Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Introducción a la Física

Guías de Trabajos Prácticos

Compilador:
Pedro A. Pury

Presentación:

El presente trabajo de edición de las guías de Trabajos Prácticos de *Introducción a la Física*, lo llevé a cabo durante mi participación en los prácticos de dicha materia durante los años 1993 y 1994, en los cuales fue dictada por el Profesor V. H. Hamity. Por lo tanto, el orden y el contenido de las sucesivas guías es el correspondiente al programa del curso implementado por el Profesor Hamity en dichas opotunidades.

Los problemas que componen la presente recopilación fueron extraídos, en su mayor parte, de guías de esta materia de diversos años anteriores; los cuales a su vez tienen múltiples orígenes, dado que por las características especiales de esta asignatura, no existe una literatura específica que cubra su contenido teórico ni práctico. Es por eso que mi crédito sólo cubre la categoría de compilador del material. Sin embargo, los problemas que integran la última guía, corresponden a una selección de los enunciados que personalmente elaboré para diferentes fechas de exámenes correspondientes a 1993 y 1994. El motivo de su inclusión, es el de proporcionar al estudiante una ejercitación adicional al prepararse para rendir.

Hasta la presente recopilación, no existía una edición de la totalidad de los problemas con un formato uniforme y con cierta unidad de estilo en cuanto a la redacción y a la notación. Creo, sinceramente, que esto constituye mi pequeña contribución como compilador a mejorar la calidad de este material didáctico. Creo tambien que la mayor utilidad de este trabajo radica en que se encuentra en un formato digital. El material fue procesado en su totalidad en LaTeX incorporando inclusive las figuras, quedando a disposición de los docentes de la Facultad los archivos `.tex`. Considero que de esta manera se simplificará en gran medida el trabajo de revisión anual de las guías por parte de las sucesivas cátedras que estén a cargo de la materia.

Es mi deseo proponer la creación de una base de datos digital para docencia en el ámbito de la Facultad. Esta se integraría con el aporte voluntario por parte de los docentes de las guías de trabajos prácticos y los exámenes de las diferentes materias. La disponibilidad del material, en una base digital previamente organizada, simplificaría la búsqueda de problemas y contribuiría a mejorar sucesivamente el nivel de los prácticos de todas las materias.

Por otro lado considero que este material es patrimonio intelectual de nuestra Facultad, y como tal deben ser registrados sus derechos en esta Institución. De esta forma su uso total o parcial en otras facultades de esta Universidad o en otras instituciones deberá realizarse con el explícito reconocimiento de los créditos correspondientes a la Fa.M.A.F..

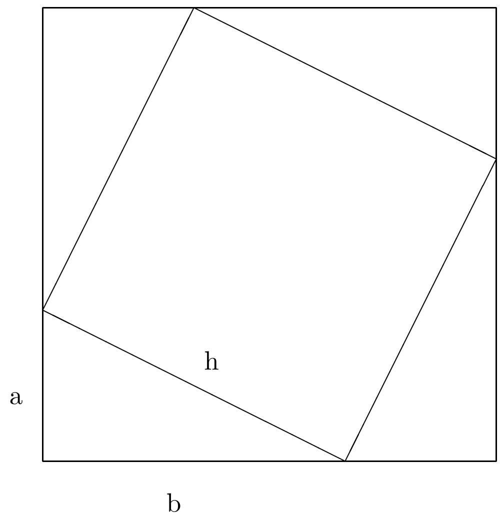
Deseo expresar un especial agradecimiento al Profesor Hamity por la confianza que depositara en mi para la organización de los prácticos de su curso de *Introducción a la Física*. Dicha confianza, lejos de representar una delegación de su responsabilidad, fue el incentivo necesario para encarar con entusiasmo una tarea de por si tediosa.

Pedro A. Pury

Introducción a la Física

Guía N°1

Problema 1: Utilizando la figura que se muestra a continuación, contruya una demostración del teorema de Pitágoras: Para todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa: $a^2 + b^2 = h^2$.



Problema 2: Calcule los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\textbf{a)} & 7\frac{x}{x+8} &= \frac{2}{5} \\
&\textbf{b)} & \frac{3\,(2-x)}{4x} &= 5\,x - 1 \\
&\textbf{c)} & \frac{(3x+2)(x-1/3)}{2} &= -\frac{2}{3}x \\
&\textbf{d)} & \left(-\frac{3}{4}x - 1\right)\left(\frac{x}{2}+3\right) &= \frac{35}{12}x + 47 \\
&\textbf{e)} & (x-4)\,(2+x) &= 0
\end{aligned}$$

Nota: No utilice calculadora!! Para cada caso despeje x en término de fracciones y radicales reducidos.

Problema 3: Ubique en un gráfico los puntos a, b, c y d cuyas ordenadas son: $x_a = 6$; $x_b = -4,5$; $x_c = 0,5$ y $x_d = -2$. Calcule la distancia que hay entre ellos, tomándolos de a pares.

Problema 4: Un automóvil que gasta $0,1$ litros de nafta por kilómetro, recorre un camino que une los puntos a, b, c y d en ese orden. Si las ordenadas de esos puntos son: $x_a = -6,3\,\mathrm{km}$; $x_b = 13\,\mathrm{km}$; $x_c = 25\,\mathrm{km}$ y $x_d = 8,4\,\mathrm{km}$, calcule cuánta nafta gastó en su recorrido desde a hasta d y a que distancia del punto de partida se encuentra el auto al terminar su recorrido.

Problema 5: Considere un cuerpo que se mueve verticalmente partiendo de un punto de ordenada $4,2\,\mathrm{m}$ y que pasa en forma sucesiva por los puntos de ordenadas $6,8\,\mathrm{m}$, $-3,1\,\mathrm{m}$, $-1,8\,\mathrm{m}$ y $-7,3\,\mathrm{m}$, para detenerse finalmente en el punto de ordenada $2,5\,\mathrm{m}$. Calcule:

a) la longitud del camino recorrido en la zona de ordenadas negativas,

b) la longitud total del camino recorrido y

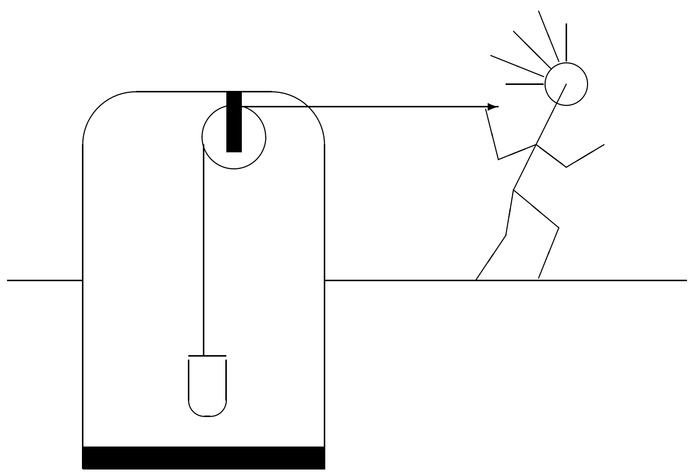
c) la distancia entre los puntos de partida y llegada.

Problema 6: Dado un camino unidimensional con origen en un punto a, las ordenadas de un hombre y de un punto b son, respectivamente, $x_{ah} = 2\,\mathrm{m}$ y $x_{ab} = 5\,\mathrm{m}$.

a) Calcular la distancia entre el hombre y el punto b.

b) Si ahora se toma como origen de las ordenadas el punto c tal que $x_{ac} = -3\,\mathrm{m}$; dar las ordenadas del hombre y de los puntos a y b con respecto al nuevo origen c. ¿Cuál es ahora la distancia resultante entre el hombre y el punto b? Discuta el resultado.

Problema 7: Un hombre saca agua de un pozo con un balde tirando de la soga como se muestra en la figura. Cuando el balde se encuentra sumergido al nivel de la superficie del agua, el hombre se halla en un punto de ordenada $-14,26\,\mathrm{m}$ respecto de algún origen sobre su camino horizontal. Al llegar el balde al nivel del brocal, el hombre se encuentra en el punto de ordenada $4,13\,\mathrm{m}$ respecto del mismo origen. Calcular la longitud mínima que debe tener la soga para poder sacar agua del pozo.



Problema 8: En un sistema de ejes ortogonales, ubique los puntos correspondientes a los siguientes pares ordenados: $(1;3/2)$, $(0;2)$, $(0;-2)$, $(-1;1,5)$, $(2;-1/4)$, $(1/2;0)$ y $(-1;-1)$.

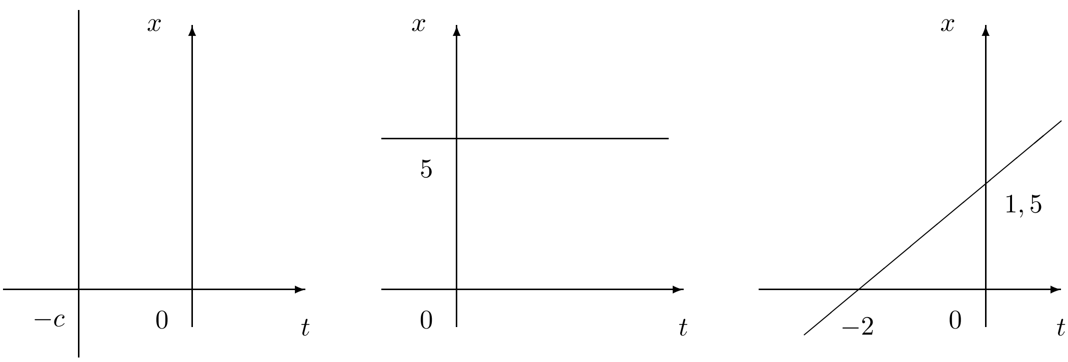
Problema 9: En cada uno de los siguientes casos, dar una expresión matemática para la función descripta:
a) Un rectángulo tiene área A. Expresar el perímetro P en función de la longitud de uno de sus lados y la constante A.
b) Un cajón rectangular tiene volumen V. Los lados de la base son tales que uno es el doble que el otro. Expresar la altura del cajón en función de uno de los lados de la base y la constante V.
c) Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen longitud L. Expresar el área del triángulo en función de la longitud de su base y la constante L.
d) Un rectángulo está inscripto en una semicircunferencia de radio R, con una de sus bases sobre el diámetro. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de su base y la constante R.
e) Para cercar dos parcelas de terreno, una circular y la otra cuadrada, se han utilizado N metros de cerco. Expresar el área total cercada como función de la longitud del lado del cuadrado y la constante N.

Problema 10: En coordenadas cartesianas ortogonales, determinar las ecuaciones de las rectas que determinan los puntos $a = (1;1)$, $b = (-2;1,5)$ y $c = (2;-0,5)$, tomados de a pares.

Problema 11: Si $a = (2;1)$, $b = (4;-2)$ y $c = (-1;-1)$ son tres de los vértices de un paralelogramo $abcd$, hallar las coordenadas del vértice d, las ecuaciones de las diagonales y graficar.

Problema 12: Representar gráficamente las siguientes funciones y en cada caso determinar analítica y gráficamente los puntos de intersección de la curva con los ejes x y t.
a) $x = \frac{3}{2}t - 1,5$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = \frac{1}{2}t + 2$ **d)** $x = -0,75t + \frac{2}{3}$ **e)** $t = 1$.

Problema 13: Dados los siguientes gráficos encontrar una expresión analítica para cada una de las siguientes funciones.



Problema 14: Representar gráficamente las siguientes funciones y en cada caso determinar analítica y gráficamente los puntos de intersección de la curva con los ejes x y t.
a) $x = 2t^2 - t + 1$ **b)** $x = -(1/2)t^2 + t - 1$ **c)** $x = \frac{1}{4}t^2 + 2$ **d)** $x = 0,6t^2 - 2,4t$

Problema 15: Determinar la función cuadrática que pasa por los puntos $a = (0; 3)$, $b = (1; 2)$ y $c = (-2; 11)$.

Problema 16: Dada la función $y = ax^2 + bx + c$, graficar cualitativamente cada uno de los siguientes casos:

a) Suponga que $b = c = 0$ y considere las posibilidades: i) $a > 1$; ii) $0 < a < 1$; iii)$a < 0$.

b) Suponga que $b = 0$ y considere las posibilidades: i) $a > 0$ y $c < 0$; ii) $a > 0$ y $c > 0$.

c) Suponga que $c = 0$ y considere las posibilidades: i) $a > 0$ y $b < 0$; ii) $a > 0$ y $b > 0$.

d) Suponga que $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ y estudie los casos: i) $b^2 > 4ac$; ii) $b^2 < 4ac$ y iii) $b^2 = 4ac$.

Problema 17: Calcular los ceros de la función $y = f(x)$, es decir las raíces de la ecuación f(x) = 0.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 3x^2) - 5x^2 + 18$$

Problema 18: Calcular gráfica y analíticamente las intersecciones entre la hipérbola $y = -\dfrac{3}{x}$ y la recta $y = -x + 2$.

Problema 19: Considere la función:

$$f(x) = \sqrt{(1 + 2x)(3 - x)}$$

definida sobre los reales y que puede tomar valores reales solamente. Determine el intervalo de valores de x para los cuales está definida esta función.

Problema 20: Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $x = \dfrac{a}{t} + b$

b) $x = \dfrac{a}{t^2} + b$

c) $x = \dfrac{a}{t^2 + b^2}$

d) $x = \dfrac{a}{t^n}$, para n par y n impar

e) $x = \dfrac{a}{t^n + c}$, con $c > 0$ y para todo n entero positivo.

Problema 21: ¿Cuáles son los números reales que satisfacen las siguientes condiciones? Ubíquelos sobre la recta real.

a) $x - 5 > 2$	**b)** $7 - x < -2$	**c)** $\dfrac{2}{x-1} < 4$
d) $\lvert x\rvert < 6$	**e)** $\lvert 3x + 1\rvert = 5$	**f)** $\lvert x - 1\rvert < \dfrac{1}{3}$
g) $\lvert 3 - 2x\rvert < 1$	**h)** $\lvert x - 1\rvert = \lvert 2x - 2\rvert$	

Problema 22: Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |x|$, **b)** $y = |x - 1|$, **c)** $y = |x + 1|$, **d)** $y = 2|x| - |x - 1|$,

e)

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ -2x+4, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}.$$

Problema 23: Dados dos números reales u y v, encuentre la relación que se verifica entre $|u+v|$ y $|u| + |v|$. Justifique la respuesta.

Problema 24: Las funciones de movimiento de dos autos A y B son respectivamente:

$$\begin{aligned} x_A[m] &= (1/2)[m/s]t[s] + 2,5[m] \\ x_B[m] &= -2[m/s]t[s] + 4[m] \end{aligned}$$

a) Determinar la distancia que separa a ambos móviles en $t = 2\,\mathrm{s}$.

b) ¿Para qué valor de t y en qué punto x se produce el encuentro de los autos? Resolver el problema analítica y gráficamente.

Problema 25: En el instante $t = 2\,\mathrm{s}$ parten un móvil A desde $x_A = -10\,\mathrm{m}$ y otro B desde $x_B = 0\,\mathrm{m}$. En $t = -1\,\mathrm{s}$, B se halla en $x_B = 2\,\mathrm{m}$, siendo en $t = 0\,\mathrm{s}$ la distancia entre los móviles de $5\,\mathrm{m}$.

a) Determinar las funciones de movimiento de los móviles A y B suponiendo que son de la forma $x = a + bt$.

b) ¿Tiene el problema solución única? ¿Porqué?

c) Determine él o los puntos de encuentro en forma gráfica y analítica.

Problema 26: Las funciones de movimiento de tres móviles son:

$$x_a = -3t^2 + 2t + 8; \quad x_b = -3t + 6; \quad x_c = 2t - 1$$

con x en metros y t en segundos. Determinar analítica y gráficamente los valores de x y t correspondientes a los encuentros de a con b y de b con c.

Introducción a la Física

Guía N°2

Problema 1:

a) Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales:

$$\alpha = 35^\circ \qquad \beta = 245^\circ 36' 3''$$

b) Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales:

$$\alpha = 2\ radianes \qquad \beta = \tfrac{6}{5}\pi\ radianes$$

Problema 2: Utilizando la circunferencia trigonométrica graficar las siguientes funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 3: Conociendo que $\operatorname{sen}\alpha = b$ y que α se encuentra en el segundo cuadrante, calcule el valor de las restantes funciones trigonométricas de α en términos de b.

Problema 4: Demostrar que:

$$\textbf{a)}\ \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\textbf{b)}\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Problema 5: Demostrar que:

$$\textbf{a)}\ \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \textbf{b)}\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \textbf{c)}\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Discrimine según el cuadrantre al cual pertenece α, cuál signo de la raiz cuadrada se aplica en a) y b).

Problema 6: Resolver gráficamente la ecuación: $\operatorname{sen}x = \cos x$. Encuentre una expresión general para los valores de x que son soluciones de la ecuación anterior.

Problema 7: Encuentre los valores de x para los cuales: $\operatorname{sen}x = \dfrac{x}{4\pi} - 1$.

Problema 8: Resolver la siguiente ecuación trascendente: $\operatorname{tg} x - sec\, x = 1$.

Problema 9: Una torre proyecta una sombra de 50 m cuando el sol está a 45° sobre el horizonte. Calcular la altura de la torre.

Problema 10: A 35 m del eje del obelisco de la ciudad de Buenos Aires se sitúa un operador con un teodolito, quien encuentra que el ángulo sustendido por el obelisco es de $61°11'$. Calcule la altura del obelisco teniendo en cuenta que el instrumento está a $1,4$ m del suelo.

Problema 11: Desde el espejo de un faro marino situado a 250 m sobre el nivel del mar se observa un barco bajo un ángulo de depresión de 30°. Calcule la distancia horizontal entre el barco y el faro.

Problema 12: Dos observadores en tierra, separados por una distancia de 1000 m, observan un globo aerostático que se encuentra elevado entre ellos. Ambos observadores y el globo se hallan en un mismo plano vertical. Uno de los observadores mide un ángulo de elevación de 65° y el otro mide 35°. Calcule la altura a la que se encuentra el globo.

Problema 13: Considere los polígonos regulares de n lados inscriptos en un circunferencia de radio R.

a) Verifique que el perímetro de dichos polígonos puede expresarse como:

$$P(n) = 2\,n\,R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

b) Verifique que el área encerrada por dichos polígonos puede expresarse como:

$$A(n) = n\,R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

c) Grafique las funciones $P(n)$ y $A(n)$ para n = 3, 4, 5, 6 y 12 (considere $R = 1\,\text{cm}$).

d) Teniendo en cuenta el límite notable $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, encuentre los límites de las sucesiones $P(n)$ y $A(n)$. Interprete geométricamente estos resultados.

e) Encuentre el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{A(n)}{P(n)}$ y compare con el correspondiente cociente entre el área y el perímetro del círculo.

Problema 14:

a) Encuentre las cotas de la función $f(x) = x^2$ para valores de $|x - 2| < \delta$, en los cuatro casos $\delta = 0{,}1$, $\delta = 0{,}01$, $\delta = 0{,}001$, $\delta = 0{,}0001$.

b) Utilizando la definición de límite demuestre que el siguiente límite existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

Problema 15: Calcular los siguientes límites:

$$\textbf{a)}\ \text{lím}_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{4x} \qquad \textbf{b)}\ \text{lím}_{x\to 0}\frac{1-\cos\, x}{x^2}$$

En el caso b) elaborar una adecuada construcción geométrica sobre la circunferencia trigonométrica.

Problema 16: Graficar:

a) En el intervalo $[0,2]$ las funciones:

$$f(x)=x; \quad f(x)=x^2; \quad f(x)=\sqrt{x}; \quad f(x)=x^{1/3}$$

b) En el intervalo $[1,3]$ las funciones:

$$\begin{array}{lcl lcl} f(x) & = & e^x & f(x) & = & x+1 \\ f(x) & = & (x+1)^2 & f(x) & = & \ln x \\ f(x) & = & \sqrt{x-1} & f(x) & = & (x-1)^{1/3} \end{array}$$

Problema 17: Determine de qué orden son los siguientes infinitésimos:

a) $\dfrac{5\,x^2}{3\,x^3-1}$ para $x\to\infty$

b) $\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$ para $x\to 0$

c) $\dfrac{x^{3/2}-x^{1/2}}{x+2}$ para $x\to 0$

d) $\dfrac{x^{3/2}-1}{x^2+2}$ para $x\to\infty$.

Problema 18: Derivar aplicando la definición las siguientes funciones:

$$\textbf{a)}\ f(x)=2\,x-1 \qquad \textbf{b)}\ f(x)=x^3+b \qquad \textbf{c)}\ f(x)=\frac{x^2+a}{x}$$

Problema 19: Derive las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llcl llcl llcl}
\textbf{a)} & f(x) & = & a\,x^2+b\,x+c & \textbf{b)} & f(x) & = & x^3-2\,x & \textbf{c)} & f(x) & = & \dfrac{bx}{x+a}+c\,x^2 \\
\textbf{d)} & f(x) & = & \ln(\operatorname{sen} x^2) & \textbf{e)} & f(x) & = & (a^2-x^2)^{1/2} & \textbf{f)} & f(x) & = & \ln\left(\dfrac{x\,e^x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
\textbf{g)} & f(x) & = & x^2(x+b)^{-1/2} & \textbf{h)} & f(x) & = & \operatorname{sen}\left(2\,x^2\right) & \textbf{i)} & f(x) & = & \operatorname{tg} x \\
\textbf{j)} & f(x) & = & x^3\,x^{1/2} & \textbf{k)} & f(x) & = & \sec(x)\operatorname{sen}(2x) & \textbf{l)} & f(x) & = & \dfrac{x^2+a}{\operatorname{tg}(x^2+a)}
\end{array}$$

Problema 20: Utilizando la regla de L'Hospital y el principio de inducción completa calcule los siguientes límites:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/n}}$$

Problema 21: Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión. Graficar.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4\,x + 9$ **b**) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + a}$ **c**) $f(x) = x^n, \quad n \ natural$

d) $f(x) = x^4 + x^3$ **e**) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **f**) $f(x) = (x+3)^2\,(x-5)$

g) $f(x) = \dfrac{4\,(4\,x+1) - x^2}{13x^3}$

Problema 22: Determinar la función cuadrática $f(x)$ tal que se anula para $x = 3$ y $x = 7$ y tiene un mínimo en x_0 tal que $f(x_0) = -8$.

Problema 23: Estudie la función:

$$y(x) = \frac{T\,x - 1}{x^2} + \frac{1}{3\,x^3}$$

para $x > 0$.

Considerando distintas posibilidades para el valor del parámetro T. En particular:

a) $0 < T < \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{4} \leq T < 1$ **c)** $T > 1$.

Grafique la función en cada uno de estos casos.

Problema 24: ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar un rectángulo de perímetro P?

Problema 25: Determinar el rectángulo inscripto en la elipse de semiejes a y b de lados paralelos a los ejes y de área máxima.

Problema 26: Se quiere construir una caja sin tapa con una hoja de cartón de 10 cm x 80 cm. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que tenga capacidad máxima?.

Problema 27: Sea la función $y(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 8$. Calcular la diferencia entre Δy y dy en $x = x_o$.

Problema 28: ¿Cuál debe ser la longitud de un hilo que rodee la Tierra por una circunferencia máxima?. Si repetimos la operación de manera tal que exista 1 cm entre el hilo y la Tierra, cuánto debemos aumentar la longitud del hilo?. Utilice diferenciales para el cálculo y compare con el valor exacto de variación de la longitud.

Problema 29: Suponga que se quiere rodear la Tierra con una esfera metálica de forma tal que exista entre ambas una capa de aire de 1 cm de espesor. ¿Cuánto más grande debe ser la superficie de la esfera respecto de la superficie de la Tierra?. ¿Y su volumen?. Utilice diferenciales para el cálculo y compare con los valores exactos de la variación de la superficie y el volumen. (Radio de la Tierra: 6400 Km).

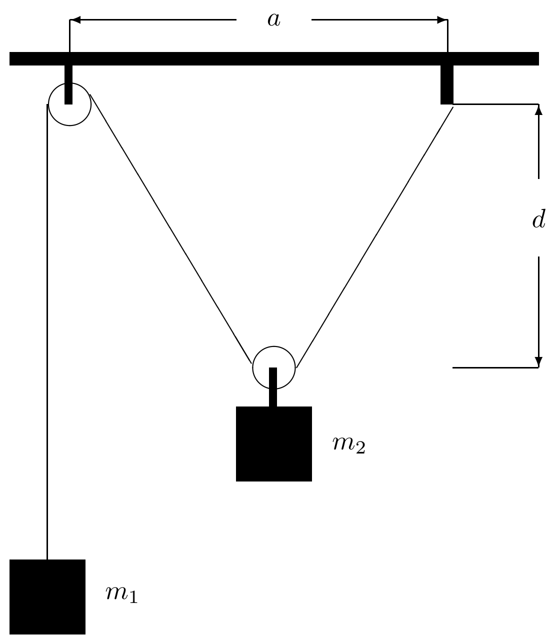
Problema 30: La medida del diámetro de un círculo es $d = 13{,}8\,\text{cm}$, con un error por defecto menor que $0{,}1\,\text{cm}$. Calcular mediante la diferencial el error cometido en la determinación de la superficie.

$$S = \frac{\pi}{4} d^2$$

Comparar con el valor exacto de ΔS.

Problema 31: Demostrar que el error relativo cometido en la determinación del área S de un círculo es igual al doble del error relativo del radio r (se define como error relativo de una magnitud M al cociente dM/M).
Compare dS con el valor exacto de ΔS para $\dfrac{dr}{r} = 0{,}01$ y $r = 10$.

Problema 32: La Figura muestra un sistema compuesto por las masas m_1 y m_2 las cuales se hallan suspendidas de forma tal que mientras m_1 está atada a un extremo de la cuerda, m_2 está colgada del eje de la polea la cual puede deslizar libremente sobre la cuerda. La longitud total de la cuerda es $L = 15\,\text{m}$, $a = 60\,\text{cm}$ y $d = 70\,\text{cm}$. Los radios de ambas poleas son despreciables frente a las dimensiones de a y d.



a) Si la masa m_1 se desplaza $1\,\text{cm}$ hacia abajo, hallar el desplazamiento de la masa m_2 utilizando la diferencial. No utilice calculadora. Compare con el desplazamiento exacto ocurrido.

b) Suponiendo que m_1 se desplaza con velocidad v, calcule la velocidad de la masa m_2.

Problema 33: Considere la siguiente función de movimiento de un cuerpo:

$$x(t) = t^2 - 3\,t\ ,$$

donde $[x] = \mathrm{m}$ y $[t] = \mathrm{s}$.

a) Graficar la función $x(t)$.

b) Determinar analíticamente en todos los casos y gráficamente en los siete primeros, los valores de $\bar{v}$ (velocidad media del móvil) en los siguientes intervalos de tiempo expresados en segundos: $[-1, 5]$, $[-1, 4]$, $[-1, 2]$, $[-1, 1]$, $[-1, -0{,}5]$, $[-1, -0{,}8]$, $[-1, -0{,}9]$, $[-1, -0{,}99]$, $[-1, -0{,}999]$ y $[-1, -0{,}9999]$.

c) Sea $\Delta t_n = t_n - t_0$, con $t_0 = -1\,\mathrm{s}$ y $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 4\,\mathrm{s}$, $\cdots$, $t_{10} = -0{,}9999\,\mathrm{s}$. A medida que Δt_n se hace más pequeño, a qué valor se aproxima la velocidad media del móvil en el intervalo $[-1, -1 + \Delta t_n]\,\mathrm{s}$?. ¿Cómo se interpreta geométricamente este resultado?.

d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $x(t)$ en $t = -1\,\mathrm{s}$.

Problema 34: Las coordenadas de dos móviles están dadas en función del tiempo por:

$$x_1 = -t^2 + 3\,t \qquad\qquad x_2 = \frac{8}{3}t + 4$$

Hallar la mínima distancia que separa a los móviles y el instante en el que están en esa situación.
Graficar: $x_1(t) - x_2(t)$ y $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$

Problema 35: Sabiendo que las funciones de movimiento de los móviles A y B son respectivamente:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2 \qquad\qquad x_B(t) = \frac{3}{2}t - 2$$

a) Calcule la distancia mínima que los separa y el instante de tiempo t_m en que esto se produce.

b) Calcule $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ entre 0 y t_m.

c) Calcule $v_A(t_m)$ y $v_B(t_m)$.

Introducción a la Física

Guía N°3

Problema 1: La función de movimiento de un cuerpo que se desplaza sobre una recta es:

$$x(t) = 8\left[\frac{cm}{s}\right] t - 3\left[\frac{cm}{s^2}\right] t^2 \ ,$$

donde $[x]$ son centímetros y $[t]$ segundos.

a) Calcular la velocidad media del móvil en los intervalos de tiempo (en segundos): [0, 1] y [0, 4].

b) Calcular la velocidad media del móvil para el intervalo $[t,\, t + \Delta t]$.

c) ¿A qué valor tiende esta expresión cuando Δt es muy pequeño?

d) Encuentre él o los puntos en los que el cuerpo está en reposo.

e) Obtenga la expresión general de la aceleración del cuerpo.

f) Grafique la posición, velocidad y aceleración del cuerpo en función del tiempo.

Problema 2: Cada uno de los siguientes cambios de velocidad, tienen lugar en un intervalo de tiempo de 10 s. Calcule para cada intervalo la aceleración media.

a) Al comienzo del intervalo, un cuerpo se mueve hacia la derecha sobre el eje x a la velocidad de $150\,\frac{cm}{s}$; al final del intervalo se mueve hacia la derecha a la velocidad de $600\,\frac{cm}{s}$.

b) Al comienzo del intervalo se mueve hacia la derecha a $600\,\frac{cm}{s}$ y al final hacia la derecha a la velocidad de $150\,\frac{cm}{s}$.

c) Al comienzo se mueve hacia la derecha a $600\,\frac{cm}{s}$ y al final hacia la izquierda a $600\,\frac{cm}{s}$.

d) Al comienzo se mueve hacia la izquierda a $600\,\frac{cm}{s}$ y al final hacia la izquierda a $150\,\frac{cm}{s}$.

Problema 3: Una partícula se desplaza a lo largo del eje x de acuerdo a la ley $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$.

a) ¿Durante qué intervalos de tiempo la partícula se está moviendo en la dirección positiva del eje x?

b) ¿Durante qué intervalos se está moviendo en la dirección negativa del eje x?

c) ¿Durante qué intervalos de tiempo el movimiento es acelerado y en cuáles es retardado?

d) Grafique x, v y a en función del tiempo.

Problema 4: Las ecuaciones de movimiento de tres cuerpos que se mueven sobre un camino unidimensional son: $x_A(t) = 2t^2 - t - 1$, $x_B(t) = t^2/2 + t - 1$ y $x_C(t) = t - 1/4$.

a) Calcule analítica y gráficamente él o los puntos de encuentro de los cuerpos A, B y C.

b) Calcule los instantes en que se producen dichos encuentros.

c) Indique los instantes para los cuales las velocidades de cada cuerpo se anulan.

d) ¿Cuál es la expresión para la aceleración de cada uno de los cuerpos? Grafique $v(t)$ y $a(t)$ para cada uno de los cuerpos.

Problema 5: Un móvil A cuya función de movimiento es $x_A = t^2 + 3t + 4$ se encuentra en el instante $t = 2\,\mathrm{s}$ con un móvil B cuya función de movimiento es $x_B = at^2 + bt + c$. Sabiendo que en $t = 0\,\mathrm{s}$ el móvil B se encuentra 4 metros más lejos del origen que A, y que en $t = -2\,\mathrm{s}$ su velocidad se anula; determine la función de movimiento del móvil B. ¿Existe otra solución?

Problema 6: Un movimiento uniformemente acelerado está dado por una expresión del tipo

$$x(t) = c_1 + c_2\, t + c_3\, t^2$$

siendo c_1, c_2 y c_3 constantes. Tomando: $c_3 = 5\,\dfrac{cm}{s^2}$; y sabiendo que en $t = 3\,\mathrm{s}$, $x = 6\,\mathrm{cm}$ y que en $t = 5\,\mathrm{s}$, $x = 25\,\mathrm{cm}$:

a) Encuentre la aceleración del movimiento

b) Calcule c_1 y c_2.

c) Interprete físicamente los coeficientes c_1, c_2 y c_3.

Problema 7: La función posición de una partícula que se mueve sobre el eje x depende del tiempo de la forma $x(t) = a\, t^2 - b\, t^3$, donde x está en cm y t en s. ¿Qué unidades deben tener a y b? Considerando $a = 3$ y $b = 1$ en las unidades adecuadas, calcule:

a) ¿En qué instante $x(t)$ alcanza un valor máximo como función del tiempo? ¿Es ese el máximo valor posible de $x(t)$?

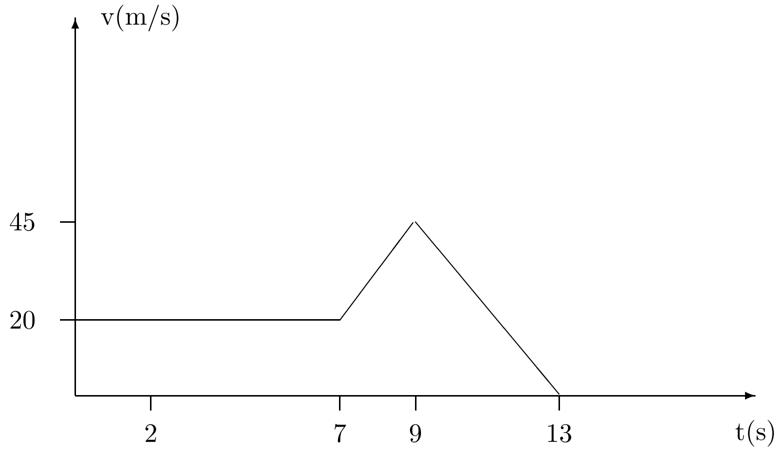
b) Calcule el camino total recorrido en los primeros 4 segundos.

c) Calcule la velocidad y la aceleración de la partícula para $t = 4\,\mathrm{s}$. ¿Es un movimiento uniformemente acelerado?

Problema 8: La aceleración de un cuerpo en movimiento sobre el eje x está dado por $a(t) = 4t^2 - 2t + 8$ donde $[a] = \dfrac{cm}{s^2}$ y $[t] = $s. Calcule una expresión general para la velocidad, sabiendo que la misma es $10\,\dfrac{cm}{s}$ en $t = 0$.

Problema 9: La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dado por $a(t) = 4 - t^2$ donde a se da en $\dfrac{m}{s^2}$ y t en segundos. Encontrar la velocidad y la posición en función del tiempo suponiendo que para $t = 3\,\mathrm{s}$, $v = 2\,\dfrac{m}{s}$ y $x = 9\,\mathrm{m}$.

Problema 10: La figura muestra la velocidad de un móvil en función de t:



a) Determine la aceleración instantánea para $t = 3\,\text{s}$ y $t = 11\,\text{s}$.

b) Calcule los caminos recorridos por el móvil durante los primeros 5, 9 y 13 segundos.

c) Conociendo que $x(7\,s) = 0$, encuentre la posición del móvil en $t = 0\,\text{s}$.

Problema 11: La aceleración de una partícula es: $a = k\,t^2$

a) Sabiendo que $v = -50\,\dfrac{m}{s}$ cuando $t = 0\,\text{s}$ y que $v = 50\,\dfrac{m}{s}$ cuando $t = 5\,\text{s}$, determine la constante k.

b) Escriba $v(t)$ y $x(t)$ sabiendo que $x = 0$ cuando $t = 2\,\text{s}$.

Problema 12: Un cuerpo tiene una aceleración dada por $a = 3\,t$. En $t = 2\,\text{s}$ el cuerpo se encuentra en $x = 1\,\text{cm}$ y en $t = -2\,\text{s}$ está en $x = -7\,\text{cm}$.

a) Calcule la velocidad y la posición del cuerpo en $t = 0\,\text{s}$.

b) Calcule la velocidad del cuerpo en $t = 2\,\text{s}$ y $-2\,\text{s}$.

c) Haga un gráfico cualitativo de la función de movimiento.

d) Grafique v y a en función t

Problema 13: Un tren parte de una estación con una aceleración constante de $0{,}5\,\dfrac{m}{s^2}$, hasta alcanzar una velocidad de $24\,\dfrac{m}{s}$, que luego mantiene constante. Calcular en que instantes la velocidad media es: **a)** $16\,\dfrac{m}{s}$ y **b)** $22\,\dfrac{m}{s}$; y las caminos recorridos al cabo de dichos instantes.

Problema 14: Un automóvil y un camión parten en el mismo instante, encontrándose inicialmente el auto cierta distancia detrás del camión. Este último tiene una aceleración constante de $1{,}2\,\dfrac{m}{s^2}$ mientras que el auto acelera a $1{,}8\,\dfrac{m}{s^2}$. El auto alcanza al camión cuando éste ha recorrido 45 metros.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el auto en alcanzar al camión?

b) ¿Cuál es la distancia inicial entre ambos vehículos?

c) ¿Cuál es la velocidad de cada uno en el momento de encontrarse? Graficar a, v y x en función del tiempo.

Problema 15: Un móvil describe un movimiento armónico simple si su función de movimiento $x(t)$ satisface la siguiente ecuación:

$$a(t) = -C\, x(t)$$

donde $a(t)$ es la aceleración y C una constante ($C > 0$).

a) Pruebe que la función de movimiento:

$$x(t) = A\, \cos(wt) + B\, \mathrm{sen}(wt)$$

satisface la ecuación del movimiento armónico simple tomando $w^2 = C$.

b) Encuentre los valores máximos y mínimos que alcanza $x(t)$ y los instantes de tiempo en los cuales ocurren.

c) Interprete físicamente la constante w.

Problema 16: Una partícula es acelerada en varios intervalos de tiempo de acuerdo a:

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < t < -1 \\ t+1 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 < t < \infty \end{cases}$$

a) Grafique $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ asumiendo que la partícula se encontraba en reposo en el origen en $t = 0$.

b) Calcule la velocidad de la partícula en $t = 2\,\mathrm{s}$ y el camino recorrido entre $t = -2\,\mathrm{s}$ y $t = 2\,\mathrm{s}$.

Problema 17: Dos autos A y B se mueven en la misma dirección con velocidad v_A y v_B. Cuando el auto A se encuentra una distancia d detrás de B se aplican los frenos de A causando una desaceleración constante a. Demostrar que para que no se produzca un choque entre A y B es necesario que: $v_A - v_B < (2\,a\,d)^{1/2}$

Problema 18: El móvil A se mueve con una aceleración $a_A(t) = -4\, sen(2\pi t)$; se encuentra en $t = 2\,\mathrm{s}$ en la posición $x_A = 3\,\mathrm{m}$ siendo su velocidad nula en $t = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{s}$. Calcule él o los puntos de encuentro de A con un segundo móvil B tal que $a_B(t) = 3\,\dfrac{m}{s^2}$, $v_B = 0$ en $t = 0$ y $x_B(1\,s) = -1{,}5\,\mathrm{m}$.

Problema 19: Un tren viaja a una velocidad de $144\,\dfrac{km}{h}$ cuando de pronto el conductor advierte que en la misma vía, 350 metros delante suyo se halla detenido otro tren. Aplica inmediatamente los frenos que le producen una desaceleración constante de $2\,\dfrac{m}{s^2}$. Cuando lleva recorridos 300 metros, el segundo tren al advertir que va a ser embestido logra ponerse en movimiento con aceleración constante.

a) ¿Cuál es el valor mínimo de la aceleración del segundo tren necesaria para evitar la colisión?

b) ¿Cuál es la velocidad de ambos trenes en el momento de máxima proximidad? Realize los cálculos utilizando la aceleración encontrada en a).

c) Suponiendo que el segundo tren arranca con una aceleración de $4\,\dfrac{m}{s^2}$, cuánto vale la mínima distancia a que llegarán a estar separados los trenes? ¿En que instante estarán a esa distancia?

Problema 20: Dos automóviles se acercan el uno hacia el otro a $16\,\frac{m}{s}$ y $12\,\frac{m}{s}$ respectivamente. Cuando se encuentran separados por 120 metros, los dos conductores se dan cuenta de la situación y aplican los frenos. Llegan al reposo al mismo tiempo, justo antes de chocar. Suponiendo una desaceleración constante para los dos automóviles, calcular:

a) El tiempo necesario para que se detengan.

b) La aceleración de cada automóvil.

c) El camino recorrido por cada auto durante la frenada.

Problema 21: Un grifo deja caer gotas de agua a intervalos iguales de tiempo. Cuando una determinada gota B empieza su caída libre, la gota precedente A ha descendido ya 0,3 metros. Determinar la distancia que habrá descendido la gota A durante el tiempo en que la distancia entre A y B haya aumentado a 0,9 metros.

Problema 22: La función de movimiento de un cuerpo respecto de un sistema S es $x(t) = 20t + 8t^2 - t^3$.

a) Transforme esta función de tal forma que dé las coordenadas del cuerpo respecto de un sistema S' cuyo origen se halla a 25 cm a la izquierda de S.

b) Escriba una nueva función de movimiento que dé las coordenadas del cuerpo respecto a un tercer sistema S" que se mueve en la dirección x hacia la derecha con $v = 10\frac{cm}{s}$ respecto a S y cuyo origen en $t = 0$ coincide con el origen de S'.

c) Calcule las expresiones generales de la aceleración y la velocidad del cuerpo en función del tiempo respecto a los tres sistemas.

d) Grafique y compare.

Problema 23: Desde un montacargas que sube con una velocidad de $5\frac{m}{s}$ se deja caer una piedra que llega al suelo en 3 s.

a) ¿A qué altura estaba el montacargas cuando se dejó caer la piedra?

b) ¿Con que velocidad chocó la piedra contra el suelo?

Problema 24: Un ascensor de carga se mueve hacia arriba con velocidad constante de $5\frac{m}{s}$ y pasa a un ascensor de pasajeros que está quieto. Tres segundos más tarde parte hacia arriba el ascensor de pasajeros con una aceleración de $1{,}25\frac{m}{s^2}$. Cuando el ascensor de pasajeros alcanza la velocidad de $10\frac{m}{s}$, continúa con velocidad constante. Dibujar los diagramas $v(t)$ y $x(t)$ y hallar a partir de ellos el tiempo y la distancia necesarios para que el ascensor de pasajeros alcance al de carga.

Problema 25: Por el pozo de una mina caen gotas de agua a intervalos constantes de 1 s. Un ascensor sube por el pozo a velocidad constante de $30\frac{m}{s}$ y es golpeado por una gota de agua cuando se encuentra a 300 metros por debajo del nivel de tierra. ¿Cuándo y dónde golpeará al ascensor la siguiente gota?

Introducción a la Física

Guía N°4

Problema 1: ¿Cuales son las componentes del vector que resulta de la diferencia del vector $p_1 = (-1, 0)$ y el vector $p_2 = (2, -3)$? Calcular el módulo del vector diferencia.

Problema 2: Un vector tiene módulo $M = 13$ y la primera componente del vector es $a_1 = 3$. ¿Cuál es la otra componente?

Problema 3: Dados los vectores $\vec{A} = (3, 2)$; $\vec{B} = (5, -1)$; $\vec{C} = (-4, 3)$ y $\vec{D} = (0, 1)$. Hallar, gráfica y analíticamente, las componentes, módulo, dirección y sentido de los vectores:

a) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$	*d)* $2\,(\vec{A} - 2\,\vec{B} + 3\,\vec{C})$
b) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$	*e)* $3\,\vec{A} - \vec{B} - 2\,\vec{C} + \vec{D}$
c) $6\,(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D} - \vec{C})$	*f)* $5\,\vec{C}$

Problema 4: Sea el vector de componentes $(1/3, 2/3)$. Hallar las componentes del vector de módulo 5 que tiene la misma dirección y sentido que el vector dado.

Problema 5: Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de módulo 3 y 4 respectivamente.

a) Calcule el módulo de la resultante de ambos vectores cuando el ángulo comprendido entre ellos es $\theta = 30^o$.

b) Haga lo mismo para $\theta = 120^o$.

c) Calcule en ambos casos la dirección de la resultante respecto del vector $\vec{A}$.

Problema 6: Dados $\vec{A} = 3\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath}$; $\vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$ y $\vec{C} = \hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$ calcular:

a) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

b) $(\vec{A} - \vec{B}) \,.\, \vec{C}$

c) La distancia que hay entre los extremos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$ (ubicados ambos a partir del mismo origen).

d) El ángulo que forman $(\vec{A} - \vec{B})$ con $\vec{C}$ y $(\vec{A} - \vec{B})$ con $\vec{A}$.

e) Encontrar un vector de módulo uno que sea perpendicular a $\vec{A}$. ¿Cuántas soluciones pueden darse?

Problema 7: Graficar en el plano (x, y) los puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} a)\ 2\,x - 2\,y = 3 & d)\ 2\,x\,y = a^2 \\ b)\ x^2 + y^2 = p^2 & e)\ x^2 = 4\,y \\ c)\ x^2 + y^2 - 4\,x = 0 & f)\ x^2 + y^2 = \sqrt{2}\,(x + y) \end{array}$$

Problema 8: Dada la curva $\gamma(t)$ en forma paramétrica por $x = f(t)$, $y = g(t)$; expresar las condiciones de máximo, mínimo, y punto de inflexión de la curva $y(x)$ en término de las funciones f y g.

Problema 9: Un avión vuela 200 km hacia el NE en una dirección que forma un ángulo de 30^o hacia el este de la dirección norte. En ese punto cambia su dirección de vuelo hacia el NO. En esta dirección vuela 60 Km formando un ángulo de 45^o con la dirección norte.

a) Calcular la máxima distancia hacia el este del punto de partida a la que llegó el avión .

b) Calcular la máxima distancia hacia el norte del punto de partida, a la que llegó el avión.

c) Calcular la distancia a la que se encuentra el avión del punto de partida, al cabo de su recorrido.

Problema 10: Una persona sale por la puerta principal de una casa, camina 300 m hacia el este, 600 m al norte y despues toma una moneda y la deja caer desde un acantilado de 150 m de altura. Establecer un sistema de coordenadas y escribir una expresión para el desplazamiento de la moneda, empleando vectores.

La persona regresa enseguida a la puerta de su casa, recorriendo un camino diferente al de ida. ¿Cuál es el desplazamiento resultante de la persona en su viaje de ida y vuelta?.

Problema 11: La función de movimiento de un cuerpo dada en forma paramétrica es :

$$y(t) = -b\,(t^2 - c^2)\ ; \quad x(t) = c + t$$

donde $b > 0$ y $c > 0$.

a) Encontrar la ecuación de la trayectoria. Graficar.

b) Calcular los vectores velocidad $\vec{v}(t)$ y aceleración $\vec{a}(t)$.

c) Encontrar la dirección y sentido de $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en $t = \frac{3}{2}\,c$.

d) Idem que c) pero para $t = 0$. Dibuje los vectores obtenidos en el gráfico de la trayectoria.

Problema 12: El movimiento de un cuerpo está dado paramétricamente por:

$$x(t) = p\,(at - 1)^2\ ; \quad y(t) = -h\,(at - 1)^2 + h$$

donde p, h y a son constantes positivas.

a) Escribir la ecuación de la trayectoria del cuerpo y graficar.

b) Calcular la velocidad $\vec{v}(t)$ y la aceleración $\vec{a}(t)$.

c) Determinar el instante de tiempo en que el cuerpo se detiene y calcular $\vec{r}$ y $\vec{a}$ para ese instante.

Problema 13: El movimiento en el plano de una partícula está determinado por:

$$x(t) = a\,t^2\ ; \quad y(t) = b\,t^3$$

donde $a = 3\frac{m}{s^2}$ y $b = 2\frac{m}{s^3}$.

a) Calcular la trayectoria de la partícula. Graficar.

b) Calcular la aceleración en $t = \frac{1}{2}$ s.

c) ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración en ese instante?

d) Determinar el instante t_1 en que la aceleración es paralela a la recta $y = x$, y el instante t_2 en que la velocidad es paralela a esa recta.

e) Determinar la velocidad media en el intervalo (t_1, t_2).

Problema 14: Exprese las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas y grafique:

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$, **b)** $r\ \cos(\theta) = 5$, **c)** $r = 6\ cos(\theta)$, **d)** $r = \dfrac{a}{\text{sen}(\theta) \pm b\ \cos(\theta)}$ y **e)** $r^2 = \dfrac{a^2}{\cos(2\theta)}$.

Problema 15: Expresar la siguiente ecuación en coordenadas cartesianas:

$$r = \frac{p}{1 - e\ \cos(\theta)}$$

y grafique considerando los siguientes casos:

a) $e = 0$

b) $e = \pm 1$

c) $0 < e < 1$ (graficar usando la exprexión dada en polares).

d) $e > 1$ (intentar graficar la expresión en cartesianas).

e) ¿Qué pasa si se cambia $\cos(\theta)$ por $\text{sen}(\theta)$?

Problema 16: Graficar las siguientes funciones definidas en coordenadas polares: **a)** $\rho = \text{sen}(\theta)$ y **b)** $\rho = exp(a\ \theta)$.

Problema 17: Dos embarcaderos A y B, situados sobre un río, distan uno del otro 1 Km. Dos hombres han de realizar recorridos desde A hacia B y volver. Uno de los hombres va remando en una barca a la velocidad de $4\,\frac{km}{h}$ tespecto al río. El otro realiza el trayecto por tierra a una velocidad de $4\,\frac{km}{h}$. La velocidad del río respecto de tierra es de $2\,\frac{km}{h}$ en la dirección de A a B. ¿Cuánto tardará cada hombre en efectuar el recorrido?.

Problema 18: Un piloto de avión desea volar hacia el norte. El viento sopla hacia el oeste a $60\frac{km}{h}$. Si la velocidad de vuelo del avión es de $180\frac{km}{h}$ (velocidad con aire en calma). ¿En qué dirección debe poner rumbo el piloto?. ¿Cuál es la velocidad del avión respecto de tierra?. Haga un diagrama vectorial.

Problema 19: Un piloto de avión pone su brújula hacia el oeste y mantiene su velocidad respecto del aire en $120\frac{km}{h}$. Después de volar media hora se encuentra sobre una ciudad situada 75 km hacia el oeste y 20 km al sur de su punto de partida.

a) Calcular la velocidad del viento en magnitud y dirección.

b) Si la velocidad del viento varía, siendo ahora en dirección sur de $60\frac{km}{h}$, ¿En que dirección debería el piloto poner su rumbo a fin de dirigirse hacia el oeste? (Tómese la velocidad del avión de $120\frac{km}{h}$ respecto del aire.)

Problema 20: Una gota de lluvia que cae verticalmente pega contra la ventana de un tren que se mueve a razón de $72\frac{km}{h}$. La gota marca una raya sobre el cristal que forma un ángulo de 10^o con la horizontal. ¿Cuál es la velocidad de caída de la gota?

Problema 21: Un río muy ancho tiene una corriente de $1\frac{m}{s}$ en la dirección positiva del eje x. Una lancha cuya velocidad respecto al agua es de $4\frac{m}{s}$ viaja oblicuamente formando un ángulo de 60^o con la dirección $\hat{\imath}$. En un momento dado, se deja caer desde la lancha una botella que flota, y luego de 20 minutos se decide volver a buscarla. Para lo cual la lancha se detiene y regresa manteniendo su velocidad de $4\frac{m}{s}$ respecto al agua.

a) ¿Hacia dónde debe apuntar la lancha con respecto a la dirección de la corriente para encontrar la botella?

b) ¿Cuánto tardará en regresar a la botella?

c) Describa el problema desde un sistema fijo en tierra.

Problema 22: Un buque atraviesa el canal de Panamá de Este a Oeste a una velocidad de $28{,}8\frac{km}{h}$ medida desde tierra. Un marinero, cuyo paso normal es de $1\frac{m}{s}$, se dirige hacia la popa llevando una bandeja con dos postres; uno de ellos para el capitán (odiado por la tripulación) y el otro para su esposa (única mujer en el barco). El marinero observa divertido como una mosca oscila indecisa entre ambos postres describiendo un movimiento de la forma: $A\ \mathrm{sen}(\omega t)$, siendo $2A$ la separación entre los postres. Calcular: $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ y la trayectoria de la mosca respecto de tierra.

Introducción a la Física

Guía N°5

Problema 1: Todo proyectil moviéndose en las proximidades de la tierra, sufre por acción de la gravedad una aceleración constante. La magnitud y dirección de esta aceleración esta dada por: $\vec{a} = -g\,\hat{\jmath}$ con $g = 10\dfrac{m}{s^2}$. Se considera a x como coordenada horizontal, e y a la coordenada vertical.

a) Calcule el tiempo que tarda en llegar al suelo una piedra que se deja caer desde la cornisa de un edificio de 50 m de altura.

b) Idem si se arroja con una velocidad horizontal de $10\dfrac{m}{s}$.

c) ¿A qué distancia de la primera piedra golpea el suelo la segunda?

d) Trace en un mismo gráfico la trayectoria de ambas piedras.

Problema 2: Una bala es disparada horizontalmente por un cañon situado en una plataforma de 44 m de altura, con una velocidad de salida de $244\dfrac{m}{s}$. Suponga el terreno horizontal y perfectamente plano.

a) ¿Cuánto tiempo permanece la bala en el aire antes de llegar al piso?

b) ¿Cuál es su alcance? Es decir, a qué distancia del cañon choca con el piso?

c) ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de la velocidad cuando llega al suelo?

d) Repita la parte c) para el caso en que la bala se deja caer libremente desde la plataforma.

Problema 3: Un bombardero pica formando un ángulo de 45^o con la vertical y deja caer una bomba desde una altura de 1400 m. La bomba llega al suelo 4 s despues de ser lanzada.

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad del bombardero en el momento de tirar la bomba? Exprese el resultado en $\dfrac{m}{s}$ y en $\dfrac{Km}{h}$.

b) ¿Qué distancia horizontal recorrió la bomba al cabo de los 4 s de ser arrojada?

c) ¿Cuales son las componentes horizontal y vertical de su velocidad en el instante de llegar a tierra?

d) Grafique la trayectoria de la bomba.

Problema 4: Una pelota de beisbol abandona el bate a una altura de 1 m por encima del suelo, formando un ángulo de 45^o con la normal y con una velocidad tal que su alcance horizontal es de 120 m. A los 110 m del bateador se encuentra una valla de 9 m de altura.

a) ¿Pasará la pelota por encima de la valla?. Fundamente su respuesta.

b) Calcule la altura máxima que alcanza la pelota y la velocidad correspondiente en ese momento.

Problema 5: Un jugador lanza una pelota, en una dirección que forma un ángulo de 30^o con la horizontal, con una velocidad inicial de $48\frac{m}{s}$. Un segundo jugador, que se encuentra a una distancia de 100 m en la dirección del lanzamiento, inicia su carrera en el momento del lanzamiento en la dirección que va la pelota; con el fin de tomarla.

a) ¿Con qué velocidad debe correr el segundo jugador para tomar la pelota justo antes de que esta llegue al suelo? (Suponga que la velocidad de carrera es constante).

b) Calcule el ángulo de lanzamiento necesario para lograr el máximo alcance con la misma velocidad inicial de la pelota; y la velocidad del segundo jugador en este caso.

Problema 6: Con un tubo de rayos catódicos se dispara horizontalmente un haz de electrones con una velocidad de $10\frac{m}{s}$ en la región situada entre un par de placas horizontales de 2 cm de largo. Un campo eléctrico entre las placas ejerce sobre los electrones una aceleración constante perpendicular a la dirección inicial del haz, de $10^{17}\frac{cm}{s^2}$. Encontrar:

a) El desplazamiento del haz (dirección y magnitud) cuando sale de las placas.

b) Si se coloca una pantalla a un metro de las placas horizontales, ¿Cuál es el corrimiento del haz con respecto al punto en que incidiría si no estuviese sujeto a dicha aceleración?.

Problema 7: Se disparan diversos proyectiles a una distancia horizontal R del borde de un acantilado de altura h, de tal manera que lleguen al suelo a una distancia horizontal x del pie del acantilado. Si Ud. quiere que x sea lo más chico posible, ¿Cómo ajustaría los valores de θ (ángulo de disparo respecto a la horizontal) y v_o (velocidad inicial)?. Suponga que v_o se puede incrementar hasta cierto valor máximo y que θ puede variar continuamente.

Problema 8: Se apunta un rifle a un blanco colocado a una distancia d de la boca del arma. Ambos están a una altura h respecto del suelo horizontal. Se deja caer el blanco libremente, mediante un mecanismo que lo suelta en el momento en que la bala sale de la boca del rifle.

a) Determine el rango de velocidades inicial de la bala de modo que dé en el blanco antes que este llegue al suelo.

b) ¿A qué altura del suelo choca contra el blanco cuando se dispara con una velocidad inicial dentro de ese rango?

c) Si en lugar de lanzar horizontalmente la bala, se dispara hacia arriba con un cierto ángulo y con una velocidad inicial dentro del rango calculado en **a)** ¿Choca con el blanco en algún momento? ¿Por qué? ¿Y si el disparo es con un ángulo hacia abajo?

Problema 9: El angulo θ (en radianes) girado por una rueda, en función del tiempo (en segundos) viene dado por $\theta = 128\,t - 12\,t^2$.

a) Calcule la velocidad y aceleración angulares al cabo de $10\,\mathrm{s}$.

b) Grafique $\theta(t)$, $w(t)$, $\gamma(t)$.

Problema 10: La posición angular de una partícula que se mueve a lo largo de una circunferencia de radio $1{,}5\,\mathrm{m}$ está dada por la expresión: $\theta = 2\,t^2$; donde θ se da en radianes y t en segundos.

a) Calcule la aceleración tangencial, centrípeta y total de la partícula para todo t.

b) Idem que a) para $t = 5\,\mathrm{s}$ y dibújelos sobre la trayectoria.

c) Calcule la aceleración angular γ.

d) Grafique $\theta(t)$, $w(t)$, $\gamma(t)$, $a_t(t)$, y $a_n(t)$.

Problema 11: Un cuerpo se mueve en el plano $x - y$ de manera que:

$$x = R\,\cos(wt) \quad e \quad y = R\,\mathrm{sen}(wt)$$

En estas expresiones x e y son las coordenadas del cuerpo, t es el tiempo, y R y w son constantes.

a) Encuentre la ecuación de la curva sobre la cual se mueve el cuerpo. ¿Qué significa físicamente la constante w?

b) Calcule las componentes v_x y v_y de la velocidad, y la magnitud y dirección del vector $\vec{v}$. Describa el movimiento del cuerpo.

c) Calcule a_x y a_y y además la magnitud y dirección de la aceleración resultante.

Problema 12: Suponga un cuerpo que realiza un movimiento descripto por las funciones:

$$x(t) = \mathrm{sen}(wt) \;\; ; \quad y(t) = 2\,\cos(wt) + 1$$

siendo $[x]$ = metros, $[y]$ = metros, $[t]$ = segundos.

a) Escribir los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$.

b) Calcular la aceleración tangencial y normal: $a_t(t)$ y $a_n(t)$.

c) Calcular el valor de wt para el cual los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son perpendiculares. ¿Existen otros valores de $w\,t$ para los cuales se cumple esta condición?

d) Determine la trayectoria del cuerpo.

Problema 13: Una rueda gira con aceleracion angular γ dada por: $\gamma = 4\,a\,t^3 - 3\,b\,t^2$; donde t es el tiempo, y a y b constantes. Si la rueda tiene velocidad inicial w_o escriba las ecuaciones de:

a) La velocidad angular y el ángulo descripto en función del tiempo.

b) Grafique $\gamma(t)$, $w(t)$, $\theta(t)$ para $\theta_o = 0$ y $w_o = 0$.

Problema 14: La corona de una bicicleta cuyo radio es 7 cm, parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razon de $0{,}4\dfrac{rad}{s}$, por cada segundo. Dicha corona transmite su movimiento a un piñon de 4 cm de radio.

a) Obtener la relación entre las aceleraciones angulares y los radios de la corona y el piñon.

b) Encontrar el tiempo necesario para que el piñon alcance una frecuencia angular de 300 rpm.

Problema 15: La luna gira alrededor de la tierra completando una revolución en 27,3 dias. Suponiendo una órbita circular de radio $R = 385 \times 10^3$ Km, calcule la magnitud, dirección y sentido de la aceleración de la luna.

Problema 16: El radio de la órbita terrestre (supuesta circular) es de 150×10^6 Km y la tierra la recorre en 365 dias.

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la tierra sobre su órbita en Km/h?

b) ¿Cuál es el módulo de la aceleración de la tierra hacia el sol?

Problema 17: La función de movimiento de una partícula está dada paramétricamente por:

$$x = a_1\,t + b_1, \quad y = a_2\,t + b_2, \quad z = a_3\,t + b_3$$

a) Escribir los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$.

b) Interprete el significado físico de las constantes a_i y b_i.
Suponga en particular: $a_1 = 2\,\dfrac{m}{s}$, $a_2 = \sqrt{2}\,\dfrac{m}{s}$, $a_3 = \sqrt{3}\,\dfrac{m}{s}$, y $b_1 = b_2 = b_3 = 1\,\mathrm{m}$.

c) Grafique la trayectoria.

d) Calcule el módulo de $\vec{v}$.

e) Verifique que los puntos (cuyas coordenadas están expresadas en metros): (1, 1, 1); $(3,\ 1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3})$; y $(5,\ 1+2\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{3})$, pertenecen a la trayectoria de la partícula. ¿En qué instantes de tiempo la partícula se encuentra en dichas posiciones?

f) Calcule las distancias que separan los puntos del item anterior. Relacione estas distancias con los tiempos empleados en recorrerlas.

Introducción a la Física

Guía N°6

Ejemplos de Problemas de Examen

Problema 1: Considere una partícula cuya aceleración está dada por:

$$\vec{a} = -\omega^2 \, \hat{u}_\rho$$

donde $\hat{u}_\rho$ es el versor polar en la dirección radial en el plano x-y, y ω es una constante. Suponga que en el instante inicial dicha partícula se encuentra en la posición $\vec{r_o} = 1\,\hat{\imath}$ y su velocidad es $\vec{v_o} = \omega\,\hat{\jmath} + a\,\hat{k}$ (donde la unidad de distancia está en metros y la de tiempo en segundos).

a) Escriba el vector posición $\vec{r}(t)$ de la partícula.

b) Calcule la aceleración tangencial y normal a la trayectoria.

c) Interprete el significado físico de la constante ω.

d) Dibuje la trayectoria.

Problema 2: Un joven agita una botella de champagne parado sobre el borde de una pista de baile circular de $4\,\mathrm{m}$ de radio que gira con una velocidad angular de $0,25s^{-1}$. Considere que en el momento de saltar el corcho, la botella apuntaba radialmente hacia fuera de la pista, formando el eje de la botella un ángulo de 30^o con la normal al piso, y que se encontraba elevada a una altura de $1,50\,\mathrm{m}$ respecto del piso del salón de baile.

a) Si el corcho toca el piso del salón (sin haber encontrado ningún otro obstáculo en su camino) habiendo recorrido una distancia de $1\,\mathrm{m}$ medida sobre el piso del salón; cuál es la velocidad inicial del corcho respecto de la botella?

b) Describa el movimiento del corcho desde una mesa en el salón lejos de la pista (Es decir escriba el vector posición del corcho como función del tiempo).

c) ¿Cuál es la distancia angular recorrida por el joven en la pista desde que salta el corcho hasta que toca el piso?

Problema 3: Considere un cañon cuya longitud es $L = 5\,\mathrm{m}$, el cual forma un ángulo $\alpha = 60^o$ con la horizontal. La bala ubicada en el fondo del cañon se encuentra a nivel del terreno. Al ser disparada, la bala es acelerada dentro del cañon, desde su posición inicial de reposo hasta que alcanza la boca de salida, según la función:

$$a(t) = a_0 \cos\left(\sqrt{\frac{a_0}{L}}\, t\right)$$

donde $a_0 = 500\dfrac{m}{s^2}$.

a) Determine el instante de tiempo t_L en el cual la bala alcanza la boca del cañon, y la velocidad v_L con la cual es expulsada. Grafique la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ de la bala en su trayecto dentro del cañon.

b) Calcule el instante de tiempo en el que la bala disparada llega al nivel del terreno. Considere la aceleración de la gravedad $g = 10\,\dfrac{m}{s^2}$.

c) Calcule la distancia horizontal que recorre la bala, desde su posición inicial de reposo.

d) Calcule el instante de tiempo en el cual la bala alcanza la altura máxima.

e) ¿Es este tiempo la mitad del calculado en el punto **b)**? Explique.

f) Calcule la distancia horizontal recorrida por la bala cuando se encuentra a máxima altura.

g) Calcule las componentes tangencial y normal a la trayectoria de la aceleración de la bala para todo t.

h) Cuando la bala se encuentra a máxima altura, realice un diagrama vectorial de las componentes tangencial y normal de la aceleración sobre el gráfico de la trayectoria.

Problema 4: Un barco y un submarino viajan en el mar uno sobre el otro hacia el Norte a $8\dfrac{Km}{h}$. El capitán del barco no advierte que en un dado instante comienza a navegar sobre una corriente superficial de $3\dfrac{Km}{h}$ en la dirección NE (45^o respecto al Norte). En el mismo instante el capitán del submarino pone rumbo al Este con una velocidad de $5\dfrac{Km}{h}$.

a) Calcule el desplazamiento del barco respecto del submarino 15 minutos luego del instante de separación.

b) Si ahora el submarino deseara alcanzar al barco, ¿Hacia donde debe colocar su rumbo, suponiendo que su velocidad respecto al agua es de $15\dfrac{Km}{h}$ y que la velocidad del barco y de la corriente superficial siguen siendo las mismas?; ¿Cuanto tiempo le llevará al submarino alcanzar al barco.

Problema 5: La trayectoria de una partícula en el plano es: $y = x^2 + 1$; y se tiene la siguiente función de movimiento: $x(t) = \alpha\, t$, donde la constante α es una incógnita. Un segundo móvil se desplaza en el mismo plano, libre de aceleración, con una velocidad de módulo v_0 y en $t = 0$ su coordenada x es nula.

Si en el instante $t = 1\,\mathrm{s}$ ambos móviles se encuentran de manera tal que se hallan en reposo relativo, determine para el segundo móvil su vector posición como función del tiempo y calcule el valor de la constante α.

Problema 6: Discuta la validez de la siguiente afirmación: "*En los puntos de la trayectoria de una partícula en los cuales su velocidad es nula, el vector aceleración es tangente a la trayectoria*".

Problema 7: En la matinee del último domingo, se vió un indio Sioux que cabalgaba por un desfiladero de montaña sobre su caballo a $18\dfrac{km}{h}$ (esta velocidad sólo posee componente horizontal). Perpendicular al desfiladero corría un camino recto por el cual se desplazaba una carreta con un cargamento de whisky. Cuando la carreta se hallaba en el cruce del camino con el desfiladero, el indio, que en ese momento se encontraba a 60 m de dicho cruce (distancia horizontal) y a una altura de 30 m sobre el nivel del camino, disparó una flecha con una velocidad de $10\dfrac{m}{s}$ respecto al arco. Considerando que la flecha es disparada formando un ángulo de 30^o elevada con respecto a la horizontal y que finalmente atraviesa al conductor de la carreta. Calcule:

a) la dirección (en el plano horizontal) con la cual la flecha fue lanzada,

b) la velocidad de la carreta,

c) el tiempo que tarda la flecha en alcanzar el blanco desde que fue lanzada.

Problema 8: Un aficionado al tango colocó en su viejo fonógrafo un disco de Carlos Gardel. Cuando comenzó a sonar, el tanguero se percató que la placa fonográfica de 78 r.p.m. (revoluciones por minuto) estaba girando a 45 r.p.m.. Al cambiar el selector de velocidad del fonógrafo, el disco pasó de manera uniforme de girar a 45 r.p.m. a girar a 78 r.p.m. en 15 segundos; tras lo cual permaneció con velocidad angular constante y la voz del zorzal criollo se escuchó con inigualable nitidez. Inadvertida por el tanguero, una hormiga negra se hallaba sujeta en la periferia del disco e inmóvil respecto de este. Asumiendo que el disco tiene un diámetro de 30 cm:

a) Calcule el *vector aceleración* de la hormiga desde el instante en que se cambia el selector de velocidad en adelante.

La hormiga harta de los tangos decide dejar el disco y comienza a caminar hacia el centro de manera tal que, con respecto al disco, describe un camino perfectamente radial.

b) Suponiendo la velocidad de la hormiga respecto del disco constante: Exprese el *vector aceleración* de la hormiga respecto al fonógrafo, como función de la distancia radial al centro del disco.

Problema 9: En una centrifugadora se coloca un tubo de ensayos con una muestra líquida desconocida. Al conectarse la centrifugadora, esta produce una aceleración angular dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2\,A(T-t) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases}$$

donde $T = 1\,\text{minuto}$ y $A = 10000\,\text{r.p.m.}^3$. Al girar, el tubo de ensayos adopta una posición casi horizontal, quedando la gota líquida a 30 cm del centro de giro y a una altura de 1 m del piso. Cuando la velocidad angular alcanza el valor de 1000 r.p.m., la muestra se solidifica repentinamente y se rompe el tubo de ensayos liberando la misma.

a) Calcule cuanto tiempo trascurrió desde que se conecta la centrifugadora hasta que llega a 1000 r.p.m..

b) Si en el instante en que se libera la gota su velocidad es perpendicular a una pared del laboratorio a 10 m del centro de la centrifugadora, determine si la gota impacta contra la pared y a qué altura del piso lo hace.

Problema 10: Conocida la trayectoria de una partícula $y = y(x)$, puede afirmarse inmediatamente que $v_y = y'\, v_x$; donde $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Demuestre a continuación, que la derivada respecto al tiempo del módulo de la velocidad $\dot{v}$ cumple:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x}{v}\left[\left(1 + y'^2\right)\dot{v}_x + v_x^2\, y'\, y''\right]$$

En la figura se muestra la trayectoria de un móvil sobre el plano $X - Y$. Se conoce además la siguiente función de movimiento:

$$x(t) = \begin{cases} b \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t}{T}\right) & (0 \leq t \leq T) \\ b & (t > T) \end{cases}$$

a) Grafique para todo $t \geq 0$ las siguientes funciones: $v_x(t)$ y $\dot{v}_x(t)$.

b) Determine en que instantes de tiempo el móvil se encuentra en cada uno de los puntos destacados sobre la figura (I, A, B, C, D, R).

c) Utilizando la información disponible, determine si la aceleración tangencial es paralela o antiparalela al vector velocidad en cada uno de los puntos destacados sobre la figura. Explique en cada uno de los casos su razonamiento.

d) Sobre la figura dibuje un posible vector aceleración para el móvil en cada uno de los puntos destacados.

e) Determine en qué regiones de la trayectoria el movimiento puede ser acelerado; esto es, $\dot{v} > 0$. Explique sus conclusiones.