SUCESIONES ESPECTRALES

JUAN JOSÉ GUCCIONE

Resumen. Este es un apunte introductorio a la teoría de sucesiones espectrales, con énfasis en la construcción de las mismas mediante los pares exactos de Massey.

Índice

Introducción

Este apunte es un curso introductorio a la teoría de sucesiones espectrales. El requisito necesario para abordarlo es manejar la parte del álgebra homológica que se enseña en los cursos y libros introductorios sobre el tema, por ejemplo el clásico de Rotmam [3]. En la primera sección doy las definiciones básicas. Al tratar la convergencia me he limitado a las sucesiones espectrales acotadas, porque creo que eso es lo más conveniente al abordar el tema por primera vez. La segunda sección está dedicada al estudio de los pares exactos introducidos en [2]. Después de pensarlo un poco me decidí a tratar este tema debido a que la operación de tomar sucesivos pares derivados de un par exacto para contruir sucesiones espectrales, me parece una forma muy amable de obtenerlas. Podría objetarse que siendo una construcción recursiva es dificil expresar el resultado final en términos del par exacto con el que se comienza. Pero esta crítica

Date: 15-06-06.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 18G40.
Agradezco a mi hermano Jorge, quien me ayudo a revisar estas notas.

no se sostiene porque es fácil encontrar fórmulas cerradas para los objetos de las distintas caras y los bordes de cada una de ellas. La alternativa hubiera sido dar una construcción directa de la sucesión espectral de un complejo filtrado. En la tercera sección dicha sucesión espectral es derivada inmediatamente de los resultados de la segunda. Las últimas dos seciones son dedicadas a los temas de la hiperhomología (a la Cartan-Eilenberg) y a la Sucesión Espectral de Grothendieck. Para la redacción de estas notas consulté los libros [4],[5] y [1]. Para ponerlas en perspectiva voy a compararlas con las partes correspondientes de los dos primeros. Respecto al contenido esto es fácil. Todos los resultados generales acerca de sucesiones espectrales de [4] están en este apunte y los de este (salvo por una excepción) están en [5][Capítulo 5]. De hecho, en [5] se consideran más ejemplos y se trata la cuestión de la convergencia no acotada. Por ello puede ser conveniente leer ese capítulo luego de este apunte. En cuanto a la presentación traté de que fuera más conceptual. En particular, si bien me limito a trabajar en la categoría de módulos, todas las demostraciones son válidas sin cambio en categorías abelianas que satisfagan las hipótesis adecuadas (ninguna, AB4, AB5, etcétera, dependiendo del resultado).

1. Sucesiones Espectrales

Definición 1.1. Una *sucesión espectral homológica* (que comienza en $a \geq 0$) consiste de los siguientes datos:

1. Una familia (E^r, d^r) $(r \geq a)$, de módulos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-graduados $E^r = E^r_{pq}$ provistos de aplicaciones $d^r_{pq}\colon E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ tales que $d^r \circ d^r = 0$ (de modo que las lineas de pendiente $-(r-1)/r$ en el reticulado E^r son complejos de cadena),
2. Isomorfismos explícitos entre E^{r+1}_{pq} y la homología

$$\mathsf{H}_{pq}(E^r) := \frac{\ker(d^r_{pq})}{\mathsf{Im}(d^r_{p+r,q-r+1})},$$

de E^r en grado (p,q).

El objeto (E^r, d^r) es llamado la *r-ésima cara* de E. Notese que E^{r+1} es un subcociente de E^r. El *grado total* de E^r_{pq} es $n = p+q$. Claramente los morfismos de borde d^r decrecen el grado total en 1.

Dadas sucesiones espectrales E y D, consideremos el conjunto de todas la familias $f\colon E \to D$ de aplicaciones lineales $f^r_{pq}\colon E^r_{pq} \to D^r_{pq}$ (definidas para todo r mayor o igual que un $r_0(f)$) tales que $d^r \circ f^r = f^r \circ d^r$ y f^{r+1} es la aplicación inducida por f^r en homología. Dos de tales familias f y g son *equivalentes* si $f^r = g^r$ a partir de un r_0 (por supuesto, mayor o igual que el máximo de $r_0(f)$ y $r_0(g)$).

Definición 1.2. Los morfismos $[f]\colon E \to D$ son las clases de equivalencia de la relación definida arriba. Las sucesiones espectrales forman una categoría, con la definición evidente de composición.

Un morfismo $[f]\colon E \to D$ está determinado por la primera función $f^{r_0}\colon (E^{r_0}, d^{r_0}) \to (D^{r_0}, d^{r_0})$ de cualquiera de sus representantes. Además, si $f^r\colon (E^r, d^r) \to (D^r, d^r)$ es biyectivo para algún r, entonces f^s lo es para todo $s \geq r$ y $[f]$ es un isomorfismo.

1.1. Situación Dual.

Una *sucesión espectral cohomológica* que comienza en E_a es una familia $E_r = E_r^{pq} (r \geq 0)$ de módulos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-bigraduados, junto con aplicaciones

$$d_r^{pq}\colon E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{pq}$$

tales que $d_r \circ d_r = 0$, e isomorfismos explícitos entre E_{r+1}^{pq} y la cohomología de E_r en E_r^{pq}. En otras palabras $(E_r, d_r)_{r \geq a}$ es una sucesión espectral cohomológica si y sólo si $(E^r, d^r)_{r \geq a}$, donde $E_{pq}^r = E_r^{-p,-q}$ y $d_{p,q}^r = d_r^{-p,-q}$, es una sucesión espectral homológica.

Un *morfismo* de sucesiones espectrales cohomológicas $f\colon (E_r, d_r) \to (\widetilde{E}_r, \widetilde{d}_r)$ no es otra cosa que un morfismo $f\colon (E^r, d^r) \to (\widetilde{E}^r, \widetilde{d}^r)$, de las sucesiones espectrales homológicas asociadas.

De la discusión precedente se sigue que hay una dualidad entre las teorías de sucesiones espectrales cohomológicas y de sucesiones espectrales homológicas. Debido a esto nos concentraremos en las últimas, a las que llamaremos sucesiones espectrales, dejando al lector la tarea de establecer los resultados correspondientes en el caso cohomológico.

La Cara $\mathbf{E}^{\infty}$. Cada uno de los términos E_{pq}^a, de la primera cara de una sucesión espectral E, tiene submódulos

$$0 = B_{pq}^a \subseteq B_{pq}^{a+1} \subseteq \cdots \subseteq B_{pq}^r \subseteq \cdots \subseteq Z_{pq}^r \subseteq \cdots \subseteq Z_{pq}^{a+1} \subseteq Z_{pq}^a = E_{pq}^a,$$

tales que $E_{pq}^r = Z_{pq}^r / B_{pq}^r$. Las familias B_{pq}^r y Z_{pq}^r $(a \leq r < \infty)$ son definidos recursivamente como sigue: B_{pq}^{r+1} es la preimagen de $\operatorname{Im} d_{p+r,q-r+1}^r$ por la proyección canónica $\pi : Z_{pq}^r \twoheadrightarrow E_{pq}^r$ y Z_{pq}^{r+1} es la preimagen de $\ker d_{pq}^r$ por la misma proyección. Introducimos ahora en este esquema los submódulos intermedios

$$B_{pq}^{\infty} = \bigcup_{r=a}^{\infty} B_{pq}^r \qquad \text{y} \qquad Z_{pq}^{\infty} = \bigcap_{r=a}^{\infty} Z_{pq}^r,$$

y definimos $E_{pq}^{\infty} = Z_{pq}^{\infty} / B_{pq}^{\infty}$. La correspondencia $E \mapsto E^{\infty}$ define un funtor de la categoría de sucesiones espectrales en la de módulos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-bigraduados. En efecto, dado un morfismo $[f]\colon E \to D$, cada flecha $f^s\colon E^s \to D^s$ induce un morfismo $[f]^{\infty}\colon E^{\infty} \to D^{\infty}$, por restricción y paso al cociente. Es fácil ver que $[f]^{\infty}$ no depende de s ni del representante f elegido. Además, es evidente que $[\mathrm{id}_E]^{\infty} = \mathrm{id}_{E^{\infty}}$ y $[f]^{\infty} \circ [g]^{\infty} = ([f] \circ [g])^{\infty}$.

Sucesiones Espectrales Acotadas. Una sucesión espectral E *es acotada* si para cada entero n hay sólo finitos términos no nulos E_{pq}^a con $p+q = n$. En este caso, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ existe un r_0 (que depende de p y q) tal que $E_{pq}^s = E_{pq}^{r_0}$ siempre que $s \geq r_0$. En consecuencia, $B_{pq}^s = B_{pq}^{r_0}$, $Z_{pq}^s = Z_{pq}^{r_0}$ y $E_{pq}^{\infty} = Z_{pq}^s / B_{pq}^s$ para todo $s \geq r_0$.

Decimos que una sucesión espectral acotada E *converge* a un módulo graduado H, y escribimos

$$E_{pq}^a \Rightarrow H_{p+q},$$

si cada componente H_n está provisto de una filtración finita

$$0 = F_s\, H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}\, H_n \subseteq F_p\, H_n \subseteq F_{p+1}\, H_n \subseteq \cdots \subseteq F_t\, H_n = H_n.$$

tal que $E_{p,n-p}^{\infty} \cong F_p\, H_n / F_{p-1}\, H_n$ para todo p.

Sucesiones Espectrales en el Primer Cuadrante. Un sucesión espectral E está en el *primer cuadrante* si $E_{pq}^a = 0$ siempre que $p < 0$ o $q < 0$. Es claro que toda sucesión espectral que está en el primer cuadrante E es acotada y que si $E_{pq}^a \Rightarrow H_{p+q}$, entonces

$$0 = F_{-1}\, H_n \subseteq F_0\, H_n \subseteq \cdots \subseteq F_n\, H_n = H_n.$$

El término inferior de la filtración $E_{0n}^{\infty} = F_0\, H_n$ está localizado en el eje y y el cociente superior $E_{n0}^{\infty} = H_n / F_{n-1}\, H_n$ en el eje x. Como las flechas de las caras de E que llegan al eje x y las que salen del eje y son nulas, E_{n0}^{∞} es un subobjeto de E_{n0}^a y E_{0n}^{∞} es un cociente de E_{0n}^a. Las aplicaciones

$$H_n \twoheadrightarrow E_{n0}^{\infty} \hookrightarrow E_{n0}^a \qquad \text{y} \qquad E_{0n}^a \twoheadrightarrow E_{0n}^{\infty} \hookrightarrow H_n$$

son llamadas *morfismos* de *eje*.

Definición 1.3. Una sucesión espectral E colapsa en E^r si su r-ésima cara tiene una sóla fila o columna no nula.

Si E colapsa en E^r y converge a H, entonces H_n es el único E_{pq} no nulo con $p+q=n$.

Supongamos que la primer cara E^a de una sucesión espectral E que converge a H tiene sólo dos columnas no nulas. Es decir, existen $s<t$ tales que $E^a_{pq}=0$ salvo, eventualmente, cuando $p\in s,t$. En esta situación, si $t-s<a$, entonces $E^a=E^\infty$ y hay sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow E^a_{s,n-s} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^a_{t,n-t} \longrightarrow 0 \qquad (n\in\mathbb{Z}).$$

En cambio, si $t-s\ge a$, entonces $E^a=E^{a+1}=\cdots=E^{t-s}$,

$$E^{t-s+1}_{pq}=\begin{cases}0 & \text{si } p\ne s,t,\\ E^{t-s}_{pq}/d^{t-s}(E^{t-s}_{t,q+s-t+1}) & \text{si } p=s,\\ \ker d^{t-s}_{pq} & \text{si } p=t\end{cases}$$

y $E^{t-s+1}=E^\infty$. En consecuencia, hay sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow E^\infty_{s,n-s} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^\infty_{t,n-t} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow E^\infty_{t,n-t+1} \longrightarrow E^a_{t,n-t+1} \xrightarrow{d^{t-s}} E^a_{s,n-s} \longrightarrow E^\infty_{s,n-s} \longrightarrow 0\ .$$

Pegándolas se obtiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow E^a_{t,n-t+1} \xrightarrow{d^{t-s}} E^a_{s,n-s} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^a_{t,n-t} \xrightarrow{d^{t-s}} E^a_{s,n-s-1} \longrightarrow \cdots\ . \tag{1.1}$$

Supongamos ahora que la primer cara E^a de E tiene sólo dos filas no nulas. Es decir, existen $s<t$ tales que $E^a_{pq}=0$ salvo, eventualmente, cuando $q\in s,t$. En esta situación, si $t-s+1<a$, entonces $E^a=E^\infty$ y hay sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow E^a_{n-t,t} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^a_{n-s,s} \longrightarrow 0 \qquad (n\in\mathbb{Z}).$$

En cambio, si $t-s+1\ge a$, entonces $E^a=E^{a+1}=\cdots=E^{t-s+1}$,

$$E^{t-s+2}_{pq}=\begin{cases}0 & \text{si } q\ne s,t,\\ E^{t-s+1}_{pq}/d^{t-s+1}(E^{t-s+1}_{p+t-s+1,s}) & \text{si } q=t,\\ \ker d^{t-s+1}_{pq} & \text{si } q=s\end{cases}$$

y $E^{t-s+2}=E^\infty$. En consecuencia, hay sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow E^\infty_{n-t,t} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^\infty_{n-s,s} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow E^\infty_{n-s+1,s} \longrightarrow E^a_{n-s+1,s} \xrightarrow{d^{t-s+1}} E^a_{n-t,t} \longrightarrow E^\infty_{n-t-1,t} \longrightarrow 0\ .$$

Pegándolas se obtiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow E^a_{n-s+1,s} \xrightarrow{d^{t-s+1}} E^a_{n-t,t} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^a_{n-s,s} \xrightarrow{d^{t-s+1}} E^a_{n-t-1,t} \longrightarrow \cdots\ . \tag{1.2}$$

Aplicación. Esta aplicación requiere algunos conocimientos de Topología Algebraica. Dado un espacio topológico X, denotaremos con $\mathsf{H}(X)$ a la homología singular de X. Más generalmente, dado un grupo abeliano A denotaremos con $\mathsf{H}(X, A)$ a la topología singular de X con coeficientes en A. Una *fibración de Serre* es una sucesión de espacios topológicos punteados

$$F \overset{i}{\hookrightarrow} T \overset{p}{\twoheadrightarrow} B$$

tal que F es la preimagen $p^{-1}(*)$ del punto distinguido de B y p tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a los poliedros finitos: dados un poliedro finito P, una función continua $f\colon P \to T$ y una homotopía $H : P \times [0,1] \to B$ de $p \circ f = H(-,0)$ en $H(-,1)$, existe $F\colon P \times [0,1] \to T$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "-\times 0"'] & T \arrow[d, "p"] \\ P \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "F"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Dada una fibración de Serre $F \overset{i}{\hookrightarrow} T \overset{p}{\twoheadrightarrow} B$, con B conexo y símplemente conexo, hay una sucesión espectral en el primer cuadrante que comienza en E^2 y converge a la homología singular de T:

$$E^2_{pq} = \mathsf{H}_p(B, \mathsf{H}_q(F)) \Rightarrow \mathsf{H}_{p+q}(T).$$

Es la sucesión espectral de Leray-Serre. Si B es la n-esfera S^n ($n \geq 2$), entonces, por la fórmula de Künneth,

$$E^2_{pq} = \mathsf{H}_p(S^n, \mathsf{H}_q(F)) = \mathsf{H}_p(S^n) \otimes \mathsf{H}_q(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin \{0, n\}, \\ \mathsf{H}_q(F) & \text{si } p \in \{0, n\}. \end{cases}$$

Aplicando 1.1, obtenemos la sucesión la sucesión exacta de Wang

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_q(F) \longrightarrow \mathsf{H}_q(T) \longrightarrow \mathsf{H}_{q-n}(F) \longrightarrow \mathsf{H}_{q-1}(F) \longrightarrow \mathsf{H}_{q-1}(T) \longrightarrow \cdots .$$

En particular $\mathsf{H}_q(F) = \mathsf{H}_q(T)$ para $0 \leq q \leq n-2$. En cambio, si F es la n-esfera S^n ($n \geq 0$), entonces

$$E^2_{pq} = \mathsf{H}_p(B, \mathsf{H}_q(S^n)) = \mathsf{H}_p(B) \otimes \mathsf{H}_q(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \notin \{0, n\}, \\ \mathsf{H}_q(B) & \text{si } q \in \{0, n\}, \end{cases}$$

y aplicando 1.2, obtenemos la sucesión la sucesión exacta de Gysin

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_{p-n}(B) \longrightarrow \mathsf{H}_p(E) \longrightarrow \mathsf{H}_p(B) \longrightarrow \mathsf{H}_{p-n-1}(B) \longrightarrow \mathsf{H}_{p-1}(E) \longrightarrow \cdots .$$

En particular $\mathsf{H}_p(E) \simeq \mathsf{H}_p(B)$ para $0 \leq p < n$.

Ejercicios.

1. (Sucesión exacta de términos de grado bajo) Sea E una sucesión espectral en el primer cuadrante, que comienza en E^a ($a \leq 2$) y converge a H. Pruebe que hay una sucesión exacta
$$H_2 \longrightarrow E^2_{20} \xrightarrow{d^2} E^2_{01} \longrightarrow H_1 \longrightarrow E^2_{10} \longrightarrow 0 .$$
2. (Sucesión exacta de términos de grado bajo en el caso cohomológico) Sea E una sucesión espectral cohomológica en el primer cuadrante, que comienza en E^a ($a \leq 2$) y converge a H. Pruebe que hay una sucesión exacta
$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{01} \xrightarrow{d_2} E_2^{20} \longrightarrow H^2 .$$

2. Pares Exactos

Un *par exacto (homológico)* es una upla $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$, donde E y D son módulos $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-graduados y $\alpha\colon D\to D$, $\beta\colon D\to E$, $\gamma\colon E\to D$ son morfismos homogeneos, de grado $(1,-1)$, $(-a,a)$ (para algún $a\in\mathbb{N}_0$) and $(-1,0)$, respectivamente, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

es exacto. Un *morfismo* de pares exactos $(f,g)\colon(D,E,\alpha,\beta,\gamma)\to(\breve{D},\breve{E},\breve{\alpha},\breve{\beta},\breve{\gamma})$ es un par de morfismos homogeneos $f\colon D\to\breve{D}$ y $g\colon E\to\breve{E}$, de grado $(0,0)$, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "f"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dd, "f"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[dd, "g"] & \\ \breve{D} \arrow[rr, "\breve{\alpha}"] & & \breve{D} \arrow[dl, "\breve{\beta}"] \\ & \breve{E} \arrow[ul, "\breve{\gamma}"] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Los pares exactos forman una categoría, con la definición evidente de composición.

Proposición 2.1. *Cada complejo de cadena filtrado C tiene asociado en forma natural un par exacto $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$, con β de bigrado $(0,0)$, donde $D_{pq}=H_{p+q}(F_p\,C)$ y $E_{pq}=H_{p+q}(\frac{F_p\,C}{F_{p-1}\,C})$. Las funciones α, β y γ están inducidas por la inclusión $F_{\bullet-1}\,C\hookrightarrow F_\bullet\,C$, la proyección canónica $F_\bullet\,C\twoheadrightarrow\frac{F_\bullet\,C}{F_{\bullet-1}\,C}$ y el morfismo de borde de C, respectivamente.*

Demostración. Para cada $p\in\mathbb{Z}$, la sucesión exacta corta de complejos

$$0\longrightarrow F_{p-1}\,C\longrightarrow F_p\,C\longrightarrow F_p\,C/F_{p-1}\,C\longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga

$$\cdots\longrightarrow D_{p-1,q+1}\xrightarrow{\alpha}D_{pq}\xrightarrow{\beta}E_{pq}\xrightarrow{\gamma}D_{p-1,q}\xrightarrow{\alpha}D_{p,q-1}\longrightarrow\cdots.$$

El par exacto cuya existencia debemos probar, se obtiene juntando todas estas sucesiones. La última afirmación es inmediata. □

La Sucesión Espectral Asociada a un Par Exacto. Cada par exacto $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$ tiene asociado un nuevo par exacto $(D',E',\alpha',\beta',\gamma')$, llamado *par exacto derivado* de $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$, el cual es construído como sigue:

- $D':=\alpha(D)$ y $E':=\frac{\ker\beta\circ\gamma}{\mathsf{Im}\,\beta\circ\gamma}$ $((\beta\circ\gamma)^2=0$ porque $\gamma\circ\beta=0)$.
- $\alpha':=\alpha_{|D'}$
- Consideremos la función $\overline{\beta}=\pi\circ\beta_1$, donde $\pi\colon\ker\beta\circ\gamma\to E'$ es la proyección canónica y β_1 es la correstricción de β a $\ker\beta\circ\gamma$. Definimos $\beta'\colon D'\to E'$ como el único morfismo

que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\overline{\beta}"] \arrow[d, "\alpha"'] & E' \\ D' \arrow[ur, dotted, "\beta'"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

el cual existe porque $\overline{\beta}$ se anula en $\ker\alpha = \mathsf{Im}\,\gamma$.

- Sea $\gamma_1\colon \ker\beta{\circ}\gamma \to D'$ la aplicación inducida por γ via restricción del dominio y correstricción del codominio. Definimos $\gamma'\colon E' \to D'$ como el único morfismo que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} \ker\beta\circ\gamma \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\pi"'] & D' \\ E' \arrow[ur, dotted, "\gamma'"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

el cual existe porque $\gamma(\mathsf{Im}\,\beta{\circ}\gamma) = 0$.

Es inmediato que α' y γ' tienen bigrado $(1,-1)$ y $(-1,0)$, respectivamente y, que si β tiene bigrado $(-a,a)$, entonces β' tiene bigrado $(-a-1,a+1)$. Para verificar que $(D',E',\alpha',\beta',\gamma')$ es en verdad un par exacto sólo resta ver que $\ker\beta' = \mathsf{Im}\,\alpha'$, $\ker\gamma' = \mathsf{Im}\,\beta'$ y $\ker\alpha' = \mathsf{Im}\,\gamma'$. Pero

$$\begin{aligned} \ker\beta' &= \alpha(\beta^{-1}(\beta{\circ}\gamma(D))) = \alpha(\gamma(D)+\ker\beta) = \alpha(\ker\beta) = \mathsf{Im}\,\alpha', \\ \ker\gamma' &= \pi(\ker\gamma) = \pi(\mathsf{Im}\,\beta) = \mathsf{Im}\,\beta' \end{aligned}$$

y

$$\ker\alpha' = D'\cap\ker\alpha = \ker\beta\cap\mathsf{Im}\,\gamma = \mathsf{Im}\,\gamma_1 = \mathsf{Im}\,\gamma',$$

donde, como antes, $\gamma_1\colon \ker\beta{\circ}\gamma \to D'$ es la aplicación inducida por γ.

Observación 2.2. La correspondencia $(D,E,\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (D',E',\alpha',\beta',\gamma')$ deviene en un endofuntor de la categoría de pares exactos, si asignamos a cada morfismo

$$(f,g)\colon (D,E,\alpha,\beta,\gamma) \to (\breve{D},\breve{E},\breve{\alpha},\breve{\beta},\breve{\gamma})$$

el morfismo

$$(f',g')\colon (D',E',\alpha',\beta',\gamma') \to (\breve{D}',\breve{E}',\breve{\alpha}',\breve{\beta}',\breve{\gamma}'),$$

donde f' y g' son las aplicaciones inducidas por f y g, respectivamente.

Dado un par exacto $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$, con β de bigrado $(-a+1,a-1)$, consideremos la sucesión de pares exactos $(D^r,E^r,\alpha^r,\beta^r,\gamma^r)_{r\ge a}$, definida recursivamente por

- $(D^a,E^a,\alpha^a,\beta^a,\gamma^a) = (D,E,\alpha,\beta,\gamma)$,
- $(D^{r+1},E^{r+1},\alpha^{r+1},\beta^{r+1},\gamma^{r+1}) = (D^{r\prime},E^{r\prime},\alpha^{r\prime},\beta^{r\prime},\gamma^{r\prime})$.

Proposición 2.3. *La familia $E = (E^r,d^r)_{r\ge a}$, donde $d^r = \beta^r{\circ}\gamma^r$, es una sucesión espectral. Además, los módulos de la sucesión*

$$0 = B^a_{pq} \subseteq B^{a+1}_{pq} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^{a+1}_{pq} \subseteq Z^a_{pq} = E^a_{pq}, \tag{2.3}$$

introducida al definir la cara E^∞, satisfacen

$$Z^r = \gamma^{-1}(\alpha^{(r-a)}(D)) \qquad y \qquad B^r = \beta(\ker\alpha^{(r-a)})$$

para todo $r > a$, donde $\alpha^{(r-a)}$ denota a la composición de $r-a$ copias de α.

Demostración. La primera afirmación es inmediata. Pasemos a la segunda. Por definición

$$Z^{a+1} = \ker d^a = \ker \beta{\circ}\gamma = \gamma^{-1}(\alpha(D)) \qquad \text{y} \qquad B^{a+1} = \mathsf{Im}\, d^a = \mathsf{Im}\, \beta{\circ}\gamma = \beta(\ker \alpha).$$

Supongamos que

$$Z^{a+l} = \gamma^{-1}(\alpha^{(l)}(D)) \qquad \text{y} \qquad B^{a+l} = \beta(\ker \alpha^{(l)})$$

para todo par exacto $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ (cualquiera sea el bigrado $(-a+1, a-1)$ de β) y todo l entre 1 y n inclusive. Sea

$$\pi_a \colon Z^{a+1} \to Z^{a+1}/B^{a+1} = E'^{a+1}$$

la proyección canónica. Por la conmutatividad de los diagramas 2.1 y 2.2 y la hipótesis inductiva (aplicada al par exacto derivado $(D', E', \alpha', \beta', \gamma')$),

$$Z^{a+n+1} = \pi_a^{-1}(Z'^{a+1+n}) = \pi_a^{-1}(\gamma'^{-1}(\alpha'^{(n)}(D'))) = \pi_a^{-1}(\gamma'^{-1}(\alpha^{(n+1)}(D))) = \gamma(\alpha^{(n+1)}(D))$$

y

$$B^{a+n+1} = \pi_a^{-1}(B'^{a+1+n}) = \pi_a^{-1}(\beta'(\ker \alpha'^{(n)})) = \beta(\ker \alpha^{(n+1)}),$$

como queríamos. □

Proposición 2.4. *Consideremos un par exacto $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$, con β de bigrado $(-a+1, a-1)$. Las funciones de estructura α^r, β^r y γ^r, del $(r-a)$-ésimo par exacto derivado $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$ de $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$, tienen las siguientes propiedades, que las determinan univocamente:*

1. $\alpha^r(x) = \alpha(x)$ *para todo* $x \in D^r$.
2. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_r"] \arrow[d, "\alpha^{(r-a)}"] & Z^r \arrow[r, "\pi"] & E^r \\ D^r \arrow[urr, "\beta^r"'] & & \end{tikzcd},$$

   donde β_r es la función inducida por β y π es la proyección canónica, conmuta.
3. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} Z^r \arrow[r, "\gamma_r"] \arrow[d, "\pi"] & D^r \\ E^r \arrow[ur, "\gamma^r"'] & \end{tikzcd},$$

   donde γ_r es la función inducida por γ, conmuta.

Demostración. La primera afirmación es evidente. También lo son la segunda y tercera cuando $r = a$. Cuando $r = a + 1$, los diagrama del enunciado coinciden con los usados al construir el par exacto derivado. Supongamos que

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_{a+l}"] \arrow[d, "\alpha^{(l)}"] & Z^{a+l} \arrow[r, "\pi"] & E^{a+l} \\ D^{a+l} \arrow[urr, "\beta^{a+l}"'] & & \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} Z^{a+l} \arrow[r, "\gamma_{a+l}"] \arrow[d, "\pi"] & D^{a+l} \\ E^{a+l} \arrow[ur, "\gamma^{a+l}"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan para todo par exacto $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ (cualquiera sea el bigrado $(-a+1, a-1)$ de β) y cada $l \leq n$. Entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\beta'_{a+1+n}"] \arrow[d, "\alpha'^{(n)}"] & Z'^{a+1+n} \arrow[r, "\pi"] & E'^{a+1+n} \\ D'^{a+1+n} \arrow[urr, "\beta'^{a+1+n}"'] & & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\beta'_{a+1+n}"] \arrow[d, "\alpha'^{(n)}"] & \frac{Z^{a+1+n}}{B^{a+1}} \arrow[r, "\pi"] & E^{a+1+n} \\ D^{a+1+n} \arrow[urr, "\beta'^{a+1+n}"'] & & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Z'^{a+1+n} \arrow[r, "\gamma'_{a+1+n}"] \arrow[d, "\pi"] & D'^{a+1+n} \\ E'^{a+1+n} \arrow[ur, "\gamma'^{a+1+n}"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \frac{Z^{a+1+n}}{B^{a+1}} \arrow[r, "\gamma'_{a+1+n}"] \arrow[d, "\pi"] & D^{a+1+n} \\ E^{a+1+n} \arrow[ur, "\gamma^{a+1+n}"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan. Debido a esto y a que los triángulos

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_{a+1+n}"] \arrow[d, "\alpha'^{(n)}"] & Z^{a+1+n} \arrow[r, "\pi"] & \frac{Z^{a+1+n}}{B^{a+1}} \\ D' \arrow[urr, "\beta'^{a+1+n}"'] & & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} Z^{a+1+n} \arrow[r, "\gamma_{a+1+n}"] \arrow[d, "\pi"] & D^{a+1+n} \\ \frac{Z^{a+1+n}}{B^{a+1}} \arrow[ur, "\gamma'^{a+1+n}"'] & \end{tikzcd}$$

también conmutan, los items (3) y (4) valen para $r = n+1$. $\square$

Convergencia. Dado un par exacto $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)$, con β de bigrado $(-a+1, a-1)$, el límite directo H_n, de

$$\cdots \longrightarrow D_{p-1,n-p+1} \xrightarrow{\alpha} D_{pq} \xrightarrow{\alpha} D_{p+1,n-p-1} \xrightarrow{\alpha} \cdots,$$

es un módulo filtrado, con filtración $F_p\, H_n = \mathsf{Im}\, D_{p+a-1,q-a+1}$ $(q = n-p)$. Notese que esta filtración es exhaustiva (esto es, la unión de los terminos de la filtración es todo el módulo).

Proposición 2.5. *Hay una inclusión natural de $F_p\, H_n/F_{p-1}\, H_n$ en $E^{\infty}_{p,n-p}$, la cual es un isomorfismo para todo p y n si y sólo si $Z^{\infty} = \beta(D)$.*

Demostración. Recordemos que $\alpha^{(r)}$ denota a la composición de r copias de α. Escribamos $a' = a-1$ y $a'' = a-2$. Dados p, q y $n = p+q$, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_{p+a'',q-a''} \cap \bigcup_{r>0} \ker \alpha^{(r)} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & D_{p+a'',q-a''} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & F_{p-1}\, H_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_{p+a',q-a'} \cap \bigcup_{r>0} \ker \alpha^{(r)} \arrow[r] & D_{p+a',q-a'} \arrow[r] & F_p\, H_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Aplicando el Lema de la Serpiente a este diagrama y teniendo el cuenta que el conucleo de la tercer columna es $E_{pq} \cap \bigcup_{r>0} \beta(\ker \alpha^{(r)}) = B^{\infty}_{pq}$ y la flecha de la primera columna es inyectiva, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow B^{\infty}_{pq} \longrightarrow \beta(D_{p+a',q-a'}) \longrightarrow \frac{F_p\, H_n}{F_p\, H_{n-1}} \longrightarrow 0 \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Así, $F_p\, H_n/F_p\, H_{n-1} \simeq \beta(D_{p+a',q-a'})/B^{\infty}_{pq}$. la demostración se termina ahora facilmente usando que $\beta(D_{p+a',q-a'}) = \gamma^{-1}(0) \cap E_{pq} \subseteq \bigcap_{r>0} \gamma^{-1}(\alpha^{(r)}(D_{p-r-1,q+r})) = Z^{\infty}_{pq}$. $\square$

Un par exacto $(D, E, \alpha, \beta, \gamma,)$ es *acotado* si para todo n el conjunto de los D_{pq} distintos de cero, con $p + q = n$ es finito.

Corolario 2.6. *Si $(D, E, \alpha, \beta, \gamma,)$ es un par exacto acotado, entonces su sucesión espectral es acotada y converge a $H = (H_n)_{n\in Z}$, donde H_n es el módulo definido arriba de la Proposición 2.5.*

Demostración. Como $\mathsf{Im}\,\beta = \ker\gamma$, la sucesión espectral $(E^r)_{r\ge a}$, de $(D, E, \alpha, \beta, \gamma,)$, es acotada. La segunda afirmación se sigue de la Proposición 2.5 porque (siendo el par exacto acotado) $\beta(D_{p+a',q-a'}) = \gamma^{-1}(0) \cap E_{pq} = \bigcap_{r>0} \gamma^{-1}(\alpha^{(r)}(D_{p-r-1,q+r})) = Z^{\infty}_{pq}$. $\square$

Definición 2.7. Un *par exacto cohomológico* es una upla $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$, donde E y D son módulos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-graduados y $\alpha \colon D \to D$, $\beta \colon D \to E$, $\gamma \colon E \to D$ son morfismos homogeneos, de grado $(-1, 1)$, $(a, -a)$ (para algún $a \in \mathbb{N}_0$) and $(1, 0)$, respectivamente, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

es exacto. Los pares exactos cohomológicos forman una categoría, con la definiciones evidentes de morfismos y de composición.

Ejercicios.

1. Muestre que la teoría general de pares exactos cohomológicos es dual a la de pares exactos homológicos.
   Indicación: vease la Subsección 1.1.
2. Enuncie en el contexto cohomológico los resultados duales a los de esta sección.

3. La Sucesión Espectral de un Complejo Filtrado

Sea C un complejo de cadena filtrado. Llamamos *sucesión espectral* de C a la sucesión espectral E (que comienza en E^1) construída a partir del par exacto asociado a la filtración de C.

Teorema 3.1. *La sucesión espectral de un complejo filtrado C tiene las siguientes propiedades:*

1. *Los subobjetos B^r_{pq} y Z^r_{pq} de E^1_{pq} están dados por*

$$B^r_{pq} = \frac{F_{p-1}\,C_n + d(\{c \in F_{p+r-1}\,C_{n+1} : d(c) \in F_p\,C_n\})}{F_{p-1}\,C_n + d(F_p\,C_{n+1})}$$

y

$$\begin{aligned} Z^r_{pq} &= \frac{\{x \in F_p\,C_n : d(x) = y + d(z) \text{ para un } y \in F_{p-r}\,C_{n-1} \text{ y un } z \in F_{p-1}\,C_n\}}{F_{p-1}\,C_n + d(F_p\,C_{n+1})} \\ &= \frac{F_{p-1}\,C_n + \{x \in F_p\,C_n : d(x) \in F_{p-r}\,C_{n-1}\}}{F_{p-1}\,C_n + d(F_p\,C_{n+1})}, \end{aligned}$$

donde $n = p + q$ y d denota al morfismo de borde C.

2. *Los morfismos de borde $d^r \colon E^r_{pq} \to E_{p-r+1,q-r}$ están inducidos por las diferenciales de C.*

Demostración. 1. Para $r = 1$ esto es inmediato y para $r > 1$ se sigue de la Proposición 2.3.

2. Esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.4. $\square$

Corolario 3.2. *Los subobjetos B^∞_{pq} y Z^∞_{pq} de E^1_{pq} están dados por*

$$B^\infty_{pq} = \frac{F_{p-1}\,C_n + d(\{c \in \bigcup F_i\,C_{n+1} : d(c) \in F_p\,C_n\})}{F_{p-1}\,C_n + d(F_p\,C_{n+1})}$$

y

$$Z^\infty_{pq} = \frac{F_{p-1}\,C_n + \{x \in F_p\,C_n : d(x) \in \bigcap F_{p-i}\,C_{n-1}\}}{F_{p-1}\,C_n + d(F_p\,C_{n+1})}.$$

donde, como antes, $n = p + q$ y d denota al morfismo de borde C . En consecuencia

$$E^\infty_{pq} = \frac{F_{p-1}\,C_n + \{x \in F_p\,C_n : d(x) \in \bigcap F_{p-i}\,C_{n-1}\}}{F_{p-1}\,C_n + d(\{c \in \bigcup F_i\,C_{n+1} : d(c) \in F_p\,C_n\})}.$$

Demostración. Basta recordar que $Z^\infty_{pq} = \bigcap_{r=1}^\infty Z^r_{pq}$, $B^\infty_{pq} = \bigcup_{r=1}^\infty B^r_{pq}$ y $E^\infty_{pq} = Z^\infty_{pq}/B^\infty_{pq}$. □

Teorema 3.3. *Si para cada $n \in \mathbb{Z}$ existen $s_n < t_n$ tales que*

$$0 = F_{s_n}\,C_n \subseteq \cdots \subseteq F_{t_n}\,C_n = C_n,$$

entonces la sucesión espectral de C converge a la homología de C.

Demostración. La hipótesis implica que el par exacto $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ asociado a C es acotado. En efecto, esto se sigue inmediatamente de que $D_{pq} = \mathsf{H}_n(C_p)$, donde $n = p + q$. Entonces, por el Corolario 2.6, $E_{pq} \Rightarrow H_n$, donde H_n es el límite directo de

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_n(F_{p-1}\,C) \xrightarrow{\alpha} \mathsf{H}_n(F_p\,C) \xrightarrow{\alpha} \mathsf{H}_n(F_{p+1}\,C) \xrightarrow{\alpha} \cdots.$$

Esto termina la demostración, porque la homología de un límite directo de complejos es el límite directo de la homoloía de los complejos. □

Sucesiones Espectrales de un Complejo Doble. Dado un complejo doble $C = (C_{**}, d^h, d^v)$, los complejos totales $\mathsf{Tot}^\Pi(C)$ y $\mathsf{Tot}^\oplus(C)$ pueden filtrarse por columnas o por filas.

En la filtración por columnas, $F_p\,\mathsf{Tot}(C)$ es el complejo total del subcomplejo doble

$$\tau^1_{\le p}\,C_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > p,\\ C_{rs} & \text{si } r \le p,\end{cases}$$

de C. Es inmediato que $\frac{F_p\,\mathsf{Tot}(C)}{F_{p-1}\,\mathsf{Tot}(C)}$ es la p-ésima columna de C. De esto se sigue inmediatamente que la sucesión espectral asociada ${}^IE$ satisface:

$${}^IE^1_{pq} = \mathsf{H}^v_q(C_{p*}).$$

Por el item 2 del Teorema 3.1, los bordes de E^1 son las aplicaciones $d^1\colon\, \mathsf{H}^v_q(C_{p*}) \to \mathsf{H}^v_q(C_{p-1,*})$ inducidas por las diferenciales horizontales de C. Así,

$${}^IE^2_{pq} = \mathsf{H}^h_p\,\mathsf{H}^v_q(C).$$

Si C es un complejo doble en el primer o tercer cuadrante, entonces la sucesión espectral es acotada y converge a la homología de $\mathsf{Tot}(C) = \mathsf{Tot}^\Pi(C) = \mathsf{Tot}^\oplus(C)$.

En la filtración por filas, $F_p\,\mathsf{Tot}(C)$ es el complejo total del subcomplejo doble

$$\tau^1_{\le p}\,C_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } s > p,\\ C_{rs} & \text{si } s \le p,\end{cases}$$

de C. Entonces $\frac{F_p\,\mathsf{Tot}(C)}{F_{p-1}\,\mathsf{Tot}(C)}$ es la p-ésima fila de C. Por lo tanto la sucesión espectral asociada ${}^{II}E$ satisface:

$${}^{II}E^1_{pq} = \mathsf{H}^h_q(C_{*p}) \quad \text{y} \quad {}^{II}E^2_{pq} = \mathsf{H}^v_p\,\mathsf{H}^h_q(C).$$

Tal como ocurre con ${}^{I}E$, la sucesión espectral ${}^{II}E$ es acotada si C es un complejo doble en el primer o tercer cuadrante.

Sucesión Espectral de Künneth. Para cada complejo acotado inferiormente de A-módulos playos P y cada A-módulo M hay una sucesión espectral acotada convergente

$$E^2_{pq} = \mathsf{Tor}^A_p(\mathsf{H}_q(P), M) \Rightarrow \mathsf{H}_{p+q}(P \otimes_A M).$$

Demostración. Tomemos una resolución proyectiva Q de M y consideremos la sucesión espectral ${}^{II}E$, asociada a la filtración por filas del complejo doble $P \otimes_A Q$. Como Q_p es playo, ${}^{II}E^1_{pq} = \mathsf{H}_q(P \otimes_A Q_p) = \mathsf{H}_q(P) \otimes_A Q_p$ y, por lo tanto, ${}^{II}E^2_{pq} = \mathsf{Tor}^A_p(\mathsf{H}_q(P), M)$. Como

$${}^{II}E^2_{pq} \Rightarrow \mathsf{H}_{p+q}(P \otimes_A Q),$$

para terminar la demostración será suficiente ver que $\mathsf{H}_{p+q}(P \otimes_A Q) = \mathsf{H}_{p+q}(P \otimes_A M)$, lo cual se sigue inmediatamente de que el producto tensorial del complejo de módulos playos P con el complejo exacto $Q \to M$, es exacto (porque es el complejo total de un complejo doble con colomnas exactas). $\square$

Siguiendo la tradición, dado un complejo C escribimos

$$B_n = B_n(C) = \mathsf{Im}\, d_{n+1} \qquad \text{y} \qquad Z_n = Z_n(C) = \ker d_n.$$

Corolario 3.4 (Formula de Künneth)**.** *Si los bordes $B_n(P)$ son playos, entonces hay una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow H_q(P) \otimes_A M \longrightarrow H_q(P \otimes_A M) \longrightarrow \mathsf{Tor}^A_1(H_{q-1}(P), M) \longrightarrow 0$$

Demostración. Para cada q, consideremos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}^A_{p+1}(-, B_{q-1}(P)) \longrightarrow \mathsf{Tor}^A_p(-, Z_q(P)) \longrightarrow \mathsf{Tor}^A_p(-, P_q) \longrightarrow \cdots, \tag{3.1}$$

asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_q(P) \longrightarrow P_q \xrightarrow{d} B_{q-1}(P) \longrightarrow 0.$$

Como P_q y $B_{q-1}(P)$ son playos, se sigue de (3.1) que $\mathsf{Tor}^A_p(-, Z_q(P)) = 0$ para todo $p > 0$. En otras palabras, que $Z_q(P)$ es playo. Así

$$0 \longrightarrow B_q(P) \longrightarrow Z_q(P) \xrightarrow{d} H_q(P) \longrightarrow 0$$

es una resolución playa de $H_q(P)$. En consecuencia, las únicas columnas no nulas de la sucesión espectral de Künneth son la 0 y la 1. La demostración se termina ahora fácilmente. $\square$

4. Hiperhomología

Frecuentemente consideraremos a un A-módulo como un complejo concentrado en grado cero y a un complejo como un complejo doble concentrado en la fila cero. Con esta convención queda claro que debe entenderse por un morfismo de un complejo en un módulo, de un módulo en un complejo, etcétera.

Dado un complejo doble X denotamos con $B^h_p = B^h_p(X)$ y $Z^h_p = Z^h_p(X)$ a los complejos cuyos q-ésimos términos son

$$B^h_{pq} = B^h_{pq}(X) = \mathsf{Im}(d^h_{p+1,q}) \qquad \text{y} \qquad Z^h_{pq} = Z^h_{pq}(X) = \ker(d^v_{pq})$$

respectivamente, y cuyas diferenciales son inducidas por los bordes verticales de X. Otros complejos de cadena asociados a X (además de sus complejos totales, por supuesto) son su

p-ésima columna X_{p*} y su p-ésima homología horizontal $\mathsf{H}^h_{p*} = \mathsf{H}^h_{p*}(X) = \frac{Z^h_{pq}(X)}{B^h_{pq}(X)}$, como vimos al considerar las sucesiones espectrales de un complejo doble.

Consideremos morfismos de complejos dobles $f, g\colon X \to Y$. Una homotopía de f en g es un par de familias de aplicaciones $\sigma^v_{pq}\colon X_{pq} \to X_{p,q+1}$ y $\sigma^h_{pq}\colon X_{pq} \to X_{p+1,q}$ tales que

$$g - f = d^h{\circ}s^h + s^h{\circ}d^h + d^v{\circ}s^v + s^v{\circ}d^v$$
$$s^v{\circ}d^h + d^h{\circ}s^v = s^h{\circ}d^v + d^v{\circ}s^h = 0.$$

Estas condiciones implican que $s^h + s^v\colon \mathsf{Tot}^{\oplus}(X)_n \to \mathsf{Tot}^{\oplus}(Y)_{n+1}$ es una homotopía de $\mathsf{Tot}^{\oplus}(f)$ en $\mathsf{Tot}^{\oplus}(g)$ (y similarmente para los complejos totales construídos usando el producto de módulos).

Definición 4.1. Una *resolución (proyectiva) de Cartan-Eilenberg* de un complejo C es un complejo doble P de módulos proyectivos, ubicado en el semiplano superior (es decir que $P_{pq} = 0$ si $q < 0$) junto con una aumentación $\varepsilon\colon P_{*0} \to C$ tal que para cada p vale lo siguiente:

1. Si $C_p = 0$, la columna P_{p*} es nula,
2. Las aplicaciones $B_p(\varepsilon)\colon B^h_p(P) \to B_p(C)$ y $\mathsf{H}_p(\varepsilon)\colon \mathsf{H}^h_{p*}(P) \to \mathsf{H}_p(C)$, inducidas por ε, son resoluciones proyectivas.

Proposición 4.2. *En una resolución de Cartan-Eilenberg, las aplicaciones inducidas,*

$$Z_p(\varepsilon)\colon Z^h_p(P) \to Z_p(C) \quad \textit{and} \quad \varepsilon_p\colon P_{p*} \to C_p,$$

son resoluciones proyectivas.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta de complejos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B^h_p(P) \arrow[r] \arrow[d, "B_p(\varepsilon)"] & Z^h_p(P) \arrow[r] \arrow[d, "Z_p(\varepsilon)"] & \mathsf{H}^h_{p*}(P) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}_p(\varepsilon)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_p(C) \arrow[r] & Z_p(C) \arrow[r] & \mathsf{H}_p(C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por la sucesión exacta larga de homología, dado que los complejos de los extremos son exactos, el del medio también lo es. Además Z^h_{pq} es proyectivo, ya que es isomorfo a la suma directa de B^h_{pq} y H^h_{pq}. La prueba de que $\varepsilon_p\colon P_{p*} \to C_p$ es una resolución proyectiva es similar. □

Proposición 4.3. *Todo complejo de A-módulos C tiene una resolución de Cartan-Eilenberg.*

Demostración. Para cada p seleccionemos resoluciones proyectivas

$$\varepsilon^{pB}\colon P^{pB} \to B_p(C) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon^{p\mathsf{H}}\colon P^{p\mathsf{H}} \to \mathsf{H}_p(C).$$

Por el Lema de la Herradura hay una resolución proyectiva $\varepsilon^{pZ}\colon P^{pZ} \to Z_p(C)$ tal que el diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{pB} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^{pB}"] & P^{pZ} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^{pZ}"] & P^{p\mathsf{H}} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^{p\mathsf{H}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_p(C) \arrow[r] & Z_p(C) \arrow[r] & \mathsf{H}_p(C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta. Aplicando el Lema de la Herradura nuevamente, encontramos una resolución proyectiva $\varepsilon_p\colon P_{p*} \to C_p$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{pZ} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^{pZ}"] & P_{p*} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_p"] & P^{p-1,B} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^{p-1,B}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_p(C) \arrow[r] & C_p \arrow[r] & B_{p-1}(C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta. Definimos la resolución P de C como el complejo doble cuya p-ésima columna es P_{p*} con la diferencial multiplicada por $(-1)^p$. Los bordes horizontales de P son las composiciones

$$P_{p*} \longleftarrow P^{pZ} \longleftarrow P^{pB} \longleftarrow P_{p+1,*}\ .$$

Por la misma construcción de P, las aplicaciones $\varepsilon_p\colon P_{p0} \to C_p$ son una aumentación, y las imagenes de los bordes horizontales y las homologías horizontales de P en la p-ésima columna coinciden con P^{pB} y $P^{p\mathsf{H}}$, respectivamente. ☐

Proposición 4.4. *Si $\varepsilon^C\colon X \to C$ y $\varepsilon^D\colon Y \to D$ son resoluciones de Cartan-Eilenberg de complejos C y D, y $f\colon C \to D$ es un morfismo de complejos, entonces existe un morfismo de complejos dobles $F\colon X \to Y$ sobre f (es decir tal que $\varepsilon^D \circ F = f \circ \varepsilon^C$). Si $F, G\colon X \to Y$ son aplicaciones sobre morfismos homotópicos $f, g\colon C \to D$, entonces F y G son homotópicas en el sentido mencionado arriba.*

Demostración. Consideremos las aplicaciones

$$f^{pB}\colon B_p(C) \to B_p(D), \quad f^{pZ}\colon Z_p(C) \to Z_p(D) \quad \text{y} \quad f^{p\mathsf{H}}\colon \mathsf{H}_p(C) \to \mathsf{H}_p(D)$$

inducidas por f. Como

$$\begin{aligned} &B_p(\varepsilon^C)\colon B_p^h(X) \to B_p(C), && B_p(\varepsilon^D)\colon B_p^h(X) \to B_p(D), \\ &\mathsf{H}_p(\varepsilon^C)\colon \mathsf{H}_{p*}^h(X) \to \mathsf{H}_p(C), && \mathsf{H}_p(\varepsilon^D)\colon \mathsf{H}_{p*}^h(Y) \to \mathsf{H}_p(D) \end{aligned}$$

son resoluciones proyectivas, existen morfismos

$$F^{pB}\colon B_p^h(X) \to B_p^h(Y) \quad \text{y} \quad F^{p\mathsf{H}}\colon \mathsf{H}_{p*}^h(X) \to \mathsf{H}_{p*}^h(Y)$$

sobre f^{pB} y $f^{p\mathsf{H}}$, respectivamente. Entonces existen aplicaciones $F^{pZ}\colon Z_p^h(X) \to Z_p^h(Y)$ sobre f^{pZ} tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_p^h(X) \arrow[r] \arrow[d, "F^{pB}"] & Z_p^h(X) \arrow[r] \arrow[d, "F^{pZ}"] & \mathsf{H}_{p*}^h(X) \arrow[r] \arrow[d, "F^{p\mathsf{H}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_p^h(Y) \arrow[r] & Z_p^h(Y) \arrow[r] & \mathsf{H}_{p*}^h(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmutan (si no recordaba el hecho básico del álgebra homológica que hay detrás de esto, y que ahora debería ser evidente, enúncielo y pruébelo como ejercicio), y aplicaciones $F_{p*}\colon X_{p*} \to Y_{p*}$ sobre f_p tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_p^h(X) \arrow[r] \arrow[d, "F^{pZ}"] & X_{p*} \arrow[r] \arrow[d, "F_{p*}"] & B_{p-1}^h(X) \arrow[r] \arrow[d, "F^{p-1,B}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_p^h(Y) \arrow[r] & Y_{p*} \arrow[r] & B_{p-1}^h(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmutan. Las aplicaciones F_{p*} dan el morfismo F deseado.

Sean ahora $F, G\colon X \to Y$ aplicaciones sobre $f, g\colon C \to D$ y sea $\gamma\colon f \simeq g$ una homotopía. Tomemos morfismos $\Gamma_{p*}\colon X_{p*} \to Y_{p+1,*}$ sobre γ_p. Juntando estas funciones Γ_{pq} obtenemos una transformación $\Gamma\colon X \to Y$ que conmuta con las aumentaciones y anticonmuta con los bordes verticales. Es claro que

$$J = F - d^h{\circ}\Gamma - \Gamma{\circ}d^h,$$

es una aplicación sobre g y que $(\Gamma, 0)$ es una homotopía de F a J. Para terminar la demostración será suficiente mostrar que $G \simeq J$.

En cada una de las columnas X_{p*}, Y_{p*}, $B^h_p(X)$, etcétera consideramos el operador de borde $(-1)^p d^v$. Elijamos homotopías

$$H^h_{p*}(T)\colon H^h_{p*}(X) \to H^h_{p*}(Y) \quad \text{y} \quad B^h_p(T)\colon B^h_p(X) \to B^h_p(Y).$$

Por propiedades básicas del álgebra homológica hay una homotopía $Z^h_p(T)\colon Z^h_p(X) \to Z^h_p(Y)$ que conmuta con las de arriba y otra $T^h_{p*}\colon X_{p*} \to Y_{p*}$ que conmuta con las últimas dos. las aplicaciones $(-1)^p T^h_{p*}$ definen un morfismo $T\colon X \to Y$, de bigrado $(0, 1)$, tales que

$$d^v T + T d^v = 0 \quad \text{y} \quad d^h T + T d^h = G - J,$$

lo que concluye la demostración. □

Definición 4.5. Consideremos un funtor exacto a derecha $F\colon A - \mathsf{Mod} \to B - \mathsf{Mod}$. Dado un complejo C definimos el *i-ésimo funtor hiperderivado a izquierda* $\mathbb{L}_i(F)$ de F por

$$\mathbb{L}_i(F)(C) = \mathsf{H}_i(\mathsf{Tot}^{\oplus}(F(P))),$$

donde $P \to C$ es una resolución de Cartan-Eilenberg de C. Por la proposición anterior estos funtores lo son efectivamente y no dependen de la resolución P elegida.

Proposición 4.6. *Dado un complejo acotado inferiormente C hay sucesiones espectrales convergentes*

$${}^{I}E^2_{pq} = \mathsf{H}_p(L_q F(C)) \Rightarrow \mathbb{L}_{p+q} F(C)$$

y

$${}^{II}E^2_{pq} = (L_p F)(\mathsf{H}_q(C)) \Rightarrow \mathbb{L}_{p+q} F(C).$$

Demostración. Tomemos una resolución proyectiva de Cartan-Eilenberg P de C y consideremos la sucesión espectral asociada a la filtración por filas de $F(P)$. Usando que B^h_{qp} y H^h_{qp} son proyectivos es fácil ver que

$${}^{II}E^1_{pq} = H^h_{qp}(F(P)) = F(H^h_{qp}(P)).$$

Es inmediato ahora que ${}^{II}E^2_{pq} = L_p F(H_q(C))$. La otra sucesión espectral es la asociada a filtración por columnas de $F(P)$. □

Corolario 4.7. *Vale lo siguiente:*

1. *Si C es exacto, entonces $\mathbb{L}_i F(C) = 0$ para todo i,*
2. *Todo cuasi-isomorfismo $f\colon C \to D$ induce isomorfismos $\mathbb{L}_i F(C) \simeq \mathbb{L}_i F(D)$,*
3. *Si cada C_p es F-acíclico (es decir si $L_q F(C_p) = 0$ para todo $q > 0$), entonces*

   $$\mathbb{L}_p F(C) = \mathsf{H}_p(F(C)),$$

   para todo p.

Observación 4.8. Los primeros dos items valen para complejos no acotados (ver [5, Corollary 5.7.7]).

Ejercicios.

1. Defina la noción de resolución inyectiva de Cartan-Eilenberg de un complejo de cocadena C y pruebe que cada complejo de cocadena tiene una resolución inyectiva de Cartan-Eilenberg.
2. Enuncie y pruebe la versión para resoluciones inyectivas de Cartan-Eilenberg de la Proposición 4.4
3. Consideremos un funtor exacto a izquierda $F\colon A-\mathsf{Mod}\to B-\mathsf{Mod}$. Dado un complejo de cocadena C definimos el *i-ésimo funtor hiperderivado a derecha* $\mathbb{R}^i(F)$ de F, por:
$$\mathbb{R}^i(F)(C)=\mathsf{H}^i(\mathsf{Tot}^{\prod}(F(I))),$$
donde $C\to I$ es una resolución inyectiva de Cartan-Eilenberg de C.
Pruebe que $\mathbb{R}^i(F)$ no depende de la resolución $C\to I$ elegida y es efectivamente un funtor.
4. Pruebe que dado un complejo de cocadena acotado inferiormente C, hay sucesiones espectrales cohomológicas convergentes
$${}^{II}E_2^{pq}=(R^pF)(\mathsf{H}^q(C))\Rightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(C)$$
y
$${}^{I}E_2^{pq}=\mathsf{H}^p(R^qF(C))\Rightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(C).$$

5. La Sucesión Espectral de Grothendieck

Teorema 5.1 (Grothendieck)**.** *Consideremos funtores exactos a derecha*
$$G\colon A-\mathsf{Mod}\to B-\mathsf{Mod}\quad y\quad F\colon B-\mathsf{Mod}\to E-\mathsf{Mod}\,.$$
Si G manda proyectivos en F-acíclicos (Esto es, $L_iG(P)=0$ para todo proyectivo P y todo $i>0$), entonces hay una sucesión espectral en el primer cuadrante
$$E^2_{pq}=(L_pF)(L_qG)(M)\Rightarrow L_{p+q}(F\circ G)(M),$$
para cada A-módulo M. En particular hay una sucesión exacta
$$L_2(F\circ G)(M)\longrightarrow L_2F(G(M))\longrightarrow F(L_1G(M))\longrightarrow L_1(F\circ G)(M)\longrightarrow L_1F(G(M))\longrightarrow 0\,.$$

Demostración. Tomemos una resolución proyectiva P de M y una resolución de Cartan-Eilenberg Q de $G(P)$. Como $G(P_n)$ es F-acíclico para todo n y F es exacto a derecha, las columnas del complejo doble
$$\begin{array}{c} F(Q)\\ \big\downarrow\\ FG(P)\end{array}$$
son exactas. En consecuencia $\mathbb{L}_nF(G(I))=L_n(F\circ G)(M)$. Así, por la Proposición 4.6 hay una sucesión espectral convergente
$${}^{II}E^2_{pq}=(L_pF)(\mathsf{H}_q(G(P)))\Rightarrow \mathbb{L}_{p+q}F(C).$$
Esta es la sucesión espectral buscada, porque $\mathsf{H}_q(G(P))=L_qG(M)$. La sucesión exacta que aparece al final del enunciado es la de términos de grado bajo. $\square$

Ejercicios.

1. Consideremos funtores exactos a izquierda

$$G\colon A-\mathsf{Mod}\to B-\mathsf{Mod} \quad \text{y} \quad F\colon B-\mathsf{Mod}\to E-\mathsf{Mod}\,.$$

Pruebe que si G manda inyectivos en F-acíclicos (Esto es, $R^iG(I)=0$ para todo inyectivo I y todo $i>0$), entonces hay una sucesión espectral cohomológica en el primer cuadrante

$$E_2^{pq}=(R^pF)(R^qG)(A)\Rightarrow R^{p+q}(F{\circ}G)(M),$$

para cada A-módulo M. Obtenga la sucesión de términos de grado bajo en este caso.

Referencias

[1] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press (1956).
[2] W. Massey, *Exact couples in algebraic topology*, Annals Math. **No. 56**, páginas 363-369 (1952).
[3] J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, New York Academic Press (1979).
[4] P. Seibt, *Cyclic homology of algebras*, World Scientific Publishing (1987).
[5] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Canbridge University Press (1994).

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Pabellón 1, Ciudad Universitaria, Buenos Aires (1425), Argentina.
E-mail address: jjgucci@dm.uba.ar