádico. Para lograrlo, debemos operar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
2\cdot 3^3 - 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3 - 1 &= 1\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 - 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3 - 1\\
&= 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3^2 - 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3 - 1\\
&= 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 1\cdot 3^2 + 3\cdot 3^1 + 0\cdot 3 - 1\\
&= 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3 - 1\\
&= 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 3 - 1\\
&= 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 2.
\end{aligned}$$

Luego, la resta se realiza de forma análoga a la que estamos acostumbrados: restando las cifras correspondientes y cada vez que debamos restar una cifra mayor a una que es menor, debemos tomar prestado de la cifra anterior s unidades, en este caso 3, y debemos restar 1 a la cifra siguiente, es decir, utilizando congruencias y "sustrayendo unidades":

$$\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 2^{-1} & {}^{+3}0\\
- & & 1 & 2 & 1\\ \hline
 & & & & 2
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 1 & {}^{+3}0\\
- & & 1 & 2 & 1\\ \hline
 & & & & 2
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{rcccc}
 & 2^{-1} & {}^{+3}0^{-1} & {}^{+3}1 & {}^{+3}0\\
- & & 1 & 2 & 1\\ \hline
 & 1 & 1 & 2 & 2
\end{array}$$

Calculemos ahora $(20341)_5 - (2340)_5$ y $(3216)_7 - (426)_7$:

$$\begin{array}{rccccc}
 & 2^{-1} & {}^{+5}0^{-1} & {}^{+5}3^{-1} & {}^{+5}0 & 1\\
- & & 2 & 3 & 4 & 0\\ \hline
 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1
\end{array}$$

Así $(20341)_5 - (2340)_5 = (12411)_5$; y

$$\begin{array}{rcccc}
 & 3^{-1} & {}^{+7}2^{-1} & {}^{+7}1 & 6\\
- & & 4 & 2 & 6\\ \hline
 & 2 & 4 & 6 & 0
\end{array}$$

lo que implica que $(3216)_7 - (426)_7 = (2460)_7$.

Producto. Al igual que para la suma y la resta, calculemos en un ejemplo el producto usando los desarrollos como expresiones polinómicas y aplicando la ley distributiva. Veamos cuánto es $(121)_3 \times (2020)_3$:

$$\begin{aligned}
(121)_3 \times (2020)_3 &= (1\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 1) \times (2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 0)\\
&= 2\cdot 3^5 + 4\cdot 3^4 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 + 2\cdot 3\\
&= 2\cdot 3^5 + 4\cdot 3^4 + 4\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 + 2\cdot 3.
\end{aligned}$$

Para escribir el resultado en base 3, debemos reducir la expresión $2 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3$ a un desarrollo 3-ádico. Para ello, procedemos como antes

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = \\
&= 2 \cdot 3^5 + (3+1) \cdot 3^4 + (3+1) \cdot 3^3 + (3+1) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \\
&= 2 \cdot 3^5 + 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \\
&= 3 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \\
&= 1 \cdot 3^6 + 0 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3.
\end{aligned}$$

Así, $(121)_3 \times (2020)_3 = (1022120)_3$ y claramente la multiplicación se realiza de forma muy similar a la que estamos acostumbrados, salvo que luego de multiplicar las cifras, debemos sumar usando la regla de la suma dada anteriormente. En el algoritmo que presentamos, usaremos en un paso intermedio dígitos mayores que la base s para simplificar la operatoria. Veamos el esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2 & 0 & 2 & 0 \\
 & & \times & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & {}^{+1}2 & 0 & 2 & 0 \\
 & & {}^{+1}4 & 0 & 4 & 0 & \\
 & {}^{+1}2 & 0 & 2 & 0 & & \\
\hline
1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0
\end{array}$$

Calculemos otros ejemplos, $(234)_5 \times (1001)_5$ y $(210)_6 \times (341)_6$:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & \times & & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & & 4 & 0 & 0 & 4 \\
 & 3 & 0 & 0 & 3 & \\
2 & 0 & 0 & 2 & & \\
\hline
2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & 2 & 1 & 0 \\
 & \times & & 3 & 4 & 1 \\
\hline
 & & & 2 & 1 & 0 \\
 & & {}^{+1}8 & 4 & 0 & \\
 & {}^{+2}6 & 3 & 0 & & \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Luego, $(234)_5 \times (1001)_5 = (234234)_5$ y $(210)_6 \times (341)_6 = (120010)_6$.

Desarrollo s-ádico de enteros negativos. Hasta aquí hemos visto que todo número entero positivo admite un desarrollo s-ádico, $s \in \mathbb{N}$, y como tal posee una escritura en base s que denotamos como una sucesión de números a_i tales que $0 \leq a_i < s$. ¿Admiten los números enteros negativos una escritura similar? Veamos,

$$\begin{aligned}
-1 &= (s-1) - s \\
&= (s-1) + [(s-1) - s] \cdot s = (s-1) + (s-1)s - s^2 \\
&= (s-1) + (s-1)s + [(s-1) - s] \cdot s = (s-1) + (s-1)s + (s-1)s^2 - s^3 \\
&= (s-1) + (s-1)s + (s-1)s^2 + [(s-1) - s] \cdot s^3 \\
&= (s-1) + (s-1)s + (s-1)s^2 + (s-1)s^3 - s^4
\end{aligned}$$

Si aceptamos escibir formalmente infinitos sumandos, siguiendo con el procedimiento anterior tendríamos que

$$-1 = (s-1) + (s-1)s + (s-1)s^2 + (s-1)s^3 + (s-1)s^4 + (s-1)s^5 + \cdots$$

Por lo tanto, podemos definir

$$-1 = (\dots(s-1)(s-1)(s-1)(s-1))_s$$

como escritura s-ádica de -1. Análogamente, $-s = (\dots(s-1)(s-1)(s-1)0)_s$.

Ejemplo 1.5. (a) Escribamos -2 en base 3. Sabemos que $-2 \equiv 1 \mod 3$ es decir, el resto de dividir -2 por 3 es 1. Como $-3 = (\dots, 2, 2, 2, 2, 0)_3$ tenemos que

$$-2 = (1)_3 + (\dots, 2, 2, 2, 2, 0)_3 = (\dots, 2, 2, 2, 2, 1)_3$$

(b) Escribamos ahora -12 en base 7. Sabemos que $-12 \equiv 2 \mod 7$, es decir, el resto de dividir -12 por 7 es 2 y así

$$\begin{aligned} -12 &= -(1 \cdot 7 + 5) = -5 - 7 = 2 - 7 - 7 \\ &= (2)_7 + (\dots, 6, 6, 6, 6, 0)_7 + (\dots, 6, 6, 6, 6, 0)_7 \\ &= (\dots, 6, 6, 6, 6, 2)_7 + (\dots, 6, 6, 6, 6, 0)_7 \end{aligned}$$

El cálculo de la suma en este caso lo podemos realizar al igual que en el caso de finitas cifras, salvo que ahora debemos determinar quiénes serán los coeficientes, que son infinitos

$$\begin{array}{rrrrrr} & \dots & {}^{+1}6 & {}^{+1}6 & {}^{+1}6 & 6 & 2 \\ + & \dots & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ \hline & \dots & 6 & 6 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

Es claro que salvo las dos primeras cifras, todas las demás cifras son 6. Así $-12 = (\dots, 6, 6, 6, 5, 2)_7$. Observar que $12 = 1 \cdot 7 + 5$ y que $5 = 6 - 1,\ 2 = 7 - 5$.

La última observación hecha en el ejemplo anterior, vale en general.

Lema 1.6. *Si $(a_t a_{t-1} \dots a_1 a_0)_s$ es el desarrollo en base s de un número entero positivo a, entonces el desarrollo de $-a$ está dado por*

$$(\dots(s-1)(s-1)[(s-1)-a_t][(s-1)-a_{t-1}]\dots[(s-1)-a_1](s-a_0))_s.$$

□

Ejemplo 1.7. (a) Escribamos -2873 en base 7. Como $2873 = (11243)_7$, por el lema anterior tenemos que

$$-2873 = (\dots 6\,6\,6\,(6-1)\,(6-1)\,(6-2)\,(6-4)\,(7-3))_7 = (\dots 6\,6\,6\,5\,5\,4\,2\,4)_7$$

(b) Notar que si $-m = (\dots(s-1)\,(s-1)\,m_t\,\dots m_0)_7$ entonces

$$-m \cdot 7^n = (\dots(s-1)\,(s-1)\,m_t\,\dots m_0\,\underbrace{0\dots0}_{n-veces})_7.$$

Como consecuencia de este lema tenemos que los números enteros negativos están representados por sucesiones infinitas tales que sólo un número finito de cifras es distinta de $s-1$ y éstas están al principio de la sucesión.

Consideremos ahora el conjunto de todas las sucesiones cuyos coeficientes cumplen que son enteros no negativos menores que s:

$$\mathbb{Z}_s = \{(\dots a_3 a_2 a_1 a_0) |\ 0 \le a_i < s\}.$$

A este conjunto se lo denomina el anillo de enteros s-ádicos. Luego, por construcción tenemos que
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_s,$$
donde los números naturales están representados en $\mathbb{Z}_s$ como las sucesiones que tienen sólo finitas cifras no nulas. Más aún, las inclusiones son propias pues una sucesión que no se estabiliza en $(s-1)$ o en 0 no representa un número entero.

1.4. Ejercicios.

1. Escribir 1024 en base 2, 3, 4 y 5.
2. Escribir en base 10 los siguientes números:
   a) $(11110)_3; (100002)_3$.
   b) $(170)_8; (21)_8$.
   c) $(1\,10)_{11}; (1\,8\,5)_{11}$.
3. Calcular:
   a) $(1212)_3 + (102)_3 + (22)_3; (220)_3 - (102)_3; (111)_3 \times (21)_3; (12001)_3 \times (12)_3$.
   b) $(150)_6 + (21)_6 + (234)_6 - (123)_6$; $(234)_6 - \times(123)_6$.
   c) $(1212)_3 + (21)_6 - (1101)_2$; $(231)_5 \times (11)_3$.
4. Probar que mediante pesas de $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81, \ldots$ unidades es posible pesar, y en forma **unívoca**, cualquier cuerpo cuyo peso sea un número entero de unidades, siempre que sea posible utilizar ambos platillos para colocar pesas.
5. Probar que los desarrollos s-ádicos pueden efectuarse para valores $s < 0$.

   Ayuda: Desarrollar en base $-s$ y notar que si $0 \leq t < |s|$, entonces $-t = (|s| - t) + s$. Por ejemplo, en base -5 :
   $$17 = 2 + 3 \cdot 5 = 2 + (-3) \cdot (-5) = 2 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-5)^2 = (122)_{-5}.$$
6. *a*) Escribir en el sistema binario negativo (base -2) los siguientes números dados en el sistema decimal: $-10,\ -9, \ldots,\ -1,\ 1,\ 2, \ldots,\ 9,\ 10$.
   b) Dado $a = (323414)_5$, expresar a y $-a$ en base -5.
7. Considere el anillo de enteros s-ádicos $\mathbb{Z}_s$.
   a) Probar que $(\ldots 000)_s$ es el neutro para la suma y que $(\ldots 001)_s$ es el neutro para el producto.
   b) El inverso aditivo de un elemento $(\ldots a_2 a_1 a_0)_s$ está dado por la sucesión
   $$(\ldots [(s-1) - a_2][(s-1) - a_1](s - a_0))_s.$$
   Si $\alpha = (\ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_p \in \mathbb{Z}_p$ ¿Cuál es su inverso aditivo?
8. Calcular $(11)_2^{-1},\ (2)_3^{-1},\ (3)_4^{-1}$.

2. Conjuntos de números

2.1. Racionales y Reales. Al igual que sucede con los números enteros, la construcción de los números racionales proviene de la necesidad de considerar nuevas cantidades que representen valores que den soluciones a problemas determinados. Por ejemplo, si tenemos una flauta de pan y queremos repartirla en partes iguales entre 13 personas, deberíamos dividir exactamente la flauta en 13 partes. Si denotamos x a cada pedazo, como son todos iguales (miden y pesan lo mismo), tenemos que $13x$ es la flauta entera. Así, cada uno debería tener una 13ava parte de la flauta, es decir, $\frac{1}{13}$ de la flauta. Con este ejemplo simple, vemos que es necesario contar con el inverso multiplicativo del 13, ya que tendríamos que $13 \cdot \frac{1}{13} = 1$.

Entonces, podemos tratar de agregar inversos para el producto en el conjunto de los números enteros. Sin embargo, ya al comenzar nos encontramos con un problema importante. A saber, multiplicar por cero mata a todos los elementos, pues $0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times (-1) = 0$, etc.

Esto hace que, si queremos agrandar el conjunto de números enteros de forma tal que todo número tenga inverso, no vamos a poder hacerlo. Esto es porque el cero no puede tener inverso si queremos que el conjunto construido siga teniendo las propiedades que tiene el conjunto de números enteros. En efecto, supongamos que agregamos un símbolo $\bigstar$ que sirve como inverso multiplicativo del cero, es decir $0 \times \bigstar = 1 = \bigstar \times 0$. Usando la propiedad asociativa para el producto tenemos que:

$$1 = 0 \times \bigstar = (3 \times 0) \times \bigstar = 3 \times (0 \times \bigstar) = 3 \times 1 = 3,$$

lo cual es una contradicción. Como no hay manera de construir un conjunto que contenga los enteros y en el cual el número cero tenga inverso multiplicativo, tratemos de agrandar el conjunto de números enteros de manera tal que en el conjunto construido todos los números enteros, salvo el cero, tengan inverso multiplicativo.

La manera intuitiva de hacerlo es considerar fracciones, esto es, cocientes de la forma n/d donde n y d son enteros y d no es cero, dado que el cero no puede tener inverso. En tal expresión, al número n se lo llama *numerador* y al número d se lo llama *denominador* de la fracción. Sin embargo debemos ser más precisos si queremos dar una definición correcta, pues por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ y la fracción $\frac{2}{4}$ representan ambas el mismo número, a pesar de que son dos fracciones distintas.

Como los números racionales representan cantidades, la idea de que un número racional es una fracción no es del todo correcta, porque fracciones distintas pueden representar el mismo número racional. Veremos cómo solucionar este problema haciendo que a cada fracción le asociemos un número racional, aunque distintas fracciones pueden representar lo mismo.

Podemos pensar el conjunto de fracciones como $\{(n, d) : \ n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}$, donde el par $(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ representa la fracción $\frac{n}{d}$

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma cantidad, diremos que son fracciones *equivalentes* y escribimos $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$.

Es fácil convencerse de que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan la misma cantidad, porque si partimos el elemento unidad en 4 y tomamos dos pedazos, terminamos tomando la mitad del elemento unidad. De igual modo, es claro que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ también representan la misma cantidad. Pero si nos dan las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$, a pesar de que representan la misma cantidad, no es tan claro el por qué. Para entender mejor el problema, asumamos el siguiente principio bastante intuitivo: si $t \in \mathbb{N}$, entonces las fracciones $\frac{n}{d}$ y $\frac{t \cdot n}{t \cdot d}$ representan la misma cantidad. Llamativamente, esto nos alcanza para determinar si dos fracciones a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma cantidad. Simplemente, tomamos una escala que sirva para las dos. Así

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} \sim \frac{b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Entonces las fracciones representan el mismo número racional solamente cuando se tiene que $a \cdot d = b \cdot c$. En conclusión, hemos probado que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \qquad \text{si y sólo si} \qquad a \cdot d = b \cdot c.$$

Por lo tanto, para definir el conjunto de los números racionales, procederemos de forma análoga a la que procedimos para definir el conjunto de números enteros y definimos en el conjunto $\{(n, d) : \ n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}$ la relación de equivalencia dada por $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$. Luego, definimos el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales como el conjunto de clases de equivalencia del conjunto de fracciones por la esta relación, esto es,

$$\mathbb{Q} := \{(n, d) : \ n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}/\sim$$

Dentro de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ que representan el mismo número, hay una que se destaca sobre las otras. La misma se denomina *irreducible* y cumple con la propiedad que b es positivo y el máximo común divisor entre a y b es 1.

2.2. Representación decimal de los números racionales. Hemos visto en la sección anterior que los números enteros se pueden representar con los dígitos $0, \ldots, 9$ si lo escribimos en base 10, o más generalmente, con los dígitos $0, 1, \ldots, |s| - 1$ si los escribimos en base s. En esta subsección intentaremos seguir el mismo principio para describir a los números racionales. Por ejemplo, si hacemos

$$\frac{3145}{100} = \frac{3000}{100} + \frac{100}{100} + \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = 30 + 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

tenemos que $\frac{3145}{100}$ admite un desarrollo en base 10, pero con potencias negativas. Si escribimos los coeficientes de potencias negativas a la derecha del coeficiente de potencia 0 luego de una coma, tendríamos que $\frac{3145}{100}$ se escribe como $31,45$ en base 10. En lo que resta de esta subsección, mostraremos cómo escribir cualquier número racional en base 10.

Para poder encontrar la escritura en base 10 de cualquier número racional, usaremos el algoritmo de división de los números enteros. Si el número racional es $\frac{a}{b}$, podemos suponer que b es positivo y escribimos $a = b \cdot q + r$, donde $0 \leq r < b$. Entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{q \cdot b + r}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Como $0 \leq r < b$, tenemos que $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ y se deduce que todo número racional se escribe como un número entero más un número racional entre 0 y 1. Por ejemplo,

$$\frac{325}{4} = \frac{81 \cdot 4 + 1}{4} = 81 + \frac{1}{4},$$

así, basta saber cómo es la escritura decimal de $\frac{1}{4}$ para obtener la escritura decimal de $\frac{325}{4}$. En este caso tenemos que

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

lo que implica que $\frac{1}{4}$ es $0,25$ en base 10 y por lo tanto $\frac{325}{4} = 81,25$.

En caso de no haber sabido que $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ procedemos de la siguiente manera: debemos hallar $0 \leq a_1, a_2, \ldots, a_t \leq 9$ tales que $\frac{1}{4} = 0, a_1 a_2 \ldots a_t$. Como $10 \cdot \frac{1}{4} = a_1, a_2 \ldots a_t$, para sacar a_1 basta proceder como hicimos anteriormente. Así, luego de una cantidad finita de pasos tenemos un número entero como resultado y así obtenemos todos los coeficientes del desarrollo decimal. En nuestro ejemplo,

$$10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 2}{4} = 2 + \frac{2}{4}$$

lo que muestra que $a_1 = 2$. Para hallar a_2, debemos hacer

$$10 \cdot \frac{2}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Como el resultado es un número natural, el algoritmo finaliza y tenemos que $\frac{1}{4} = 0,25$.

En lo que sigue, describimos el método en general. Dado $\frac{a}{b}$, para calcular su desarrollo decimal debemos

1. calcular el cociente y resto de la división de a por b. Llamemos q al cociente y r al resto;
2. si r es cero, terminar y mostrar q como respuesta. Caso contrario, poner q y una coma en lo que será la respuesta;
3. calcular el cociente y resto de dividir $10 \cdot r$ por b. Llamemos q al cociente y r al resto. Pegar q a la derecha de lo que será la respuesta;
4. si r es cero, terminar y mostrar la respuesta. Caso contrario, volver al paso 3.

Veamos cómo funciona el algoritmo calculando la expresión decimal de $\frac{31}{25}$.

1. Calculamos cociente y resto de dividir 31 por 25. Así tenemos $31 = 1 \cdot 25 + 6$ y $q = 1$, $r = 6$. Por lo tanto,
$$\frac{31}{25} = \frac{1 \cdot 25 + 6}{25} = 1 + \frac{6}{25},$$
y la parte entera es 1.
2. Multiplicamos 6 por 10 y calculamos el cociente y resto de dividir 60 por 25: $60 = 2 \cdot 25 + 10$ y $q = 2$, $r = 10$. Entonces el primer dígito decimal es 2, o sea hasta ahora $\frac{31}{25} = 1,2\ldots$.
3. Multiplicamos el resto 10 por 10 y calculamos el cociente y resto de dividirlo por 25. Así, $100 = 4 \cdot 25$ y $q = 4$, $r = 0$. Como el resto es 0, terminamos, y la expresión decimal de $\frac{31}{25}$ es 1,24.

Si realizamos el procedimiento para $\frac{1}{3}$ tenemos que el primer dígito es 3 ya que $10 = 3 \cdot 3 + 1$. Como el resto es 1, el segundo dígito también es 3 ya que si multiplicamos el resto 1 por 10 y dividimos por 3 tenemos nuevamente $10 = 3 \cdot 3 + 1$. Luego, $\frac{1}{3}$ tiene un desarollo decimal **infinito** dado por
$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots = 0,\overline{3}.$$

Observación 2.1. Observar que el desarollo decimal **no es único**. En efecto, para $\frac{1}{3}$ el algoritmo nos da $0,33333\ldots = 0,\overline{3}$. Pero por otro lado tenemos que
$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0,9999\ldots = 0,\overline{9}.$$
Es decir, 1 admite dos desarrollos decimales distintos si permitimos infinitos decimales. Más aún, todo número racional admite dos desarrollos decimales distintos, por ejemplo $3,1416 = 3,1415\overline{9}$.

Hemos visto que algunos números racionales admiten finitos dígitos en su escritura decimal y otros infinitos. Veamos cómo diferenciamos ambos casos. Si un número racional $\frac{a}{b}$ admite un desarrollo decimal finito, digamos $\frac{a}{b} = a_2a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-t}$ con $0 \leq a_1, a_2, \ldots, a_t \leq 9$, multiplicando por 10^t tenemos que
$$10^t\frac{a}{b} = a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-t} \in \mathbb{Z}.$$
Entonces se tiene que
$$\frac{a}{b} = \frac{a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-t}}{10^t}.$$
Por ejemplo, si $\frac{a}{b} = 31415,92$ entonces $10^2 \cdot \frac{a}{b} = 3141592$ lo que implica que $\frac{a}{b} = \frac{3141592}{100} = \frac{785898}{25}$, donde la última fracción es irreducible. Así el denominador de la fracción irreducible es un divisor de 10^2 en cuyo caso en su factorización aparecen

solamente potencias de 2 y 5. Esta idea que reflejamos en un ejemplo particular sirve para una expansión decimal cualquiera.

Recíprocamente, si una fracción tiene sólo potencias de 2 y de 5 en su denominador, multiplicando por una potencia de 10 correspondiente se obtiene un número entero y de aquí se deduce que el desarrollo decimal es finito, por ejemplo, si tenemos la fracción $-\frac{427}{80}$ entonces como $80 = 16 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5$ tenemos que

$$10^4 \cdot \left(-\frac{427}{80}\right) = 5^3 \cdot (-427) = -53375$$

lo que implica que $-\frac{427}{80} = -\frac{53375}{10000} = 5,3375$ y por lo tanto, admite una expresión decimal finita.

Veamos ahora que todo número racional tiene una expresión decimal periódica y a la vez que toda expresión decimal periódica corresponde a la expresión de un número racional. Además, esta asociación es biyectiva, si identificamos las expresiones decimales de período 9 con la expresión obtenida sumándole una unidad al dígito anterior al período. Por ejemplo, $0,23\overline{9} = 0,24$.

Si $\frac{a}{b}$ es la fracción irreducible de un número racional con a y b positivos, el algoritmo para calcular la expresión decimal es como sigue. Primero dividimos a por b y calculamos el resto. Denotemos al mismo r_1 y q_0 al primer cociente obtenidos en este proceso; en particular, el resto satisface que $0 \leq r_1 \leq b-1$. Luego, multiplicamos r_1 por 10 y volvemos a dividirlo por b. Llamemos r_2 a este segundo resto y q_1 al cociente. Continuando con el proceso, creamos una sucesión de restos $r_1, r_2, \ldots$, y una sucesión de cocientes $q_0, q_1, \ldots$, donde cada uno de los restos es un número entre 0 y $b-1$. Como el conjunto $\{0, 1, ..., b-1\}$ tiene b elementos, entre los restos $r_1, r_2, \ldots, r_{b+1}$ hay dos números iguales. Como el procedimiento se obtiene haciendo divisiones sucesivas por b, al repetirse un número, comenzarán a repetirse los siguientes en el mismo orden. En particular, el período tendrá longitud a lo sumo $b-1$.

Para ilustrar la idea, supongamos que el resto r_2 es igual al resto r_5. Luego $10 \cdot r_2 = 10 \cdot r_5$. Al dividir por b, los restos de ambos números también son iguales. Así, $r_3 = r_6$. Análogamente, $r_4 = r_7$, etc. O sea, la tira de restos r_2, r_3, r_4 se va a repetir siempre. Al mismo tiempo, los cocientes de dividir $10 \cdot r_2$ por b y $10 \cdot r_5$ por b también son los mismos, con lo cual $q_2 = q_5$, o sea el segundo y el quinto lugar de la expresión decimal coinciden. Repitiendo el argumento, vemos que en la expresión decimal se repite siempre la tira $q_2q_3q_4$, o sea:

$$\frac{a}{b} = q_0, q_1\overline{q_2q_3q_4}.$$

El procedimiento para, dado un número en expresión decimal periódica, asociarle una fracción que lo represente, es más o menos conocido y dejamos su descripción como ejercicio para el lector.

2.3. Números reales. Los números reales surgen como necesidad de resolver ciertas ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números racionales. Entre dichas ecuaciones se encuentran las que nos permiten calcular ciertas raíces cuadradas.

La definición formal de los números reales excede el interés de este curso basado en sistemas de numeración. A modo de completar las notas, daremos una idea intuitiva de la misma.

Hemos visto que todo número racional, y en particular todo número natural y entero, se puede expresar como una sucesión de dígitos entre 0 y 9 que llamamos expresión decimal. Hemos probado también que todo número racional admite un desarrollo decimal finito o periódico y por lo tanto, se puede representar como una sucesión de números *finita* o *periódica*.

Por otro lado, si consideramos el conjunto de todas las posibles sucesiones de dígitos, vemos que hay sucesiones que no se corresponden con números racionales puesto que no son finitas ni periódicas. Por ejemplo, la sucesión construida por ceros y unos de la manera siguiente: el primer dígito decimal es un 0 y el segundo un 1. El tercero nuevamente un cero y luego dos 1, el cuarto un cero y luego tres 1, y así sucesivamente

$$0,01011011101111011111\ldots$$

Como la cantidad de 1 es creciente, el número no admite un período y no es de desarrollo finito. Luego, no puede representar a un número racional. En este sentido decimos que los números racionales no son **completos** y definimos el conjunto de los números reales como todas las posibles sucesiones de dígitos del 0 al 9, donde la coma puede tomar cualquier lugar:

$$\mathbb{R} := \{a_t a_{t-1}\ldots a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots \mid 0 \leq a_i \leq 9\}.$$

Con esta definición es claro que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Se puede ver que el conjunto de los números reales es completo y una de sus carecterísticas fundamentales es que es un conjunto ordenado. Esto tiene como consecuencia que todo número real se corresponde con un punto en una recta, dándole así una noción intuitiva a la completitud. Si sólo marcásemos los números racionales, tendríamos que la recta no es completa.

Para más detalles sobre la construcción de los números reales ver [5].

2.4. Ejercicios.

1. Calcular la expresión decimal de $\frac{1}{8}$, $\frac{35}{25}$, $\frac{24}{80}$, $\frac{22}{20}$ y $\frac{367}{200}$.
2. Calcular las fracciones irreducibles que representen los números racionales 26,291; 290,4377 y 946,17482.
3. Calcular la expresión decimal de $\frac{1}{11}$ $\frac{35}{11}$, $\frac{24}{57}$ y $\frac{367}{78}$
4. Deducir del argumento dado anteriormente que la longitud del período de la fracción $\frac{a}{b}$ es a lo sumo b. Más aún, probar que en realidad el período es a lo sumo $b1$.
5. Describir el procedimiento para, dado un número en expresión decimal periódica, asociarle una fracción que lo represente,

2.5. Racionales s-ádicos y números p-ádicos. Análogamente a la contrucción de los racionales a partir de los enteros, en lo que sigue construiremos los racionales s-ádicos a partir de los enteros s-ádicos procurando que todo elemento no nulo tenga inverso.

Recordemos que las unidades en un anillo son los elementos que tienen un inverso con respecto al producto. ¿Cuáles son las unidades en $\mathbb{Z}_s$? Sea $a = (\ldots a_2 a_1 a_0)$. Veamos qué condiciones debe cumplir a para tener inverso multiplicativo. Buscamos $b = (\ldots b_2 b_1 b_0)$

tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1 = (\ldots 001)$. Entonces

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \ldots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\times & & & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & & & \ldots & b_0a_3 & b_0a_2 & b_0a_1 & b_0a_0 \\
 & & \ldots & b_1a_3 & b_1a_2 & b_1a_1 & b_1a_0 & \\
 & \ldots & b_2a_3 & b_2a_2 & b_2a_1 & b_2a_0 & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\hline
 & & & & \ldots & (b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0) & (b_0a_1 + b_1a_0) & b_0a_0
\end{array}$$

donde el resultado no está escrito en base s, pues primero debemos reducir la expresión. Por lo pronto, tenemos que para que se cumpla $a \cdot b = 1$, debemos tener que $b_0a_0 \equiv 1 \mod s$, esto es, el resto de dividir b_0a_0 por s debe ser 1. Es decir, a_0 debe ser una unidad en $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ y esto sucede si y sólo si a_0 es coprimo con s, *i.e.* $(a_0, s) = 1$. Si a_0 cumple esta condición, entonces b_0 queda completamente determinado por el inverso multiplicativo de a_0.

Ahora bien, si $(a_0, s) = 1$ entonces existe $q_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $b_0a_0 = q_0 \cdot s + 1$. Según el algoritmo de la suma que describimos en la subsección anterior, para realizar la suma en la segunda cifra debemos sumar q_0 a $b_0a_1 + b_1a_0$ y luego reducir módulo s. Como buscamos $a \cdot b = (\ldots 0001)$, debemos tener

$$b_0a_1 + b_1a_0 + q_0 \equiv 0 \mod s.$$

Por lo tanto, $b_1a_0 \equiv -b_0a_1 - q_0 \mod s$ y como a_0 es invertible en $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ con inversa b_0, multiplicando a ambos miembros por b_0 tenemos que

$$b_1 \equiv -b_0^2a_1 - b_0q_0 \mod s. \tag{2.1}$$

Puesto que $0 \leq b_1 < s$, la ecuación (2.1) determina b_1. Para hallar b_2 procedemos de la misma forma. Si $b_0a_1 + b_1a_0 + q_0 \equiv 0 \mod s$, entonces existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b_0a_1 + b_1a_0 + q_0 = q_1 \cdot s$. Usando nuevamente el algoritmo de la suma en la tercera cifra, debemos tener que

$$b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0 + q_1 \equiv 0 \mod s.$$

Por lo tanto, $b_2a_0 \equiv -b_0a_2 - b_1a_1 - q_1 \mod s$ y multiplicando a ambos miembros por b_0 obtenemos

$$b_2 \equiv -b_0^2a_2 - b_0b_1a_1 - b_0q_1 \mod s. \tag{2.2}$$

Puesto que $0 \leq b_2 < s$, la ecuación (2.2) determina b_2. Siguiendo este método recursivamente podemos determinar de manera unívoca un elemento b que es el inverso multiplicativo de a, siempre y cuando a_0 sea coprimo con s. Por lo tanto, hemos probado lo siguiente:

Lema 2.2. $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_s) = \{(\ldots a_3a_2a_1a_0) \in \mathbb{Z}_s | \ (a_0, s) = 1\}$.

Observación 2.3. Para todo s, los elementos no nulos en $\mathbb{Z}_s$ que comienzan con cifras nulas no tienen inversos. Más aún, si s es primo, éstos son los únicos elementos no nulos no inversibles.

Ejemplo 2.4. Veamos cómo funciona en un ejemplo fácil, calculemos el inverso de $(\ldots 0005)_6$. Por el párrafo anterior, debemos buscar primero el inverso de 5 en $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ que existe pues 5 es comprimo con 6. Como $5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \mod 6$, tenemos que $b_0 = 5$.

Además, $25 = 6 \cdot 4 + 1$ lo que implica que $q_0 = 4$. Luego, siguiendo la ecuación (2.1) debemos buscar b_1 tal que

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv -b_0^2 a_1 - b_0 q_0 \mod s \\ &\equiv -5^2 \cdot 0 - 5 \cdot 4 \mod 6 \\ &\equiv -20 \mod 6 \\ &\equiv -2 \mod 6 \\ &\equiv 4 \mod 6 \end{aligned}$$

Así, $b_1 = 4$. Además $b_0a_1 + b_1a_0 + q_0 = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 4 = 24 = 4 \cdot 6 = q_1 \cdot s$, de donde se sigue que $q_1 = 4$. Por la ecuación (2.2) debemos buscar b_2 tal que $b_2 \equiv -b_0^2 a_2 - b_0 b_1 a_1 - b_0 q_1 \mod s$. Entonces

$$\begin{aligned} b_2 &\equiv -b_0^2 a_2 - b_0 b_1 a_1 - b_0 q_1 \mod s \\ &\equiv -5^2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \mod 6 \\ &\equiv -20 \mod 6 \\ &\equiv -2 \mod 6 \\ &\equiv 4 \mod 6 \end{aligned}$$

Luego, $b_2 = 4$. Además $b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0 + q_1 = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 4 = 24 = 4 \cdot 6 = q_2 \cdot s$, de donde se sigue que $q_2 = 4$. Ahora debemos buscar b_3 tal que

$$b_0a_3 + b_1a_2 + b_2a_1 + b_3a_0 + q_2 \equiv 0 \mod s.$$

Entonces, operando en ambos miembros y multiplicando por b_0 tenemos que

$$b_3 \equiv -b_0^2 a_3 - b_0 b_1 a_2 - b_0 b_2 a_1 - b_0 q_2 \mod s,$$

lo que en nuestro caso da

$$\begin{aligned} b_3 &\equiv -5^2 \cdot 0 - 5 \cdot 4 \cdot 0 - 5 \cdot 4 \cdot 0 - 5 \cdot 4 \mod 6 \\ &\equiv -20 \mod 6 \\ &\equiv -2 \mod 6 \\ &\equiv 4 \mod 6 \end{aligned}$$

Luego, $b_3 = 4$. Claramente, de las cuentas se observa que $b_n = 4$ para todo $n \geq 2$, puesto que $a_j = 0$ para todo $j \geq 1$. En efecto, siempre tendremos que

$$\begin{aligned} b_n &\equiv -b_0^2 a_n - b_0 b_1 a_{n-1} - \ldots - b_0 b_{n-2} a_2 - b_0 b_{n-1} a_1 - b_0 q_n \mod 6, \\ &\equiv -b_0 q_n \mod 6, \\ &\equiv -5 \cdot q_n \mod 6, \end{aligned}$$

donde q_n es tal que

$$b_0 a_{n-1} + b_1 a_{n-2} + \ldots + b_{n-2} a_1 + b_{n-1} a_0 + q_{n-1} = b_{n-1} \cdot 5 + q_{n-1} = q_n \cdot 6.$$

Usando inducción en $n \geq 2$ se ve que $b_n = 4$ y $q_n = 4$ para todo $n \geq 2$. En conclusión, $(5)_6^{-1} = (\ldots 44445)_6$.

Puesto que no todo elemento en $\mathbb{Z}_s$ tiene inverso, para construir un cuerpo que contenga a $\mathbb{Z}_s$ debemos introducir los inversos de los elementos no nulos. La extensión de los números enteros a los números racionales se ve reflejada en el desarrollo decimal con la introducción de decimales

$$\frac{1}{10} = 0,01; \qquad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots$$

Así, como el inverso de $s \in \mathbb{Q}$ es $\frac{1}{s} = s^{-1}$, debemos antes que nada, introducir los inversos de las potencias de s. Para ello usaremos la misma notación de los decimales, pero sólo admitiendo finitas cifras después de la coma, así

$$(0,1)_s = 1 \cdot s^{-1}; \qquad (0,01)_s = 1 \cdot s^{-2}; \qquad (24,131)_5 = 2 \cdot 5^1 + 4 + 1 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2} + 1 \cdot 5^{-3}$$

Observación 2.5. En $\mathbb{Q}$ la escritura en base 10 admite infinitas cifras a la derecha, luego de la coma. Aquí tomamos la convención opuesta, admitimos infinitas cifras a la izquierda y sólo finitas a la derecha, luego de la coma. La ventaja radica en el hecho que podemos seguir operando con las operaciones definidas en las secciones anteriores.

El conjunto

$$\mathbb{Q}_s = \{(\ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-t}) |\ 0 \leq a_i < s,\ a_{-t} \neq 0\}$$

se denomina el *anillo de los números racionales s-ádicos*. Es claro que, para obtener $\mathbb{Q}_s$ basta agregarle a $\mathbb{Z}_s$ sucesiones con finitos decimales. Así,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_s \subset \mathbb{Q}_s.$$

Al igual que antes, este conjunto resulta ser un anillo conmutativo. La demostración es análoga a la demostración que $\mathbb{Z}_s$ es un anillo, por tal motivo la obviaremos.

Lema 2.6. *Todo entero s-ádico cuya primera cifra no nula es coprima con s tiene inverso en $\mathbb{Q}_s$. En particular, $\mathbb{Q}_s$ es un cuerpo si y sólo si s es primo.*

Demostración. Sea $a = (\ldots a_{t+1} a_t \underbrace{0 \ldots 0}_{t-veces})_s$ tal que $(a_t, s) = 1$. Entonces

$$s^{-t} a = (0, \underbrace{0 \ldots 0}_{(t-1)-veces} 1)_s \cdot (\ldots a_{t+1} a_t \underbrace{0 \ldots 0}_{t-veces})_s = (\ldots a_{t+2} a_{t+1} a_t)_s.$$

Denotemos $\bar{a} = (\ldots a_{t+2} a_{t+1} a_t)_s$. Como $(a_t, s) = 1$, del Lema 2.2 se sigue que $\bar{a}$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_s$. Si $b = (\ldots b_2 b_1 b_0)_s$ es tal inverso, entonces $1 = b\bar{a} = bs^{-t}a$, lo que implica que $bs^{-t} = (\ldots b_{t+1} b_t, b_{t-1} \ldots b_1 b_0)_s$ es el inverso de a.

Sabemos que para todo $s \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_s$ es un anillo conmutativo. Si s es primo, entonces todo número entero a_i tal que $0 \leq a_i < s$ es coprimo con s. Por lo tanto, todo $a \in \mathbb{Q}_s$ no nulo es invertible, lo que implica que $\mathbb{Q}_s$ es un cuerpo. Recíprocamente, si $\mathbb{Q}_s$ es un cuerpo, entonces todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo, lo que implica que todo número entero a_i tal que $0 \leq a_i < s$ es coprimo con s, de donde se sigue que s es primo. □

Definición 2.7. Si p es un número primo, entonces $\mathbb{Q}_p$ se denomina el *cuerpo de los números p-ádicos.*

Para finalizar esta sección, mostraremos un algoritmo basado en el algoritmo de división de polinomios, que nos permite escribir a los números racionales en $\mathbb{Q}_p$.

Notar que hay racionales que ya podemos escribir en base p. Por ejemplo,

$$\frac{2}{27} = \frac{2}{3^3} = (2,001)_3, \qquad \frac{25}{49} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7^2} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7^2} = (0,3)_7 + (0,04)_7 = (0,34)_7$$

Dado que admitimos infinitas cifras a la izquierda, para realizar una división, pondremos al divisor a la izquierda y al dividendo a la derecha, con el orden inverso. Por ejemplo, si queremos dividir $b = (\ldots b_2b_1b_0)_p$ por $a = (\ldots a_2a_1a_0)_p$ escribimos

$$\underline{\ldots a_2a_1a_0}|\quad b_0b_1b_2\ldots$$

Ahora bien, para escribir $\frac{a}{b}$ en base p, procederemos a dividir a por b de acuerdo a este algoritmo, que explicaremos en un ejemplo.

Ejemplo 2.8. (a) Escribir $\frac{1}{2}$ en base 3.

Para resolverlo, escribimos primero ambos números en base 3: $1 = (\ldots 0001)_3$, $2 = (\ldots 0002)_3$ y luego

$$\underline{\ldots 002}|\quad \underline{1}00\ldots$$

Para encontrar el cociente, debemos hallar un número a tal que $2 \times a \equiv 1 \mod 3$. Este número es 2. Como $2 \times 2 = 4 = (\ldots 0011)_3$ tenemos

$$\begin{array}{rl}
\underline{\ldots 002}| & 100\ldots \\
2 & 110\ldots
\end{array}$$

El siguiente paso es realizar la resta $(\ldots 001)_3 - (\ldots 011)_3$. Como $(\ldots 011)_3$ es mayor que $(\ldots 001)_3$ debemos pedir prestado una "unidad" a la cifra de al lado, así

$$\begin{array}{rccccc}
\underline{\ldots 002}| & 1 & 0^{+3} & 2 & 2 & \ldots \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
 & 0 & \underline{2} & 2 & 2 & \ldots
\end{array}$$

Ahora, el siguiente número es claramente 1, pues siempre tomamos como referencia las primeras cifras del dividendo y del divisor

$$\begin{array}{rccccccc}
\underline{\ldots 0\,0\,2}| & 1 & 0^{+3} & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
1\,2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & & \\
 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
 & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
 & & 0 & \underline{2} & 2 & 2 & 2 & \ldots
\end{array}$$

Siguiendo la división de esta manera, tenemos que el cociente es $(\ldots 1112)_3$ y por lo tanto, ésta es la escritura de $\frac{1}{2}$ en base 3.

(b) Escribir $\frac{7}{11}$ en base 3. Al igual que antes, debemos escribir primero $7 = 3\cdot 2 + 1 = (\ldots 0021)_3$ y $11 = 3 \cdot 3 + 2 = (\ldots 00102)_3$. Luego, la primera cifra del cociente es claramente 2, y como $(\ldots 002)_3 \times (\ldots 00102)_3 = (\ldots 00211)_3$ tenemos que

$$\begin{array}{rcccccc}
\underline{\ldots 0\,0\,1\,0\,2}| & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots
\end{array}$$

Restando y procediendo de la misma manera tenemos

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\underline{\ldots 0\,0\,1\,0\,2}| & \underline{1} & 2 & 0^{+3} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
1\,1\,0\,0\,2\,2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
 & 0 & \underline{1} & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
 & & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
 & & 0 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
 & & & & & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
 & & & & & 0 & \underline{2} & 1 & 2 & 2 & \ldots \\
 & & & & & & 2 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
 & & & & & & 0 & \underline{1} & 1 & 2 & \ldots
\end{array}$$

Siguiendo de esta manera, se pueder ver que

$$\frac{7}{11} = (\ldots 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2\ 2)_3.$$

Notar que a partir de la cuarta cifra se repite el período 0211.

Observación 2.9. (a) Al igual que en el desarrollo decimal, en el que los números racionales se identifican con los números reales cuyos decimales poseen períodos, en $\mathbb{Q}_p$ los racionales son aquellos números que tienen períodos en sus desarrollos en base p – ver [1, Teo. II.2.2].

(b) Notar que este algoritmo sirve para hallar los desarrollos en base s para cualquier racional en $\mathbb{Q}_s$, sin importar que s sea primo, siempre y cuando la primera cifra del denominador sea coprima con s.

2.5.1. Completación de $\mathbb{Q}$. Como todos sabemos, hay una gran ventaja, tanto en álgebra como en análisis, en pasar del cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$ al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Uno de los grandes problemas al trabajar con $\mathbb{Q}$ es que no toda sucesión de Cauchy con el valor absoluto $|\cdot|$ es convergente en $\mathbb{Q}$, es decir, una sucesión de Cauchy puede no converger a un número racional. Estos agujeros en $\mathbb{Q}$ son llenados por el proceso de completación que da como resultado $\mathbb{R}$. Si consideramos a $\mathbb{Q}$ con la norma p-ádica, con p un número primo, resulta que $\mathbb{Q}$ tampoco es completo con esta norma. Su completación da lugar al cuerpo $\mathbb{Q}_p$ de *números p-ádicos.*

Para más detalles sobre los cuerpos de números p-ádicos ver [4].

2.6. Ejercicios.

1. Probar que $\alpha = (\ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_p \in \mathbb{Q}_s$ tiene finitas cifras, *i.e.* $a_i = 0$ para todo i mayor o igual a un cierto $N \in \mathbb{N}$, si y sólo si $\alpha \in \mathbb{Q}$ es positivo y su denominador es una potencia de p.
2. Probar que $\alpha = (\ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_p \in \mathbb{Q}_s$ tiene cifras que se repiten, *i.e.* $a_i = a_{i+r}$ para algún $r \in \mathbb{N}$ y para todo i mayor o igual a un cierto $N \in \mathbb{N}$, si y sólo si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
3. Escribir
   a) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ $\frac{5}{12}$ en base 3.
   b) $\frac{20}{3}$, $\frac{25}{11}$ $\frac{5}{12}$ en base 5.
   c) $\frac{1}{5}$ en base 6. Comparar con el ejemplo 2.4.
4. ¿Cuáles de los siguientes números 11-ádicos tiene raíces cuadradas en $\mathbb{Q}_{11}$?

(i)	$5.$	(vi)	$5 + 3 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + 1 \cdot 11^3.$
(ii)	$7.$	(vii)	$3 \cdot 11^{-2} + 6 \cdot 11^{-1} + 3 + 7 \cdot 11^2.$
(iii)	$-7.$	(viii)	$3 \cdot 11^{-1} + 6 + 3 \cdot 11 + 7 \cdot 11^3.$
(iv)	$1 \cdot 11^7.$	(ix)	$5 \cdot 11^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 11^n.$
(v)	$7 - 6 \cdot 11^2.$		

5. ¿Para qué $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19$ tiene -1 una raíz cuadrada en $\mathbb{Q}_p$?
6. Sea p un número primo impar y supongamos que $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Describir un método que decida cuándo α tiene una raíz cuadrada en $\mathbb{Q}_p$. Probar que existen cuatro números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Q}_p$ tales que para todo elemento no nulo $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, exactamente uno de los números $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3, \alpha\alpha_4$ tiene una raíz cuadrada. En el caso que reemplazamos p por ∞ y $\mathbb{Q}_p$ por $\mathbb{R}$, existen dos números, por ejemplo 1.

Referencias

[1] G. Bachman, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*, Academic Press, New York-London (1964).
[2] H. M. Calderón, *La Ciencia Matemática de los Mayas*, Editorial Orión, 1966, México.
[3] E. Gentile, *Notas de Álgebra I*, Eudeba, Universidad de Buenos Aires, 1976.
[4] G. A. García, *Números p-ádicos*, Cursos básicos elENA IV. Disponible en `http://www.mate.uncor.edu/~ggarcia/encuentros/notas-elENAIV.pdf`.
[5] M. Graña, P. Jancsa, G. Jerónimo, A. Pacetti y A. Petrovich, *Los Números. De los Naturales a los Complejos*, Bs. As. INET – Ministerio de Educación de la Nación, 2009. Disponible en: `http://www.inet.edu.ar/programas/capacitacion/materiales/nuevos/numeros.html`.
[6] L. F. Magaña Solís, *Las Matemáticas y los mayas*, Revista Ciencias, No. 19, Julio 1990, p. 19–26. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. México.
[7] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, No. **7**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1973).

Facultad de Matemática, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba.
CIEM – CONICET.
Medina Allende s/n
(5000) Ciudad Universitaria, Córdoba, Argentina
E-mail address: `ggarcia@famaf.unc.edu.ar`

INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VIRGINIA MONTORO

Índice

Introducción 57
1. Matemática 57
2. Educación matemática 58
3. Investigación en Educación Matemática 60
Referencias 67
Bibliografía complementaria 67

Introducción

La Educación Matemática se ha consolidado en las últimas décadas como un campo de conocimiento que se nutre principalmente de la Matemática, la Psicología Cognitiva y las Ciencias de la Educación, sin embargo recibe aportes de la Filosofía, la Sociología, la Historia, la Epistemología, la Semiótica y la Antropología, entre otras disciplina. La investigación en este complejo campo de problemas se encuentra en un proceso dinámico de construcción inmerso, por su propia naturaleza, en contextos sociopolíticos, históricos, epistemológicos y culturales.

En estas notas se brindará un panorama introductorio a esta problemática y se buscará dar significado a las expresiones: Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. Miraremos a la Educación Matemática como campo de conocimiento y nos acercaremos a delimitar el objeto de estudio de este campo. Abordaremos una breve historia de la Investigación en Educación Matemática; intentando un acercamiento a las tendencias metodológicas y a las temáticas de investigación en esta área. Describiremos algunas modalidades de investigación según su objetivo y según el modo de obtención de la información. Por último intentaremos mostrar algunos indicadores de la existencia de una comunidad interesada en la Educación Matemática en el país.

1. Matemática

Cuando hablamos de *matemática* estimamos que estamos de acuerdo a qué nos referimos, sin embargo si nos imponemos la tarea de definir la *matemática* la primera dificultad que aparece es encontrar su clase de pertenencia: ¿es una ciencia?, ¿un campo del conocimiento?, ¿un arte?, ¿una herramienta de la ciencia?..., ¿es formal?, ¿es deductiva?, ¿es inductiva? ¿es aplicada?... una salida elegante (y no por ello menos acertada) es pensar que *la matemática es todo aquello que los/as matemáticos/as dicen que es matemática.*

Quizás una definición más popular es la que dice que *la matemática* es una ciencia o campo de conocimiento o área del saber formal, que partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entes abstractos que pueden ser números, figuras, símbolos, etc. Algunos/as matemáticos/as consideran que la matemática es *creada* y en esto se asemeja al arte y otros que es *descubierta* como se descubre en la ciencia natural.

Por otra parte el sentido de verdad es distinto en matemática que en otras ciencias y por lo tanto su método para llegar a la "verdad" es distinto, para la matemática una proposición es verdadera si es una axioma o si se demuestra a partir de los axiomas, o de teoremas ya demostrados, al decir de Arsac [1] *la demostración es el procedimiento de validación que caracteriza la matemática respecto de las ciencias experimentales y así ocupa un lugar central desde el punto de vista epistemológico en esta disciplina.* En este sentido la matemática se distinguiría por su metodología.

Sin dudad *matemática* evoca a la abundante construcción teórica realizada a lo largo de los siglos por grandes matemáticos como así también a una herramienta privilegiada de la ciencia y la tecnología. Sin embargo en nuestra sociedad esta muy presente como una actividad humana vinculada a la práctica de enseñar y a la tarea de aprender quizás en mayor grado que cómo una construcción del pensamiento certifico y tecnológico.

Siguiendo a Waldegg [13] podemos considerar a la matemática en tres facetas: como objeto de estudio del matemático profesional, como objeto de enseñanza y como objeto de aprendizaje.

- Si consideramos a la matemática como el objeto de estudio del matemático profesional, la actividad tiene el propósito de hacer crecer el edificio teórico dentro de ciertas normas de coherencia, y presentarlo, si ese fuese el caso, para modelar el mundo físico.
- Si la matemática es el objeto de enseñanza del profesor, la intención de sus acciones consiste en hacer partícipe a las nuevas generaciones de una parte, previamente seleccionada, del edificio teórico, eligiendo para ello los medios y procedimientos adecuados.
- Cuando la matemática es el objeto de aprendizaje del estudiante, la meta es construir activamente un significado propio para ciertas partes de este edificio que le permitan, en un momento dado, utilizarlo de manera adecuada en su formación y en su vida profesional. (Waldegg [13])

2. Educación matemática

El aprendizaje está presente en la misma etimología de la palabra matemática. Es notable que la palabra "matemática" (del griego) signifique "lo que se aprende", viene del griego antiguo y quería decir "campo de estudio o instrucción". Su adjetivo significa en griego "relacionado con el aprendizaje", de manera similar al significado de "matemático/a". Lo que nos hace pensar que la matemática siempre estuvo vinculada con el aprendizaje.

Es muy común en nuestra sociedad que no se conozca la carrera del Matemático/a como profesional sino que ésta disciplina suele estar asociada a la del Profesor de Matemática. En una encuesta realizada por nosotros en un colegio de San Carlos de Bariloche a 170 estudiantes secundarios, al preguntarle sobre su relación con la matemática, mas del 90 % no consideró a la matemática como ciencia o área del saber o como una disciplina fuera de la escuela, sino que la mayoría la concibió como una materia que debía *aprobar* o *llevársela*, que le gustaba o no, pero siempre en el ámbito escolar. Sólo unos pocos estudiantes manifestaron que conocían la existencia de la matemática como disciplina no escolar.

Las prácticas profesionales del profesor de matemática y del matemático, a pesar de tener en común la Matemática, pueden ser muy distintas. Como dicen Fiorentini y Lorenzato [5]. *El matemático*, concibe las Matemáticas como un fin en sí misma, y cuando tiene que actuar en la formación de profesores, tiende a promover una educación para la Matemática, dando prioridad a los contenidos formales disciplinares y a una práctica centrada en la formación de nuevos investigadores en Matemáticas. *El educador matemático*, en contrapartida, tiende a concebir la Matemática como un medio importante para la formación intelectual y social de niños, jóvenes y adultos y también del profesor de Matemáticas y, por eso, intenta promover una Educación Matemática por *medio de las Matemáticas.*

Habiendo diferenciado la Matemática de la Educación Matemática podemos ir más allá y distinguir al menos dos sentidos en esta última: la Educación Matemática como campo profesional del profesor y la Educación Matemática como área de conocimiento e investigación.

La Educación Matemática como campo profesional del profesor. El campo profesional del educador matemático es extenso y en él encontramos un amplio espectro de prácticas que van desde las relacionadas con el propio acto de enseñar matemática en las aulas, hasta otras sociales y políticas vinculadas con la formación Matemática del/a ciudadano/a. El Profesor de Matemática atiende también a aspectos diversos como los relacionados con la matemática como un bien social heredado a las nuevas generaciones, la producción de materiales didácticos o textos, elaboración de propuestas curriculares, experiencias innovadoras o alternativas, aplicación y colaboración en la construcción de conocimiento educativo y resolución de problemas educativos relacionados con la matemática, entre otros.

La Educación Matemática como área de conocimiento e investigación. Según Kilpatrick [7] podríamos destacar por lo menos tres hechos determinantes en el surgimiento de la Educación Matemática como área de conocimiento e investigación.

- las preocupaciones de los propios matemáticos y de docentes de Matemática sobre la calidad de la divulgación y socialización de los conceptos matemáticos a las nuevas generaciones, esta preocupación se refería tanto al mejoramiento de las clases como a la actualización y modernización del currículo escolar en Matemática.
- la iniciativa de las universidades europeas, hacia el final del siglo XIX, para promover institucionalmente la formación de profesores de estudios secundarios, esto contribuyó al surgimiento de especialistas universitarios en enseñanza de la Matemática.
- los estudios experimentales realizados por psicólogos americanos y europeos, desde el inicio del siglo XX, sobre la forma como los niños aprenden la Matemática.

La Educación Matemática ha ido adquiriendo especificidad y en buena medida, conciencia de sí misma, en las ultimas décadas han crecido y se han consolidado grupos en todo el mundo dedicados a la investigación de los problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, así como al desarrollo de productos de "aplicación" de los resultados de las investigaciones. Las asociaciones profesionales, las reuniones periódicas, los congresos y otros eventos, así como la edición de libros y revistas especializados aumentan día a día como una muestra del dinamismo del campo. (Fiorentini [4]).

En la actualidad la Educación Matemática tiene una importante presencia como disciplina, cuenta con una comunidad nacional, latinoamericana e internacional en crecimiento que ha sabido abrirse espacios propios para comunicarse al interior de ella misma y para difundir sus resultados al exterior; se agrupa en asociaciones, organiza reuniones periódicas regulares (congresos, coloquios, jornadas, encuentros), cuenta con publicaciones especializadas para someter sus resultados a la crítica —y cuyas reglas de operación no difieren de las de otras organizaciones científicas (selección de trabajos, revisiones, arbitrajes, etc.); ha desarrollado programas de formación (capacitación y postgrado) para sus miembros, etc. La organización de los educadores de las matemáticas no es, como se ve, diferente a la de otras comunidades científicas. Waldegg [13].

En nuestro país se vienen desarrollado tareas de investigación en Educación Matemática en distintos grupos, algunos con una trayectoria de más de 20 años y mayormente en la Universidad. Se cuenta con algunas publicaciones especializadas y en los últimos años con la posibilidad de realizar tesis de maestrías y doctorados en la especialidad.

3. Investigación en Educación Matemática

Podemos destacar dos fines principales para la investigación en Educación Matemática: uno como ciencia básica, que consiste en comprender la naturaleza del pensar, enseñar y aprender matemáticas. Un segundo, como ciencia aplicada, que consiste en emplear tal comprensión para mejorar la formación matemática de las nuevas generaciones. Ambas finalidades están fuertemente interrelacionadas y son tan importante una como otra. Schoenfeld [11].

Bishop [2], indica que para determinar el carácter de investigación de una producción realizada en el campo de la Educación Matemática son necesarias tres componentes:

- Indagación: representa la búsqueda sistemática del conocimiento, la búsqueda de comprensión, dando dinamismo a la actividad. La investigación debe ser búsqueda intencional.
- Evidencia: es necesaria para que la investigación esté relacionada con la realidad de la situación educativa en estudio, se trate de clases, programas, textos o documentos históricos. Las evidencias muestran la realidad sobre la cual se focaliza la teorización.
- Teoría: es el modo en que se representa el conocimiento y comprensión provenientes de cada investigación. La teoría es el producto esencial de la actividad de investigación y la teorización es, por lo tanto, su objetivo esencial.

Objeto de estudio de la Educación Matemática. Este campo de estudio en países como Francia y Alemania se llama *Didáctica de la Matemática*. En otros países como Holanda se denomina *metodología de enseñanza de la Matemática*. En el Argentina, Brasil y los Estados Unidos, así como en la gran mayoría de los países se denomina *Educación Matemática*.

Se suele utilizar también Matemática Educativa (como en el CINVESTAV de México), sin embargo la preferencia por el uso de la expresión “Educación Matemática” se atribuye a que ésta tiene una connotación más amplia, nos muestra que estamos tratando con una disciplina que tiene un eje en la educación y otro en la matemática. Con *Educación Matemática* expresamos que nuestro foco de estudio se encuentra en las ciencias humanas y pone de manifiesto su dimensión social. La metodología de investigación en Educación Matemática se acerca más a la metodología de las ciencias humanas y sociales que a la formal deductiva de la matemática.

En D'Amore [3] encontramos las siguientes definiciones:

- Didáctica de la matemática: es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo objeto es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y los procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.
- Educación Matemática: es el sistema social complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativos a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática. Incluye a la didáctica de la matemática como subsistema. D'Amore [3].

Podríamos interpretar que la Didáctica de la Matemática (ciencia de la Educación Matemática), es el campo académico y científico de investigación y desarrollo que se propone identificar, caracterizar y entender los fenómenos y procesos, en potencia o en acto, implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de cualquier nivel educativo (Niss [9]).

Según Rico, Sierra, y Castro [10] la Didáctica de la Matemática es aquella disciplina que se ocupa de estudiar e investigar los fenómenos y problemas de la Educación Matemática y proponer marcos explicativos mediante los cuales abordar su estudio y resolución. Se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos, tiene como objeto delimitar y estudiar los fenómenos que se presentan durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático.

A pesar que el *objeto de estudio* de la Educación Matemática aún se encuentre en proceso de construcción, pareciera haber cierto acuerdo en cuatro elementos que debieran estar presentes a la hora de delimitarlo, estos son: **enseñanza**, **aprendizaje**, **conocimiento matemático** y **contexto sociocultural**. Podríamos de modo general decir que la Educación Matemática *abarca las múltiples relaciones y determinaciones entre enseñanza, aprendizaje y conocimiento matemático en un contexto sociocultural específico.*

La Educación Matemática como campo profesional y científico nace en el siglo XX. El interés de la comunidad matemática internacional en la Educación Matemática se vio plasmada en 1908, en la creación de Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática (International Commission on the Teaching of Mathematics, posteriormente conocido como International Commission on Mathematical Instruction — ICMI) en el marco del IV Congreso Internacional de Matemáticos, realizado en Roma.

Esta Comisión fue presidida por Felix Christian Klein (reconocido matemático alemán, 1849–1925) hasta su muerte en 1925. Esta comisión se dedicó principalmente a la preparación de informes sobre la práctica de la enseñanza en los países miembros (países de Europa occidental y Estados Unidos); como así también a definir la Matemática que se debe enseñar a estudiantes de Ciencias Físicas y Naturales o para la preparación de ingenieros y el lugar del rigor en la enseñanza de la Matemática secundaria.

El inicio de la primera guerra mundial pone fin a un período de gran productividad de esta comisión, que recién retoma la actividad después de la segunda guerra mundial. En la década de 1960–70 matemáticos y psicólogos se unieron en el desarrollo de estudios y proyectos curriculares en el que se complementaron desde ambas perspectivas. Una década antes había comenzado un movimiento de reformas curriculares en varios países motivadas por la brecha existente entre la matemática universitaria y la matemática de la escolaridad previa y también por la preocupación acerca de la disminución en el ingreso universitario a carreras matemáticas. Los trabajos de Piaget y sus colaboradores cambiaron el enfoque de las investigaciones en Didáctica reorientándose hacia el método clínico.

En la década de los 70 cobra fuerza la escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas y desde el ICMI surgen dos movimientos que tienen vigencia hasta la actualidad, en 1976 el de Psychology of Mathematics Education (PME) y en 1984 el de Theory of Mathematics Education (TME).

En forma muy sintética, podríamos decir que las raíces matemáticas de la investigación en Educación Matemática, fueron principalmente trabajos acerca de **qué** contenido matemático es enseñado y aprendido, con especial interés en el nivel secundario y universitario; mientras que las raíces psicológicas de la Educación Matemática trataron fundamentalmente sobre **cómo** la matemática es enseñada y aprendida con una marcada preferencia por el nivel elemental (Kilpatrick [7]).

En la Republica Argentina, encontramos que en la década de 1960–70 y desde su profesión de Matemático el Dr. Luis Santaló (1911–2001) integró desde mediados de esta década el Comité Interamericano de Educación Matemática y el Dr. Enzo Gentile (1928–1991) aportó reflexiones realizadas desde su práctica como docente e investigador en Matemática, en torno a la Matemática Universitaria y el proceso de resolución de problemas. Aconsejó e intervino en la formación de Profesores.

La Unión Matemática Argentina sociedad científica fundada en 1936 se interesó siempre por la Educación Matemática y en 1977 se realizó la primera Reunión de Educación Matemática en el marco del congreso anual de la UMA. La FAMAF (UNCórdoba) instaura la primera publicación al respecto la REVISTA DE EDUCACION MATEMATICA de la UMA. Este año (2012) en Córdoba se realizará la XXXV REM y se publica el vol 27 de la Revista de Educación Matemática.

En la página web de la FAMAF (`http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/#rev_intro_volumen`) se lee:

> La Revista de Educación Matemática (REM) es una publicación de la Unión Matemática Argentina (UMA), asociación adherida a la Unión Matemática Internacional (IMU), en forma conjunta con la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Se inició en el año 1982 con la finalidad de difundir temas de matemática y su enseñanza. Está dirigida a docentes de nivel medio, terciario, como así también a estudiantes de profesorados y licenciaturas. Es una publicación anual de tres fascículos. Los mismos se imprimen en mayo, julio y el último antes de la reunión anual de la UMA.

La Educación Matemática como área multidisciplinar. La Educación Matemática como área de conocimiento e investigación está directamente vinculada a la **matemática**, desde la producción del conocimiento disciplinar teórico y aplicado; a la **psicología**, desde el desarrollo y las teorías del aprendizaje y a la **pedagogía**, desde la reflexión sobre cómo educar y las prácticas de enseñanza. Sin embargo abreva también en múltiples disciplinas. Al menos podemos nombrar a la **filosofía** que aporta desde las dimensiones de ser humano, de sociedad y desde la ética y la estética; a las **ciencias naturales**, la **economía** y la **informática** aportando desde la problematización y la modelación; a la **sociología**: desde la relación sujeto-sociedad; a la **lingüística** y la **semiótica**: desde el uso de los lenguajes, simbología y los procesos de representación y comunicación; a la **historia** y la **epistemología**: desde la gestación de los conceptos y el desarrollo de la disciplina y a la **antropología**: desde la cultura, el contexto escolar y social y las metodologías del estudio del ser humano.

Enfoques epistemológicos de la metodología de la investigación educativa. Considerando los aspectos teórico-epistemológicos que fundamentan la práctica de la investigación, distinguimos principalmente tres tendencias *metodológicas* de la investigación educativa: la empírico-analítica; la fenomenológica-hermenéutica o interpretativa; la histórica-dialéctica o crítica: (Bishop [2], Kilpatrick y Sierpinska [8], Fiorentini y Lorenzato [5]).

- Empírico-analítica: tiene su origen en el positivismo. El proceso de producción de conocimientos se orienta por aplicación del método científico (formulación de un problema, formulación de hipótesis, prueba de conjeturas, confirmación o refutación de las hipótesis y conclusiones). Ese método también se conoce como experimental o método de la agricultura, los datos obtenidos en ese proceso se tratan preferentemente desde la estadística.
- Fenomenológica-hermenéutica o interpretativa: Ese enfoque se fundamenta filosóficamente en la fenomenología y en el proceso hermenéutico de interpretación. La solución de problemas educativos pasa inicialmente por la búsqueda de interpretación y comprensión de los significados atribuidos por los implicados. Confía en la capacidad que tiene el sujeto de interpretar fenómenos y discursos.
- Histórica-dialéctica o crítica: Considera el carácter dinámico, contradictorio e histórico de los fenómenos educativos. Aquello que hoy se presenta frente a nuestros ojos es sólo una síntesis del proceso histórico en transformación. La investigación participante y la investigación-acción son modalidades muy usadas en ese enfoque.

Desde una visión netamente metodológica Kilpatrick [6] destaca cinco tendencias en la Investigación en Educación Matemática que aun hoy tienen vigencia en distintas partes del mundo y de algún modo solapadas con las vistas anteriormente. La *aproximación conductista*, en esta el investigador se sitúa fuera del contexto educativo y asume una postura de observador neutro; la *aproximación analítica*, en esta tendencia el investigador manipula, aísla e intenta controlar y medir los eventos, con el propósito de hacer inferencias buscando precisión; la *aproximación interpretativa*, en la que el investigador se introduce en el ambiente educativo con el propósito de comprender sin juzgar ni intervenir, busca interpretar el significado que la enseñanza tiene en le salón de clase; la *aproximación crítica*, en esta tendencia el investigador se interna en el ambiente educativo no sólo para comprenderlo, sino también para cambiarlo en la búsqueda de más libertad de acción y aprendizaje de los participantes del proceso y por último la *aproximación sistémica*, en ella los fenómenos se estudian en su mutua interacción e interpretación, lo que produce mas autenticidad pero se pierde precisión.

Concuerdo con Kilpatrick y Sierpinska [8], cuando después de analizar estos paradigmas adoptan una posición holística respecto a los métodos de investigación educativa: *no existe un único método de investigación que pueda abarcar todo el rango de preguntas que interesan a los educadores matemáticos*. Considero que cada pregunta o problema tendrá una aproximación epistemológica que se considere más adecuada por el investigador/a.

Investigaciones en Educación Matemática según sus objetivos y según el modo de obtención de la información. Fiorentini y Lorenzato (2010) realizan una interesante caracterización de las investigaciones en EM según sus objetivos por un lado y según la forma de obtención de la información por otro.

Estos autores sostienen que las investigaciones **según el objetivo** que persiguen, pueden tomar una perspectiva *teórica*, *exploratoria* (*diagnóstica*), *descriptiva* o *explicativa.*

- *Un estudio o ensayo teórico* tiene por objetivo la (re)construcción o desenvolvimiento de teorías, conceptos, ideas, ideologías, polémicas, a fin de, en términos inmediatos, ordenar y hacer más eficientes fundamentos teóricos. El investigador, en este tipo de estudio, no utiliza datos y hechos empíricos para validar una hipótesis o un punto de vista, pero sí la construcción de una red de conceptos y argumentos desarrollados con rigor y coherencia lógica.
- Una investigación es *exploratoria* o *diagnóstica* cuando el investigador, frente a una problemática o temática aún poco definida y conocida, decide realizar un

estudio con el objetivo de obtener informaciones y datos más esclarecedores y consistentes sobre ella. Esa modalidad de investigación también frecuentemente se usa como primera entrada en campo, con la intención de formular hipótesis o buscar elementos que permitan un mejor direccionamiento de la investigación. Ese tipo de investigación puede abarcar relevantamiento bibliográfico, realización de entrevistas, aplicación de cuestionarios o pruebas e, incluso, estudio de casos.

- Una investigación se considera *descriptiva* cuando el investigador desea describir o caracterizar con detalles una situación, un fenómeno o un problema. Generalmente ese tipo de investigación utiliza la observación sistemática (no etnográfica) o la aplicación de cuestionarios estandarizados, a partir de categorías previamente definidas.
- La investigación se considera *explicativa* cuando el investigador procura explicitar las causas de los problemas o fenómenos, esto es, busca el porqué de las cosas. Es común que la investigación explicativa se apoye en otra de tipo descriptivo o exploratoria.

Considerando las diferentes **formas de obtención de la información** para la investigación, encontramos con más frecuencia tres grandes modalidades: *la (histórico)-bibliográfica*; *la experimental* o *de laboratorio* y *la naturalista* o *de campo.*

- La investigación *(histórico)-bibliográfica* o de revisión es la modalidad de estudio que se propone a realizar análisis históricos o revisión de estudios o procesos que tienen como material de análisis documentos históricos o producciones culturales obtenidos a partir de archivos y acervos. También en esta categoría encontramos los estudios metaanalíticos que pretenden realizar un análisis critico de un conjunto de estudios ya realizados, intentando extraer de ellos informaciones adicionales que permitan producir nuevos resultados, que trascienden aquellos anteriormente obtenidos.
- Las *investigaciones experimentales*, *casi-experimentales* o *de laboratorio* se caracterizan por la realización de “experimentos” que buscan verificar la validez de determinadas hipótesis en relación con un fenómeno o problema. Se entiende aquí por experimento aquella parte de la investigación en la cual se manipulan ciertas variables y se observan sus efectos sobre otras. Esos estudios pueden realizarse en laboratorios o no, y pueden caracterizarse como casi-experimentales o, simplemente, experimentales. Esa es una modalidad de investigación típica del enfoque empírico-analítico.
- La modalidad de *investigación naturalista* o *de campo* se da cuando los datos del estudio se obtienen directamente en el lugar en que el problema o fenómeno sucede y puede darse por muestreo, entrevista, observación participante, investigación-acción, aplicación de cuestionarios, test, entre otros.

Temas de investigación en Educación Matemática. A continuación presento un listado de distintos temas de Investigación en Educación Matemática que pretende ser ilustrativo del amplio espectro que hoy encontramos como campo de investigación en la materia que nos ocupa sin pretender ser este listado exhaustivo. El mismo fue preparado a partir del libro de Fiorentini y Lorenzato [5] y complementado con los temas de investigación que figuran como sesiones de distintos congresos nacionales, latinoamericanos e internacionales la Educación Matemática

- Álgebra y pensamiento algebraico.
- Aprendizaje colaborativo y aprendizaje cooperativo en Matemática.
- Aprendizaje de Matemática desde la Historia de la Matemática.

- Aritmética y pensamiento aritmético.
- Aulas virtuales en Enseñanza de Matemática.
- Cognición y aprendizaje en Matemática.
- Constructivismo en Matemática.
- Creatividad Matemática.
- Creencias, concepciones y representaciones sociales de los alumnos.
- Desarrollo cunicular.
- Didáctica de la Matemática.
- Didáctica Matemática computacional.
- Diseño curricular en Matemática.
- Educación Matemática en la formación de Profesores.
- Enfoques investigativos para la Educación Matemática.
- Enseñanza de Matemática desde Historia de la Matemática.
- Enseñanza interdisciplinaria y aplicaciones.
- Entornos de aprendizaje en Matemática.
- Estadística Educativa.
- Etnomatemática.
- Evaluación en Educación Matemática.
- Factores sociales y afectivos y estudiantes con dificultades.
- Formalización de modelos cognitivos.
- Formulación, análisis, modelado y resolución de problemas.
- Geometría, visualización y representación espacial y pensamiento geométrico.
- Heurísticas y metaheurísticas.
- Informática, computadores y enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
- Ingeniería didáctica en Matemática.
- Instrucción conceptual versus procesal.
- Interdisciplinas en Educación Matemática.
- Investigación en Didáctica de la Estadística.
- Juegos didácticos Matemáticos.
- Matemática recreativa como base didáctica.
- Metodología de la investigación en Educación Matemática.
- Modelado lógico de cognición e inteligencia.
- Modelado matemático en Educación Matemática.
- Modelado y resolución de problemas.
- Modelos de representación en Matemática.
- Modelos educativo-computacionales para Enseñanza de Matemática.
- Modelos para cognición Matemática.
- Paradigmas en Educación Matemática.
- Pensamiento Lógico-Matemático.
- Pensamiento matemático avanzado.
- Procesos cognitivos en Matemática.
- Procesos comunicacionales en Matemática.
- Procesos de enseñanza-aprendizaje en ciencias matemáticas.
- Procesos Lingüístico-Matemáticos.
- Profesores de educación básica y media como investigadores.
- Proporcionalidad y pensamiento proporcional.
- Pruebas y demostraciones en Educación Matemática.
- Razonamiento plausible en Matemática.
- Resolución de problemas.

- Tecnología educativa (videos, uso de calculadoras etc.).
- Tecnología en Educación Matemática.
- Tecnologías de la información y comunicación y pensamiento matemático.
- Teoría y epistemología en Educación Matemática.
- Transferencia de modelos matemático-lógicos a inteligencia artificial.

Movimiento de Educación Matemática en el país. Si bien hay grupos de investigadores y profesores de matemática en el país que vienen desarrollando actividades de investigación en esta área desde la década de los 80 del siglo XX, acuerdo con Villarreal y Esteley [12] cuando dicen que: *no podemos afirmar que exista una comunidad organizada de investigadores en el área* (Educación Matemática en la Argentina). *Se puede apreciar, sí, la existencia de un movimiento en Educación Matemática, entendido como "un conjunto de prácticas sociales entre las cuales está, obviamente, la práctica científica"*.

Enunciamos algunos indicadores que nos hacen pensar que existe una comunidad de práctica activa en esta área, a saber:

- La creación de sociedades vinculadas a la Educación Matemática. Por ejemplo:
  - La comisión de educación de la UMA.
  - SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática),
  - AEMA (Asociación de Educación Matemática Argentina).
- La realización de diversos congresos, simposios y reuniones nacionales. Por ejemplo:
  - REM — UMA: Reunión de Educación Matemática. Organizada por la Unión Matemática Argentina desde el año 1977 en forma anual y compartiendo el espacio con la reunión anual de la UMA
  - Simposio Internacional de Educación Matemática (SIEM). Grupo EDUMAT/ Universidad Nacional de Lujan — Chivilcoy (Buenos Aires) desde 1998. Este año se realizó el Simposio número 12. En general ha contado con la presencia de notables investigadores internacionales.
  - Conferencia Argentina de Educación Matemática — CAREM — SOAREM. Se realiza desde 1999, principalmente en la ciudad de Buenos Aires cada dos años. En septiembre de 2012 se realizará la X conferencia.
  - Reunión Pampeana de Educación Matemática. Organizada por el departamento de Matemática de la U.N. de la Pampa. Desde 2006 cada dos años. En agosto de 2012 se realizará la IV Reunión.
  - II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). Organizado por Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Facultad de Ciencias Exactas — UNCPBA. En las dos oportunidades ha contado con la presencia de investigadores de renombre.
  - IV Jornadas de Educación Matemática y I Jornada de Investigación en Educación Matemática. Organizadas Fac. de Humanidades y Ciencias. U. N. del Litoral en 2011
- La realización de diversos congresos internacionales: Por ejemplo: Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur, Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.
- La creación de carreras de Licenciatura en Educación Matemática como carrera de grado en distintos puntos del país.
- La creación de diversas maestrías en distintas Universidades Nacionales con diferentes grados de vinculación con la Educación Matemática, en las cuales se realizan trabajos de tesis en el área.

- Defensas de tesis de Doctorado en Educación Matemática en diversas Universidades Nacionales y los recientemente creados doctorados en enseñanza de las ciencias.
- La visita de investigadores extranjeros. Predominantemente investigadores enrolados en la tradición de la Didáctica de la Matemática francesa que ha ejercido influencia en las orientaciones de las maestrías y en muchos trabajos de investigación producidos en el país.
- Publicaciones especializadas. Por ejemplo:
  - Revista de Educación Matemática — UMA (FAMAF — U.N. de Córdoba).
  - PREMISA (SOAREM).
  - REIEC — Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. UNICEN.

Referencias

[1] Arsac, G. (1987). *El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica.* Recherches en didactique des mathematiques, Vol 8:3, 267–312.
[2] Bishop, A. (1992). *International perspectives on research in mathematics education.* En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teachig and learning. New York: Macmillan.
[3] D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial. Magisterio-Secretariato Europeo per le Publicazioni Scientifque.
[4] Fiorentini, D. (1989). *Tendencias temáticas e metodológicas da pesquisa em educacao matemática.* En: Encontro Pauliata de Edugacáo Matematica 1, Campinas, SBEM, 186–193.
[5] Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2010). *Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos.* Campinas: Autores Associados. Traducción al Español de Alfonso Jiménez Espinosa. ISBN: 9788574962535.
[6] Kilpatrick, J. (1994). *Investigación en Educación Matemática: su historia e algunos temas de actualidad.* En: Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, E (Ed.). Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica & Una Empresa Docente, 1–18.
[7] Kilpatrick, J. (1992). *A History of Research in Mathematics Education.* En Grouws, D. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 3–38. New York: Simon & Schuster Macmillan.
[8] Kilpatrick, J., y Sierpinska, A. (1993). *What is research in mathematics education and what are its results?* Recherches en Didactique des Mathématiques, 13(1.2), 191–204.
[9] Niss, M. (1998). *Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education.* Roskilde: IMFUFA.
[10] Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). *La Didáctica de la Matemática.* En L. Rico & D. Madrid (Eds.), Fundamentos didácticos de las áreas curriculares, 351–406. Madrid: Editorial Síntesis.
[11] Schoenfeld, A. H. (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education.* Notices of the AMS, 47(6), 641–649. Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática. Traducción de Juan. D. Godino.
[12] Villarreal, M. y Esteley, C. (2002). *Una caracterización de la Educación Matemática en Argentina.* Revista de Educación Matemática. **17:2**, 18–43.
[13] Waldegg, G. (1998). *La Educación Matemática ¿Una Disciplina Científica?.* Colección Pedagógica Universitaria **29**, 13–44.

Bibliografía complementaria

[14] Artigue, M. (1994). *Una introducción a la Didáctica de la Matemática.* En: Programa de Transformación de la Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.
[15] Artigue, M. (2004). *Problemas y desafíos en Educación Matemática. ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática Para afrontarlos?.* Educación Matemática, **16**:003. Santillana, México, ISSN 1665 5826.
[16] Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Leung, F. (Eds.) (2003). *Second International handbook of mathematics education.* Roterdam: Kluwer.
[17] Blanco, L. (2011). *La Investigación en Educación Matemática.* Educatio Siglo XXI, 29 (1), 109–128.

[18] Borba, M. C., y Villarreal, M. E. (2005). *Methodology: an interface between epistemology and procedures.* En Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. New York: Springer 2.

[19] Borba, M. C.; Araujo, J. L. (Comp.) (2008). *Investigación Cualitativa en Educación Matemática.* México: Limusa, Cideccyt, 110p. (p. 95–107). ISBN: 978968187316–8.

[20] Castro, E. y Castro, E. (2001). *El Proceso De Investigación. Un Ejemplo.* En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.) Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada.

[21] Dubinsky, E. (2000). *De la investigación en Matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.3 N 001, 47–70. ISSN 1665–2436.

[22] Freudenthal, H. (1981). *Major problems of mathematics education.* Educational Studies in Mathematics, 12(2), 133–150.

[23] Grouws, D. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: MacMillan.

[24] Gutiérrez, A. (1999). *La investigación en Didáctica de las Matemáticas.* En Gutiérrez, A. (Ed.) Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática. Editorial Síntesis. Madrid. 149–194.

[25] Gutiérrez, A., y Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future.* Rotterdam: Sense Publishers.

[26] Kilpatrick, J. (1998). *Investigación en Educación Matemática: su historia y algunos temas de actualidad.* En Educación Matemática. Jeremy Kilpatrick, Pedro Gómez y Luis Rico (Editores). Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. en México. ISBN 970–625–107–3.

[27] Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra M. (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Colección Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis. Madrid. España.

[28] Puig, L. (1996). *La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora.* En L. Puig, & J. Calderón (Eds.), Investigación y didáctica de las matemáticas, (pp. 63–75). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

[29] Rico Romero, L. (1999). *Educación Matemática, Investigación y Calidad.* En da Ponte, J. P.; Serrazina, L. (Eds.), Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália, 303–312. Santarem: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educação.

[30] Rico, L. (1995). *Didáctica de la Matemática como campo de problemas.* En E. Repetto, & G. Marrero (Eds.), Estrategias de intervención en el aula desde la LOGSE, 551–579. Las Palmas: ICEPSS Editores.

[31] Rico, L., & Sierra, M. (1991). *La comunidad de educadores matemáticos.* En A. Gutiérrez (Ed.), Área de conocimiento Didáctica de la Matemática, 11–58. Madrid: Síntesis.

[32] Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). *El área de conocimiento Didáctica de la Matemática.* Revista de Educación, 328 35–58.

[33] Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics Education as research domain: A search for identity.* An ICMI Study. Roterdamm: Kluwer Academic Publishers.

[34] Sierra, M. (2011). *Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión.* Educatio Siglo XXI 29(2), 173–198.

[35] Skovsmose, O.y Borba, M. C. (2004). *Research Methodology and Critical Mathematics Education.* En Valero, P. & Zevenbergen, (Eds.) Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education Mathematics Education Library, Volume 35, 207–226. Springer.

Departamento de Matemática — Centro Regional Bariloche — Universidad Nacional del Comahue, Argentina

E-mail address: virginia.montoro@crub.uncoma.edu.ar

SECCIONES CÓNICAS: ¿Y ESTO,... PARA QUÉ ME SIRVE?

GABRIEL SOTO

Resumen. La matemática es el producto de la actividad humana puesto que muchos de los resultados matemáticos dependen del contexto socio-cultural en el que se desarrollan. En vista de la actual constante legitimización social a la cual la matemática, en particular, y el conocimiento en general es sometida por los alumnos en las aulas [38], a través de la pregunta *¿y esto para qué me sirve?*, es evidente que el docente tenga respuestas satisfactorias que promuevan la motivación por aprender. En este taller presentamos una propuesta para introducir las secciones cónicas a partir del interrogante *¿Se puede cocinar con las antenas de DirecTV?*. El uso de software de geometría dinámica GeoGebra[1], en esta propuesta, surge como herramienta indispensable para el desarrollo de la misma, transformándose esta actividad de enseñanza en un ejemplo de cómo las nuevas tecnologías se ponen al servicio de la adquisición de conocimientos matemáticos.

Índice

Introducción 69
1. Diseño de la propuesta 71
2. Desarrollo de las actividades 73
2.1. ¿Mediatrices? 74
2.2. ¿Circunferencias? 75
2.3. ¡Por fin aparecieron las cónicas! 76
2.4. Coordenadas polares 79
2.5. Definiciones alternativas para las elipses e hipérbolas 80
2.6. Al final, ¿se puede cocinar con las antenas de DirecTV? 82
2.7. Sobre hipérbolas y telescopios 83
2.8. ¿Y las coordenadas? 84
3. Problemas 86
4. Conclusiones 89
Referencias 90

Introducción

La matemática es el producto de la actividad humana. Basta considerar su desarrollo histórico para comprobar que muchos de los desarrollos en el pensamiento matemático

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primario 97Axx, 97Gxx Secundario 51N20, 97U30, 97M50.

Este trabajo ha sido financiado, en parte, por el Programa de Extensión Universitaria de la Secretaría de Políticas Universitarias RES SPU 1075/11. Quiero agradecer a María de Gracia Mendonça, Bernardo Marques, Cintia Negrette y Mónica González por las invalorables discusiones alrededor de este trabajo. También quiero agradecer a Eliana Gómez, Nelson Villagra, Lisbania Tenorio, Natalia Castillo y a los alumnos del curso (Des)-haciendo matemática 2011 y 2012, con quienes sigo aprendiendo.

se han producido a partir de problemas socialmente significativos[6, 12]. Muchas de las teorías sobre educación matemática conciben a la matemática como una construcción social que surge a partir de necesidades sociales[1] concretas [8, 10, 55, 56, 15, 34, 23]. A pesar de la diversidad de concepciones acerca de la educación matemática, la mayoría considera la resolución de problemas como una actividad inherente al quehacer matemático y debe desarrollarse en el aula.

Si bien la definición de *problema* tiene diferentes significados según de qué teoría provenga dicha definición, todos ellos tienen características comunes: una meta, un obstáculo que no permite avizorar la solución, al menos en lo inmediato, y un sujeto *motivado por resolver dicho problema* [21]. La motivación, que debe también considerar la obligación a resolver problemas que muchos estudiantes perciben al transitar el sistema educativo formal, debe ser tenida en cuenta por el docente al momento de pensar una situación para que sus alumnos la resuelvan [20]. Esta motivación para resolver los problemas ofrecidos por el profesor condiciona la validez del contrato didáctico establecido en el aula [8, 22]. Este condicionamiento es fundamental considerando que las situaciones elegidas por el docente como problemas para que alumnos resuelvan en realidad representan *potenciales problemas*, como lo define Colombano et al (2009)[11]

> el término potencial problema lo utilizamos para referirnos a las situaciones en las que se puede anticipar, a partir del conocimiento de ciertas características de los estudiantes que enfrentarán dichas situaciones, la presencia de los elementos objetivos y subjetivos que se requieren para que esas situaciones sean problemas para ellos. El asunto es que, si bien se los puede conocer, es imposible tener un conocimiento acabado de lo que ocurre en su estructura cognitiva, y eso implica que sólo estaremos en condiciones de decidir si las situaciones constituyen verdaderos problemas o no, una vez que los estudiantes se enfrenten a ellas... . Aunque los docentes quieran utilizar problemas en el aula, al momento del diseño, sus actividades serán potenciales problemas, y solo cuando el estudiante se enfrente a ellos los docentes sabrán con certeza si resultaron problema para sus alumnos (o algunos de ellos) o no ... (pág. 4).

El docente debe diseñar entonces, estrategias que permitan asegurar *a priori*, que la mayoría de sus estudiantes acepten de buen modo el desafío: debe diseñar buenas estrategias de marketing para vender sus problemas. La idea de pensar a la matemática como una disciplina socialmente significativa es una fuente inagotable de recursos para la elaboración de dichas estrategias [46, 33, 58]. Esto es extremadamente importante actualmente pues el conocimiento ha dejado de ser considerado como un camino hacia la verdad absoluta [29], y el sistema educativo formal ha dejado de ser el camino hacia el bienestar individual[38]: la pregunta constante de los alumnos *¿y esto para qué me sirve?* es una muestra de esta situación. Estas estrategias tienen la potencialidad de generar problemas que pueden despertar el interés y representar un desafío para los alumnos. Así se fortalece la práctica profesional docente [41, 53] y el aprendizaje de la matemática[43].

La búsqueda de motivaciones socialmente significativas a los conceptos matemáticos a enseñar no siempre es posible pues muchas veces las motivaciones que derivaron en avances significativos en la matemática no siempre respondieron a problemas socialmente significativos: tal es el caso de las geometrías no euclidianas a mediados del S

[1]La concepción de *necesidad social* es muy amplia pues incluye por ejemplo, el interés común de grupos de matemáticos por resolver problemas inherentemente matemáticos [7].

XIX [6, 39, 30] y su aplicación como modelo geométrico de la teoría especial de la relatividad de Einstein[2]. Sin embargo, existen muchos conceptos matemáticos, como la gran mayoría de los contenidos matemáticos de los diseños curriculares de los niveles educativos preuniversitarios, tienen un correlato social [40]; esto facilita la posibilidad de encontrar situaciones socialmente significativas que dieron origen al desarrollo de dichos conocimientos matemáticos. Un ejemplo de estos contenidos son ***las secciones cónicas***. Sus usos son ubicuos y se remontan al siglo V AC: los problemas de duplicar el cubo, cuadrar el círculo y trisecar un ángulo con regla y compás [6], la construcción de telescopios astronómicos de Cassegrain[3], el diseño de los faros para automóviles, diseños arquitectónicos como la Torre de Kobe en Japón[4] y el Tycho Brahe Planetarium en Copenhage[5]), el sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) de navegación marítima[6], el uso de antenas parabólicas para transmisiones satelitales, el diseño de motores stirlings solares, el diseño y uso de cocinas solares en lugares donde el recurso solar es abundante[7], son ejemplos de cómo las secciones cónicas han permitido resolver problemas de contexto social.

La enseñanza de las secciones cónicas sigue presente en los diseños curriculares de la escuela secundaria. Un análisis exhaustivo de los libros de textos escolares actuales, muestra que este contenido es presentado como un *objeto algebraico*, a partir del cual podemos obtener una presentación geométrica en un sistema de ejes cartesianos. Uno de los conflictos cognitivos que aparecen inmediatamente en el estudio algebraico de las cónicas es que cuando se las representa gráficamente es la noción de foco y directriz de una cónica. Ahora bien, *¿dónde aparecen el/los focos de la cónica en su representación algebraica?, ¿dónde la ponemos en la ecuación?*. Otra de las representaciones clásicas es de definir las secciones cónicas como intersecciones del cono doble con planos con diferentes inclinaciones, como lo muestra la Figura 1. En esta representación tampoco es posible saber dónde se ubican el foco y la directriz de una cónica dada. Entonces, es muy probable que los alumnos pregunten *¿para qué necesitamos el foco y la directriz?*

Restringir el estudio de las cónicas a estas representaciones limita su campo de referencia [31]. Como dice [32] pag. 17 *Un objeto matemático, tales como los números o las funciones, no existen independientemente de la totalidad de sus posibles representaciones. Sin embargo, tampoco no puede ser confundido con cualquiera de sus posibles representaciones.* Esta diversidad de representaciones de un objeto en diferentes contextos permiten distinguir entre el razonamiento matemático abstracto y la manipulación simbólica descontextualizada [19]; estas diferentes representaciones simbólicas tienen el mismo rol en la actividad mental que las herramientas materiales en el trabajo [57] (pp. 139-140). Por lo tanto es fundamental que los docentes tengan en cuenta la evolución de los sistemas matemáticos de representación como una forma de desarrollar una apropiada perspectiva epistemológica de la educación matemática [13, 31].

1. Diseño de la propuesta

La intención de este artículo está lejos de ser una presentación matemáticamente rigurosa y formal de las secciones cónicas sino que tiene el solo objetivo de compartir una experiencia, que analizada desde diferentes teorías de educación matemática tiene

[2]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_special_relativity`.
[3]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Cassegrain_reflector`
[4]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Kobe_Port_Tower`
[5]Ver `http://www.tycho.dk/in_english/`
[6]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/LORAN`
[7]Ver `http://www.solarcookers.org/index.html`

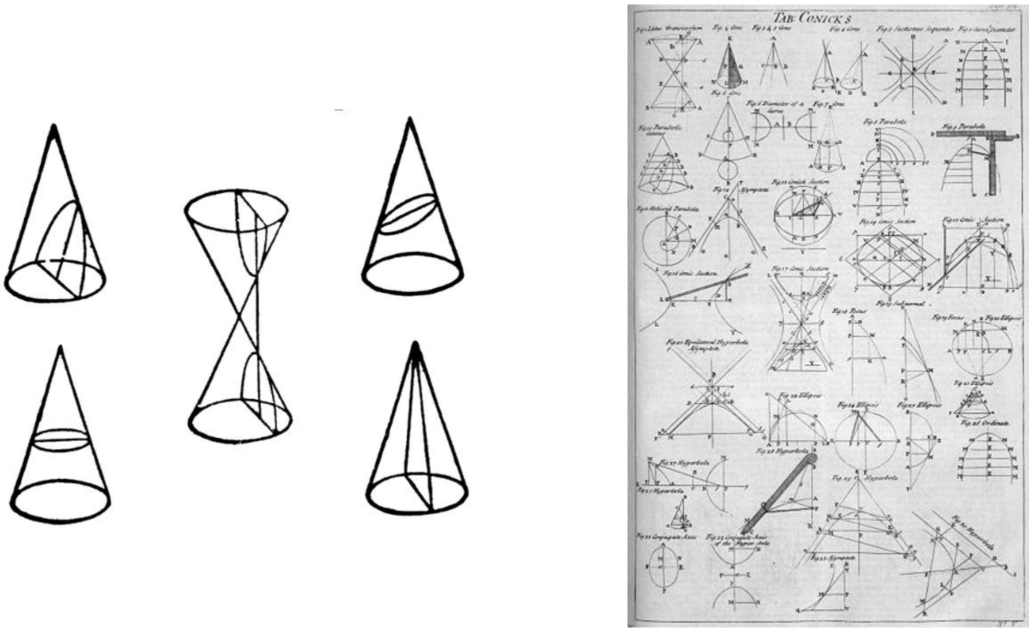


FIGURA 1. Panel izquierdo: Diferentes cortes de un cono que determinan las secciones cónicas. Panel derecho: Tabla de cónicas extraídas de Cyclopaedia (1728).

la potencialidad de promover la motivación de los alumnos por aprender matemática, el crecimiento cognitivo de los estudiantes y la de estimular la generación de propuestas socialmente atractivas que permitan a priori, asegurar que la mayoría de los estudiantes van a motivarse a resolver estos problemas. La mayoría de los resultados matemáticos presentados en este libro quedan a cargo del lector o bien puede recurrir a los libros clásicos de geometría [37, 52, 30, 25, 27].

Esta actividad fue concebida en el marco de la ingeniería didáctica [1], donde a partir del interrogante

¿Se puede cocinar con las antenas de DirecTV?

se generó un trabajo de *ingeniería reversa* para determinar diferentes rutas o estrategias de recursos y herramientas que permitan construir un desarrollo adecuado de la solución del problema. Esto permitió determinar el punto de partida de la ruta hacia la solución a partir del cual se puede construir la misma [16] (pag. 40). Esta propuesta es un ejemplo de cómo presentar la evolución de conceptos matemáticos a través de la intuición y la heurística, y no a través del formalismos [26]. Es una manera de revertir la forma en que se presentan los conocimientos matemáticos: descontextualizados, destemporalizados y despersonalizados; esto es *los saberes matemáticos se presentan al revés*. Esta forma de presentación es necesaria para la validación de la comunidad científica para asegurase que no haya ambigüedades e imprecisiones. Esto es un punto importante de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau [8], ya que para que los alumnos puedan emprender el camino hacia crecimiento cognitivo es necesario que el docente recontextualice, retemporalice y repersonalice tales saberes matemáticos para permitir a sus alumnos que redescontextualicen, redestemporalicen y redespersonalicen tales saberes matemático; esto es el docente tiene que conocer la matemática del derecho (personalizada, contextualizada y temporalizada) y del revés (descontextualizada, despersonalizada y destemporalizada). Este diseño de propuesta responde a las *praxeologías matemáticas* de Chevallard [10], pues se han identificado qué tareas, tecnologías y teorías surgirán para arribar a la respuesta del problema. Este diseño también se puede adaptar a la metodología de *modelización matemática* [4, 5] como así también con el desarrollo de los espacios curriculares en la formación docente *Research and Study Cases* que hace mención [3].

En vista de la necesidad de poder responder al interrogante propuesto, se hace necesario presentar a las cónicas de manera que en las imágenes conceptuales o definiciones conceptuales [50] aparezcan las nociones de foco-directriz de una cónica. Newton[8] utilizó la definición de cónica a partir de su foco y directriz para demostrar que las órbitas de los planetas alrededor del sol eran elípticas[9]. Esta forma de definir las cónicas, si bien ausente de la mayoría de los escritos griegos, aparentemente fue utilizada por Apolonio de Perga, considerado como el fundador de la astronomía griega [10].

2. Desarrollo de las actividades

A continuación se presenta la secuencia de actividades que permite obtener la definición geométrica de las cónicas con el objetivo de responder a la pregunta ¿Se puede cocinar con las antenas de DirecTV?. Esta secuencia permite naturalmente el uso del software de geometría dinámica GeoGebra como herramienta útil para obtener los lugares geométricos correspondientes como reemplazo de la regla y el compás[11], como así también para establecer conjeturas a través de la utilización de la función Activa Rastro[2, 18] en GeoGebra[12]

A lo largo de la presentación de la secuencia de actividades, van a aparecer muchos ¿por qué? o resultados matemáticos cuya demostración quedan a cargo del lector. Esto ocurre naturalmente durante el quehacer matemático, y por tanto debería surgir con la misma naturalidad en el aula. Ahora bien, durante los procesos de aprendizaje, la validación, asociada a la pregunta ¿por qué?, tiene un significado diferente para el docente y el alumno. El docente necesariamente tiene que conocer las razones que sustentan que un resultado matemático sea cierto a través de la prueba formal y de los contraejemplos. Esto implica que él mismo haya tenido que construir dicho conocimiento a través de pruebas y contraejemplos. Respecto a la validación de los alumnos, entendemos la misma como el proceso de socialización y aceptación del conocimiento por parte de sus pares. En este sentido tomamos la definición de validación como en [17]

> Un sujeto en situación de aprendizaje valida un conocimiento matemático si es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícita la asignación de sentidos de los objetos matemáticos que manipula y ésta debe corresponderse con significados matemáticos aceptados por la Institución Matemática.(pag. 7)

[8]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton`

[9]Para obtener los parámetros de los órbitas elípticas de los planteas de nuestro sistema solar, ver `http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/planet_table_ratio.html`

[10]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Apollonius_of_Perga`.

[11]En otras experiencias desarrollada por el autor, se ha verificado que el uso del GeoGebra como herramienta que reemplaza a la regla y el compás permite a los alumnos rápidamente subsanar los conflictos cognitivos inherentes a la manipulación de material concreto, falta de precisión al dibujar, limitaciones en la motricidad fina [47].

[12]Para obtener los archivos de GeoGebra que permiten representar la secuencia de actividades, escribir por correo electrónico al autor.

Si bien es cierto que los conceptos matemáticos validados por los alumnos debe corresponderse con el significado que tiene para la institución matemática, las formas de validación tienen que tener coherencia con el nivel de maduración cognitiva de los mismos[51]. Es posible entonces, que el profesor deba aceptar validaciones precisas basadas por ejemplo, en la heurística y la intuición sin llegar a ser formales desde el punto de vista matemático. Si en algún momento ocurre una validación de un conocimiento que no guarda coherencia con el sentido matemático del mismo, ***el docente debe devolver el problema*** planteando nuevos interrogantes que lleven a los alumnos a posiblemente reformular y revalidar dichos conocimientos [8]. Por lo tanto, cada vez que aparece una pregunta ¿por qué? si es un docente el que tiene que responderla, tiene que hacerlo a través de argumentos no sólo heurísticos e intuitivos sino además, con argumentaciones matemáticamente aceptables. Si es el alumno quien tiene que responder, ***y extremadamente importante que lo haga***, el docente tiene que ser capaz de aceptar validaciones alternativas si bien precisas sean acordes al desarrollo intelectual del mismo.

2.1. ¿Mediatrices? Esta actividad tiene como eje el siguiente problema.

> Determinar el conjunto de puntos P que están a la misma distancia de dos puntos fijos A y B.

Este problema equivale a determinar la intersección de dos circunferencias del mismo radio con centros en A y B respectivamente, como lo muestra la Figura 2. Para representar este problema en GeoGebra, dado que el radio de las circunferencias es variable, podemos usar la función ***deslizador*** para definir al radio de dichas circunferencias como parámetro. Así, queremos encontrar los puntos P tales que las longitudes de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ sean iguales. Si interpretamos la longitud de los segmentos en términos de distancia, la longitud del segmento $\overline{AP} = dist(A, P)$. En símbolos

$$dist(P, A) = dist(P, B) \tag{2.1}$$

Dicho lugar de puntos resulta en una recta, denominada *mediatriz del segmento* $\overline{AB}$, que tiene como propiedades

Proposición 2.1. *La mediatriz de un segmento* $\overline{AB}$ *es una recta* l *tal que*

- *ser perpendicular al segmento* $\overline{AB}$*;*
- *intersecta a dicho segmento en su punto medio;*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. □

Pregunta 2.2. En la representación del problema de la mediatriz en Geogebra, ¿cuál es el mínimo valor del parámetro r para que las circunferencias se intersecten?

Hay que notar que la ecuación (2.1) se puede reescribir como

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, B)} = 1$$

en otras palabras, la mediatriz surge como lugar geométrico a partir de un problema de segmentos congruentes, o proporcionales cuya razón de proporcionalidad es 1. Esto nos lleva a la segunda actividad.

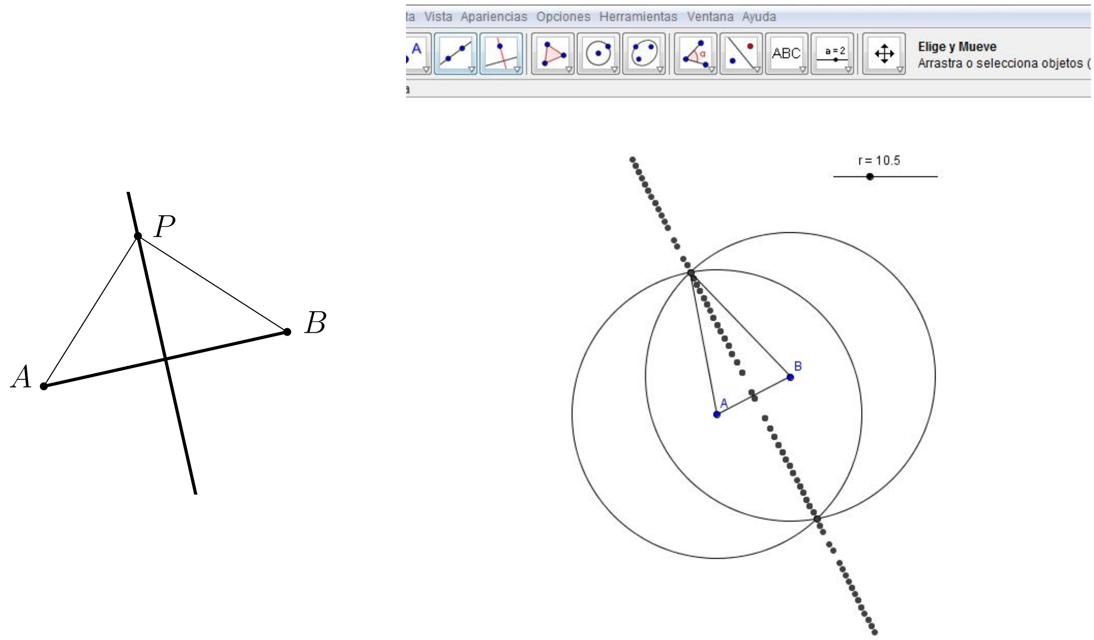


Figura 2. Panel izquierdo: el punto P equidista de A y B. El lugar geométrico de todos los puntos P que equidistan de A y B es una recta y se denomina ***mediatriz*** del segmento $\overline{AB}$. Panel derecho: captura gráfica de la representación del problema de la mediatriz en Geogebra. El deslizador r representa el radio de las circunferencias cuya intersección se encuentra sobre la mediatriz.

2.2. ¿Circunferencias? Esta actividad está centrada en el siguiente problema

Determinar el conjunto de puntos P tales que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ sean proporcionales con razón de proporción k.

En símbolos, tenemos que

$$\frac{dist(P,A)}{dist(P,B)} = k \tag{2.3}$$

donde $k \neq 1$, pues el caso $k = 1$ ya está resuelto. El lugar de puntos resulta una circunferencia como lo muestra la Figura 3 y este resultado es válido para cualquier k distinto de 1. La representación de este problema en Geogebra requiere de un nuevo prámetro k, además del radio de las circunferencias, como muestra el panel derecho de la Figura 3. Para esta actividad, el uso de la función ***Activa Rastro*** en GeoGebra es importante al momento de elaborar la conjetura.

Durante esta actividad se pueden analizar varios problemas de la geometría clásica tales como:

Pregunta 2.4. Dada una razón de proporcionalidad $k \neq 1$, ¿cómo dibujar segmentos proporcionales con regla y compás?

Pregunta 2.5. ¿Dónde se encuentra en centro de la circunferencia que resulta como lugar geométrico de la ecuación (2.3).

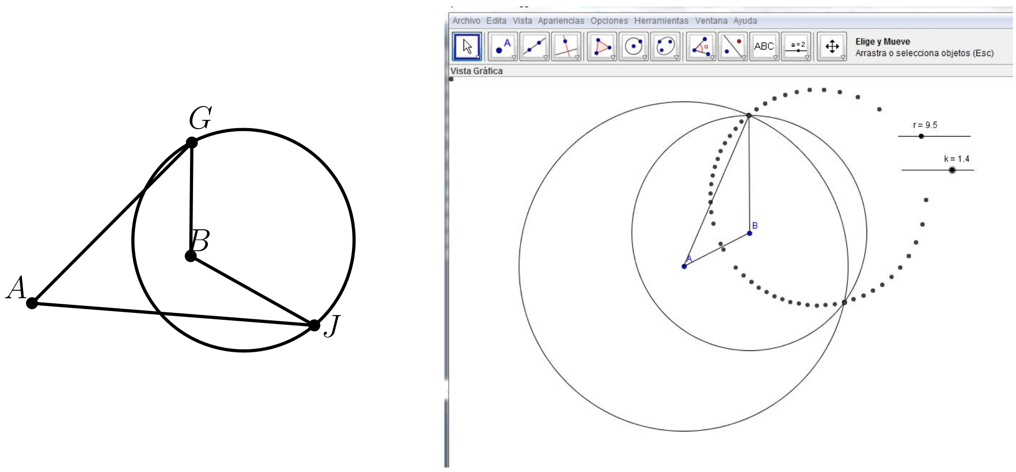


FIGURA 3. Panel izquierdo: los puntos G y J satisfacen la ecuación 2.3 y yacen sobre una circunferencia. Panel derecho: captura gráfica de la representación del problema de la circunferencia en Geogebra. El deslizador r representa el radio de las circunferencias cuya intersección se encuentra sobre la circunferencia y el deslizador k representa la razón de proporcionalidad.

Pregunta 2.6. Dada un número positivo k, ¿es posible dividir un segmento en dos segmentos proporcionales de razón k? En caso de serlo, ¿cómo se hace?

Observación 2.2. La prueba que el lugar geométrico representado por la ecuación (2.3) es una circunferencia resulta fácil, si uno utiliza coordenadas. Dado que hasta aquí tenemos sólo como sustento la geometría sintética, un ejercicio muy interesante es demostrar este hecho pero sin coordenadas.

Así, el problema dado por la ecuación (2.3) quedó completamente resuelto.

- Si $k = 1$, el lugar geométrico de puntos resulta una recta.
- Si $k \neq 1$, el lugar geométrico de puntos resulta una circunferencia.

Ahora, ¿qué hacemos? Para poder avanzar tenemos que cambiar el problema. Esto ocurre rutinariamente en el desarrollo matemática: hay que refutar los resultados obtenidos o resolver posibles paradojas que resulten de aplicar la teoría en otros contextos [26, 24, 36]. De la ecuación (2.3), los datos del problema resultan los puntos A y B, y la razón de proporcionalidad k. En vista de la conclusiones, para cambiar el problema tenemos que, de manera ***casi natural*** cambiar uno de los puntos fijos por ejemplo, por una recta.

2.3. ¡Por fin aparecieron las cónicas! El eje de esta actividad es el siguiente problema

Determinar el conjunto de puntos P tales que la distancia entre un punto fijo F y una recta fija d sean proporcionales.

Esto es, queremos determinar el lugar geométrico de puntos P tales que

$$\frac{dist(P, F)}{dist(P, d)} = e \tag{2.7}$$

A la recta d la llamamos ***directriz***, al punto fijo F lo llamamos ***foco*** y a la constante de proporcionalidad e la llamamos ***eccentricidad***.

Pregunta 2.8. ¿Por qué el cambio de notación para esta actividad, respecto de las anteriores?

Para poder atacar este problema, es conveniente subdividirlo en varios subproblemas, según el valor de e que por hipótesis tiene que ser nonegativo, ¿por qué?

Pregunta 2.9. ¿Por qué las secciones cónicas reciben los nombres de parábolas, elipses e hipérbolas?

2.3.1. $e = 0$. Si $e = 0$ entonces el lugar de puntos es el punto F, ¿por qué?

2.3.2. *Parábola* - $e = 1$. La ecuación (2.7) representa el lugar de puntos que muestra la Figura 4. Dicho lugar geométrico se denomina ***parábola***.

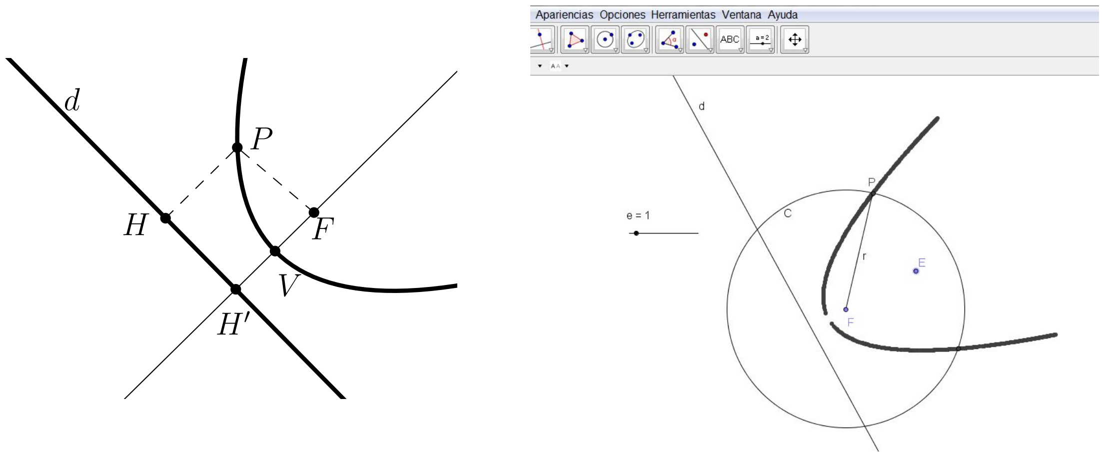


FIGURA 4. Panel izquierdo: gráfica de la parábola cuya directriz es la recta d y cuyo foco es F. El punto P satisface $\overline{PF} = \overline{PH}$. La recta $\overleftrightarrow{FH'}$ es el eje focal de la parábola. El punto V se denomina vértice de la parábola y se encuentra sobre el eje focal. Panel derecho: representación de la ecuación (2.7) en Geogebra. Aquí el deslizador r representa la distancia entre el punto P y el foco F, y el deslizador e representa la eccentricidad, que en este caso es 1.

El ***eje focal*** de la parábola es la recta perpendicular a su directriz d que contiene al foco F, como lo muestra la Figura 4, que además resulta ser el eje de simetría de la parábola, ¿por qué?. El ***vértice de una parábola*** V corresponde a la intersección de la parábola con el eje focal. Dicho punto resulta ser el punto medio del segmento $\overline{FH'}$, ¿por qué?, como lo muestra el panel izquierdo de la Figura 4.

Pregunta 2.10. ¿Por qué el lugar geométrico para $e = 1$ resulta ser una curva abierta?

2.3.3. *Elipse* - $e < 1$. En este caso, la ecuación (2.7) representa una ***elipse*** como el panel izquierdo de la Figura 5. Al igual que la parábola, el *eje focal de la elipse* es la recta perpendicular a la directriz d que contiene al foco F. El vértice de la elipse V se encuentra sobre el eje focal.

Pregunta 2.11. ¿Por qué si $e < 1$, el lugar geométrico resultante es una curva cerrada?

AL ser la elipse una curva cerrada, definamos V' como el otro vértice de la elipse, como lo muestra el panel izquierdo de la Figura 5. Si consideramos el segmento $\overline{VV'}$ entonces la mediatriz de dicho segmento es un eje de simetría de la elipse. Por tanto, podemos definir otro foco F' y otra directriz d' para la elipse, como se muestra en el panel izquierdo de la Figura 5.

Pregunta 2.12. A partir de la observación que la elipse es una curva cerrada, es posible determinar la distancia entre focos de la elipse como la longitud del segmento $\overline{FF'}$ y la distancia entre los vértices de una elipse como la longitud del segmento $\overline{VV'}$. Estos parámetros, ¿determinan unívocamente una elispe?

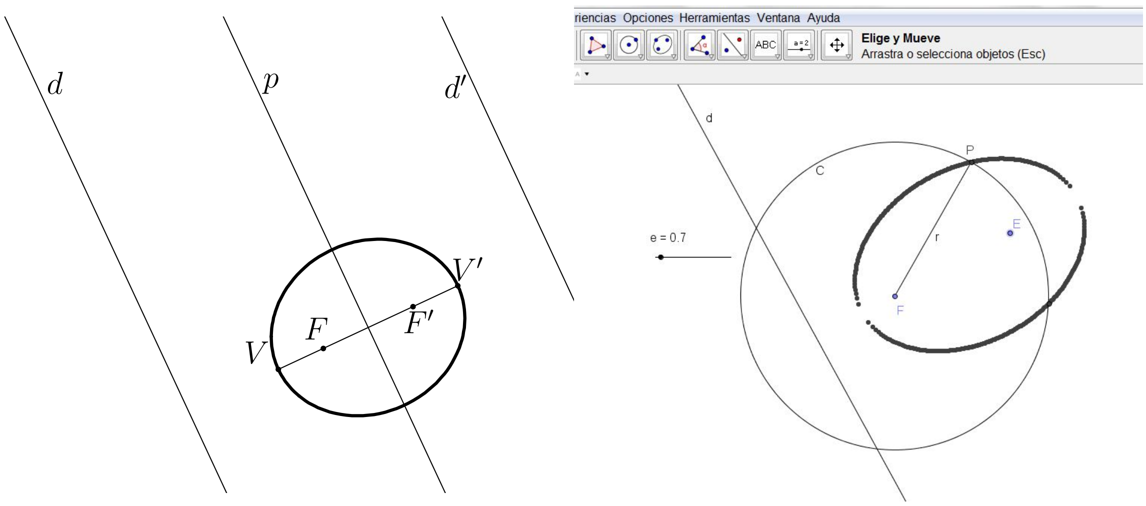


Figura 5. Panel izquierdo: Gráfica de la elipse cuya directriz es la recta d y cuyo foco es F. Vértices (V, V') y focos (F, F') de la elipse a partir del eje de simetría p, perpendicular al eje focal. Panel derecho: representación de la ecuación (2.7) para $e = 0,7$. La circunferencia C determina $dist(P, F)$.

2.3.4. Hipérbola: $e > 1$. En este caso, el lugar de puntos se denomina ***hipérbola*** representada en el panel izquierdo de la Figura 6. El eje focal de la hipérbola es la recta perpendicular a la directriz que contiene al foco F. La representación de la hipérbola en Geogebra, como lo muestra el panel derecho de la Figura 6, sugiere que como en el caso de la elipse, es posible determinar el otro foco F' de la hipérbola sobre su eje focal.

Pregunta 2.13. ¿Por qué el lugar geométrico determinado por la ecuación (2.7) resulta, para $e > 1$ una curva abierta?

Pregunta 2.14. ¿Por qué el otro foco F' de una hipérbola está en la región opuesta, determinada por la directriz d, a la que pertenece el foco F?

Pregunta 2.15. ¿Por qué la directriz d de una hipérbola, también representa un eje de simetría para la hipérbola?

Habiendo diferenciado los lugares geométricos en términos de la eccentricidad, es conveniente obtener descripciones cuantitativas de dichos lugares geométricos. Para ello, es conveniente introducir coordenadas, como se muestra en la próxima actividad.

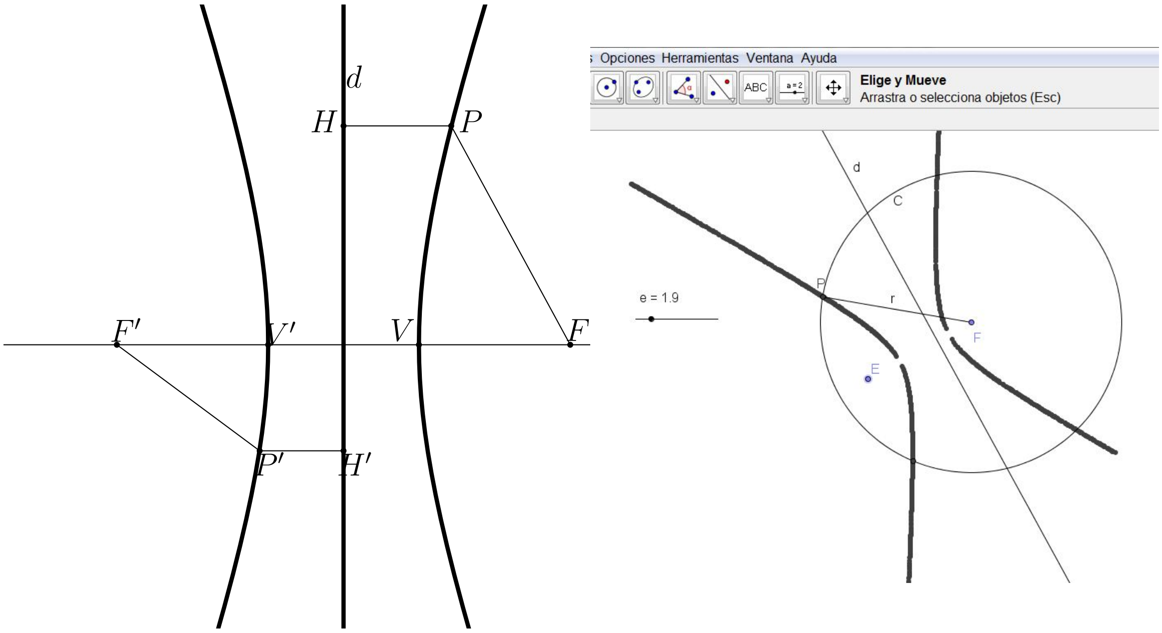


Figura 6. Panel izquierdo: gráfica de la hipérbola cuya directriz es la recta d y cuyo foco es F. Los puntos P y P' satisfacen la ecuación $\dfrac{dist(P,F)}{dist(P,d)} = \dfrac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \dfrac{dist(P',F)}{dist(P',d)} = \dfrac{\overline{P'F'}}{\overline{P'H'}} = e$, con la eccentricidad $e > 1$. Panel derecho: representación de una hipérbola en Geogebra, donde C representa $dist(P,F)$ y el deslizador $e = 1{,}9$.

2.4. Coordenadas polares. En esta actividad, el problema a resolver es el siguiente

Determinar las distancias entre los focos y los vértices de la elipse.

Para calcular las longitudes de los segmentos $\overline{FF'}$ y $\overline{VV'}$, como en el panel izquierdo de la Figura 5, es necesario representar la elipse respecto a algún sistema de referencias. Para ello utilizaremos ***coordenadas polares***, como se muestra en el panel derecho de la Figura 7. En este caso, vamos a tomar como centro de coordenadas el foco F de la elipse, el eje focal se utilizará como referencia para medir ángulos θ.

Habiendo fijado las referencias, para la elipse, además de la eccentricidad

$$e = \frac{d(P,F)}{dist(P,d)}$$

podemos definir el parámetro p que representa la longitud del segmento $\overline{HF}$, que representa la distancia entre el foco F y la directriz d

$$p = dist(P,d) = \overline{HF}$$

Entonces, para determinar un punto P sobre la elipse basta determinar la longitud del segmento $r = \overline{FP}$ y el ángulo θ. Si reescribimos la definición de P sobre la elipse en función de r y θ tenemos que

Proposición 2.3 (Representación de la elipse en coordenadas polares)**.** *Para la elipse de foco F y directriz d, se tiene que*

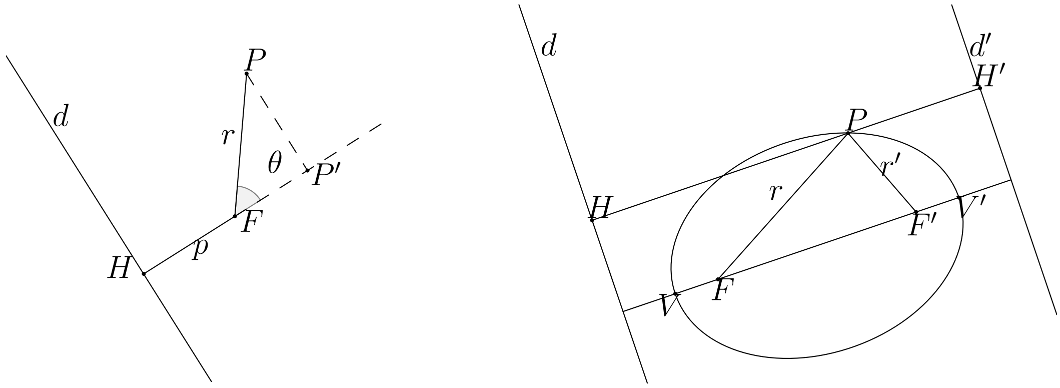


Figura 7. Panel izquierdo: representación de la elispe en coordenadas polares. Panel derecho: elipse de focos F y F' con eccentricidad e y directrices d y d'. Aquí $r + r' = 2a$

$$r = \frac{pe}{1 - e\cos\theta}. \tag{2.16}$$

donde p es la distancia del foco F a la directriz d, y θ es el ángulo que forma el segmento $\overline{FP}$ con el eje focal de la elipse.

Corolario 2.4. *Para la elipse de parámetros e y p se tiene que*

1. $\overline{FV'} = \dfrac{pe}{1-e}$
2. $\overline{FV} = \dfrac{pe}{1+e}$
3. $\overline{VV'} = \overline{VF} + \overline{FV'} = \dfrac{pe}{1+e} + \dfrac{pe}{1-e} = \dfrac{2ep}{1-e^2} = 2\dfrac{ep}{1-e^2}$.
4. *Si la distancia entre los vértices de una elipse se denote por $2a$, entonces*

$$\overline{FF'} = \frac{2e^2p}{1-e^2} = 2\frac{e^2p}{1-e^2} = 2c$$

Si $\theta = \pi/2$ en la ecuación (2.16), obtenemos la longitud del ***latus rectum*** de la elipse, que resulta ser el segmento perpendicular al eje focal de la elipse, que contiene al foco F y cuyos extremos se encuentran sobre la elipse.

Pregunta 2.17. ¿Por qué la longitud del latus rectum de una elipse de parámetros p y e es pe?

La próxima pregunta permite a los alumnos repetir los argumentos anteriores pero con diferentes parámetros, y así poder evaluar el grado de aprendizaje de los alumnos utilizando diferentes instrumentos de evaluación[44, 45].

Pregunta 2.18. A partir de la ecuación (2.16), determinar la distancia entre focos, vértices y latus rectum de una hipérbola de parámetros e y p

Pregunta 2.19. ¿Por qué, a partir de la ecuación (2.16) es posible determinar que la elispe es una curva cerrada, mientras que la hipérbola y la parábola son curvas abiertas?

2.5. Definiciones alternativas para las elipses e hipérbolas. La pregunta a responder en esta actividad es la siguiente

Obtener el método del jardinero para construir canteros elípticos.

En vista del método que los alumnos pueden encontrar al indagar sobre esto fuera del aula, este problema permite introducir una definición alternativa para la elipse, teniendo en cuenta sólo los dos focos de la misma, como lo muestra el panel derecho de la Figura 7. Si la elipse tiene eccentricidad e y la distancia del foco F a la directriz es p entonces tenemos que

$$\frac{r}{\overline{PH}} = \frac{r'}{\overline{PH'}} = e$$

de donde

$$r + r' = e(\overline{PH} + \overline{PH'}) = e\overline{HH'}.$$

Ahora bien, de lo calculado anteriormente se tiene que $r + r' = 2p + 2c$ por lo tanto

$$r + r' = 2(p + c) = 2a.$$

Esto es, para cualquier punto P sobre la elipse se tiene que la suma de las distancias del punto P a los dos focos es constante e igual a $2a$. Esto lo resumimos en la siguiente definición alternativa de elipse.

Definición 2.5. Sean F y F' dos puntos cualesquiera y a un número positivo tal que $a > \overline{FF'}$. El lugar de puntos P tales que la suma de las distancias a F y F' es igual a $2a$ es una elipse. En símbolos

$$dist(P, F) + dist(P, F') = 2a$$

Para la hipérbola con focos F y F', y directriz d con parámetros $e > 1$ y p, se puede obtener una definición equivalente a la de foco y directriz en función de la distancias entre los puntos de la misma y los focos. Si bien esto se presenta como una definición, es posible demostrar este hecho; dicha verificación queda a cargo del lector.

Definición 2.6. Sean F y F' dos puntos cualesquiera y a un número positivo tal que $a > \overline{FF'}$. El lugar de puntos P tales que la diferencia de las distancias a F y F' es igual a $2a$ es una elipse. En símbolos

$$dist(P, F) - dist(P, F') = 2a$$

Aquí siempre se toma la diferencia de manera tal que resulte positiva.

Observación 2.7. Esta actividad es altamente constructiva para los alumnos en términos del trabajo matemático, pues muestra un ejemplo concreto de cómo las definiciones en matemática se eligen de manera arbitraria, pues tenemos dos maneras ***distintas*** de definir una elipse o una hipérbola:

- a través de su foco y directriz,
- a través de sus dos focos.

Pregunta 2.20. Dada la definición de una elipse mediante sus focos F y F' y el parámetro a, ¿por qué se puede determinar unívocamente la directriz d de la misma?

Luego de esta secuencia de actividades, es posible determinar si es posible cocinar con las antenas de DirectTV.

2.6. Al final, ¿se puede cocinar con las antenas de DirecTV?. El problema central para esta actividad es el siguiente

¿Se puede cocinar con las antenas de DirecTV?

La hipótesis principal es que las señales que emiten los satélites al igual que los rayos solares llegan a la Tierra de manera perpendicular. Así, lo que interesa saber es hacia donde se refleja una señal satelital o los rayos solares cuando se reflejan en la antena. La respuesta: ***hacia al foco*** de la parábola lo que explica la ubicación del recibidor de la antena satelital![13]. Para probar este hecho, vamos a utilizar el *Principio de Snell*, representado gráficamente en el panel izquierdo de la Figura 8.

Principio de Snell: el ángulo de incidencia de un rayo sobre una superficie plana es igual al ángulo de reflexión[14].

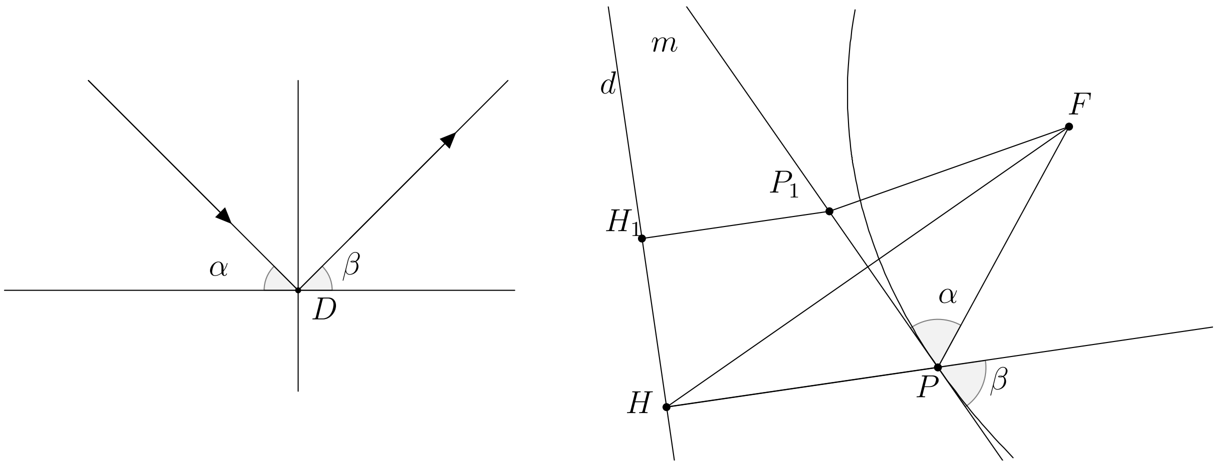


FIGURA 8. Panel izquierdo: La Ley de Snell dice que el ángulo de incidencia α, que forma el rayo con el plano tangente a la superficie es igual al ángulo de reflexión β. Panel derecho: el punto P está en la parábola de foco F y directriz d. La recta que contiene a los puntos P_1 y P es la mediatriz del segmento $\overline{HF}$. El ángulo α es igual al ángulo β.

Es necesario determinar entonces, el ***plano de reflexión de la parábola*** en un punto P de la misma. Para poder definir el plano de reflexión de la parábola, basta encontrar la dirección de la recta a la parábola en el punto dado P, como lo muestra el panel derecho de la Figura 8. Necesitamos determinar la recta $\overleftrightarrow{PP_1}$, que contiene al punto P, tal que el ángulo β, que resulta de la intersección en P de la recta $\overleftrightarrow{PH}$, sea igual al ángulo α.

Ahora bien, como P pertenece a la parábola, satisface

$$\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = 1,$$

entonces el triángulo $\overset{\triangle}{HFP}$ es isósceles (ver panel derecho de la Figura 8). Como la recta $\overleftrightarrow{PP_1}$ representa el plano de reflexión de la parábola en el punto P, entonces $\beta = \alpha$.

[13]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Satellite_dish`

Por lo tanto $\angle P_1PH = \beta$ resulta que los ángulos $\angle P_1PH = \angle P_1PF$, y la recta $\overleftrightarrow{PP_1}$ resulta ser la *bisectriz* del ángulo $\angle FPH$ y por lo tanto dicha recta resulta mediatriz del segmento $\overline{FH}$. Teniendo en cuenta que H siempre se puede determinar, para punto P de la parábola, tenemos

Definición 2.8. Sea la parábola con foco F y directriz d. Para cada punto P sobre la parábola sea el punto H sobre la directriz d tal que $\overline{PH} = \overline{PF}$, esto es la longitud del segmento $\overline{PH}$ representa la distancia del punto P a la directriz d. Entonces la mediatriz del segmento $\overline{FH}$ es la recta que representa el plano de reflexión de la parábola.

De la Figura 8 se puede deducir además que la mediatriz del segmento $\overline{PH}$, donde H satisface las condiciones del teorema anterior, no intersecta a la parábola en ningún otro punto. De lo contrario, si suponemos por ejemplo que P_1 también perteneciera a la parábola, entonces de acuerdo al panel derecho de la Figura 8 debería cumplirse que $\overline{P_1H_1} = \overline{P_1F}$ por ser P_1 un punto de la parábola. Pero además $\overline{P_1H} = \overline{P_1F}$ (¿por qué?) lo cual nos lleva a una contradicción pues el triángulo $\overset{\triangle}{H_1HP_1}$ es rectángulo en H_1 y de acuerdo al Teorema de Pitágoras, la hipotenusa no puede tener la misma longitud que ninguno de sus catetos.

Dado que la recta de reflexión de la parábola intersecta a la parábola en un único punto, esto nos refiere a la definición de *recta tangente a la parábola*.

Definición 2.9. Sea la parábola cuyo foco es F y directriz d. Para cada punto P de la parábola la recta tangente a la misma que pasa por el punto P es la mediatriz del segmento $\overline{FH}$, donde H es el punto sobre la directriz d tal que $\overline{PH} = \overline{PF}$.

En términos de rayos solares u ondas electromagnéticas, si los mismos viajan en dirección perpendicular a la directriz de una parábola, o equivalentemente paralelos al eje focal, al reflejarse sobre la superficie de la misma cambian su dirección hacia el foco de la parábola. Esto también es cierto en la otra dirección: si rayos lumínicos nacen del foco de una parábola, al reflejarse sobre la misma viajan paralelos al eje focal. Por eso los focos de las ópticas de los vehículos también están sobre el foco de una parábola!

Aquí tenemos una actividad que relaciona la parábola y el Origami [15]

Determinar puntos que pertenecen a una parábola de foco F y directriz d, mediante dobleces del papel

---

Pregunta 2.21. ¿Cuáles son las propiedades reflectivas de una elipse?

La próxima pregunta explica por qué las superficies esféricas no son apropiadas para resolver esta clase de problemas concretos.

Pregunta 2.22. ¿Cuáles son las propiedades reflectivas de una esfera?

2.7. Sobre hipérbolas y telescopios. Esta actividad está relacionada con la construcción de telescopios astronómicos, siguiendo la idea de Cassegrain.

Determinar las rectas tangentes a una hipérbola y sus propiedades.

Como en el caso de la parábola y la elipse, es posible determinar las rectas tangentes a la hipérbola que pasan por un punto P de la misma, como indica la Figura 9. Esta propiedad se puede enunciar como teorema.

[15] Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Origami`.

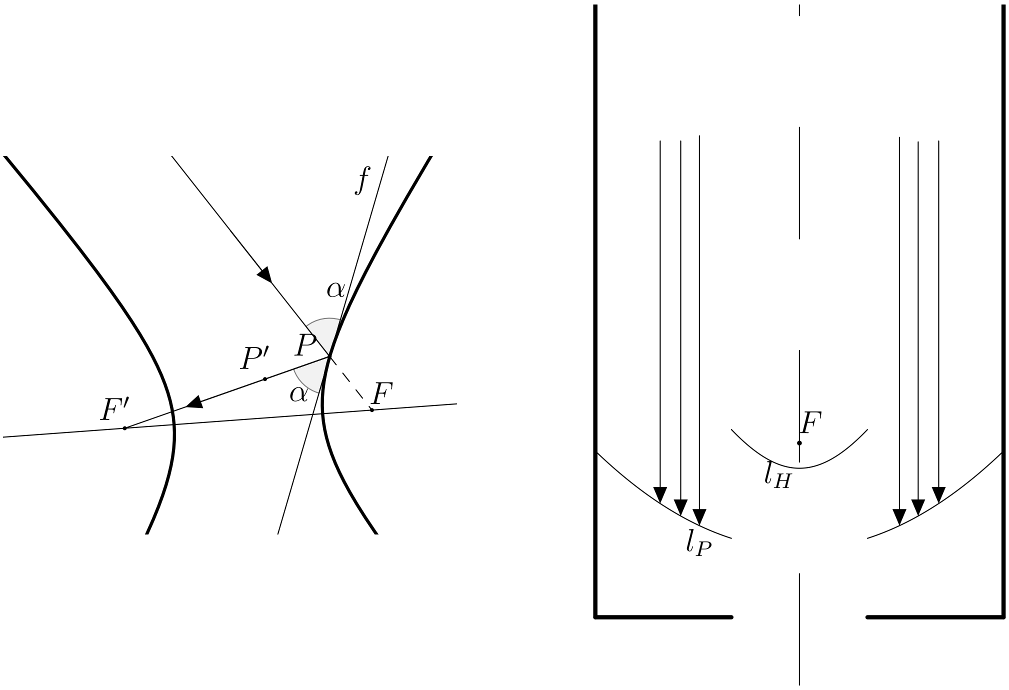


FIGURA 9. Panel izquierdo: la recta f es la bisectriz del ángulo $\angle FPF'$ y además es tangente a la hipérbola en el punto P. Panel derecho: Diagrama del telescopio diseñado por Cassegrain. Los rayos lumínicos se reflejan sobre el espejo parabólico cóncavo l_P y se reflejan sobre un lente convexo hipérbolico l_H.

Proposición 2.10. *Sea la hipérbola de focos F y F' con p, la distancia del foco F a la directriz d, y $e > 1$ su eccentricidad. Sea P un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, la recta tangente a la hipérbola es la bisectriz del ángulo del ángulo FPF'.*

Habiendo estudiado algunas de las propiedades de las secciones cónicas, una pregunta natural es por qué no utilizar los ejes cartesianos para determinar las coordenadas de diferentes puntos de una cónica determinada. Este cambio de representación es fundamental en términos del marco referencial del concepto matemático y la formación de imágenes conceptuales de los objetos matemáticos, así como también la formulación de definiciones conceptuales del dichos objetos [50].

2.8. ¿Y las coordenadas?

Utilizando ejes cartesianos, obtener ecuaciones algebraicas que representen las secciones cónicas.

Para ello vamos a suponer que el foco de la cónica F tiene coordenadas $(p, 0)$, la directriz d tiene ecuación $x = -p$ y su eccentricidad es e. Esta suposición no es restrictiva ya que este mismo trabajo se puede hacer en general: la diferencia reside en la intensidad del trabajo algebraico.

Con estas hipótesis, si cualquier punto P sobre la cónica tiene coordenadas (x, y), la ecuación (2.7) se lee

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2+y^2}}{x+p} = e \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \frac{(x-p)^2+y^2}{(x+p)^2} = e^2 \tag{2.23}$$

pues como la directriz tiene ecuación $x = -p$, $d(P, d) = x + p$, como se muestra en la Figura 10. Las expresiones en (2.23) definen una relación entre las coordenadas del punto P que nos aseguran que dicho punto pertenece a la cónica de foco F, directriz d y eccentricidad e. Como lo hicimos antes, vamos a discriminar tres posibilidades $e = 1$, $e \neq 1$.

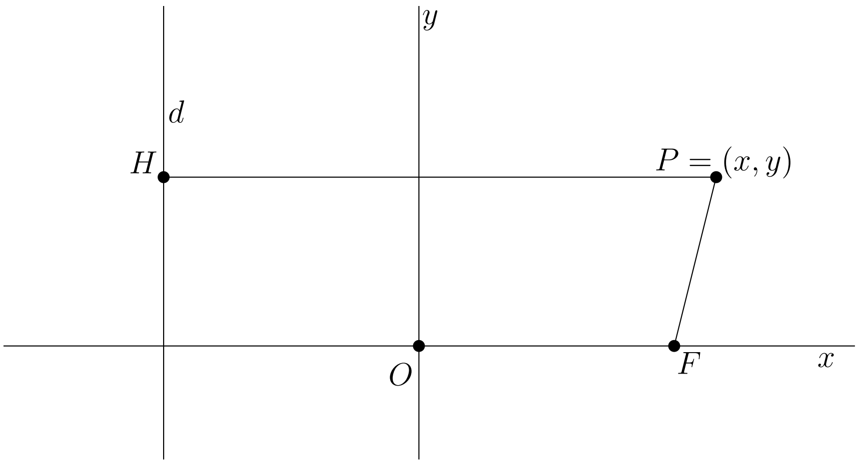


FIGURA 10. Representación de una cónica utilizando coordenadas cartesianas. El punto O es el centro de coordenadas. El foco F tiene coordenadas $(p, 0)$. La distancia del foco F a la directriz es $2p$, la distancia del punto P a la directriz d es la longitud del segmento $\overline{PB}$ que resulta $x+p$.

2.8.1. Parábola - $e = 1$. En este caso, la ecuación (2.23) se lee

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2.$$

Como $(x-p)^2 = x^2 - 2px + p^2$ y $(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$, entonces

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = (x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2 \qquad \text{o} \qquad y^2 = 4px.$$

Observemos que el vértice de la parábola, que de lo que trabajamos anteriormente se deduce que tiene coordenadas $(0, 0)$, satisface la ecuación que acabamos de obtener.

2.8.2. Elipse - hipérbola - $e \neq 1$. En este caso, tenemos

$$(x-p)^2 + y^2 = e^2(x+p)^2. \tag{2.24}$$

Para calcular las coordenadas de los vértices de la elipse ($e < 1$) o la hipérbola ($e > 1$), como asumimos que el foco está sobre el eje x entonces las coordenadas de los vértices deben ser de la forma $(v, 0)$. Así, utilizando la ecuación (2.24) se obtiene

$$(x-p)^2 = e^2(x+p)^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 2p\frac{1+e^2}{1-e^2}x + p^2 = 0, \text{ ¿por qué?}$$

Esta es una ecuación de segundo grado que tiene a lo sumo dos soluciones. El discriminante de esta ecuación es

$$\triangle = 4p^2\frac{(1+e^2)^2}{(1-e^2)^2} - 4p^2 = \frac{16p^2e^2}{(1-e^2)^2}, \text{ ¿por qué?}$$

Así, podemos concluir que tanto la elipse como la hipérbola tienen dos vértices.

Si $e < 1$ entonces, las coordenadas de los vértices son

$$\left(p\frac{1-e}{1+e},0\right) \qquad \text{y} \qquad \left(p\frac{1+e}{1-e},0\right),$$

y el eje de simetría de la elipse, perpendicular al eje focal tiene ecuación

$$x = p\frac{1+e^2}{1-e^2},$$

y corresponde a la recta que pasa por el punto medio del segmento determinado por sus vértices (o focos), ¿por qué?.

Por último utilizaremos coordenadas para encontrar la ecuación del eje de simetría de una cónica que es perpendicular al eje focal. Para ello asumamos que la directriz d de la cónica coincide con el eje y y que su foco F yace sobre el eje x, esto es, F tiene coordenadas $(p, 0)$. Entonces la ecuación (2.7) se lee

$$\frac{(x-p)^2+y^2}{x^2} = e^2.$$

Esta ecuación es simétrica respecto del eje y pues si reemplazamos x por $-x$ y p por $-p$ en dicha ecuación, la misma no varía, ¿por qué?. Más aún, las coordenadas de los vértices de la hipérbola satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-p)^2}{x^2} = e^2.$$

De donde se tiene que las coordenadas de los vértices son $\left(\frac{p}{1-e}\right)$ y $\left(\frac{p}{1+e}\right)$

El uso de hipérbolas es la base del sistema de navegación LORAN, el cual obtiene ubicaciones relativas respecto a dos hipérbolas diferentes. Este requiere familiarizarse con la representación de varias cónicas respecto a un único sistema de referencia. Esta última actividad puede desarrollarse en clase o como proyecto de trabajo grupal. El siguiente problema puede servir como disparador.

> Supongamos que un barco navega a 100 millas paralelo a la costa y recibe señales de dos transmisores que están sobre la línea costera distantes 200 millas entre sí. En un momento, el barco envía una señal de auxilio a ambas estaciones, y de la diferencia en el tiempo de llegada de las señales se deduce que el barco está 160 millas más cerca de una estación respecto de la otra. ¿Dónde se encuentra el barco? .

3. Problemas

Los siguientes representan una serie de problemas relacionados, directa o indirectamente con las secciones cónicas. El orden de los problemas seleccionados no está en correspondencia con el orden de dificultad, pues es el docente quien en función de sus alumnos debe decidir cuáles problems son potenciales problemas para ellos[11], permitiéndole seguir incentivando el trabajo matemático en el aula.

1. Determine el tipo de curva representada por la ecuación dada. Encuentre los focos, vértices y directrices (si correspondiere) y representar gráficamente.

a) $\dfrac{x^2}{12} + y = 1$
b) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{144} = \dfrac{y}{12}$
c) $x^2 - y^2 + 144 = 0$
d) $x^2 + 6x = 9y^2$
e) $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$
f) $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$
g) $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$
h) $x^2 - 9y^2 + 8x = -7$
i) $3x^2 + 4y^2 = 18x - 8y + 19$

2. Determinar las coordenadas del foco F, e y p de las siguientes cónicas cuyas ecuaciones se dan a continuación. En todos los casos, el eje focal es el eje x. Representarlas gráficamente.
   a) $x^2 + 9y^2 = 81$
   b) $9x^2 - 16y^2 = 144$
   c) $16x^2 + y^2 = 25$
   d) $4x^2 + 9y^2 = 36$
   e) $9y^2 - 4x^2 = 36$
   f) $x^2 - y^2 = 25$
   g) $4x^2 + 7y^2 = 13$
   h) $5x^2 - 3y^2 = 14$
3. Hallar las pendientes de las rectas tangentes a las cónicas siguientes en los puntos indicados.
   a) $y^2 = 8x$, $P_1(2, 4)$
   b) $x^2 + y^2 = 25$, $P_1(3, -4)$
   c) $4x^2 + y^2 = 16$, $P_1(0, 4)$
   d) $x^2 - 9y^2 = 81$, $P_1(15, -4)$
4. Usar coordenadas para argumentar por qué la ecuación (2.3) determina una circunferencia para cualquier valor de $k \neq 1$.
5. La relación
$$\frac{\overline{FV'} - \overline{FV}}{\overline{VV'}} = e$$
   se utiliza para calcular la eccentricidad de las órbitas de los planetas del sistema solar, que Kepler y Newton demostraron que eran elípticas, donde F corresponde a la ubicación del Sol, $\overline{FV}$ corresponde al perihelio, la distancia mínima entre el planeta y el Sol, y $\overline{FV'}$ corresponde al afelio, la distancia máxima entre el plante y el Sol, ambas distancias medidas sobre el eje focal de la órbita elíptica: para la Tierra, $e = 0{,}0167$[16].
6. Determinar las coordenadas de los vértices, la eccentricidad, los focos (según corresponda) de las siguientes elipses:
   a) Focos $(0, \pm 3)$. El punto $(0, 2)$ pertenece a la elipse
   b) Eje focal: eje x. Los puntos $(8, 6)$ y $(16, 0)$ pertenecen a la elipse

   En cada caso, determinar la circunferencia de radio más grande que se puede inscribir en las elipses dadas.
7. Determinar los parámetros de la elipse más grande que se puede obtener a partir del rectángulo de 4×8.
8. A partir del eje de simetría p, perpendicular al eje focal de la elipse (ver Figura 5), se definen el ***eje mayor*** y ***eje menor*** de la elipse. El primero corresponde al segmento $\overline{VV'}$ y el segundo es el segmento contenido en p cuyos extremos perteneces a la elipse. Asumiendo que la elipse tiene la distancia entre el foco y la directriz d es p y tiene eccentricidad e, sabemos que el eje mayor tiene longitud $2a = \dfrac{2ep}{1 - e^2}$. Calcular la longitud del eje menor de la elipse.
9. Determinar las propiedades de reflexión de las rectas tangentes a una elipse dada.

[16]Otros parámetros del sistema solar se pueden encontrar en `http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/planet_table_ratio.html`.

10. Un reflector parabólico para un faro de automóvil forma un tazón de 6 pulgadas de ancho en su abertura y 3 pulgadas de profundidad. ¿A qué distancia del vértice se debe colocar el filamento de la bombilla si se tiene que ubicar el foco?
11. Se construirá un reflector elíptico de 17 cm de altura de modo que las ondas lumínicas emitidas desde el foco F se reflejen hacia un punto F' que está a 32 cm del vértice del reflector. Encontrar el diámetro del reflector y la ubicación de F.
12. EL arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco mide 10 m y su parte más alta mide 5,3 m de la autopista. Determinar la altura máxima de paso, si el ancho de la carretera es de 8 metros.
13. Las cónicas que tienen el mismo foco se denominan ***confocales***. Considere las cónicas que tienen como foco al punto $(0, 1)$ y tiene al origen de coordenadas como vértice.
    a) Encuentre dos elipses distintas que tengan esta propiedades
    b) Encuentre dos hipérbolas distintas que tengan esta propiedades
    c) Explique por qué sólo una parábola puede tener estas propiedades
    d) A partir de la representación gráfica de las cónicas obtenidas, determine alguna relación geométrica entre las mismas.
14. Investigar cómo se utilizaron las secciones cónicas en la resolución de los problemas de la duplicación del cubo.
15. EL cometa Halley tiene una órbita elíptica con eccentricidad $e = 0,967$. La distancia más pequeña a la que el cometa Halley pasa del sol es 0,587 UA[17]. Calcule la distancia máxima del cometa al Sol.
16. La primera Ley de Kepler sostiene que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
    a) Muestre que la ecuación de dichas órbitas resulta

    $$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e\cos\theta}$$

    donde e es la eccentricidad y $2a$ es la longitud del eje mayor de la elipse.
    b) La distancia del perihelio, r_{per} y la distancia del afelio r_{afe} están definidas como las distancias mínima y máxima, respectivamente de un planeta al Sol. Muestre que

    $$r_{per} = a(1 - e) \qquad r_{afe} = a(1 + e)$$

    c) Usualmente, la ecuación que describe las órbitas planetarias es

    $$r = \frac{r_{per}(1 + e)}{1 - e\cos\theta}, \qquad \text{¿por qué?}$$

    Utilizar la ecuación anterior para obtener una representación del sistema solar a escala.
17. Un punto P de coordenadas (x, y) está a la misma distancia del punto $(4, 0)$ que de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r = 2$. Mostrar que P se encuentra sobre una hipérbola.
18. ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar unívocamente una cónica?
19. En el panel derecho de la Figura 9, se muestra el diseño del telescopio de Cassegrain. ¿Dónde terminan las ondas luminosas que inciden en el telescopio?

[17]UA= unidades atronómicas.

Si la ecuación de la rama superior de la hipérbola es

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2}$$

y la ecuación de la parábola es

$$y = dx^2$$

determinar el valor del parámetro d en función de a y b.

4. Conclusiones

Estas notas surgieron de un encuentro con profesores de matemática de la escuela secundaria durante las Segundas Olimpíadas del Golfo San Jorge, llevadas a cabo durante el mes de agosto del año 2011 en la ciudad de Comodoro Rivadavia, provincia del Chubut. En ese taller, presentamos una serie de actividades para trabajar en el aula que introducen las secciones cónicas.

Si bien existen numerosos libros de texto que presentan las secciones cónicas desde la geometría analítica [37, 49, 42]), esta propuesta para la introducción de las cónicas es novedosa, respecto a la literatura existente. Dado que la definición de cónicas se remonta a la noción de mediatriz de un segmento, las actividades presentadas han permitido relacionar conceptos que usualmente están distribuidos en diferentes años de la escuela secundaria (Teorema de Thales, Arco Capaz, Trigonometría), convirtiéndose en un ejemplo de diseño según la ingeniería didáctica[1]. Una de las ventajas de elegir esta metodología para el diseño de situaciones de enseñanza, reside en el hecho que el aprendizaje del alumno, desde su propia perspectiva, deja de ser percibido como una serie discreta de compartimentos disjuntos para convertirse en un proceso continuo.

Además de los problemas específicos a resolver en cada una de las actividades que permiten introducir nuevos conceptos [35, 14], se presentan una serie de preguntas que, o han surgido de los propios alumnos durante las implementaciones de las mismas o pueden servir a los docentes para introducir nuevos problemas, de manera natural en el trabajo de aula y así ***¡los alumnos se convierten en matemáticos en la hora de Matemática!***.

Estas notas no tienen como objetivo una presentación formalmente matemática de las secciones cónicas sino la de presentar una herramienta para el docente en ejercicio que tiene la responsabilidad de generar situaciones de enseñanza para que sus alumnos aprendan motivados estos contenidos disciplinares. Las actividades están estructuradas de manera similar a las actividades presentadas en [48], de manera tal que el docente puede implementarlas directamente en el aula. Sin embargo, la mayoría de los resultados y las preguntas a lo largo de este trabajo no van acompañadas de validaciones matemáticas; el tipo de argumentos para justificar los resultados depende de los alumnos y quedan a criterio del docente. Si bien es cierto que la validación de los conceptos matemáticos por los alumnos debe corresponderse con la validación matemática, las formas de validación tienen que tener coherencia con el nivel de maduración cognitiva de los mismos[51]. Por ello es fundamental que el profesor que implemente estas actividades con sus alumnos haya elaborado argumentos precisos y formales, desde el punto de vista matemático, para cada uno de los resultados aquí presentados. De esta manera, el docente podrá decidir cuándo las validaciones de sus alumnos son precisas y muestran crecimientos cognitivos de los mismos, por ejemplo basadas en la heurística y la intuición. Una de las herramientas más útiles para desarrollar habilidades de validación en los alumnos es la pregunta ***¿por qué?***, pues le permite al docente devolver la pregunta o el problema al alumno. Cuando el alumno vuelve a responder, ***y***

es extremadamente importante que lo haga, el docente puede evaluar, a través de las validaciones de sus alumnos, muestran indicios que el aprendizaje se está llevando a cabo.

Estas notas no se proponen ni discuten cuáles dispositivos de evaluación son los adecuados para este tipo de propuestas, pues aunque hemos trabajado sobre ello, no existen formas de evaluaciones absolutamente mejores que otras, sino que están directamente relacionadas con las situaciones de enseñanza y la apropiación de los conocimientos que ocurren en el aula[9] . En [45, 48] hemos presentado algunas alternativas innovadoras sobre el diseño de instrumentos de evaluación que permiten a los alumnos apropiarse de la evaluación como parte natural del aprendizaje. Es por ello que invito a los lectores a pensar en cómo instrumentar dispositivos de evaluación, instrumentarlos y compartirlos con el autor, teniendo en cuenta que la evaluación debe ser percibida por los alumnos como parte natural y fundamental de los procesos de aprendizaje por lo que debe ser constructiva e interactiva. De lo contrario, los resultados de las evaluaciones son altamente paradójicas [44]: los alumnos responden a preguntas sólo si saben la respuesta[28] y así el docente no puede utilizar los resultados de estas evaluaciones para poder reflexionar sobre sus propias prácticas.

Por último, quiero agraceder a quienes hayan alcanzado estas líneas. Los problemas sobre la educación matemática son altamente complejos y es necesario analizarlos desde diferentes perspectivas. Este trabajo propone un análisis desde los disciplinar, y lejos está de ser una respuesta definitiva de la pregunta ***¿las cónicas, para qué me sirven?***. La intención de éste ha sido la de promover muchas más preguntas que respuestas. Si lo hemos logrados, nos damos por satisfechos. Gracias.

Referencias

[1] Artigue, M. (2002) Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strasse, B. Winkelman Didactics of mathematics as a scientific discipline, Kluwer Academic Publishers.

[2] Arzarello, F., Olivero, F., Domingo, P., Robutti, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. ZDM Vol 34(3), pag. 66-72.

[3] Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level, CERME 5 Working group 13 pp 2050-2059.

[4] Blum, W. (1993) Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En Breiteig et al Eds, Teaching and learning mathematics in context, Ellis Horwood Limited, Chichester, pp 3-14.

[5] Blum, W. Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser et al. (eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, Springer Science+Business Media B.V. pp.15-30.

[6] Boyer, C., Merzbach, U. (1985) A history of Mathematics. Priceton University Press.

[7] Burton,L. (2009). The Culture of Mathematics and the Mathematical Culture. In O. Skovsmose et al. (eds.), University Science and Mathematics Education in Transition (pp 157-174), Springer Science+Business Media LLC.

[8] Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer.

[9] Celman,S. (1998) La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo. En Evaluación de los Aprendizajes. A. Camilloni et al (Eds). Editoral Paidós.

[10] Chevallard, Y. (1999) Lánalyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

[11] Colombano, V., Isla Zuvialde, D., Marino, T., Real, R. (2009) El problema de diseñar problemas. Comunicación presentada en la XXXII Reunión de Educación Matemática (REM), Universidad Nacional de Mar del Plata. Septiembre de 2009.

[12] Courant, R., Robbins, H. (1996) What is mathematics? Oxford University Press.

[13] Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et functionnemente cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65, IREM de Strasbourg, 1993
[14] English, L., Sriraman, B. (2010) Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pp. 263-290), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[15] Ernest, P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education. London: Falmer.
[16] Ernest, P. (2010) Reflexions on theories of learning. En B. Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pp. 39-47), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[17] Falsetti, M., Marino, T., Rodríguez, M. (2004) Validación en Matemática en situación de aprendizaje. En Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy, Argentina.
[18] Gawlick, T. (2002) On Dynamic Geometry SOftware in a regular Classroom., ZDM Vol. 34(3) pag. 85-92.
[19] Goldin, G.A., Kaput, J.J. (1996) A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin and B. Greer (Eds.), Theories of Mathematical Learning (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
[20] Goldin, G. (2010) Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion. In B. Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pp. 241-250), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[21] Gonzalez, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualemente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. Zetetiké, 6(9), 59-87.
[22] Gronback, N., Misfeldt,M., Winslow, C. (2009) Assessment and Contract-Like Relationships in Undergraduate Mathematics Education. In O. Skovsmose et al. (eds.), University Science and Mathematics Education in Transition (pp 85-105), Springer Science+Business Media LLC.
[23] Harel, G. (2010) DNR-based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. En B. Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pp. 343-367), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[24] Kuhn, T.S. (1970) The Structure Of Scientific Revolutions. (2nd Ed.). Chicago: The University of Chicago Press.
[25] Lang, S. and Murrow, G. (1997) Geometry. Springer.
[26] Lakatos, I. (1977). Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press.
[27] Lehmann, C. (1990) Geometría analítica. Editorial Limusa, 14° Edición.
[28] Litwin, E. (1998) La evaluación: campo de controversia y paradojas o un nuevo lugar para la buena ense nanza. En Evaluación de los Aprendizajes, A. Camilloni et al (Eds) Editoral Paidós.
[29] Lyotard, J.F. (1984). The Postmodern Condition: A Report on Knowledge. Manchester: Manchester University Press.
[30] Martin, G. (1991) The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer.
[31] Moreno-Armella, L., Sriraman, B. (2010) Symbols and Mediation in Mathematics Education. In B. Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pp. 213-232), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[32] Otte, M. (2006) Mathematical epistemology form a Peircean point of view. Educational Studies of Mathematics, 61(1-2).
[33] Paenza,A. (2011) ¿Cómo, esto también es matemática? Editorial Suramericana.
[34] Pegg, J., Tall, D. (2010) The Fundamental Cycle of Concept Construction Underlying Various Theoretical Frameworks. En B. Sriraman, L. English (eds.), Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pp. 173-192), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[35] Polya, G. (1973) How to solve it. Princeton University Press.
[36] Popper, C. (1963). Conjectures And Refutations: The Growth Of Scientific Knowledge. Routledge:London.
[37] Rey Pastor, J., Santaló, L., Balanzat, M. (1959) Geometría analítica. Editorial Kapeluz.
[38] Robinson, K., (1999) All Our Futures: Creativity, Culture and Education. National Advisory Committee on Creative and Cultural Education. United Kingdom.
[39] Santaló, L. (1961) Geometrías no euclidianas. Editorial EUDEBA.
[40] Santaló, L. (2008) *Matemática para no matemáticos* en Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones, Parra, C. y Saiz, I. (comp.) Ed. Paidós.
[41] Schoenfeld, A.H. (1998) Toward a theory of teaching-in-context. Issues in Education, 4(1). 1-94.

[42] Swokowski, E.W., Cole, J.A. (2005) Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Editorial Cengage, 11° Ed.

[43] Soto, G. (2010) ¿Y esto... para qué me sirve?: algunas reflexiones para enfrentar esta pregunta y no morir en el intento. Conferencia Plenaria, XXXIII Reunión de educación matemática Setiembre 2010, Tandil Buenos Aires.

[44] Soto, G. (2010) *¿Qué evaluamos cuando evaluamos?* Revista de Educación Matemática, UNC. Vol. 25 N° 2, ISSN: 0326-8780.

[45] Soto, G., Etcheverrito, M.N., Etcheverrito M.C., Mellado, M. (2010) *Experiencias innovadoras en el diseño de instrumentos de evaluaciónen el aula* Primer Congreso Latinoamericano de Investigación Educativa, Universidad Católica de Córdoba - Setiembre 2010 ISBN 978-987-26202-2.

[46] Soto,G. (2011) El teorema de Bayes, Revista de Educación Matemática, UNC. Vol. 26 (3), ISSN: 0326-8780.

[47] Soto, G., Abregú, M., Gómez, E. (2011) *Exactamente cotidiano: la universidad va a la escuela. Parte II* Encuentro Nacional de Articulación, Universidad Nacional de Córdoba, Secretaría de Asuntos Académicos, Secretaría de Asuntos Estudiantiles, ISBN 978-950-33-0917-9.

[48] Soto, G., Etcheverrito, M.N., Etcheverrito M.C., Mellado, M. (2012) *El laboratorio de geometría: un espacio para recuperar la motivación por aprender* Aceptado Revista Educación Matemática, Santillana México.

[49] Stewart, J., Redlin, L. (2005) Precálculo. 3ra Edición, Editorial Thomson

[50] Tall, D., Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12 pag. 151-169.

[51] Tall, D. (1998) The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? Conference of the University of Chicago School Mathematics Project

[52] Tirao, J. (1979) El plano, Editorial Docencia.

[53] Törner, G., Rolka, K., Rösken, B., Sriraman, B. Understanding a teacher´s actions in the classroom by applying Schoenfeld's theory of teaching in context: reflecting on goals and beliefs. En B. Sriraman, L- English (eds.) Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education (pag. 401-421), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[54] Varela, F., Thompson, E., Rosch, E. (1991). The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience. Cambridge, MA: MIT Press.

[55] von Glasersfeld, E. (1989) Constructivism in Education. International Encyclopedia of Education. T. Husen and N. Postlethwaite (Eds.), Supplementary Vol., pp. 162.163. Oxford: Pergamon.

[56] Vygotsky, L. S. (1978). Mind in Society: The Development of the Higher Psychological Processes. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press (Edited by M. Cole et al.).

[57] Vygotsky, L.S. (1981) The instrumental method in phycology. En J. Wertsch (ed) The concept of activity in Soviet Psychology (pag. 135-143) Armonk, N.Y.; Sharpe

[58] Wigner, E (1960) *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, in Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 13(1).

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemática, Ciudad Universitaria, Km 4 - Comodoro Rivadavia (9005) Chubut - Argentina, TE=+54–297–4550836

E-mail address: gsoto@ing.unp.edu.ar

GENERACIÓN DE LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA A TRAVÉS DEL TRABAJO CON PROYECTOS

LILIANA TAUBER Y MARIELA CRAVERO

Índice

1. Introducción 93
2. Revisión de literatura relacionada con la Alfabetización Estadística 94
2.1. Alfabetización Estadística y Ciudadanos estadísticamente alfabetizados 94
2.2. Ideas Fundamentales de la Alfabetización Estadística 96
3. Características del trabajo en el aula de estadística con proyectos 97
4. Metodología 98
4.1. Actividad 1: "Distribuciones asociadas al lanzamiento de un dado" 99
4.2. Actividad 2: "Generación de distribuciones muestrales" 101
5. Implicaciones para la enseñanza 103
6. Reflexiones Finales 105
Referencias 105
Referencias de applets 106

1. Introducción

Actualmente, el estudio de la alfabetización de los ciudadanos en distintas disciplinas se muestra como un tema central en la investigación didáctica ([11], [15], [9], [6], [18], [19], [4]), así como también los estudios centrados en el análisis de la influencia de las actitudes sobre el rendimiento de los estudiantes o sobre el desempeño de los ciudadanos en diversas áreas del mundo del trabajo.

Además, desde la comunidad de los educadores estadísticos, en las últimas décadas, también se ha expresado la preocupación por lograr una *Alfabetización Estadística* básica para todos ([19]). Consideramos que para que un ciudadano logre estar científicamente alfabetizado, uno de los componentes principales es que haya logrado ser un ciudadano estadísticamente alfabetizado, ya que estamos convencidos que la estadística es la que provee de métodos de análisis a las ciencias, por lo cual si no se es culto estadísticamente, será más difícil poder comprender la metodología científica.

En consecuencia, a través del curso que presentamos en este trabajo, pretendemos realizar una breve delimitación de los conceptos estocásticos que son la base de la Alfabetización Estadística. Con este fin, partimos de la revisión de antecedentes en el tema y en función de ésta elaboramos una categorización inicial que nos permitirá luego tomar decisiones en relación con las actividades que se desarrollan en el curso. Por último, presentamos un análisis de las actividades propuestas en función de la categorización realizada.

Palabras claves: Alfabetización Estadística, Actitudes y creencias hacia la estadística, Educación Estocástica, Ideas estocásticas fundamentales.

2. Revisión de literatura relacionada con la Alfabetización Estadística

2.1. Alfabetización Estadística y Ciudadanos estadísticamente alfabetizados. Partimos de la postura de Wallman [22], quien argumenta que la *Alfabetización Estadística* (que simbolizaremos como AE) es la habilidad para:

- entender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que intervienen en la vida diaria y,
- apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer en las decisiones personales, profesionales, públicas y privadas.

Dado que lo anterior puede resultar muy amplio a la hora de organizar una propuesta didáctica buscamos otros elementos teóricos que nos permitan clarificar la definición de Alfabetización Estadística. Es así que siguiendo las ideas planteadas por diversos investigadores en educación estocástica ([10] y [6]) adherimos a la siguiente categorización que, actualmente es la más aceptada en la comunidad de educadores estadísticos, en la cual se diferencian los ejes fundamentales que diferencian a la Alfabetización Estadística, el Razonamiento Estadístico y el Pensamiento Estadístico:

Alfabetización estadística (AE): es el conjunto de habilidades básicas que son usadas en la comprensión de información cotidiana y de resultados de investigaciones. Estas habilidades deberían permitir organizar datos, construir y presentar tablas y trabajar con distintos tipos de resúmenes de datos. También, implica una comprensión básica de conceptos, vocabulario y símbolos, y de la idea de probabilidad como medida de la incertidumbre. En otras palabras, la AE se define como la *habilidad básica para pensar críticamente sobre argumentos basados en la evidencia.*

Razonamiento estadístico (RE): se puede considerar como la manera que las personas le dan sentido a las ideas e información estadística. Lo cual involucra hacer interpretaciones basadas en un conjunto de datos, representar o resumir datos. También involucra lograr establecer relaciones adecuadas entre conceptos (p.e., centro y dispersión), o combinar ideas sobre los datos y el azar. Razonar, en este sentido, significa comprender y ser capaz de explicar procesos estadísticos y de interpretar, de manera global, los resultados estadísticos.

Pensamiento estadístico (PE): involucra la comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones en las que se utiliza la estadística como herramienta metodológica y las “grandes ideas o las ideas fundamentales” implícitas en ellas. Estas ideas incluyen la naturaleza de la variación y, cuándo y cómo usar los métodos más apropiados de análisis de datos, tales como resúmenes numéricos y gráficos. Desarrollar el PE implica resaltar la comprensión de la naturaleza del muestreo, cómo hacer inferencias a la población y cómo diseñar experimentos con el objetivo de establecer causas. Esto incluye, la comprensión de los modelos para simular fenómenos aleatorios y su aplicación en la estimación de probabilidades. Además de entender cómo, cuándo y por qué las herramientas inferenciales pueden usarse para fundamentar los procesos de investigación. El pensamiento estadístico también implica ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema de investigación y dar conclusiones, reconocer y comprender los procesos completos (desde proponer preguntas para recolectar los datos hasta elegir el análisis y el test de hipótesis que corresponda). Finalmente, los pensadores estadísticos deben ser capaces de criticar y evaluar los resultados de un problema o de un estudio estadístico.

Por supuesto, los procesos de enseñanza y aprendizaje deberían fomentar diversos conceptos y competencias en cada proceso (AE, RE Y PE), de tal forma que luego de varios años de educación estadística se lograra formar un ciudadano estadísticamente alfabetizado que, aunque no sea un técnico estadístico, pueda ser un consumidor estadístico crítico. En consecuencia, consideramos que es fundamental pensar cuáles serían los conceptos y competencias estocásticos que pretendemos introducir a través de la enseñanza en los distintos niveles educativos. Con este fin adherimos al modelo teórico de Gal [9], quien propone una interacción entre los conocimientos estocásticos básicos y otros procesos que deberían estar disponibles en las personas, y en consecuencia, en los estudiantes o profesores, para que ellos puedan comprender, interpretar, evaluar críticamente y reaccionar a los mensajes estadísticos encontrados en diferentes contextos. Este modelo asume que la *Alfabetización Estadística* involucra tanto un *componente de conocimiento* (compuesto de cinco elementos cognitivos: habilidades de alfabetización, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento del contexto y cuestiones críticas) como un *componente disposicional* (compuesto de dos elementos: postura crítica, creencias y actitudes).

Los componentes y elementos en este modelo no deberían considerarse como entidades separadas sino como contextos dependientes, como un conjunto dinámico de conocimiento y aptitudes que juntos forman el *comportamiento estadísticamente alfabetizado*. La comprensión e interpretación de la información estadística requiere no sólo de conocimiento estadístico per-sé sino también la disponibilidad de otros conocimientos básicos tales como: habilidades de alfabetización, conocimiento matemático básico (fundamentalmente distinguir entre los distintos campos numéricos y tener conocimiento sobre proporcionalidad) y conocimiento del contexto. Sin embargo, la evaluación crítica de la información estadística (después de haber sido comprendida e interpretada) depende de elementos adicionales como la habilidad para realizar preguntas críticas y para tener una postura crítica, la cual se basa en ciertas *creencias y actitudes* hacia la Estadística y hacia las Ciencias en general.

Como consecuencia de las categorizaciones que se plantean en los marcos teóricos resumidos en los párrafos anteriores, podríamos indicar que para considerar que un ciudadano está estadísticamente alfabetizado éste debería:

Comprender por qué:

- La Estadística es la ciencia de los datos y, en consecuencia, los datos proporcionan información relevante.
- La variabilidad es natural y también es predecible y cuantificable.
- Las muestras aleatorias permiten generalizar los resultados.
- La asignación aleatoria en los experimentos permite concluir sobre las causas y los efectos.
- El significado práctico de los teoremas fundamentales de la Estadística, por ejemplo: El Teorema Central del Límite.

Reconocer:

- Las fuentes comunes de sesgo en las encuestas y experimentos.
- Cómo determinar la población a la que los resultados de la inferencia pueden ser generalizados.
- Cómo determinar si se puede realizar una inferencia de causa-efecto.

Conocer las técnicas estadísticas adecuadas para:

- Obtener o generar los datos.
- Graficar datos como un paso inicial en el análisis.

- Interpretar resúmenes numéricos y gráficos (responder preguntas / verificar condiciones).
- Comunicar resultados de un análisis estadístico.
- Hacer un uso apropiado de la inferencia estadística a un nivel básico.

Conocer:

- Cómo interpretar los resultados estadísticos en el contexto bajo estudio.
- Cómo leer y criticar noticias y/o artículos que incluyen información estadística.
- Situaciones que requieren de la ayuda de un estadístico experimentado.

Hemos basado esta parte del trabajo en el análisis de estos marcos teóricos, los cuales nos han permitido delimitar lo que es la Alfabetización Estadística y los elementos constitutivos de ésta. Este análisis nos permite además, identificar diversos conceptos que consideraremos fundamentales a la hora de diseñar actividades para la enseñanza de Estadística.

2.2. Ideas Fundamentales de la Alfabetización Estadística. La concepción de *ideas fundamentales* fue creada por Bruner [7], quien indica que, en educación (de una determinada disciplina) se deberían seguir las líneas principales que ofrece la ciencia relacionada. Siguiendo a Goetz [12], una tesis básica de esta concepción radica en que es posible enseñar los principios básicos de un tema independientemente de la edad y el origen social de los destinatarios. Este enfoque se refiere al *contenido* de la educación estocástica (en nuestro caso particular) y también a la *actitud* que es característica para hacer estadística, por ejemplo, o cualquier otro tema. Así, en este sentido, la educación estocástica debe ser una copia no sesgada de la ciencia estadística. Por supuesto, el nivel de la educación debe ser diferente al nivel de la ciencia, pero esto no debería significar un obstáculo, sino un reto para que la didáctica de la estadística procure identificar los contenidos y los métodos típicos de la ciencia.

Según Goetz [12], además de las *ideas fundamentales*, cuando planificamos secuencias didácticas, deberíamos tener en cuenta las creencias básicas, tanto de los alumnos como de los docentes mismos. Goetz [12], indica que se pueden distinguir dos tipos de creencias básicas: *las normativas y las descriptivas*. Las *creencias normativas* cumplirían una función similar a la de las *ideas fundamentales*, mientras que las creencias *descriptivas*, indican las creencias individuales relacionadas con los contenidos cognitivos. Estas últimas podrían considerarse como *actitudes afectivas* hacia la disciplina (en este caso, hacia la estadística). Según Goetz, una de las claves para descubrir las creencias es analizar los errores que los estudiantes cometen. Indicación que deberemos tener en cuenta a la hora de planificar nuestra enseñanza. En relación con las creencias de estudiantes y profesores de matemática, hemos encontrado a través de investigaciones previas ([21], [8]) diversos tipos de creencias, por ejemplo: hemos encontrado que una gran proporción de profesores de matemática de nivel Medio, deciden no desarrollar conceptos estocásticos porque no se sienten seguros a la hora de resolver problemas, otros que plantean que la incertidumbre en los resultados estocásticos les provoca ansiedad por el hecho de no tener un único resultado. Como podemos concluir, estas creencias detectadas así como otras que hemos encontrado, influyen en los profesores a la hora de enseñar estadística. Por ejemplo, una de las consecuencias es que el profesor en muchas situaciones propone, un lote de datos, que generalmente no se sabe cómo se ha obtenido (o se ha tomado directamente de un libro en el que ni siquiera se plantea un contexto) y propone que el alumno calcule ciertas medidas como puede ser una media aritmética o una desviación pero sin relacionar con el tipo de variable, el tipo de distribución de frecuencias, etc. En otras palabras, es muy común que se propongan actividades puramente algorítmicas que de ninguna manera promueven la comprensión de las ideas estocásticas fundamentales.

En consecuencia, consideramos que es necesario distinguir cuáles son las *ideas fundamentales* que deberían desarrollarse en la enseñanza formal para lograr que nuestros alumnos lleguen a ser ciudadanos estadísticamente alfabetizados.

Considerando que estas *ideas fundamentales*, en muchas ocasiones, pueden funcionar como obstáculos epistemológicos pero a la vez son el origen de muchos conceptos estadísticos, haremos una primera categorización basándonos en las recomendaciones realizadas por algunos educadores estadísticos ([18] [3]), quienes indican que es importante, a un nivel introductorio, incluir la enseñanza de:

- técnicas apropiadas que permitan describir proporciones y porcentajes expresados en lenguaje cotidiano que indiquen diversos significados en relación a los conceptos estocásticos que involucran. Por ejemplo: la sentencia *"el porcentaje de hombres que son corredores"*, ¿tiene el mismo significado que: *"el porcentaje de hombres entre todos los corredores"*?
- lectura e interpretación de tablas y gráficos que involucren distintos tipos de proporciones, razones, tasas y porcentajes.
- Comparación entre proporciones y porcentajes. Por ejemplo: mostrar las diferencias, en relación con los significados y también en relación con el cálculo, entre las siguientes sentencias: Entre los fumadores, los hombres tienen el doble de probabilidades que las mujeres de contraer cáncer de pulmón. Los hombres tienen el doble de probabilidades que las mujeres de llegar a ser fumadores.

Como consecuencia de la revisión presentada y a partir de los trabajos que nuestro grupo ha desarrollado y de los de otros autores ([3], [16], [18], [19], [20]), hemos realizado una categorización inicial de las ideas que consideramos fundamentales para la elaboración de secuencias didácticas para la enseñanza de Estadística.

En consecuencia, consideramos importante establecer claras distinciones entre: Población y población estadística o de interés. Población estadística y variable estadística. Variable estadística y variable aleatoria. Distribución de frecuencias teóricas y de frecuencias empíricas. Muestra aleatoria y no-aleatoria. Frecuencias absolutas y porcentuales, marginales o condicionales. Proporciones, probabilidades y porcentajes. Lectura e interpretación de gráficos estadísticos. Distinción entre distribución de frecuencias, distribución de probabilidad y distribución muestral de un estadístico.

3. Características del trabajo en el aula de estadística con proyectos

En diversas investigaciones ([3], [5]) y planificaciones curriculares (N.C.T.M., 2000; Informe GAISE, 2010) se aconseja trabajar los conceptos estocásticos a partir del desarrollo de proyectos que favorezcan, no sólo la introducción de los conceptos sino también que permitan que el alumno aprecie el carácter metodológico de la Estadística. Otra de las recomendaciones que se realizan es, que la enseñanza basada en proyectos permita trabajar con datos reales y también con datos simulados.

En estos estudios, se plantean diversas razones que muestran las virtudes del trabajo con proyectos. Entre algunas de estas virtudes, una de las más importantes, como señalan Anderson y Loynes ([2]), es que la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística. La historia de la estadística muestra también como ésta recibe ideas y aportes desde áreas muy diversas, donde, al tratar de resolver problemas diversos (por ejemplo: transmisión de caracteres hereditarios, medida de la inteligencia, etc.) se han creado conceptos y métodos estadísticos de uso general (correlación, análisis factorial).

Por otro lado, el trabajo con proyectos permite abordar un proceso de enseñanza y aprendizaje en la que se deben plantear preguntas, ideas, conjeturas que luego deberán comprobarse a través de la evidencia. Esta interacción no suele presentarse en las ejercitaciones planteadas en los libros de texto de uso habitual especialmente en el Nivel de educación Media. Por el contrario, en estas ejercitaciones generalmente se plantean actividades totalmente estructuradas en las que se dan directivas sobre las acciones a realizar, por ejemplo: "calcula la media aritmética". En estos casos, el alumno sólo acata la orden y utiliza un procedimiento puramente algorítmico, en el que se deja totalmente de lado todo el procedimiento estadístico que conlleva al cálculo de una media aritmética, por ejemplo, el análisis del tipo de variable, el tipo de distribución (si es muy asimétrica o si tiene valores alejados, etc.) entre otras cosas, lo cual lleva a un proceso que implica establecer relaciones entre los conceptos de variable estadística, distribución de frecuencias, medidas estadísticas que sean adecuadas al tipo de variable y de distribución, etc.

Como podemos apreciar, los dos procedimientos descriptos provocan dos tipos de aprendizajes muy diferentes: el primero, un aprendizaje acotado y totalmente descontextualizado y el segundo, que permite apreciar las relaciones que deben establecerse cuando una persona se enfrenta a un proceso de toma de decisiones.

En consecuencia, al trabajar con proyectos se coloca a los alumnos en la posición de tener que pensar en preguntas como las siguientes ([13]): ¿Cuál es mi problema? ¿Necesito datos? ¿Cuáles? ¿Cómo puedo obtenerlos? ¿Qué significa este resultado en la práctica?

Como sugiere Holmes [14], si los estudiantes trabajan la estadística por medio de proyectos, se pueden lograr aprendizajes más significativos, que pueden tener implícitas algunas de las siguientes características:

- Los proyectos permiten contextualizar la estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y tienen que ser interpretados.
- Se introducen ideas que no aparecen con los "datos inventados por el profesor o en el libro de texto", como por ejemplo: precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo.
- Se muestra que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

4. Metodología

Ahora bien, dentro de este marco referencial, es que nos planteamos una necesidad inmediata, que es la transposición de estas ideas a la currícula de la enseñanza teniendo en cuenta distintos factores como los avances teóricos metodológicos de la Estadística en los últimos 50 años, especialmente dada por la irrupción del procesamiento automático de datos, la informatización de la sociedad misma y los avances metodológicos en otras disciplinas que "redescubren" en la estadística las implicaciones de su aplicación para la obtención de información del mundo real con distintos propósitos. Todas estas consideraciones confluyen para crear un escenario favorable, desde el punto de vista estadístico, para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, y a su vez, dentro de este marco referencial de intervención en la toma de decisiones y de la relación entre la alfabetización estadística y la alfabetización científica.

Es por todo ello que consideramos un factor de gran relevancia en la enseñanza de la estadística, la utilización de software de distribución libre o de simulaciones que posibilitan la comprensión intuitiva de conceptos estocásticos. Esto se hace más relevante aún, considerando la disponibilidad que actualmente tienen los alumnos de secundaria a través del uso de las netbooks entregadas por los distintos organismos gubernamentales.

El curso se centrará en la discusión de los conceptos fundamentales de la Alfabetización Estadística, las diversas formas de introducir dichos conceptos utilizando herramientas informáticas como simuladores y software de distribución libre. Toda esta discusión estará atravesada metodológicamente por el trabajo a través del planteo y resolución de proyectos en los que se utilice la Estadística como metodología de trabajo para obtener conclusiones.

Aunque en el curso prevemos desarrollar otras actividades, en este trabajo nos centraremos en el análisis de dos actividades basadas en la utilización de simuladores que nos ayudarán a obtener respuestas a las preguntas planteadas. Las actividades mencionadas pueden servir de apoyo en cursos introductorios de Estadística a Nivel Universitario y también pueden utilizarse en cursos de Nivel Medio, para este caso, especialmente la actividad 1.

4.1. Actividad 1: "Distribuciones asociadas al lanzamiento de un dado". [1]

A partir del experimento aleatorio asociado con el lanzamiento de un dado equilibrado de 6 caras, realiza las siguientes actividades:

a. Escribe todos los resultados que podrían aparecer en un lanzamiento de un dado equilibrado.
b. Si consideramos que el dado está equilibrado, ¿qué posibilidades hay de que aparezca cada uno de los resultados enumerados antes? ¿Qué razonamiento has seguido para obtener esas posibilidades?
c. Elabora una tabla en la que presentes los resultados posibles y sus probabilidades asociadas.
d. Si tuvieras que representar gráficamente la información presentada en la tabla, ¿qué gráfico elegirías? ¿A través de qué elementos podés fundamentar tu elección?
e. Confecciona el gráfico seleccionado y describe verbalmente las características de la distribución representada.
f. A continuación analizaremos si las características encontradas en la distribución de probabilidades del lanzamiento de un dado que has construido antes, se pueden observar cuando efectivamente lanzamos un dado. Para ello utilizaremos como herramienta de apoyo el simulador denominado "Modelo de Cajas" que se puede abrir desde la página web: `http://nlvm.usu.edu/`, el cual presenta la apariencia mostrada en la pantalla que presentamos en la Figura 1. Selecciona los números 1 al 6 para colocar en la "caja" de la derecha, de tal forma que te aparezcan como en la Figura 1 y también selecciona la opción que aparece al pie: "Mostrar Probabilidad Teórica". Una vez cumplidos estos pasos, pincha en el botón que dice "Iniciar" y espera hasta que en el indicador de la Cantidad de Selecciones aparezcan 10 selecciones y pulsa el botón "Pausar". Con este procedimiento el

[1] Para realizar esta actividad utilizaremos como herramienta de apoyo el simulador denominado "Modelo de Cajas" que se puede abrir desde la página web: `http://nlvm.usu.edu/`, una vez ubicados en la página, podemos elegir el idioma deseado (se encuentra al pie de la página) y luego seleccionaremos el módulo de Análisis de Datos y Probabilidad del **nivel 9–12** (corresponde al periodo de 2º a 5º año de la Educación Secundaria).

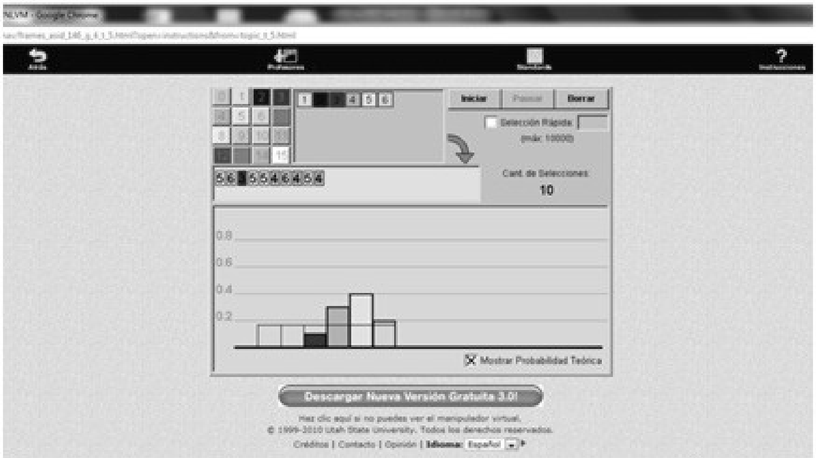


FIGURA 1. Simulador “Modelo de Cajas”

programa habrá simulado 10 lanzamientos de un dado y en el gráfico que aparece debajo te mostrará la distribución de los valores que han aparecido.

g. Teniendo en cuenta el gráfico obtenido y los valores que aparecen en la caja intermedia (entre los valores seleccionados y el gráfico), construye una tabla de frecuencias. Elabora un breve informe con las características de la distribución de frecuencias.
h. Compara las conclusiones extraídas en el punto e y en el punto g, a partir de la distribución de probabilidad y de la distribución de frecuencias respectivamente. ¿Puedes encontrar alguna similitud entre ambas distribuciones? ¿Encontraste diferencias? ¿Cuáles?
i. Ahora utiliza el botón de selección rápida y repite el proceso de los puntos f, g y h, para 50, 100 y 1000 lanzamientos de un dado. Describe verbalmente qué tendencias puedes observar a medida que se aumenta la cantidad de lanzamientos.

4.1.1. Objetivos de la Actividad 1. Algunos de los objetivos que se pretenden lograr a partir del desarrollo de la actividad 1 son:

- Definir espacios muestrales para experimentos aleatorios con eventos equiprobables.
- Obtener probabilidades clásicas y empíricas a partir de la realización virtual del experimento.
- Construir la distribución de probabilidad teórica del experimento.
- Construir la distribución de frecuencias empíricas a partir de la simulación del experimento aleatorio.
- Distinguir entre valores teóricos y empíricos.
- Introducir intuitivamente la Ley de los Grandes Números.

4.1.2. Contenidos de la Actividad 1. A partir de esta actividad se pueden desarrollar los siguientes contenidos o conceptos estocásticos:

- Distribución de probabilidad para eventos equiprobables.
- Distribución de Frecuencias empíricas.
- Aproximación del modelo teórico a la distribución de frecuencias empírica.
- Ley de los Grandes Números y estabilidad de las frecuencias.

Los cuales estarán íntimamente relacionados con conceptos previos como por ejemplo:

- Cálculo de probabilidades para espacios muestrales finitos.
- Definición de espacio muestral y de eventos simples.
- Concepto de frecuencias absolutas y relativas.

4.1.3. Extensión de la Actividad 1. Esta actividad puede extenderse, considerando el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos dados y definiendo la variable aleatoria: "Puntos obtenidos al lanzar dos veces un dado". En este caso, el simulador puede utilizarse de una manera similar a la planteada antes, sólo que se deberán seleccionar los valores correspondientes a la suma de puntos y considerar la distribución de probabilidad asociada ya que los eventos posibles no son equiprobables.

4.2. Actividad 2: "Generación de distribuciones muestrales". [2]

a. Ingresa en la página: `http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html`, una vez ubicado en ella, pincha en el botón que indica: "Begin", te aparecerá una ventana como la que mostramos en la Figura 2. Por defecto aparecerá la distribución de una población sobre la cual trabajaremos a continuación. Analiza y describe las características estadísticas de la distribución presentada por defecto.
b. En el gráfico inmediatamente inferior, pincha en el botón que dice: "Animated", de esta manera se simulará una muestra de cinco elementos extraídos aleatoriamente de la población inicial. Construye la tabla correspondiente a los valores obtenidos en el gráfico (puedes hacerla en una hoja, o directamente cargarla en una hoja de cálculo de GeoGebra). La distribución presentada en este gráfico, ¿tiene alguna característica similar a la de la distribución poblacional?
c. Para cada muestra seleccionada, en el tercer gráfico, se presentará el valor de la media aritmética de la muestra correspondiente. Registra en otra tabla (o en otra columna de la hoja de cálculo) el valor obtenido.
d. Repite 10 veces el proceso indicado en los ítems b y c. Ahora considera la distribución del tercer gráfico, describe si encuentras alguna característica similar a la distribución poblacional o a las distribuciones de algunas de las muestras seleccionadas.
e. Sin borrar los valores que ya han sido seleccionados, ahora pincha en el botón que indica: "1000" ubicado en el segundo gráfico. En este caso, obtendrás los valores correspondientes a 1000 muestras de 5 elementos seleccionados aleatoriamente de la población (en otras palabras, estás repitiendo 1000 veces el proceso del punto b pero de una sola vez), y en el segundo gráfico no se representará nada porque allí sólo se representa cada una de las muestras por separado. Observa el tercer gráfico y describe nuevamente las características que presenta esta distribución. ¿Se puede determinar alguna característica similar a la población? ¿Cuál o cuáles? ¿qué diferencias observas entre ambas distribuciones?
f. ¿Cuál o cuáles piensas que son los motivos para encontrar esas similitudes y esas diferencias?
g. ¿Qué conclusiones podríamos sacar después de repetir el proceso de muestreo varias veces?

4.2.1. Objetivos de la Actividad 2. Algunos de los objetivos que se pretenden lograr a partir del desarrollo de la actividad 2 son:

[2] Esta actividad utilizará como apoyo el applet "Sampling Distributions" que se puede abrir desde la página: `http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html`

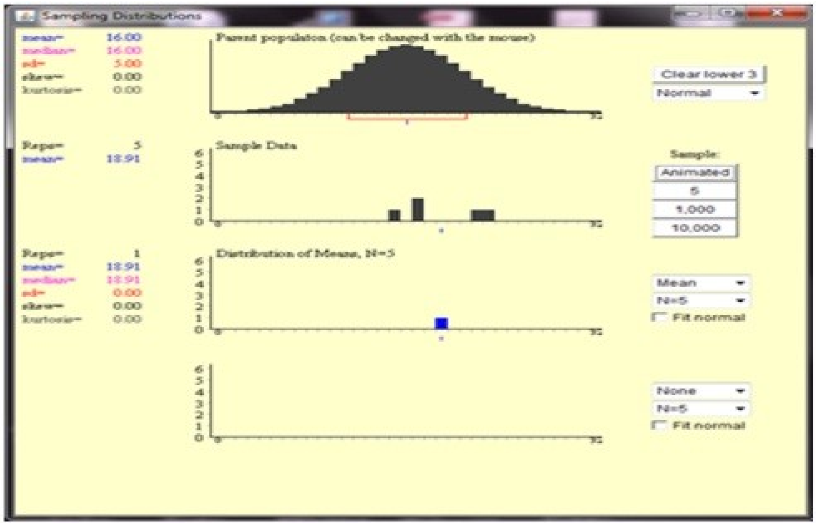


FIGURA 2. Simulador para generar distribuciones muestrales

- Construir distribuciones de frecuencias asociadas a muestras de distintos tamaños.
- Construir distribuciones muestrales de determinados estadísticos.
- Distinguir entre parámetros, estadísticos y estimadores.
- Introducir el concepto de error estándar de una distribución muestral.
- Valorar los fundamentos de la utilización de estadísticos para estimar parámetros.

4.2.2. Contenidos de la Actividad 2. A partir de esta actividad se pueden desarrollar los siguientes contenidos o conceptos estocásticos:

- Modelos de distribuciones de probabilidad.
- Parámetros, estadísticos y estimadores.
- Distribución de Frecuencias empíricas.
- Distribución Muestral de un estadístico.
- Aproximación del modelo teórico a la distribución de frecuencias empírica.
- Análisis de la bondad de ajuste del modelo teórico a partir de la aproximación de los gráficos.
- Propiedades de la distribución muestral de un estadístico.
- Propiedades de los estimadores.
- Teorema Central del Límite.

Los cuales estarán íntimamente relacionados con conceptos previos como por ejemplo:

- Variable aleatoria.
- Variable estadística.
- Concepto de frecuencias absolutas y relativas.
- Medidas de tendencia central.
- Medidas de dispersión.
- Distribución de probabilidad Normal.

4.2.3. Extensión de la Actividad 2. Aunque existen diversas maneras en las que podríamos extender esta actividad a partir del uso del simulador, en este caso proponemos una de entre todas las posibles.

Como extensión de esta actividad puede resultar muy enriquecedor al realizar cada muestreo, utilizar el cuarto gráfico para generar la distribución muestral de otro estadístico, por ejemplo, de la Mediana. De esta forma se puede comparar la distribución muestral de la media y de la mediana, sus centros y dispersiones y de allí, obtener conclusiones sobre la bondad de cada estimador.

5. Implicaciones para la enseñanza

En esta oportunidad hemos presentado dos actividades que pueden trabajarse con el mismo carácter que un proyecto, en el sentido que los alumnos pueden interactuar entre sí y con el docente, estableciendo debates sobre el análisis que van realizando sobre las situaciones planteadas. Hemos desarrollado otros tipos de actividades (presentadas en otros trabajos, por ejemplo, [20]) en los que se plantean proyectos basados en datos reales obtenidos a partir de bases de datos de organismos oficiales como la ONU, IPEC, etc., pero en esta ocasión pretendemos analizar las bondades del uso de applets educativos para introducir en la clase de estadística.

Como podemos observar, se intenta relacionar dos maneras de resolver las cuestiones planteadas: utilizando elementos clásicos como puede ser el papel y el lápiz y también utilizando herramientas informáticas que favorecerán el análisis solicitado en cada oportunidad.

A partir de estas actividades, podemos contribuir a la adquisición de competencias básicas, las cuales enumeramos a continuación:

Competencia en comunicación lingüística. Durante el desarrollo de cada actividad, los alumnos tienen oportunidad de ejercitarse en la construcción y comunicación del conocimiento y en la organización y autorregulación del pensamiento. Además, adquieren destrezas y actitudes (en el sentido usado por Gal, 2004) como puede ser formar un juicio crítico, generar ideas y disfrutar expresándose tanto de forma oral (exponiendo las conclusiones obtenidas a sus compañeros) como de forma escrita (redactando el informe solicitado).

Competencia matemática. Puesto que en ambas actividades deben utilizar y relacionar números enteros, fraccionarios y decimales, los alumnos deberán aplicar operaciones básicas, símbolos, formas de expresión y razonamiento matemático. Utilizan proporciones y también ponen en práctica procesos de reflexión que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información, por medio del reconocimiento de las técnicas apropiadas. En las situaciones planteadas, los alumnos tendrán la oportunidad de integrar el conocimiento matemático con el conocimiento estadístico, por ejemplo, cuando obtienen la distribución de probabilidad del lanzamiento de un dado, están relacionando distintos campos numéricos con el concepto de probabilidad y de distribución de probabilidad. Por otro lado, cuando construyen gráficamente la distribución de probabilidad, tienen la oportunidad de apreciar que los ejes cartesianos se pueden utilizar en contextos diferentes, como puede ser justamente la construcción de una distribución de probabilidad si trabajamos con un concepto estocástico o de una función lineal, si trabajáramos específicamente en un modelo matemático o en la representación de la velocidad de un móvil si estamos representando una situación determinada en Física.

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico. El trabajo propuesto a partir de estas actividades también permitirá identificar preguntas, elaborar conjeturas como por ejemplo en el Actividad 2, una conjetura que podría plantearse es que, si se toman muestras aleatorias independientes del mismo tamaño de una población con distribución normal y con determinadas media y varianza, entonces la distribución muestral de medias se aproximará a una distribución normal que tendrá la misma media de la población pero con una mayor concentración alrededor de la media que la distribución poblacional, lo cual corresponde al concepto de error estándar de la distribución de medias muestrales. Por supuesto, la conjetura que puede realizarse a partir del trabajo con la simulación, al comienzo puede ser de carácter intuitivo, justamente el trabajo en el aula y a través del tiempo llevará a formalizar estos resultados a través de los teoremas correspondientes. Por supuesto, este proceso podría llevar algunos años a través de la enseñanza hasta llegar a la definición de los teoremas. Otra cuestión que se genera a partir de estas actividades es que permitirán que el alumno obtenga conclusiones basadas en la evidencia que proporciona la simulación, lo cual le permitirá comprender el proceso de la inferencia y tomar decisiones. Asimismo, se procura una habilidad progresiva para poner en práctica los procesos y actitudes propios del análisis sistemático de una tarea y de la indagación científica, ya que podemos concebir estas actividades como pequeñas investigaciones cuyo objetivo en ambas actividades es encontrar los fundamentos de propiedades teóricas.

Tratamiento de la información y competencia digital. Cuando se propone a los alumnos que recojan la información correspondiente a través de las tablas de distribución o de los gráficos, estamos promoviendo que el alumno se enfrente a procesos de "recogida de datos" y "organización, análisis e interpretación de los datos". Se esta manera permitimos que los alumnos se habitúen a buscar, obtener y procesar información para transformarla en conocimiento. En estos casos estamos contribuyendo al aprendizaje del uso de computadoras y de distintos tipos de software y a adquirir destrezas de razonamiento para organizar la información, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad.

Competencia social y ciudadana. A partir del trabajo propuesto permitiremos adquirir conocimientos diversos y habilidades complejas que permiten participar, tomar decisiones y responsabilizarse de las elecciones y conclusiones adoptadas. Además, permite concientizar a los alumnos de la importancia de la estadística en la sociedad actual, implicándose a través de procesos estadísticos. Debemos aclarar que proponemos que estas actividades se realicen en grupos de 2 o 3 personas, dado que este tipo de trabajo fomenta la cooperación y la valoración del trabajo de los demás. Finalmente, ayuda a tener una actitud crítica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetando las normas de conducta acordadas socialmente.

Competencia para aprender a aprender. Se ejercita la curiosidad de plantearse preguntas, identificar y manejar las diversas técnicas y estrategias con las que afrontar una misma situación problemática y afrontar la toma de decisiones con la información de la que se dispone. Se ejercitan habilidades para obtener información y para transformar dicha información en conocimientos propios y relacionarla con conocimientos previos.

Autonomía e iniciativa personal. Una de las virtudes (especialmente de la actividad 2) es que brinda una buena gama de posibilidades de apertura de la propia actividad, ya que podría plantearse de manera flexible y, una vez descubierta las primeras regularidades, permite analizar distribuciones muestrales de otros estadísticos y obtener conclusiones en función de ellos. Esto permite que los mismos alumnos puedan utilizar otros criterios de análisis, ejercitar su imaginación y llevar adelante las acciones necesarias para encontrar otros tipos de regularidades y, con el tiempo, lograr probar otras conjeturas. Otra virtud de las actividades planteadas es que permiten que el estudiante no dependa tanto del profesor, dado que tiene libertad para elegir las estrategias a seguir para llegar a sus conclusiones.

6. Reflexiones Finales

En este trabajo hemos descripto las características de dos actividades propuestas para el aula de estadística para el Nivel Medio y el Nivel Universitario (en un sentido introductorio en este último) basada en la utilización de software didáctico. También hemos mostrado algunas de las virtudes de este tipo de trabajo, pero no debemos dejar de decir que el planteo de este tipo de propuestas debe ser siempre muy bien pensada y elaborada por el docente de acuerdo a sus propios de intereses de enseñanza y también a los intereses en relación con el aprendizaje que se pretende lograr en los alumnos.

En este sentido, es importante que el docente pueda comprometerse con las tareas planteadas, que es justamente uno de los defectos cuando se utilizan actividades extraídas de libros de texto, no sólo porque el docente no ha estado comprometido en la elaboración de esa tarea sino porque generalmente, los autores de libros de texto deben seguir ciertas normas y presentar cuestiones que no están pensadas para cada grupo en particular. Es por ello que fomentamos la idea de elaborar nuestras propias actividades en función del interés de los grupos con los que trabajamos y además, propiciamos la idea de utilizar las herramientas que están disponibles en internet y que pueden ayudarnos a proponer nuestros propios objetivos de enseñanza y aprendizaje. Lo único que puede limitarnos es nuestra propia imaginación.

Debemos aprovechar además los resultados de estudios e investigaciones relacionados con la Educación Matemática y con la Educación Estadística, los cuales también nos aportarán ideas que pueden ayudarnos en la planificación de nuestras clases y de las actividades que propondremos a nuestros alumnos.

Referencias

[1] Aliaga, M.; Cuff, C.; Garfield, J; Lock, R.; Utts, J. y Witmer, J. (2010). *GAISE College Report.* American Statistical Association, http://www.amstat.org/education/gaise/.

[2] Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics.* New York: Wiley.

[3] Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

[4] Batanero, C. (2009). *Retos para la formación estadística de los profesores.* II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, 2009, Braga, Portugal.

[5] Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con Proyectos.* Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.

[6] Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). *Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges.* En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, pp. 3–15.

[7] Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[8] Cravero, M.; Redondo, Y.; Santellán, S. y Tauber, L. (2010). *Relaciones entre Alfabetización Científica y Alfabetización Estadística.* En: Actas de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática. La Pampa.

[9] Gal, I. (2004). *Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities.* En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, pp. 47–78.

[10] Garfield, J.; Delmas, B. y Chance, B. (2003). *The Web based ARTIST: Assesment Resource for improving Statistical Thinking.* En: Assesmenton Statistical Reasoning to EnhanceEducational Quality of AERA Annual Meating, Chicago.

[11] Gil Pérez, D. y Vilches, A. (2006). *Educación ciudadana y alfabetización científica: mitos y realidades.* En: Revista Iberoamericana de Educación, N° 42, pp. 31–54.

[12] Goetz, S. (2008). *Fundamental ideas and basic beliefs in Stochastics.* Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student Teachers. Disponible en: http://fplfachdidaktik.univie.ac.at/fileadmin/contributiongoetzrevised.pdf.

[13] Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school.* Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.

[14] Holmes, P. (1997). *Assessing project work by external examiners.* En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), The assesment challenge in statistics education (pp. 153–164). Voorburg: IOS Press.

[15] Kemp, A.C. (2002). *Implications of diverse meanings for "scientific literacy".* En: P.A. Rubba, J.A. Rye, W.J. Di Biase y B.A. Crawford (eds.): Proceedings of the 2002 Annual International Conference of the Association for the Education of Teachers in Science, pp. 1202–1229, Pensacola, F.L.

[16] Meyer, R. (2006). *El razonamiento inferencial estadístico como metodología y la formación de formadores en educación.* Tesis Doctoral. Universidad Católica de Santa Fe.

[17] N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; N.C.T.M. `http://standards.nctm.org/`.

[18] Schield, M. (2002). *Three Kinds of Statistical Literacy: What should we teach?* Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Ed B. Phillips. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: `http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase`.

[19] Schield, M. (2006). *Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages.* Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Ed B. Phillips. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: `http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase`.

[20] Tauber, L. (2007). *Meaning of stochastic concepts for mathematics students.* Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Ed A. Rossman y B. Chance. Salvador: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: `http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase`.

[21] Tauber, L. (2010). *Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas.* Ciencias Económicas. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL. Año 8, 01, 53–67.

[22] Wallman, K. (1993). *Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society.* En: Journal of the American Statistical Association, Vol 88, N° 421.

Referencias de applets

- National Library of Virtual Manipulatives — Utah State University — Simulador "Modelo de Cajas": `http://nlvm.usu.edu/`
- Simulador sobre Distribuciones Muestrales: `http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html`.

L. Tauber: Facultad de Humanidades y Ciencias — Universidad Nacional del Litoral
E-mail address: estadisticamatematicafhuc@gmail.com

M. Cravero: Facultad de Ciencias Económicas — Universidad Nacional del Litoral
E-mail address: marielacravero@hotmail.com