Álgebras de Hopf y Categorías Tensoriales

Sonia Natale

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18D10, 16W30, 17B37

Key words and phrases. Cuasi-álgebra de Hopf; grupoide cuántico; categoría tensorial; funtor tensorial; categoría de fusión

Resumen. Se introducen las nociones básicas concernientes a las categorías monoidales, equivalencias monoidales, funtores de fibra. Se hace especial énfasis en la noción de categoría de fusión. Para- lelamente, se estudian las relaciones entre estas nociones y las de álgebras de Hopf, cuasi-álgebras de Hopf y grupoides cuánticos.

Índice general

Introducción

La noción de categoría monoidal fue introducida en los 60's en trabajos de Mac Lane y Benabou. Posteriormente, su estructura ha sido ligada a distintas áreas de la matemática y la física teórica, cobrando especial impulso a partir de resultados de Ocneanu y otros, relacionados con la teoría de subfactores y la teoría cuántica de campos.

A partir de la introducción de los grupos cuánticos por Drinfeld y Jimbo en los 80, las álgebras de Hopf han sido intensamente estudiadas por matemáticos y físicos con diversos intereses y formaciones. Su estructura, que puede verse como generalización de la estructura de grupo, se ha encontrado naturalmente ligada el estudio de las simetrías de distintos objetos matemáticos. A título de ejemplo, se pueden mencionar los siguientes: en la física matemática, las álgebras de Hopf cuasi-triangulares aparecen como instrumento adecuados para construir sistemáticamente soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter; en la topología, ligadas a la construcción de invariantes de nudos y 3-variedades; ciertas álgebras de Hopf semisimples aparecen como invariantes o *'grupos de Galois'* en el estudio de inclusiones de subfactores, a partir de ideas de Ocneanu.

La literatura sobre los distintos aspectos de la teoría de los grupos cuánticos y las categorías tensoriales es bastante numerosa. Se citan, por ejemplo, los libros [**CP, ES, Mj1, SS**]. Los libros [**K, Tu, BK**] están enfocados principalmente en el punto de vista topológico.

Referencias básicas sobre las álgebras de Hopf son [**Mo1, Sc**]; sobre el problema más específico de su clasificación se citan [**A, Mo1, N1**]. El trabajo [**NV**] presenta un resumen de distintos aspectos de los grupos cuánticos, en particular su conexión con la teoría de subfactores. Finalmente, una referencia importante, en partes de la cual se inspiran estas notas, es el artículo reciente [**ENO**], de Etingof y sus colaboradores (ver también [**CE, EO**]), el cual contiene referencias al trabajo de otros matemáticos en el tema.

La categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf semisimple, o más generalmente, de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple, es una categoría tensorial semisimple y rígida. Más precisamente, según la terminología introducida recientemente, es una *categoría de fusión*. Este tipo de categorías tienen propiedades remarcables de simetría, que generaliza la de los grupos, notablemente la de los grupos finitos. La categoría tensorial $\mathcal{C}$ de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple se distingue por la particularidad de estar munida de un cuasi-*funtor de fibra* $U : \mathcal{C} \to \mathrm{vec}$, donde vec es la categoría tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita; esto es, U es un funtor exacto y fiel que 'preserva' el producto tensorial.

Así como la noción de grupo se generaliza a la noción de grupoide, la noción de álgebra de Hopf ('grupo cuántico') se generaliza a la de *grupoide cuántico*. La categoría de representaciones de dimensión finita de un grupoide cuántico es también una categoría tensorial rígida, pero con el producto tensorial inducido por el producto tensorial de bimódulos sobre su 'base' R. En general, esta categoría no posee un (cuasi)-funtor de fibra en vec, sino en la categoría de R-bimódulos.

Un importante teorema debido a Hayashi establece que toda categoría tensorial semisimple, con ciertas propiedades de finitud, es necesariamente equivalente a la categoría de representaciones de un grupoide cuántico. Esto hace de esta clase de objetos una herramienta importante, más que un mero ejemplo, en el estudio de las categorías tensoriales, y en particular, en el problema de su clasificación.

En estas notas se introducirán las nociones básicas referidas a las categorías tensoriales, y se intentará dar un panorama sobre algunos resultados recientes. Las categorías tensoriales predilectas serán las categorías de fusión. Simultáneamente, se introducirán las distintas nociones algebraicas que dan lugar, mediante la teoría de representaciones, a este tipo de categorías: (cuasi)-álgebras de Hopf y grupoides cuánticos. Muchas demostraciones serán omitidas, o sus detalles dejados a cargo del lector en los Ejercicios al final de cada capítulo.

Se dejará de lado el estudio detallado de las estructuras trenzadas en categorías tensoriales, mencionando sólo algunas de las construcciones más importantes, a modo de ejemplo.

Los contenidos están organizados como sigue. El Capítulo 1 contiene las definiciones más generales sobre las categorías tensoriales, sus representaciones y ejemplos. El Capítulo 2 se enfoca en el caso semisimple 'finito', donde cobran más relevancia las categorías de fusión. Se presentan también varias familias de ejemplos introducidas recientemente. Finalmente, se enuncian algunos resultados de clasificación conocidos hasta el momento.

Convenciones. A lo largo de estas notas, y salvo que se indique explícitamente lo contrario, se trabajará sobre un cuerpo de base k.

Del mismo modo, cuando se hable de módulos sobre un anillo, k-álgebra, etc., se asumirá que se trata de módulos a izquierda.

CAPíTULO 1

Categorías Tensoriales y Funtores Tensoriales

1.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 1.1. Una *categoría monoidal* es una colección de datos $(\mathcal{C}, a, \mathbf{1}, l, r)$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor, $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ es un objeto de $\mathcal{C}$ (objeto unidad), y

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z),$$
$$r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X, \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X,$$

son isomorfismos funtoriales, que satisfacen las siguientes identidades:

- *Identidad del Pentágono.*

$$(U \otimes a_{VWZ})\, a_{U,V\otimes W,Z}\, (a_{UVW} \otimes Z) = a_{U,V,W\otimes Z}\, a_{U\otimes V,W,Z}.$$

- *Identidad del Triángulo.*

$$(U \otimes l_V) a_{U\mathbf{1}V} = r_U \otimes V.$$

La categoría monoidal $(\mathcal{C}, a, \mathbf{1}, l, r)$ se dice *estricta* si los isomorfismos a, l y r son las identidades.

En lo que sigue, la notación $(\mathcal{C}, a, \mathbf{1}, l, r)$ se abreviará simplemente por $\mathcal{C}$, cuando no haya lugar a confusión.

Lema 1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal con objeto unidad $\mathbf{1}$. El conjunto $\mathcal{C}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ de todos los morfismos $\mathbf{1} \to \mathbf{1}$ en $\mathcal{C}$ es un monoide conmutativo con la composición.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplos 1.3. (i) Sea k un cuerpo y sea R una k-álgebra. La categoría R-Bimod de R-bimódulos es una categoría monoidal con el producto tensorial $\otimes_R$ de R-bimódulos. El objeto unidad es $\mathbf{1} = R$, y los isomorfismos de asociatividad y unidad son los naturales.

(ii) Sea k un cuerpo. Como caso particular de (i), la categoría Vec_k de k-espacios vectoriales es una categoría monoidal.

(iii) La categoría $\mathcal{T}$ de entrelazamientos de curvas en $\mathbb{R}^3$ es una categoría monoidal. Esta estructura monoidal está estrechamente ligada con los llamados *invariantes cuánticos* de nudos [**Tu, K**].

(iv) Sea $\mathcal{A}$ una categoría, y sea $\mathcal{C} := \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ la categoría de endofuntores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y transformaciones naturales. $\mathcal{C}$ tiene una estructura natural de categoría monoidal estricta, donde $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es la composición de funtores. El objeto unidad aquí es el funtor identidad $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana. Análogamente, se puede considerar esta estructura monoidal restringida a la subcategoría plena $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ de los endofuntores exactos de $\mathcal{A}$.

(v) Sean G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to k^\times$ un 3-cociclo normalizado.

Se considera la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados, con la asociatividad dada por ω. Esto es: dados tres objetos U, U' y U'' en Vec_ω^G, se tiene $a_{U,U',U''} : (U \otimes U') \otimes U'' \to U \otimes (U' \otimes U'')$, dada por

$$a_{U,U',U''}((u \otimes u') \otimes u'') = \omega(||u||, ||u'||, ||u''||)\, u \otimes (u' \otimes u''),$$

en elementos homogéneos $u \in U$, $u' \in U'$, $u'' \in U''$, donde el símbolo $||\ ||$ denota el grado de homogeneidad. El objeto unidad es $\mathbf{1} = k$ con la graduación trivial.

Se sabe que cualquier otra asociatividad a está determinada por un 3-cociclo [**ES**].

Definición 1.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y sea V un objeto de $\mathcal{C}$. Un dual a derecha de V es una terna $(U, \mathrm{ev}, \mathrm{coev})$, donde U es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\mathrm{ev} : U \otimes V \to \mathbf{1}$, $\mathrm{coev} : \mathbf{1} \to V \otimes U$, son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que las siguientes composiciones son identidades:

$$V \overset{\mathrm{coev} \otimes \mathrm{id}}{\to} V \otimes U \otimes V \overset{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}}{\to} V,$$
$$U \overset{\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}}{\to} U \otimes V \otimes U \overset{\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}}{\to} U.$$

Un dual a izquierda de V es una terna $(U', \mathrm{ev}', \mathrm{coev}')$, donde U' es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\mathrm{ev}' : V \otimes U' \to \mathbf{1}$, $\mathrm{coev}' : \mathbf{1} \to U' \otimes V$, son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que las siguientes composiciones son identidades:

$$U' \overset{\mathrm{coev}' \otimes \mathrm{id}}{\to} U' \otimes V \otimes U' \overset{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}'}{\to} U',$$
$$V \overset{\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}'}{\to} V \otimes U' \otimes V \overset{\mathrm{ev}' \otimes \mathrm{id}}{\to} V.$$

Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *rígida* si todo objeto de $\mathcal{C}$ admite un dual a izquierda y a derecha.

Notar que en esta definición se han suprimido, por conveniencia desde el punto de vista de la notación, los isomorfismos de asociatividad y de unidad.

Un dual a derecha (respectivamente, a izquierda) es único salvo un isomorfismo canónico. Se usará la notación V^* (respectivamente, ${}^*V$) para indicar el dual a derecha (respectivamente, a izquierda) de V, cuando éstos existan. En tal caso, para todo objeto $V \in \mathcal{C}$, se tiene $({}^*V)^* \simeq {}^*(V^*) \simeq V$.

Si $\mathcal{C}$ es rígida, se tienen así dos equivalencias $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: $V \mapsto V^*$, y $V \mapsto {}^*V$. Por ejemplo, para cada morfismo $f : V \to W$, la flecha $f^* : W^* \to V^*$ está definida en la forma

$$f^* = (\mathrm{ev}_W \otimes V^*)(W^* \otimes f \otimes V^*)(W^* \otimes \mathrm{coev}_V).$$

La siguiente es una consecuencia básica de la rigidez. Ver [**BK**].

Lema 1.5. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. Las fórmulas*

$$\phi(h) = (h \otimes V^*)(U \otimes \mathrm{coev}_V), \quad \psi(h) = (\mathrm{ev}_V \otimes W)(V^* \otimes h),$$

definen adjunciones

$$\phi : \mathcal{C}(U \otimes V, W) \to \mathcal{C}(U, W \otimes V^*), \tag{1.1}$$
$$\psi : \mathcal{C}(U, V \otimes W) \to \mathcal{C}(V^* \otimes U, W). \tag{1.2}$$

Ejemplos 1.6. (i) La categoría vec_k de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo k es rígida. El dual del espacio vectorial V es el espacio vectorial dual $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$, con la evaluación dada por la evaluación de funciones

$$\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to k, \quad \mathrm{ev}(f \otimes v) = \langle f, v \rangle;$$

y la coevaluación

$$\mathrm{coev}: k \to V \otimes V^*, \quad \mathrm{coev}(1) = \sum_i v_i \otimes v^i,$$

donde $(v_i)_i$ es una base de V y $(v^i)_i$ es la base dual.

(ii) Sea $\mathcal{A}$ una categoría, y sea $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ la categoría de endofuntores de $\mathcal{A}$. Un dual a derecha (izquierda) de un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un adjunto a derecha (izquierda) $G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de F.

En este ejemplo, los morfismos ev y coev corresponden al fondo y frente de una adjunción.

Resulta así, que si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, la categoría $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ de los endofuntores exactos es rígida.

1.1.1. Categorías tensoriales. Sea k un anillo conmutativo. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se llama una *categoría tensorial* sobre k si $\mathcal{C}$ es una categoría k-lineal y todas las operaciones relevantes concernientes a su estructura monoidal son funtores k-lineales.

Observar que si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial sobre k, el grupo abeliano $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ es un anillo conmutativo con la composición. Más generalmente, si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal abeliana (en la que todos los funtores e isomorfismos relevantes son aditivos), entonces $K = \mathrm{End}(\mathbf{1})$ es un anillo conmutativo con la composición. Por otro lado, para cada par de objetos $U, V \in \mathcal{C}$, el conjunto $\mathrm{Hom}(U, V)$ resulta naturalmente un K-módulo con la acción $\lambda.f = \lambda \otimes f$, identificando $U = \mathbf{1} \otimes U$, etc.

Esta estructura hace de $\mathcal{C}$ una categoría K-lineal.

Como consecuencia del Lema 1.5, resulta que en toda categoría monoidal rígida abeliana, el funtor $U \mapsto V \otimes U$ es exacto. Esto permite dar la definición siguiente:

Lema–Definición 1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial rígida. Entonces el grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ tiene una estructura de anillo con el producto $[X][Y] = [X \otimes Y]$, $X, Y \in \mathcal{C}$, y elemento identidad $1 = [\mathbf{1}]$. Este anillo se llama el *anillo de Grothendieck* de $\mathcal{C}$, y se denota por $\mathcal{K}(\mathcal{C})$.

$\mathcal{K}(\mathcal{C})$ está munido de una involución $* : \mathcal{K}(\mathcal{C}) \to \mathcal{K}(\mathcal{C})$, definida por $[X] \mapsto [X^*]$. $\square$

1.2. Equivalencias Monoidales y Funtores de Fibra

Definición 1.8. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales. Un *funtor monoidal* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una terna (F, ϕ, f), donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor, $f : F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \to \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo, y $\phi : F \circ \otimes_{\mathcal{C}} \to \otimes_{\mathcal{D}} \circ (F \times F)$ es un isomorfismo natural, que satisfacen lo siguiente:

$$a_{F(X),F(Y),F(Z)}(\phi_{X,Y} \otimes 1)\phi_{X\otimes Y,Z} = (1 \otimes \phi_{Y,Z})\phi_{X,Y\otimes Z}F(a_{X,Y,Z}), \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} F(l_X) &= l_{F(X)}(f \otimes 1)\phi_{\mathbf{1},X}, \\ F(r_X) &= r_{F(X)}(1 \otimes f)\phi_{X,\mathbf{1}}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Un funtor monoidal se dice *estricto* si $F(X \otimes Y) = F(X) \otimes F(Y)$ y el isomorfismo ϕ es la identidad.

Si el funtor F es una equivalencia de categorías, el funtor monoidal se dice una *equivalencia monoidal*.

Cuando se trabaje en el contexto de categorías tensoriales sobre un cuerpo k, se supondrá la k-linealidad de los funtores monoidales, que se llamarán *tensoriales*. En general se asumirá también que $F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ y el isomorfismo f es la identidad.

Ejemplo 1.9. Sea G un grupo finito, y sean $\omega, \omega' \in H^3(G, k^\times)$. Las categorías $\mathcal{C}(G, \omega)$, $\mathcal{C}(G, \omega')$ son tensorialmente equivalentes si y sólo si ω y ω' son cohomólogos. Por lo tanto, esta familia de categorías está parametrizada por el grupo abeliano $H^3(G, k^\times)$.

Definición 1.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial sobre un cuerpo k. Un *cuasi-funtor de fibra* $\mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$ es un par (F, ϕ), donde $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$ es un funtor k-lineal exacto y fiel, y $\phi : F \circ \otimes_{\mathcal{C}} \to \otimes_{\mathcal{D}} \circ (F \times F)$ es un isomorfismo natural. El par (F, ϕ) se dice un *funtor de fibra* si es además un funtor tensorial.

Sea R una k-álgebra. Un *R-funtor de fibra* es un funtor tensorial, exacto y fiel $\mathcal{C} \to R - \mathrm{bimod}$.

Observación 1.11. **Teorema de Coherencia de MacLane.** El Axioma del Pentágono (c.f. Definición 1.1), dice que las distintas formas posibles de asociar el producto tensorial de 4 objetos en una categoría monoidal dan el mismo resultado. Esto implica que dado un número cualquiera (finito) de objetos de $\mathcal{C}$, todas las posibles maneras de asociarlos dan el mismo resultado.

Una demostración de este hecho se basa en las propiedades de ciertos polihedros, llamados *Polihedros de Stasheff*; ver, por ejemplo [**SS**].

El Teorema de Coherencia de Maclane establece que, toda categoría monoidal $\mathcal{C}$ es equivalente a una subcategoría monoidal plena de una categoría monoidal *estricta*. Este resultado permite dar demostraciones de propiedades generales, restringiéndose a considerar el caso estricto.

1.3. Categorías trenzadas y el Centro de Drinfeld

En esta sección se presenta una construcción importante de una categoría tensorial. Esta construcción es debida a Drinfeld. Ver, por ejemplo [**K, Mj1**].

Definición 1.12. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *trenzada* si está munida de un isomofismo natural $\sigma : \otimes \to \otimes^{\mathrm{op}}$, que satisface las siguientes identidades, llamadas *hexagonales*:

$$(V \otimes \sigma_{V,W}) a_{V,U,W} (\sigma_{U,V} \otimes W) = a_{V,W,U} (\sigma_{U,V\otimes W}) a_{U,V,W},$$

$$(\sigma_{U,W} \otimes V) a^{-1}_{U,W,V} (U \otimes \sigma_{V,W}) = a^{-1}_{V,W,U} (\sigma_{U\otimes V,W}) a^{-1}_{U,V,W},$$

para todo $U, V, W \in \mathcal{C}$.

Se dice que $\mathcal{C}$ es *simétrica*, si la trenza σ es involutiva, esto es, si $\sigma_{V,U}\sigma_{U,V} = \mathrm{id}_{U\otimes V}$, para todo $U, V \in \mathcal{C}$.

Se supondrá en lo que sigue que $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta. Es posible asociar a $\mathcal{C}$ una categoría trenzada estricta $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, su *centro*, de la manera que se resume a continuación.

Los objetos de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son pares ordenados $(V, c_{\_\_,V})$, donde V es un objeto de $\mathcal{C}$ y $c_{X,V} : X \otimes V \to V \otimes X$, $X \in \mathcal{C}$, es un isomorfismo natural que satisface

$$c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V} \otimes Y)(X \otimes c_{Y,V}),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Un morfismo $(V, c_{\_\_,V}) \to (W, c_{\_\_,W})$ en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$, tal que para todo $X \in \mathcal{C}$,

$$(f \otimes X)c_{X,V} = c_{X,W}(X \otimes f).$$

$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una categoría monoidal trenzada estricta con el producto tensorial

$$(V, c_{\_\_,V}) \otimes (W, c_{\_\_,W}) := (V \otimes W, c_{\_\_,V\otimes W}),$$

donde $c_{\_\_,V\otimes W} : X \otimes V \otimes W \to V \otimes W \otimes X$, está definido por

$$c_{\_\_,V\otimes W} = (V \otimes c_{X,W})\,(c_{X,V} \otimes W);$$

el objeto unidad es el par ordenado $(\mathbf{1}, \mathrm{id})$.

La trenza en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ está definida como

$$c_{V,W} : (V, c_{\_\_,V}) \otimes (W, c_{\_\_,W}) \to (W, c_{\_\_,W}) \otimes (V, c_{\_\_,V}).$$

La categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ está munida de un funtor monoidal

$$F : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}, \quad F(V, c_{\_\_,V}) = V.$$

En el caso en que $\mathcal{C}$ sea la categoría de representaciones de H, donde H es una (cuasi-)álgebra de Hopf o de un grupoide cuántico, el centro $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es también la categoría de representaciones de un objeto de la misma naturaleza. Este objeto se denota por $D(H)$ y se llama el *doble cuántico* o *doble de Drinfeld* de H.

1.4. Cuasi-Álgebras de Hopf

DEFINICIÓN 1.13. ([**D**]) Una cuasi-biálgebra sobre el cuerpo k, es una colección $(H, \Delta, \epsilon, \Phi)$ (o simplemente (H, Φ)) donde H es un álgebra asociativa y unitaria sobre k; $\epsilon : H \to k$ y $\Delta : H \to H \otimes H$ son morfismos de álgebras; $\Phi \in H^{\otimes 3}$ es un elemento inversible tal que

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi)(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi)(\Phi \otimes 1), \tag{1.5}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi) = 1 \otimes 1, \tag{1.6}$$

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = h = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta(h), \tag{1.7}$$

$$\Phi(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h)\Phi^{-1} = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(h), \tag{1.8}$$

para todo $h \in H$.

(H, Φ) se dice una *cuasi-álgebra de Hopf* si existe un isomorfismo de álgebras $\mathcal{S} : H \to H^{\mathrm{op}}$ y elementos $\alpha, \beta \in H$ tales que

$$\mathcal{S}(h_1)\alpha h_2 = \epsilon(h)\alpha, \qquad h_1\beta\mathcal{S}(h_2) = \epsilon(h)\beta, \qquad \forall h \in H; \tag{1.9}$$

$$\Phi^{(1)}\beta\mathcal{S}(\Phi^{(2)})\alpha\Phi^{(3)} = 1 = \mathcal{S}(\Phi^{(-1)})\alpha\Phi^{(-2)}\beta\mathcal{S}(\Phi^{(-3)}). \tag{1.10}$$

Aquí se usa la notación $\Phi = \Phi^{(1)} \otimes \Phi^{(2)} \otimes \Phi^{(3)}$ y $\Phi^{-1} = \Phi^{(-1)} \otimes \Phi^{(-2)} \otimes \Phi^{(-3)}$. La aplicación $\mathcal{S}$ se llama una *cuasi-antípoda* de H.

En el caso en que $\Phi = 1$, $\alpha = \beta = 1$, H se dice un álgebra de Hopf.

La categoría $\operatorname{rep} H =: \operatorname{rep}(H, \Phi)$, de H-módulos a izquierda de dimensión finita, es una categoría tensorial rígida sobre k. El isomorfismo de asociatividad de $\operatorname{Rep} H$ está dado por la acción natural de Φ, mientras que el dual a izquierda de un objeto V de $\operatorname{Rep} H$ es el espacio vectorial dual $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ munido de la acción $\langle h.f, v\rangle = \langle f, \mathcal{S}(h)v\rangle$; y la evaluación y coevaluación se definen, respectivamente, por

$$\operatorname{ev} : V^* \otimes V \to k, \qquad \operatorname{ev}(f \otimes v) = \langle f, \alpha.v\rangle, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{coev} : k \to V \otimes V^*, \qquad 1 \mapsto \sum_i \beta.v_i \otimes v^i, \tag{1.12}$$

para todo $f \in V^*$, $v \in V$, donde (v_i) y (v^i) son bases duales de V.

Dualizando esta definición, se obtiene la noción de *co*-cuasi-álgebra de Hopf (Ejercicio). Una co-cuasi-álgebra de Hopf da lugar a una categoría tensorial a través de su categoría de *correpresentaciones*, $\operatorname{corep} H$.

Observación 1.14. ([**S2**].) Existe una (co)cuasi-biálgebra H tal que la categoría $\operatorname{corep} H$ de H-comódulos de dimensión finita es rígida, pero H *no* es una (co)cuasi-álgebra de Hopf: de hecho, en este ejemplo se tiene en general $\dim V^* \neq \dim V$, para $V \in \operatorname{corep} H$.

Si H es una biálgebra, entonces se sabe que si $\operatorname{corep} H$ es rígida, H es un álgebra de Hopf [**U2**]. También, si H es una (co)cuasi-biálgebra de dimensión *finita* y cosemisimple tal que $\operatorname{corep} H$ rígida, entonces H es una (co)cuasi-álgebra de Hopf [**S3**].

Por otro lado, si H es una (co)cuasi-biálgebra tal que $\operatorname{corep} H$ es rígida y además el funtor de olvido $\operatorname{corep} H \to \operatorname{vec}$ preserva la dualidad, entonces H es una (co)cuasi-álgebra de Hopf [**Mj1**].

1.4.1. Twisting. Sean H_1, H_2 cuasi-álgebras de Hopf. Se dice que H_1 y H_2 son *twist equivalentes* si existe un *twist*, *i.e.*, un elemento inversible $F \in H_1 \otimes H_1$ tal que $(H_1)_F$ y H_2 son isomorfas como cuasi-biálgebras. Se supone que F está normalizado según las fórmulas

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})(F) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(F).$$

Aquí, $(H_1)_F$ es la cuasi-álgebra de Hopf $(H_1, \Delta_F, \epsilon, \Phi_F, \mathcal{S}_F, \alpha_F, \beta_F)$, donde

$$\Delta_F(h) = F\Delta(h)F^{-1}, \qquad h \in H,$$
$$\Phi_F = (1 \otimes F)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(F)\Phi(\Delta \otimes \mathrm{id})(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1),$$
$$\alpha_F = \mathcal{S}(F^{(-1)})\alpha F^{(-2)}, \qquad \beta_F = F^{(1)}\beta\mathcal{S}(F^{(2)});$$

donde $F = F^{(1)} \otimes F^{(2)}$, $F^{-1} = F^{(-1)} \otimes F^{(-2)}$.

Sea $(H, 1)$ un álgebra de Hopf, y sea $F \in H \otimes H$ un twist. Para que $(H_F, 1)$ sea de nuevo un álgebra de Hopf es suficiente pedir que F sea un *2-cociclo* (normalizado): esto es,

$$\partial(F) := (\mathrm{id} \otimes \Delta)(F)(1 \otimes F)(\Delta \otimes \mathrm{id})(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1) = 1.$$

Si (H, Φ) es una cuasi-álgebra de Hopf, la categoría $\operatorname{rep} H$ está munida de un quasi-funtor de fibra $\operatorname{rep} H \to \operatorname{vec}_k$: el funtor de olvido; H es un álgebra de Hopf, si y sólo si, $\operatorname{rep} H$ posee un funtor de fibra.

Recíprocamente, si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial munida de un quasi-funtor de fibra $(F, c) : \mathcal{C} \to \operatorname{Vec}_k$, entonces existe una cuasi-álgebra de Hopf H tal que $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$.

En efecto, se puede tomar $H = \operatorname{End} F$ con el coproducto

$$\Delta : H \to H \otimes H \simeq \operatorname{End}(F \times F), \quad T \mapsto cTc^{-1}.$$

La counidad $1 \in H$ se define en la forma $\epsilon(T) := T|_{F(\mathbf{1})}$, y la antípoda por $\mathcal{S}(T)|_{F(X)} := (T|_{F(X^*)})^*$.

Cambiar el isomorfismo c corresponde a cambiar a H mediante un twist.

Teorema 1.15. *Dos cuasi-álgebras de Hopf de dimensión finita H_1 y H_2 son twist equivalentes si y sólo si* $\operatorname{rep} H_1$ *es tensorialmente equivalente a* $\operatorname{rep} H_2$*.*

De hecho, si H es una cuasi-álgebra de Hopf, $\operatorname{rep} H$ está munida de un cuasi-funtor de fibra $\operatorname{rep} H \to \operatorname{vec}_k$. Cambiar este funtor de fibra corresponde a cambiar la comultiplicación en H mediante un twist.

Para álgebras de Hopf de dimensión finita, un antecedente de este teorema es debido a Schauenburg [**S1**]. Más precisamente, Schauenburg demuestra que si H_1 y H_2 son álgebras de Hopf de dimensión finita, entonces las categorías de correpresentaciones $\operatorname{corep} H_1$ y $\operatorname{corep} H_2$ son tensorialmente equivalentes si y sólo si existe una extensión *bigaloisiana* R; esto significa que R es una extensión H_1-galoisiana de k a izquierda y H_2-galoisiana de k a derecha. Por dualidad, este enunciado implica el teorema en este contexto.

Demostración. Ver [**EG4**]. □

Observación 1.16. Sea H un álgebra de Hopf. Un *pseudo-cociclo* (normalizado) es un elemento inversible $F \in H \otimes H$, tal que

$$\partial(F) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(F)(1 \otimes F)(\Delta \otimes \mathrm{id})(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1) \in \Delta^{(2)}(H)',$$

donde $\Delta^{(2)} = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$, y $\Delta^{(2)}(H)'$ denota la subálgebra de $H^{\otimes 3}$ formada por los elementos que conmutan con los elementos de $\Delta^{(2)}(H)$.

Se tiene que la condición necesaria y suficiente para que H_F sea un álgebra de Hopf es que F sea un pseudo-cociclo. Sin embargo, salvo cuando F es un cociclo en el sentido anterior, las categorías $\operatorname{rep} H$ y $\operatorname{rep} H_F$, con las estructuras usuales de asociatividad, no son en general equivalentes. Ver Ejemplo en Sección 2.5.

Ejemplo 1.17. (**Grupos Isocategóricos.**) Dos grupos finitos G_1, G_2, se dicen *isocategóricos* si las categorías tensoriales $\operatorname{rep} G_1$, $\operatorname{rep} G_2$ son tensorialmente equivalentes. Luego, G_1 y G_2 son isocategóricos, si y sólo si, kG_1 es isomorfa a un twist de kG_2 por un 2-cociclo.

La condición necesaria y suficiente, en términos de las estructuras de grupo, para que dos grupos finitos sean isocategóricos se da en [**EG3**]. En particular, resulta que si G_1 es *simple* y G_1, G_2 son isocategóricos, entonces $G_1 \simeq G_2$. Es decir, los grupos finitos simples son *tensorialmente rígidos*.

A continuación se listan algunos ejemplos básicos de cuasi-álgebras de Hopf semisimples.

Ejemplos 1.18. (1) **Productos bicruzados.** Esta construcción fue originalmente introducida por G. I. Kac [**Ka**]. Ver el trabajo [**M1**].

Sean F y Γ grupos finitos munidos de mutuas acciones (conjuntistas)

$$\triangleleft : \Gamma \times F \to \Gamma, \qquad \triangleright : \Gamma \times F \to F,$$

sujetas a las siguientes condiciones:

$$s{\triangleright}xy = (s{\triangleright}x)((s{\triangleleft}x){\triangleright}y), \tag{1.13}$$

$$st{\triangleleft}x = (s{\triangleleft}(t{\triangleright}x))(t{\triangleleft}x), \tag{1.14}$$

para todo $s, t \in \Gamma$, $x, y \in F$. Sigue que $s{\triangleright}1 = 1$ y $1{\triangleleft}x = 1$, para todo $s \in \Gamma$, $x \in F$.

Un tal par de grupos y acciones mutuamente compatibles se llama un *matched pair* de grupos. Dados los grupos finitos F y Γ, munirlos de un par de acciones compatibles es equivalente a encontrar un grupo G junto con una factorización exacta $G = F\Gamma$.

Sea $\triangleleft : \Gamma \times F \to \Gamma$, $\triangleright : \Gamma \times F \to F$ un matched pair de grupos. Se considera la acción a izquierda de F en k^Γ, $(x.f)(g) = f(g \triangleleft x)$, $f \in k^\Gamma$; se tiene $x.e_g = e_{g\triangleleft x^{-1}}$. Sea $\sigma : F \times F \to (k^\times)^\Gamma$ un 2-cociclo normalizado. Escribiendo $\sigma = \sum_{g\in\Gamma} \sigma_g e_g$, la condición de cociclo y la normalización resultan, respectivamente,

$$\begin{aligned} &\sigma_{g\triangleleft x}(y,z)\sigma_g(x,yz) = \sigma_g(xy,z)\sigma_g(x,y),\\ &\sigma_g(x,1) = 1 = \sigma_g(1,x), \qquad g\in\Gamma, x,y,z\in F. \end{aligned}$$

Se considera también la acción a derecha de Γ en k^F, $(\psi.g)(x) = \psi(x\triangleright g)$, $\psi \in k^F$. Sea $\tau = \sum_{x\in F} \tau_x \delta_x : G \times G \to (k^\times)^F$ un 2-cociclo normalizado; esto es,

$$\begin{aligned} &\tau_x(gh,k)\tau_{k\triangleright x}(g,h) = \tau_x(h,k)\tau_x(g,hk),\\ &\tau_x(g,1) = 1 = \tau_x(1,g), \qquad g,h,k\in\Gamma, x\in F. \end{aligned}$$

Se dota al espacio vectorial $k^\Gamma \otimes kF$ de la estructura de álgebra de producto cruzado $k^\Gamma \#_\sigma kF$ y de la estructura de coálgebra de producto cruzado $k^{\Gamma\,\tau}\# kF$. Se usa la notación $k^{\Gamma\,\tau}\#_\sigma kF$ para denotar este espacio, que se llama un *producto bicruzado*.

La multiplicación y la comultiplicación se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} (e_g\#x)(e_h\#y) &= \delta_{g\triangleleft x,h}\,\sigma_g(x,y)e_g\#xy, \qquad g,h\in\Gamma, x,y\in F;\\ \Delta(e_g\#x) &= \sum_{st=g} \tau_x(s,t)\, e_s\#(t\triangleright x)\otimes e_t\#x, \qquad g\in\Gamma, x\in F. \end{aligned}$$

Supongamos que σ y τ satisfacen además la siguiente condición de compatibilidad:

$$\sigma_{ts}(x,y)\tau_{xy}(t,s) = \tau_x(t,s)\,\tau_y(t\triangleleft(s\triangleright x), s\triangleleft x)\,\sigma_t(s\triangleright x,(s\triangleleft x)\triangleright y)\,\sigma_s(x,y).$$

Notar que esta relación implica las siguientes condiciones de normalización: $\sigma_1(g,h) = 1$, $g,h\in\Gamma$, $\tau_1(x,y) = 1$, $x,y\in F$.

Entonces $k^{\Gamma\,\tau}\#_\sigma kF$ es un álgebra de Hopf semisimple con antípoda

$$\mathcal{S}(e_g x) = \sigma_{(g\triangleleft x)^{-1}}((g\triangleright x)^{-1}, g\triangleright x)^{-1}\,\tau_x(g^{-1},g)^{-1}\,e_{(g\triangleleft x)^{-1}}\,(g\triangleright x)^{-1},$$

$g\in\Gamma$, $x\in F$.

El álgebra de Hopf $k^{\Gamma\,\tau}\#_\sigma kF$ admite una extensión

$$k \to k^\Gamma \to k^{\Gamma\,\tau}\#_\sigma kF \to kF \to k,$$

donde todas las aplicaciones son canónicas. Se sabe también que si A es un álgebra de Hopf que admite una extensión $k \to k^\Gamma \to A \to kF \to k$, entonces A es necesariamente isomorfa a un producto bicruzado.

(2) (k^G,ω). Sean G un grupo finito, cuyo elemento identidad se denotará por e, y sea $\omega : G\times G\times G \to k^\times$ un 3-cociclo normalizado; esto es:

$$\begin{aligned} \omega(ab,c,d)\omega(a,b,cd) &= \omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\omega(b,c,d),\\ \omega(e,a,b) = \omega(a,e,b) &= \omega(a,b,e) = 1, \end{aligned}$$

para todo $a,b,c,d\in G$.

El álgebra k^G de funciones en G admite una estructura de cuasi-álgebra de Hopf, con la comultiplicación usual de funciones. El asociador en este ejemplo es $\omega \in k^{G\times G\times G} \simeq (k^G)^{\otimes 3}$, y la antípoda está dada por $\mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}}$, con $\alpha = 1$, $\beta = \sum_{g\in G} \omega(g, g^{-1}, g)e_g$; aquí, $e_g \in k^G$ son los idempotentes canónicos: $e_g(h) = \delta_{g,h}$

La categoría de representaciones de (k^G, ω) coincide con la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ introducida antes.

(3) $D^\omega G$. Esta familia de cuasi-álgebras de Hopf fue introducida en [**DPR**]; su motivación proviene de la física.

Sean G y ω como antes. Se consideran las acciónes adjuntas de G en sí mismo $\triangleright, \triangleleft : G \times G \to G$, $g \triangleright a := gag^{-1}$, $a \triangleleft g := g^{-1}ag$.

Se definen $\theta, \gamma : G \times G \to k^G$, por las fórmulas

$$\theta_g(x, y) = \frac{\omega(g, x, y)\omega(x, y, g \triangleleft (xy))}{\omega(x, g \triangleleft x, y)},$$
$$\gamma_g(x, y) = \frac{\omega(x, y, g)\omega(g, x \triangleleft g, y \triangleleft g)}{\omega(x, g, y \triangleleft g)},$$

para todo $x, y, g \in G$, donde $\theta(x, y) = \sum_{g\in G} \theta_g(x, y)e_g$.

Se tiene una estructura de cuasi-álgebra de Hopf en el espacio vectorial $k^G \otimes kG$, denotada $D^\omega G$, cuyas multiplicación y comultiplicación están definidas como sigue:

$$(e_g\#x)(e_h\#y) = \theta_g(x, y)\delta_{g,x\triangleright h}e_g\#xy,$$
$$\Delta(e_g\#x) = \sum_{st=g} \gamma_x(s, t)e_s\#x \otimes e_t\#y.$$

El asociador Φ está dado por

$$\Phi = \sum_{a,b,c\in G} \omega(a, b, c)^{-1} e_a \otimes e_b \otimes e_c.$$

La antípoda se define según

$$\mathcal{S}(e_g\#x) = \theta_{g^{-1}}(x, x^{-1})\gamma_x(g, g^{-1})e_{g^{-1}\triangleleft x}\#x^{-1},$$

con $\alpha = 1$ y $\beta = \sum_{g\in G} \omega(g, g^{-1}, g)e_g\#1$.

La cuasi-álgebra de Hopf $D^\omega G$ resulta ser el doble cuántico de la cuasi-álgebra de Hopf conmutativa (k^G, ω) [**Mj2**].

1.5. Grupoides Cuánticos

La noción de grupoide cuántico (también llamados álgebras de Hopf débiles) fue introducida en [**BNS, BS**] como una versión no conmutativa de los grupoides. Una clase importante de grupoides cuánticos fue introducida anteriormente por Hayashi [**H**].

Definición 1.19. Una *biálgebra débil* H sobre un cuerpo k es un álgebra asociativa y unitaria $(H, m, 1)$, munida de una estructura de coálgebra coasociativa (H, Δ, ε), compatible con la estructura de álgebra en el siguiente sentido:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \qquad \forall a, b \in H. \tag{1.15}$$

$$\Delta^{(2)}(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1). \tag{1.16}$$

$$\epsilon(abc) = \epsilon(ab_1)\epsilon(b_2c) = \epsilon(ab_2)\epsilon(b_1c), \qquad \forall a, b, c \in H. \tag{1.17}$$

Una biálgebra débil H se llama un *grupoide cuántico* si existe una aplicación lineal $\mathcal{S} : H \to H$ tal que

$$m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta(h) = (\epsilon \otimes \mathrm{id})\,(\Delta(1)(h \otimes 1)) =: \epsilon_t(h), \tag{1.18}$$

$$m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\,((1 \otimes h)\Delta(1)) =: \epsilon_s(h), \tag{1.19}$$

$$m^{(2)}(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta^{(2)} = \mathcal{S}, \tag{1.20}$$

para todo $h \in H$. Las aplicaciones ϵ_s, ϵ_t se llaman, respectivamente, las aplicaciones *fuente* y *llegada*; sus imágenes se llaman subálgebras fuente y llegada, y se denotan por H_s, H_t.

Si H es un grupoide cuántico finito, dualizando todas las aplicaciones, el espacio vectorial dual, H^*, resulta un grupoide cuántico.

Se tiene además que el elemento $\Delta(1) \in H \otimes H$ es un idempotente. La antípoda induce un anti-isomorfismo de álgebras $\mathcal{S} : H_s \to H_t$.

Observación 1.20. Un grupoide cuántico es un álgebra de Hopf si y sólo si $\Delta(1) = 1 \otimes 1$.

Sea H un grupoide cuántico y sea $\operatorname{rep} H$ la categoría de H-módulos de dimensión finita. Se tiene una estructura de categoría tensorial rígida en $\operatorname{rep} H$, definida como sigue.

Observar que todo H-módulo es un H_t-módulo y un H_s-módulo, por restricción. En vista del isomorfismo $H_s \simeq (H_t)^{\mathrm{op}}$, resulta que todo H-módulo es un H_t-bimódulo.

El producto tensorial de dos H-módulos U, V, está dado por

$$U \otimes V := \Delta(1)(U \otimes_k V) \simeq U \otimes_{H_t} V,$$

con los isomorfismos usuales de asociatividad, y objeto unidad $\mathbf{1} = H_t$ la subálgebra de llegada, munida de la acción

$$h.x = \epsilon_t(hx), \quad h \in H,\, x \in H_t.$$

Los isomorfismos $l_V : H_t \otimes V \to V$ y $r_V : V \otimes H_t \to V$, están definidos por

$$l_V(\Delta(1)(x \otimes v)) = x.v,$$
$$r_V(\Delta(1)(v \otimes x)) = \mathcal{S}(x).v,$$

$x \in H_t$, $v \in V$.

El dual de un objeto V es $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$, con la acción a izquierda inducida por la antípoda, y los morfismos de evaluación y coevaluación

$$\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to H_t, \quad \mathrm{ev}(f \otimes v) = \langle f, 1_1.v\rangle 1_2,$$
$$\mathrm{coev} : H_t \to V \otimes V^*, \quad \mathrm{coev}(x) = x.\sum_i v_i \otimes v^i,$$

donde $(v_i)_i$ es una base de V y $(v^i)_i$ es la base dual.

Ejemplos 1.21. (1) **Álgebras de grupoide.** Sea $\mathcal{G}$ un grupoide finito con base $\mathcal{P}$. El álgebra de grupoide $k\mathcal{G}$ se define sobre el espacio vectorial con base $\mathcal{G}$ y multiplicación $g.h = gh$, si g y h son componibles, y $g.h = 0$, en otro caso. $k\mathcal{G}$ es un álgebra asociativa con identidad $1 = \sum_{P \in \mathcal{P}} P$. Se tiene una estructura de grupoide cuántico (coconmutativo) en $k\mathcal{G}$ definiendo la comultiplicación y la antípoda por

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}.$$

La counidad es $\epsilon(g) = 1$, $g \in \mathcal{G}$. Las subálgebras de fuente y llegada coindicen con las subálgebras generadas por $\mathcal{P}$.

(2) Con la estructura dual, el espacio $k^{\mathcal{G}}$ de funciones en un grupoide finito $\mathcal{G}$ es un grupoide cuántico (conmutativo).

1.6. Categorías Módulo y Funtores de Fibra

En esta sección se supondrá que las categorías que aparezcan son abelianas.

Definición 1.22. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Una categoría $\mathcal{M}$ se dice una *categoría módulo* (a izquierda) sobre $\mathcal{C}$, si está munida de un bifuntor exacto $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, y de isomorfismos naturales de asociatividad y unidad $m : \otimes \circ (\otimes \times 1) \to \otimes(1 \times \otimes)$, $l : \mathbf{1} \otimes \_\_ \to \mathrm{id}$, sujetos a las condiciones siguientes:

- *Identidad del Pentágono.*
$$(U \otimes m_{VWZ}) m_{U,V\otimes W,Z}(a_{UVW} \otimes Z) = m_{U,V,W\otimes Z} a m_{U\otimes V,W,Z}.$$
- *Identidad del Triángulo.*
$$(U \otimes l_M) m_{U\mathbf{1}M} = r_U \otimes M.$$

Si $\mathcal{M}$ es semisimple, el *rango* de $\mathcal{M}$ es el número de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{M}$.

Ejemplos 1.23. (i) $\mathcal{C}$ es una categoría módulo a izquierda sobre sí misma vía el producto tensorial en $\mathcal{C}$: $\otimes : \mathcal{C} \times C \to \mathcal{C}$. Análogamente, el producto tensorial en $\mathcal{C}$, hace de $\mathcal{C}$ una categoría módulo a derecha sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, donde $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es la categoría $\mathcal{C}$ con el producto tensorial 'opuesto': $U \otimes_{\mathrm{op}} V := V \otimes U$.

(ii) $\mathcal{C}$ es una categoría módulo a izquierda sobre $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vía $(X, Y) \otimes Z := X \otimes Y \otimes Z$.

(iii) Sea $\mathcal{M}$ una categoría abeliana cualquiera. Entonces $\mathcal{M}$ es naturalmente una categoría módulo sobre $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ y también sobre $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

(iv) Sea R una k-álgebra. Entonces $\operatorname{rep} R$ es naturalmente una categoría módulo sobre $R-$bimod, con respecto al producto tensorial $\otimes_R$.

Toda álgebra en $\mathcal{C}$ da lugar de manera natural a una categoría módulo. Un *álgebra (asociativa, con unidad) en* $\mathcal{C}$ es un objeto $A \in \mathcal{C}$, munido de morfismos $\mu : A \otimes A \to A$, $\eta : \mathbf{1} \to A$ en $\mathcal{C}$, tales que
$$\mu(\mu \otimes \mathrm{id}) = \mu(\mathrm{id} \otimes \mu) a_{AAA},$$
$$\mu(\eta \otimes \mathrm{id}) = l_A, \quad \mu(\mathrm{id} \otimes \eta) = r_A.$$
Dada un álgebra $A \in \mathcal{C}$, un A-*módulo a derecha* es un objeto M de $\mathcal{C}$, junto con un morfismo $\mu_M : M \otimes A \to M$ en $\mathcal{C}$, tales que
$$\mu_M(\mu_M \otimes \mathrm{id}) = \mu_M(\mathrm{id} \otimes \mu) a_{MAA}, \quad \mu_M(\mathrm{id} \otimes \eta) = r_M.$$
Un morfismo entre dos A-módulos M_1 y M_2, es un morfismo $f : M_1 \to: M_2$ en $\mathcal{C}$, que conmuta con la acción de A en el sentido siguiente:
$$f\mu_{M_1} = \mu_{M_2}(f \otimes \mathrm{id}).$$

Los A-módulos a derecha forman una subcategoría k-lineal $\operatorname{Rep}_{\mathcal{C}} A$ de $\mathcal{C}$. Esta categoría es semisimple si $\mathcal{C}$ lo es. Construcciones análogas valen para acciones a izquierda.

Se tiene una estructura de categoría módulo $\mathcal{C} \times \operatorname{Rep}_{\mathcal{C}} A \to \operatorname{Rep}_{\mathcal{C}} A$ definida como sigue: si $V \in \mathcal{C}$, $M \in \operatorname{Rep}_{\mathcal{C}} A$, $V \otimes M$ es el producto tensorial en $\mathcal{C}$, con la acción $(\mathrm{id} \otimes \mu_M) a_{VMA} : (V \otimes M) \otimes A \to V \otimes M$.

Definición 1.24. Sean $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, categorías módulo sobre $\mathcal{C}$. Un funtor de entrelazamiento $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ es un par (F, c), donde $F : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ es un funtor y $c_{X,M} : F(X \otimes M) \to X \otimes F(M)$ son isomorfismos naturales, $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$, tales que

- $m_{X,Y,F(M)} c_{X\otimes Y,M} = (X \otimes c_{Y,M}) c_{X,Y\otimes M} F(m_{X,Y,M})$,
- $c_{\mathbf{1},M} l_{F(M)} = F(l_M)$,

para todo $M \in \mathcal{M}$, $X, Y \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ se dicen *equivalentes* si existe un funtor de entrelazamiento $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ que induce una equivalencia de categorías.

Una categoría módulo $\mathcal{M}$ se dice *indescomponible* si no es equivalente a una suma directa de subcategorías módulo no triviales. Con respecto a esta definición, notar que la suma directa de dos categorías módulo $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ es de nuevo una categoría módulo con acción 'componente a componente'.

Lema–Definición 1.25. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial rígida y $\otimes : \mathcal{C} \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$. La categoría $\underline{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ de endofuntores exactos de entrelazamiento $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, con el producto tensorial dado por la composición de funtores, es una categoría tensorial rígida. $\underline{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ se llama la categoría *dual* de $\mathcal{C}$ con respecto a $\mathcal{M}$, y se denota por $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$.

$\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen *Morita equivalentes* si existe una categoría módulo indescomponible $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es equivalente a $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. $\square$

Notar que $\mathcal{M}$ es naturalmente una categoría módulo a derecha sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$. Es posible demostrar [**CE**] que la equivalencia Morita es una relación de equivalencia entre las categorías tensoriales.

Ejemplos 1.26. (i) (Müger.) Sea $\mathcal{C}$ pensada como módulo a izquierda sobre $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Entonces $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}})^*_{\mathcal{C}}$ es equivalente a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Este ejemplo, cuya demostración se omitirá, permite restringir el análisis de propiedades que son 'Morita-invariantes' al caso trenzado.

(ii) Sea A un álgebra en $\mathcal{C}$ y sea $\mathcal{M} = \mathrm{Rep}_{\mathcal{C}} A$. Entonces $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \simeq A - \mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}$, la categoría monoidal de A-bimódulos en $\mathcal{C}$, con el producto tensorial $\otimes_A$.

Un problema importante consiste en la clasificación de las categorías módulo sobre una categoría tensorial dada.

Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo semisimple sobre $\mathcal{C}$. La exactitud del funtor $\mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$, $U \mapsto \mathrm{Hom}(U \otimes M_1, M_2)$, para cada $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, implica la existencia de un ind-objeto $\underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2)$ de $\mathcal{C}$, definido de manera unívoca salvo isomorfismos, con la siguiente propiedad

$$\mathrm{Hom}(U \otimes M_1, M_2) \simeq \mathrm{Hom}(U, \underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2)),$$

para todo $U \in \mathcal{C}$. Se tiene así un bifuntor $\underline{\mathrm{Hom}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, llamado el *hom interno* en $\mathcal{M}$. Este bifuntor es clave en la demostración del siguiente resultado:

Teorema 1.27. *(*[**O1**, Theorem 1]*.) Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo semisimple indescomponible sobre $\mathcal{C}$. Existe un álgebra $A \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{M}$ es equivalente a* $\mathrm{Rep}_{\mathcal{C}} A$.

Demostración. (Esbozo.) Sea $M \neq 0$ un objeto simple de $\mathcal{M}$. Se denota $\underline{\mathrm{End}} M := \underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$. Se define un morfismo (análogo de la evaluación) $\rho : \underline{\mathrm{End}} M \otimes M \to M$, tal que ρ es la imagen del morfismo identidad bajo el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{End}} M, \underline{\mathrm{End}} M) \to \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{End}} M \otimes M, M).$$

Esto determina un morfismo canónico (análogo de la composición)

$$\mu : \underline{\mathrm{End}}M \times \underline{\mathrm{End}}M \to \underline{\mathrm{End}}M,$$

que se define como la imagen del morfismo

$$\rho(\mathrm{id} \otimes \rho)a : (\underline{\mathrm{End}}M \otimes \underline{\mathrm{End}}M) \otimes M \to M,$$

bajo el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}((\underline{\mathrm{End}}M \otimes \underline{\mathrm{End}}M) \otimes M, M) \to \mathrm{Hom}((\underline{\mathrm{End}}M \otimes \underline{\mathrm{End}}M), \underline{\mathrm{End}}M).$$

Se define también $\eta : \mathbf{1} \to \underline{\mathrm{End}}$ como la imagen del morfismo identidad bajo el isomorfismo $\mathrm{Hom}(M, M) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \underline{\mathrm{End}}M)$.

Así, $(\underline{\mathrm{End}}M, \mu, \eta)$ resulta un álgebra en $\mathcal{C}$. Más aún, para cada $N \in \mathcal{M}$, el objeto $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ es naturalmente un $\underline{\mathrm{End}}M$-módulo a derecha, y se tiene que el funtor $F : \mathcal{M} \to \mathrm{Rep}_{\mathcal{C}}(\underline{\mathrm{End}}M)$ es una equivalencia de categorías. □

Dar una estructura de categoría módulo en $\mathcal{M}$ equivale a dar un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \underline{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$ en la categoría (rígida) de endofuntores exactos de $\mathcal{M}$. En este sentido, se tiene la siguiente caracterización de los funtores de fibra en términos de categorías módulo.

PROPOSICIÓN 1.28. ([**O1**, Proposition 3].) Sea R una k-álgebra separable. Hay una biyección natural entre

- R-funtores de fibra $\mathcal{C} \to R - \mathrm{bimod}$,
- estructuras de categoría módulo $\mathcal{C} \times \mathrm{rep}\, R \to \mathrm{rep}\, R$.

DEMOSTRACIÓN. Sigue de observar que se tiene una equivalencia natural

$$\underline{\mathcal{F}}(\mathrm{rep}\, R, \mathrm{rep}\, R) \simeq R - \mathrm{bimod}\,.$$

□

EJEMPLO 1.29. **Acciones de la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$.** Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{C}(G, \omega)$ la categoría tensorial de espacios vectoriales G-graduados con asociatividad dada por ω. Según el Teorema 1.27, clasificar las categorías módulo (indescomponibles) sobre $\mathcal{C}(G, \omega)$ equivale a clasificar las álgebras (indescomponibles) en $\mathcal{C}(G, \omega)$. Esta clasificación aparece en el trabajo [**O2**].

Dado un subgrupo $H \subseteq G$ y una 2-cocadena $\alpha : H \times H \to k^{\times}$, tal que $\omega|_F = d\alpha$. El álgebra de grupo torcida $k_{\alpha}H$ es un álgebra en $\mathcal{C}(G, \omega)$.

AFIRMACIÓN 1.30. ([**O2**].) Toda categoría módulo semisimple indescomponible sobre $\mathcal{C}(G, \omega)$ es de esta forma. □

Se tiene además que las categorías $\mathrm{Rep}_{\mathcal{C}}\, k_{\alpha}H$ y $\mathrm{Rep}_{\mathcal{C}}\, k_{\alpha'}H'$ son equivalentes, si y sólo si, los pares (H, α) y (H', α') son conjugados por la acción adjunta de G.
Como consecuencia resulta el siguiente resultado, debido a Movshev.

COROLARIO 1.31. Los funtores de fibra $\mathrm{rep}\, G \to \mathrm{vec}_k$ están clasificados por clases de conjugación de pares (H, α), donde $H \subseteq G$ es un subgrupo y $\alpha \in H^2(H, k^{\times})$ es un 2-cociclo *no degenerado.*

Así, por ejemplo, se tiene que la categoría $\operatorname{rep} D_4$ de representaciones del grupo dihedral de orden 8 tiene más funtores de fibra que la categoría $\operatorname{rep} Q_2$, donde Q_2 es el grupo cuaterniónico de orden 8. En particular, las categorías $\operatorname{rep} D_4$, $\operatorname{rep} Q_2$ *no* son equivalentes; es decir, los grupos dihedral y cuaterniónico no son isocategóricos.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Demostrar que $\operatorname{End} \mathbf{1}$ es un monoide conmutativo.
2. Deducir la definición de co-cuasi-álgebra de Hopf.
    a) Sea H una cuasi-álgebra de Hopf de dimensión finita. Entonces H^* es una co-cuasi-álgebra de Hopf.
    b) Supongamos $\dim H < \infty$. Si H es un álgebra de Hopf, entonces H^* es un álgebra de Hopf.
3. Demostrar que $D^\omega G$ es una cuasi-álgebra de Hopf.
4. Dar una definición de *coálgebra* en una categoría monoidal $\mathcal{C}$.
5. Sea A un álgebra en una categoría monoidal $\mathcal{C}$.
    a) Demostrar que $\operatorname{Rep}_{\mathcal{C}} A$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$.
    b) Definir $\otimes_A$ en la categoría de A-bimódulos en $\mathcal{C}$ y demostrar que esto hace de $A - Bimod_{\mathcal{C}}$ una categoría monoidal.
6. Sea $\mathcal{M}$ una categoría abeliana. Describir la noción de álgebra en la categoría monoidal $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. (Estos objetos se llaman *mónadas*. Los objetos duales se llaman *comónadas* y dan lugar a resoluciones 'estándar' de los objetos $U \in \mathcal{M}$, que son útiles para calcular funtores derivados; ver [**Mc**]).
7. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$, y sea $M \in \mathcal{M}$. Probar que $(\underline{\operatorname{End}} M, \mu, \eta)$, definida como en la demostración del Teorema 1.27, es un álgebra en $\mathcal{C}$.
8. Sean $H \subseteq G$ un subgrupo y $\alpha : H \times H \to k^\times$ una 2-cocadena tal que $\omega|_F = d\alpha$. Probar que el álgebra de grupo torcida $k_\alpha H$ es un álgebra en $\mathcal{C}(G, \omega)$.

CAPíTULO 2

Categorías de Fusión

En todo lo que sigue k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.

2.1. Definiciones y Ejemplos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría k-lineal. $\mathcal{C}$ se dice *semisimple finita* si todo objeto de $\mathcal{C}$ es isomorfo a una suma directa finita de objetos simples, y además $\operatorname{End} S \simeq k$, para todo objeto simple. En general, a lo largo de este trabajo, se usará el término *semisimple* para indicar *semisimple finita*.

Sea Λ el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$. Si S es un objeto simple, se dirá que $S \in \Lambda$, por abuso de notación.

Notar que para todo $S, T \in \Lambda$, se tiene

$$\operatorname{Hom}(S,T) = \begin{cases} k\,\mathrm{id}_S, & S = T; \\ 0, & S \neq T. \end{cases}$$

Además, todo objeto X de $\mathcal{C}$ está determinado, salvo isomorfismos, por el conjunto de espacios vectoriales $\operatorname{Hom}(X,S)$, $S \in \Lambda$.

Más precisamente, si $\mathcal{C}$ es una categoría semisimple sobre k, $\mathcal{C}$ admite una estructura de categoría módulo sobre Vec_k, $\otimes : \mathrm{Vec}_k \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, donde $V \otimes X \in \mathcal{C}$ es, por definición, un objeto de $\mathcal{C}$ que representa el funtor

$$Y \mapsto V \otimes \operatorname{Hom}(X,Y),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $V \in \mathrm{Vec}_k$. Si X es un objeto de $\mathcal{C}$ se tiene

$$X \simeq \bigoplus_{S\in\Lambda} \operatorname{Hom}(X,S) \otimes S.$$

Se destaca que, por construcción, se tiene también $V \otimes \operatorname{Hom}(X,Y) \simeq \operatorname{Hom}(V \otimes X, Y)$, para todo $V \in \mathrm{Vec}_k$, $X, Y \in \mathcal{C}$.

Definición 2.1. Una *categoría de fusión* sobre k es una categoría tensorial semisimple y rígida sobre k, tal que

(i) los espacios de homomorfismos son de dimensión finita;

(ii) el conjunto Λ de clases de isomorfismo de objetos simples es finito;

(iii) $\mathbf{1} \in \Lambda$.

La condición (iii) equivale a la condición $\operatorname{End}(\mathbf{1}) \simeq k$. Una categoría tensorial semisimple y rígida sobre k que satisface (i) y (ii) se dirá una categoría de multi-fusión.

Ejemplos 2.2. (i) Sea (H, Φ) es una cuasi-álgebra de Hopf sobre k. La categoría $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión si y sólo si H es semisimple de dimensión finita.

(ii) Sea H un grupoide cuántico finito. La categoría $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión si y sólo si la subálgebra de llegada es simple como H-módulo a izquierda.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría categoría tensorial semisimple sobre k, con espacios de morfismos de dimensión finita, munida de un conjunto finito de objetos simples Λ, tal que $\mathbf{1} \in \Lambda$. Una tal categoría se dirá una *pre*-categoría de fusión (de modo que una categoría de fusión es una pre-categoría de fusión, que además es rígida).

El funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ queda determinado una vez especificado en los objetos $X \otimes Y$, $X, Y \in \Lambda$, y, *a fortiori*, por los espacios vectoriales

$$\begin{bmatrix} XY \\ S \end{bmatrix} := \operatorname{Hom}(X \otimes Y, S), \quad X, Y, S \in \Lambda.$$

Análogamente, el isomorfismo de asociatividad está determinado por los isomorfismos lineales $\begin{Bmatrix} XYZ \\ T \end{Bmatrix} := \operatorname{Hom}(a_{XYZ}, T)$, $X, Y, Z, T \in \Lambda$,

$$\begin{Bmatrix} XYZ \\ T \end{Bmatrix} : \operatorname{Hom}(X \otimes (Y \otimes Z), T) \to \operatorname{Hom}((X \otimes Y) \otimes Z, T).$$

Se tiene por otro lado

$$\operatorname{Hom}((X \otimes Y) \otimes Z, T) \simeq \bigoplus_{S \in \Lambda} \begin{bmatrix} XY \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SZ \\ T \end{bmatrix},$$
$$\operatorname{Hom}(X \otimes (Y \otimes Z), T) \simeq \bigoplus_{S \in \Lambda} \begin{bmatrix} YZ \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XS \\ T \end{bmatrix},$$

donde se ha suprimido el símbolo $\otimes_k$ al indicar el producto tensorial de espacios vectoriales. Los isomorfismos correspondientes al objeto unidad quedan determinados por la familia de vectores

$$l_X \in \begin{bmatrix} \mathbf{1}X \\ X \end{bmatrix}, \quad r_X \in \begin{bmatrix} X\mathbf{1} \\ X \end{bmatrix}, \quad X \in \Lambda.$$

De este modo, los axiomas del pentágono y el triángulo se traducen en ciertas familias de ecuaciones que involucran estos datos lineales:

Proposición 2.3. ([**TY**].) Son equivalentes

(i) una pre-categoría de fusión, munida de un conjunto finito de objetos simples Λ, tal que $\mathbf{1} \in \Lambda$;

(ii) un conjunto finito Λ provisto de

- una colección de espacios vectoriales $\begin{bmatrix} XY \\ S \end{bmatrix}$, $X, Y, S \in \Lambda$,
- una colección de isomorfismos lineales
$$\begin{Bmatrix} XYZ \\ T \end{Bmatrix} : \bigoplus_{S \in \Lambda} \begin{bmatrix} XY \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SZ \\ T \end{bmatrix} \to \bigoplus_{S \in \Lambda} \begin{bmatrix} YZ \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XS \\ T \end{bmatrix},$$
  $X, Y, Z, T \in \Lambda$,
- una colección de vectores $l_X \in \begin{bmatrix} \mathbf{1}X \\ X \end{bmatrix}$, $r_X \in \begin{bmatrix} X\mathbf{1} \\ X \end{bmatrix}$, $X \in \Lambda$,

que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$(M1)\quad \left(\bigoplus_{T\in\Lambda}\begin{Bmatrix}XYZ\\T\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}TW\\U\end{bmatrix}\right)\left(\bigoplus_{S\in\Lambda}\begin{bmatrix}YZ\\S\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}XSW\\U\end{Bmatrix}\right)\left(\bigoplus_{T\in\Lambda}\begin{Bmatrix}YZW\\T\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}XT\\U\end{bmatrix}\right)$$
$$=\left(\bigoplus_{S\in\Lambda}\begin{bmatrix}XY\\S\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}SZW\\U\end{Bmatrix}\right)\tau\left(\bigoplus_{S\in\Lambda}\begin{bmatrix}ZW\\S\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}XYS\\U\end{Bmatrix}\right),$$

$$(M_2)\quad \begin{Bmatrix}X\mathbf{1}Y\\S\end{Bmatrix}(l_Y\otimes f)=r_X\otimes f,\qquad \forall f\in\begin{bmatrix}XY\\S\end{bmatrix}.$$

Demostración. (Esbozo.) Ya se indicó cómo establecer la correspondencia (i) $\Longrightarrow$ (ii); según esta correspondencia, las ecuaciones (M_1) y (M_2) siguen de la naturalidad de los isomorfismos de asociatividad y unidad, junto con los axiomas del hexágono y del triángulo.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). A partir de los datos en (ii) se puede reconstruir una categoría de fusión, como sigue: sea $\mathcal{C}=\prod_{S\in\Lambda}\mathrm{vec}_k$ el producto directo de $|\Lambda|$ copias de la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita. Se define el producto tensorial en la forma

$$(X_S)_S\otimes(Y_T)_T:=\left(\oplus_{S,T}\begin{bmatrix}ST\\U\end{bmatrix}X_SY_T\right)_U.$$

Entonces $\mathcal{C}$ resulta una categoría tensorial con objeto unidad $\mathbf{1}:=(\delta_{\mathbf{1},S})_S$, isomorfismos de asociatividad $\left(\begin{Bmatrix}XYZ\\S\end{Bmatrix}\right)_S$, e isomorfismos de unidad $(l_S)_S$, $(r_S)_S$. $\square$

2.2. Teorema de Reconstrucción de Hayashi-Ostrik

Se han presentado diversas construcciones algebraicas que dan lugar, a través de la teoría de representaciones, a categorías tensoriales. De estas construcciones, los grupoides cuánticos resultan ser la construcción más general en el caso semisimple. En esta sección se mostrará un teorema de reconstrucción tannakiana que establece que toda categoría tensorial rígida y semisimple es la categoría de representaciones de un grupoide cuántico.

Este teorema es debido originalmente a Hayashi, y fue posteriormente presentado, en forma más general, por Ostrik.

La idea básica de la reconstrucción tannakiana puede resumirse como sigue: sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial sobre k y sea R una k-álgebra. Supongamos que $\mathcal{C}$ está munida de un R-funtor de fibra $F:\mathcal{C}\to R-\mathrm{bimod}$. Sea $H:=\mathrm{End}\,F$ el álgebra de las transformaciones naturales $F\to F$. La estructura tensorial de F hace de H, en casos favorables, un grupoide cuántico.

Teorema 2.4. *(*[**H**]*.) Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial semisimple, con un número finito de objetos simples. Existe una biálgebra débil H tal que $\mathcal{C}\simeq\mathrm{rep}\,H$.*

Más aún, si $\mathcal{C}$ es rígida, entonces H es un grupoide cuántico.

El grupoide cuántico H no es canónico. En la demostración de Hayashi la base de H es conmutativa. Un tal grupoide cuántico se llama una *face algebra*.

De hecho, dado un R-funtor de fibra $\mathcal{C}\to R-\mathrm{bimod}$, existe una biálgebra débil H, con base R, tal que $\mathcal{C}\simeq\mathrm{rep}\,H$ [**CE**, 2.3.2]. La demostración del Teorema 2.4 se basa en la construcción explícita de un R-funtor de fibra $\mathcal{C}\to R-\mathrm{bimod}$, donde R es cierta álgebra separable conmutativa.

En particular, resulta que $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf si y sólo si $\mathcal{C}$ admite un funtor de fibra $\mathcal{C} \to \mathrm{vec}_k$. Cambiar el funtor de fibra corresponde a cambiar la comultiplicación en H mediante un twist.

Demostración. La demostración que se esboza a continuación es debida a Ostrik [**O1**]. $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre sí misma, vía la acción regular. Sea R una k-álgebra separable tal que $\mathcal{C} \simeq \operatorname{rep} R$ como categorías abelianas. Se tiene entonces una acción $\mathcal{C} \times \operatorname{rep} R \to \operatorname{rep} R$, que da lugar a un R-funtor de fibra $\mathcal{C} \to R - \mathrm{bimod}$.

A partir del funtor $F : \mathcal{C}\, \mathrm{vec}_k$, que resulta de componer el R-funtor de fibra con el funtor de olvido $R - \mathrm{bimod} \to \mathcal{C}$, se reconstruye un grupoide cuántico H con la propiedad de que $\mathcal{C} \simeq \operatorname{rep} H$. Ver por ejemplo [**CE**, 2.3.2]. □

Como consecuencia del teorema de Hayashi, se tienen los resultados de rigidez (en el sentido de las deformaciones monoidales) que se demuestran en [**ENO**], los cuales responden a conjeturas de Ocneanu.

Otra consecuencia del Teorema de Hayashi es el siguiente resultado sobre la equivalencia Morita.

Proposición 2.5. ([**ENO**, Theorem 2.18].) Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría de multifusión. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo semisimple sobre $\mathcal{C}$. Entonces la categoría dual $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es semisimple.

Demostración. En la demostración se supone que $\mathcal{M}$ es indescomponible. A $\mathcal{M}$ le corresponde un R-funtor de fibra $\mathcal{C} \to R - \mathrm{bimod}$, para cierta álgebra separable R, tal que $\operatorname{rep} R \simeq \mathcal{M}$. Luego, $\mathcal{C} \simeq \operatorname{rep} H$, para cierto grupoide cuántico H. De modo que $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \simeq \operatorname{rep} H^*$ [**O1**]. El resultado es ahora una consecuencia de [**ENO**, Theorem 2. 24], que establece un criterio para la semisimplicidad de un grupoide cuántico en términos del cuadrado de la antípoda. □

Observación 2.6. Un caso particular de categorías de fusión son las categorías modulares, introducidas por Reshetikhin y Turaev. Estas categorías dan lugar a invariantes de variedades de dimensión 3. Dos referencias sobre este tipo de categorías son [**Tu, BK**].

Como se explica en [**Tu**], la estructura modular da lugar a una acción proyectiva del grupo modular $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ en el álgebra de fusión correspondiente, lo cual justifica la terminología. Si se denota por S y T a los generadores canónicos del grupo modular, entonces S se representa en la matriz (s_{ij}), la cual a su vez *diagonaliza las reglas de fusión* del anillo de Grothendieck (sigue fácilmente de las definiciones que este anillo es conmutativo). Se trasluce también que (s_{ij}) puede pensarse como una *tabla de caracteres* de la categoría, ya que la propiedad anterior caracteriza la tabla de caracteres de un grupo finito.

A partir de las categorías tensoriales de representaciones de un álgebra de Hopf de dimensión finita, se obtienen categorías modulares, mediante el pasaje al *doble cuántico* [**EG**]: esta construcción es debida Drinfeld, en el caso de álgebras de Hopf, asocia a un álgebra de Hopf H un álgebra de Hopf cuasi-triangular $D(H)$ tal que $\operatorname{rep} D(H)$ es equivalente a $\mathcal{Z}(\operatorname{rep} H)$. En el caso de cuasi-álgebras de Hopf, la construcción análoga se debe a Hausser y Nill [**HN1**], y en el caso de los grupoides cuánticos, se debe a Nikshych, Turaev y Vainerman [**NTV**].

2.2.1. Grupoides cuánticos y cuasi-álgebras de Hopf. Sea (H, Φ) una cuasi-álgebra de Hopf semisimple. La categoría $\operatorname{rep}(H, \Phi)$ es una categoría de fusión, y por lo tanto, según el Teorema de Hayashi, existe un grupoide cuántico H_0 con la propiedad $\operatorname{rep} H_0 \simeq \operatorname{rep}(H, \Phi)$. La demostración del Teorema 2.4 resulta poco efectiva para realizar explícitamente una tal reconstrucción. Sin embargo, ésta es posible gracias al siguiente resultado de Hausser y Nill.

Un *cuasi-bimódulo de Hopf* es un H-bimódulo V, junto con una aplicación $\rho : V \to V \otimes H$, que satisface

$$(\operatorname{id} \otimes \epsilon)\rho = \operatorname{id},$$
$$\Phi.(\rho \otimes \operatorname{id})\rho(v).\Phi^{-1} = (\operatorname{id} \otimes \Delta)\rho(v),$$

para todo $v \in V$. Un morfismo de cuasi-bimódulos de Hopf $f : V \to U$, es una aplicación de bimódulos que conmuta con la cuasi-coacción.

Se tiene así una categoría ${}_H\mathcal{M}_H^H$ de cuasi-bimódulos de Hopf (de dimensión finita en nuestro contexto). Ésta es una categoría tensorial con respecto al producto tensorial $\otimes_H$ de H-bimódulos. Más aún, el funtor de olvido ${}_H\mathcal{M}_H^H \to H - \operatorname{bimod}$ es un H-funtor de fibra.

El siguiente teorema generaliza un resultado de Larson y Sweedler para álgebras de Hopf.

Teorema 2.7. *([**HN2**]) Sea (H, Φ) una cuasi-álgebra de Hopf. Hay una equivalencia tensorial $\operatorname{rep}(H, \Phi) \to {}_H\mathcal{M}_H^H$.*

Demostración. (Esbozo.) La equivalencia asigna a cada $V \in \operatorname{rep}(H, \Phi)$, el cuasi-bimódulo de Hopf $V \otimes H$, con las acciones y coacción

$$a.(v \otimes h).b := (a_1.v) \otimes a_2 h b,$$
$$\rho(v \otimes h) := \Phi^{(-1)}.v \otimes \Phi^{(-2)} h_1 \otimes \Phi^{(-3)} h_2,$$

para todo $v \in V$, $h \in H$. La equivalencia inversa ${}_H\mathcal{M}_H^H \to \operatorname{rep}(H, \Phi)$ asigna a cada cuasi-bimódulo de Hopf W, su espacio de *coinvariantes*: $W^{\operatorname{co} H}$. $\square$

El funtor de olvido ${}_H\mathcal{M}_H^H \to H - \operatorname{bimod}$ es un H-funtor de fibra. Este Teorema permite, entonces, reconstruir una estructura de grupoide cuántico H_0 (con base H) en el espacio vectorial $H \otimes H^* \otimes H$, de modo que $\operatorname{rep} H_0 \simeq \operatorname{rep}(H, \Phi)$. La descripción explícita de H_0 es a través de los productos cruzados diagonales, y aparece en [**HN3**].

2.3. Álgebras de fusión

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Sea $\Lambda = \{X_0 = \mathbf{1}, \dots, X_n\}$ un sistema de representantes de las clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{C}$.

El anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es un grupo abeliano libre en la base $x_i := [X_i]_i$. En esta base, se tiene

$$x_i x_j = \sum_l N_{ij}^l x_l,$$

donde $N_{ij}^l = \dim \operatorname{Hom}(X_l, X_i \otimes X_j)$ son enteros no negativos. La dualidad en $\mathcal{C}$ induce en $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ la estructura de anillo con involución, donde $x_i \mapsto x_{i^*} = [X_i^*]$, para todo i.

Los coeficientes N_{ij}^l satisfacen las condiciones

$$N_{ij}^k = N_{ji}^k = N_{ik^*}^{j^*} = N_{i^*j^*}^{k^*}, \quad N_{ij}^0 = \delta_{ij^*}.$$

Un anillo con estas propiedades se llama un *anillo de fusión*. Las constantes N_{ij}^l reciben el nombre de *coeficientes de fusión*. $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ se llama el anillo de fusión de $\mathcal{C}$.

Observar que en $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ se tiene la relación de orden: $x < y$ si y sólo si, $y - x \in \mathbb{Z}^+ x_0 + \dots Z^+ x_n$.

Un problema interesante consiste en decidir si un anillo de fusión dado puede realizarse como anillo de Grothendieck de una categoría de fusión. Existen ejemplos [**TY**] de anillos donde esto no es posible.

El siguiente resultado, cuya demostración se omite, describe bajo qué condiciones dos álgebras de Hopf semisimples tienen 'el mismo' anillo de fusión.

Notar que si $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf semisimple, $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ posee un elemento distiguido

$$r = \sum_i (\dim X_i) X_i.$$

PROPOSICIÓN 2.8. ([**Nk**].) Sean H_1, H_2, álgebras de Hopf semisimples. Son equivalentes:

(i) existe un isomorfismo de anillos ordenados

$$\mathcal{K}(\operatorname{rep} H_1) \to \mathcal{K}(\operatorname{rep} H_2),$$

que preserva el elemento *distinguido*;

(ii) H_2 es un twist de H_1 por un pseudo 2-cociclo. □

2.4. Dimensión de Frobenius-Perron

Las dimensiones de Frobenius-Perron resultan ser una herramienta útil en el estudio de las categorías de fusión. En esta sección se resumen algunas de las propiedades elementales, según se presentan en [**ENO**]. La dimensión de Frobenius-Perron reemplaza, en el contexto más general de las categorías de fusión, el concepto de *dimensión* de una cuasi-álgebra de Hopf, de los módulos sobre una cuasi-álgebra de Hopf, etc.

Se recuerda que si A es una matriz cuadrada con coeficientes reales no negativos, entonces

- A tiene un autovalor no negativo $\lambda(A)$, tal que $\lambda(A) \geq |r|$, para cualquier otro autovalor r.
- Si A tiene coeficientes estrictamente positivos, entonces $\lambda(A)$ es un autovalor positivo simple, y el autovector correspondiente puede normalizarse de modo que tenga coeficientes estrictamente positivos.
- Si A tiene un autovector v con coeficientes estrictamente positivos, entonces el autovalor correspondiente es $\lambda(A)$.

Este resultado se conoce como *Teorema de Frobenius-Perron*. El autovalor $\lambda(A)$ se llama el autovalor de Frobenius-Perron de A.

DEFINICIÓN 2.9. Sea X un objeto de $\mathcal{C}$. La *dimensión de Frobenius-Perron* de X, denotada $\operatorname{FPdim} X$, es el autovalor de Frobenius-Perron de la matriz de multiplicación a izquierda por $[X]$ en el anillo de fusión de $\mathcal{C}$.

La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ se define por

$$\operatorname{FPdim} \mathcal{C} := \sum_{X \in \Lambda} (\operatorname{FPdim} \mathcal{C})^2.$$

En el trabajo [**ENO**] (ver también [**CE**]), se demuestran muchas propiedades de la dimensión de Frobenius-Perron, notablemente un resultado que generaliza el Teorema de Lagrange para grupos finitos, y una fórmula que generaliza la Ecuación de Clases. Estos resultados no se incluyen en este trabajo. Se mencionan, sin embargo, las propiedades siguientes.

TEOREMA 2.10. *(1) (*[**ENO**, Theorem 8.6]*.) La aplicación*

$$[X] \mapsto \operatorname{FPdim} X,$$

define un homomorfismo de anillos $\mathcal{K}(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$.

(2) ([**CE**]*.)* FPdim *es el único homomorfismo de anillos $\mathcal{K}(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ que aplica los elementos x_i en números positivos.*

La parte (2) del teorema implica que todo funtor exacto $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías de fusión, que preserve productos tensoriales (no necesariamente tensorial), preserva las dimensiones de Frobenius-Perron.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $x_0, \dots, x_n$ los representantes de los objetos simples de $\mathcal{C}$. Se demostrará que existe un vector f con coeficientes positivos y $f_0 = 1$, tal que $x_i f = \lambda_i f$, para todo i. De donde, según el Teorema de Frobenius-Perron, $\lambda_i = \operatorname{FPdim} x_i$, y *a fortiori* $\operatorname{FPdim} x_i \operatorname{FPdim} x_j = \operatorname{FPdim}(x_i x_j)$.

Sea $z_j := \sum_i x_i x_j x_i^*$. Se tiene $z_j \in \mathcal{Z}(\mathcal{K}(\mathcal{C}))$. Sea ahora $z = \sum_j z_j$; dado que x_j aparece en z con multiplicidad positiva, para todo j, la matriz de multiplicación por z tiene coeficientes estrictamente positivos. Luego, existe un único autovector f de la multiplicación por z con las propiedades que se afirmaron. Sigue también que $x_i f$ debe ser un múltiplo escalar de f, como se afirmó.

(2) Supongamos que $f : \mathcal{K}(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ es otro homomorfismo de anillos tal que $f(x_i) > 0$, para todo i. Se tiene $f(x_i) f(x_j) = \sum_l N_{ij}^l f(x_l)$. Por lo tanto el vector $(f(x_l))$ es un autovector de la matriz N_i, de multiplicación a izquierda por x_i. El Teorema de Frobenius-Perron implica que $f(x_l) = \operatorname{FPdim} x_l$, para todo l, lo cual demuestra la parte (2). □

EJEMPLO 2.11. Supongamos que $\mathcal{C} = \operatorname{rep}(H, \phi)$, para cierta cuasi-álgebra de Hopf semisimple H. Si X es un H-módulo, entonces vale la igualdad $\operatorname{FPdim} X = \dim X$.

TEOREMA 2.12. [**CE**, Proposition 4.14]*.)* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$ *es Morita invariante.*

Se deduce de este Teorema que $\operatorname{FPdim} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = (\operatorname{FPdim} \mathcal{C})^2$.

TEOREMA 2.13. *(*[**ENO**, Theorem 8.33]*.) Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Son equivalentes*

(1) $\mathcal{C} \simeq \operatorname{rep} H$, donde H es una cuasi-álgebra de Hopf semisimple;

(2) las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de $\mathcal{C}$ son números enteros.

DEMOSTRACIÓN. Se esbozará la demostración de la implicación (2) $\Longrightarrow$ (1). Se fija, para cada objeto simple $X \in \mathcal{C}$, un espacio vectorial V_X de dimensión $\dim V_X = \operatorname{FPdim} X$. Esto define un funtor exacto $V : \mathcal{C} \to \operatorname{vec}_k$. Se fijan también isomorfismos $c_{X,Y} : V(X) \otimes V(Y) \to V(X \otimes Y)$, para X, Y simples. Entonces (V, c) resulta un cuasi-funtor de fibra, y un argumento de reconstrucción tannakiana implica que $\mathcal{C} \simeq \operatorname{rep} H$, donde H es una cuasi-álgebra de Hopf. □

2.5. Categorías de Tambara y Yamagami

Las categorías de fusión que se presentan en esta Sección fueron introducidas por Tambara y Yamagami [**TY**].

Sea G un grupo abeliano finito. Se usará la notación multiplicativa para el producto en G, y $e \in G$ denotará el elemento identidad.

Sean además los siguientes datos:

- $\chi : G \times G \to k^\times$ un bicaracter simétrico no degenerado: esto es,
$$\chi(ab, c) = \chi(a, c)\chi(b, c), \quad \chi(a, b) = \chi(b, a),$$
para todo $a, b, c \in G$, y además, la aplicación inducida $f : G \to \widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, k^\times)$, $f(a)(b) = \chi(a, b)$, es un isomorfismo.
- $d \in k^\times$ tal que $|G|d^2 = 1$.

Se define $\mathcal{TY} := \mathcal{TY}(G, \chi, d)$ como la categoría semisimple, cuyos objetos son sumas directas finitas de elementos en $\Lambda = G \cup \{m\}$. Los morfismos quedan definidos por $\mathrm{Hom}(s, s') = 0$, si $s \neq s'$, $\mathrm{Hom}(s, s) = k$, $s, s' \in \Lambda$. La identidad $s \to s$ es el elemento identidad $1 \in k$.

El producto tensorial $\mathcal{TY} \times \mathcal{TY} \to \mathcal{TY}$ está dado por
$$a \otimes b = ab, \quad a \otimes m = m = m \otimes a, \quad m \otimes m = \oplus_{a \in G} a,$$
para todo $a, b \in G$; y $\mathbf{1} = e \in G$.

Los isomorfismos de unidad son las identidades, y los de asociatividad se definen en la forma
$$a_{a,b,c} = 1, \quad a_{a,b,m} = 1 = a_{m,a,b}, \quad a_{a,m,m} = a_{m,m,a} = \oplus_{b \in G} 1_b,$$
$$a_{a,m,b} = \chi(a, b), \quad a_{m,a,m} = \oplus_{b \in G} \chi(a, b)_b,$$
$$a_{m,m,m} = (d\chi(a, b)^{-1})_{a,b} : \oplus_{a \in G} m \to \oplus_{b \in G} m.$$
La dualidad se define como sigue. $a^* = a^{-1}$, para todo $a \in G$, con $1 = \mathrm{coev} = \mathrm{ev} : e \to e$; $m^* = m$, con
$$\mathrm{coev} := i : e \to m \otimes m, \quad \mathrm{ev} := \frac{1}{d} j : m \otimes m \to e,$$
donde $i : e \to m \otimes m$, $j : m \otimes m \to e$, son la inclusión y la proyección sobre la componente de tipo e, respectivamente.

La Proposición 2.3 implica que $\mathcal{TY}$ es de hecho una categoría de fusión sobre k. Más aún, las ecuaciones en 2.3 implican el siguiente teorema de caracterización.

TEOREMA 2.14. *([**TY**].) Sea G un grupo finito. Consideremos el anillo de fusión $\mathcal{K}$ con base $G \cup x$ y multiplicación*
$$a.b = ab, \quad a.x = x = x.a, \quad x.x = \sum_{a \in G} a,$$
para todo $a \in G$, con la involución $a^* = a^{-1}$, $x^* = x$.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una pre-categoría de fusión tal que $\mathcal{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{K}$. Entonces G es abeliano, y existen un caracter simétrico no degenerado $\chi : G \times G \to k^\times$ y un elemento $d \in k$, con $d^2|G| = 1$, tales que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{TY}(G, \chi, d)$.

Además, $\mathcal{TY}(G, \chi, d) \simeq \mathcal{TY}(G, \chi', d')$ si y sólo si $d = d'$ y χ, χ' son conjugados por un automorfismo de G.

En particular, toda pre-categoría de fusión con anillo de fusión isomorfo a $\mathcal{K}$ es de fusión.

Notar además que las condiciones

- G es abeliano, y
- $|G|$ es un cuadrado en $k^{\times}$,

son necesarias para que exista una realización del anillo $\mathcal{K}$. Esto demuestra que existen anillos de fusión que no admiten realizaciones.

Demostración. (Esbozo.) Se usa la correspondencia enunciada en la Proposición 2.3. Según la notación allí, los datos (no triviales) que determinan a $\mathcal{C}$ son los siguientes:

- espacios vectoriales de dimensión 1:
$$\begin{bmatrix} a,b \\ ab \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} am \\ m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ma \\ m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} mm \\ a \end{bmatrix},$$
para cada $a, b \in G$.
- isomorfismos lineales:
$$\begin{Bmatrix} a,b,c \\ abc \end{Bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix} a,b,m \\ m \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} a,m,b \\ m \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} m,a,b \\ m \end{Bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix} a,m,m \\ b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} m,a,m \\ b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} m,m,a \\ b \end{Bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix} m,m,m \\ m \end{Bmatrix},$$
para cada $a, b, c \in G$,

que satisfacen las Ecuación (M_1) en 2.3.

Se tiene, por ejemplo, que
$$\begin{Bmatrix} a,m,b \\ m \end{Bmatrix} : [m,b] \otimes [a,m] \mapsto \chi(a,b)[a,m] \otimes [m,b],$$
y análogamente
$$\begin{Bmatrix} m,m,m \\ m \end{Bmatrix} : [a] \otimes [m,a] \mapsto \sum_{b \in G} \gamma(a,b)[b] \otimes [b,m],$$
para $a, b \in G$, donde $\chi(a,b), \gamma(a,b) \in k^{\times}$. Aquí, se usa una elección de vectores no nulos
$$[m,b] \in \begin{bmatrix} m,b \\ m \end{bmatrix}, \quad [a,m] \in \begin{bmatrix} a,m \\ m \end{bmatrix}, \quad [a] \in \begin{bmatrix} m,m \\ a \end{bmatrix}.$$
La ecuación (M_1) implica que χ es un bicaracter y, salvo equivalencias tensoriales, se puede suponer que χ es simétrico; sigue también que $\gamma(1,1)^2 \sum_c \chi(c, bf^{-1}a^{-1}) = \delta_{af,b}$, $a, b, c, f \in G$. De donde χ es no degenerado y $\gamma(1,1)^2|G| = 1$. Se toma entonces $d = \gamma(1,1)$.

Resulta también que los restantes parámetros quedan determinados por χ, d. Luego $\mathcal{C} \simeq \mathcal{TY}(G, \chi, d)$.

El segundo enunciado se demuestra con técnicas análogas. □

Ejemplo 2.15. Sea $G = \langle a, b :\, a^2 = b^2 = aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle$, $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. El grupo G posee dos bicaracteres simétricos, no equivalentes por la acción de $\operatorname{Aut} G$: el bicaracter χ_1, donde
$$\chi_1(a,a) = \chi_1(b,b) = \chi_1(ab,ab) = 1,$$
$$\chi_1(a,b) = \chi_1(b,ab) = \chi_1(ab,a) = -1,$$
y el bicaracter χ_2,
$$\chi_2(a,a) = \chi_2(b,b) = -1, \quad \chi_2(a,b) = 1.$$

Se tienen, por otro lado, dos elecciones $d = \pm\dfrac{1}{2}$. Luego resulta:

TEOREMA 2.16. *([**TY**].) Hay exactamente 4 clases de equivalencia de categorías de fusión con anillo de Grothendieck $\mathcal{K}$ generado por $G \cup x$, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, con las reglas de fusión*

$$c.x = x = x.c, \quad x.x = 1 + a + b + ab,$$

$c \in G$. Éstas corresponden, respectivamente, a las siguientes categorías:

$\mathcal{TY}(\chi_1, \frac{1}{2})$: *representaciones del grupo dihedral D_4, de orden 8.*

$\mathcal{TY}(\chi_1, -\frac{1}{2})$: *representaciones del grupo cuaterniónico Q_2, de orden 8.*

$\mathcal{TY}(\chi_2, \frac{1}{2})$: *representaciones del álgebra de Kac y Paljutkin H_8, de dimensión 8: H_8 es la única álgebra de Hopf semisimple no conmutativa ni coconmutativa de dimensión 8* [**KP, M2**].

$\mathcal{TY}(\chi_2, -\frac{1}{2})$: *representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf A de dimensión 8.*

□

Según los resultados de clasificación en [**M2**], las únicas álgebras de Hopf no conmutativas de dimensión 8 son kD_4, kQ_2 y H_8. El teorema implica que estas tres álgebras de Hopf tienen categorías de representaciones no equivalentes. Sigue también que la cuasi-álgebra de Hopf A no es twist equivalente a un álgebra de Hopf.

Se tiene entonces que las álgebras de Hopf kD_4, kQ_2 y H_8 son dos a dos twist inequivalentes. Notar sin embargo, que kD_4, kQ_2 y H_8 tienen el mismo anillo de fusión, y por lo tanto, cualesquiera dos de ellas son twist equivalentes por un *pseudo* 2-cociclo.

2.6. Categorías de Tipo Grupo

Las categorías tensoriales que se estudian en esta sección fueron introducidas por Ostrik en [**O2**, Section 3] y luego estudiadas en [**ENO**].

Sean G un grupo finito y $F \subseteq G$ un subgrupo. Se denotará por $e \in G$ al elemento identidad. Sean también

- $\omega : G \times G \times G \to k^\times$, un 3-cociclo normalizado;
- $\alpha : F \times F \to k^\times$ una 2-cocadena normalizada;

sujetos a la condición

$$\omega|_{F\times F\times F} = d\alpha. \tag{2.1}$$

Se considera la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados, con la asociatividad dada por ω. La condición (2.1) implica que el álgebra de grupo torcida por α, $k_\alpha F$, es un álgebra asociativa en $\mathcal{C}(G, \omega)$, y se le asocia una categoría tensorial, $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$: la categoría de $k_\alpha F$-bimódulos en $\mathcal{C}(G, \omega)$. Ésta es una categoría de fusión sobre k.

LEMA 2.17. *Las FP-dimensiones de los objetos simples en la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ son enteros. En particular, $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple.*

Una descripción explícita de una cuasiálgebra de Hopf cuya categoría de representaciones es equivalente a $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ se da en [**N3**].

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

Las categorías $\mathcal{C}(G,\omega,F,\alpha)$ se llaman de *tipo grupo* [**ENO**, Definition 8.46]. Por extensión, se dirá que una (cuasi)-álgebra de Hopf A es de tipo grupo si la categoría rep A de sus representaciones de dimensión finita es de tipo grupo.

Sean $\eta : G\times G \to k^\times$ y $\chi : F \to k^\times$ cocadenas normalizadas. Sean $\widetilde{\omega} : G\times G\times G \to k^\times$, $\widetilde{\alpha} : F\times F \to k^\times$, definidos por

$$\widetilde{\omega} = \omega(d\eta), \qquad \widetilde{\alpha} = \alpha(\eta|_{F\times F})(d\chi).$$

Entonces las categorías $\mathcal{C}(G,\omega,F,\alpha)$ y $\mathcal{C}(G,\widetilde{\omega},F,\widetilde{\alpha})$ son equivalentes [**ENO**, Remark 8.39].

Observación 2.18. Sean G, F, ω y α como antes. Sea Q un sistema de representates de las coclases a izquierda de G módulo F, tal que $e\in Q$; de modo que todo elemento $g\in G$ se escribe de manera única en la forma $g=xp$, con $p\in Q$, $x\in F$. Se considera la cocadena $\eta : G\times G\to k^\times$, $\eta(xp,yq) := \alpha^{-1}(x,y)$, $p,q\in Q$, $x,y\in F$. Poniendo $\chi = 1$, se obtiene $\widetilde{\alpha} = 1$. Por lo tanto, las categorías $\mathcal{C}(G,\omega,F,\alpha)$ y $\mathcal{C}(G,\widetilde{\omega},F,1)$ son equivalentes, donde $\widetilde{\omega} = \omega(d\eta)$. Es decir, salvo equivalencias tensoriales, *se puede suponer que* $\alpha = 1$.

En [**O2**] se determina el rango de cada categoría módulo sobre una categoría de tipo grupo. En particular, los funtores de fibra

$$\mathcal{C}(G,\omega,F,\alpha) \to \mathrm{vec},$$

están clasificados por clases de conjugación de subgrupos Γ de G, munidos de un 2-cociclo normalizado $\beta\in Z^2(\Gamma,k^\times)$, tal que

- la clase de $\omega|_\Gamma$ es trivial;
- $G = F\Gamma$; y
- la clase del cociclo $\alpha|_{F\cap\Gamma}\beta^{-1}|_{F\cap\Gamma}$ es no degenerada.

Observación 2.19. La siguiente caracterización es una consecuencia directa de las definiciones:

$\mathcal{C}$ es de tipo grupo, si y sólo si $\mathcal{C}$ es equivalente Morita a $\mathcal{C}(G,\omega)$, para algún grupo finito G y $\omega\in H^3(G,k^\times)$.

Usando esta caracterización, se demuestra en [**ENO**, 8.8] que los duales, opuestos, cocientes, subcategorías plenas, y productos tensoriales de categorías de tipo grupo son de tipo grupo. Por [**ENO**, Remark 8.47], el centro de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es de tipo grupo si y sólo si $\mathcal{C}$ lo es.

Sin embargo, en Remark 8.48 del paper [**ENO**], se observa que existen cuasi-álgebras de Hopf que *no* son de tipo grupo: uno de estos ejemplos proviene de la construcción de Tambara y Yamagami.

La siguiente caracterización de las categorías de tipo grupo sigue de los resultados de [**N2**].

Teorema 2.20. *Sea H una cuasi-álgebra de Hopf semisimple. Son equivalentes:*
(i) H es de tipo grupo.
(ii) existen un grupo finito G y un 3-cociclo $\omega\in Z^3(G,k^\times)$ tales que $D(H)$ es twist equivalente a $D^\omega(G)$.

La demostración de este teorema se basa en un teorema de Schauenburg, que dice que el centro de una categoría de bimódulos $A-\mathrm{bimod}_{\mathcal{C}}$ es equivalente al centro de $\mathcal{C}$.

El siguiente teorema se demuestra también en [**N2**].

TEOREMA 2.21. *Sea $G = F\Gamma$ una factorización exacta de un grupo finito G. Supongamos que A es un álgebra de Hopf que admite una extensión abeliana*

$$1 \to k^{\Gamma} \to A \to kF \to 1. \tag{2.2}$$

Entonces A es de tipo grupo. □

En este caso, el 3-cociclo que aparece es el que proviene de la clase equivalencia de A (en tanto que extensión) a partir de una sucesión exacta debida a G. I. Kac; ver [**M1**].

EJEMPLO 2.22. Sea $\mathcal{TY}(G, \chi, d)$ una categoría de Tambara y Yamagami. Se tiene una inclusión de categorías tensoriales

$$\operatorname{rep} G \to \mathcal{TY}(G, \chi, d).$$

En el caso en que $\mathcal{TY}(G, \chi, d)$ es la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf A (si y sólo si admite un funtor de fibra), esto implica que hay una proyección de álgebras de Hopf $A \to kG \simeq k^G$.

Además deber ser $\dim A = |G| + (\operatorname{FPdim} m)^2 = 2|G|$. Por lo tanto la proyección $A \to kG$ tiene índice 2, y es *normal.* Esto significa que la proyección da lugar a una sucesión exacta de álgebras de Hopf $k \to k\mathbb{Z}_2 \to A \to kG \to k$. En particular, A es un producto bicruzado como los construídos en el Ejemplo 1.18 (1).

Resulta entonces

COROLARIO 2.23. Toda álgebra de Hopf semisimple cuya categoría de representaciones es del tipo $\mathcal{TY}(G, \chi, d)$ es de tipo grupo. □

En otras palabras, las categorías de Tambara y Yamagami son de tipo grupo, siempre que admitan un funtor de fibra en la categoría de espacios vectoriales.

Las categorías $\mathcal{TY}(G, \chi, d)$ provenientes de un álgebra de Hopf se estudian en [**T**].

2.7. Grupoides Cuánticos y Grupoides Dobles

Las construcciones que se presentan en esta sección se introducen en los trabajos [**AN1, AN2**].

Un *groupoide doble* finito $\mathcal{T}$ es un grupoide finito en la categoría de grupoides finitos. Se suele representar un doble grupoide como un diagrama de cuatro grupoides

$$\begin{matrix} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{H} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{matrix}$$

sujetos a una serie de axiomas [**E, BS**]. No se dará en este trabajo la lista completa de estos axiomas, sino sólo los más representativos.

Un elemento $A \in \mathcal{B}$ se representa con una 'caja'

$$A = l \underset{b}{\overset{t}{\square}} r$$

donde $t(A) = t$, $b(A) = b$, $r(A) = r$, $l(A) = l$, y los cuatro vértices de la caja son $tl(A) = lt(A)$, $tr(A) = rt(A)$, $bl(A) = lb(A)$, $br(A) = rb(A)$.

Se escribe $A|B$ si $r(A) = l(B)$ (de modo que A y B son componibles horizontalmente), y $\dfrac{A}{B}$ si $b(A) = t(B)$ (de modo que A y B son componibles verticalmente). Las composiciones verfican lo siguiente. Sean $A = l \underset{b}{\overset{t}{\square}} r$ y $B = s \underset{c}{\overset{u}{\square}} m$ en $\mathcal{B}$.

$$\text{(2.3)} \quad \text{Si} \quad A|B, \quad \text{then} \quad AB = l \underset{bc}{\overset{tu}{\square}} m,$$

$$\text{(2.4)} \quad \text{Si} \quad \frac{A}{B}, \quad \text{entonces} \quad \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} = ls \underset{c}{\overset{t}{\square}} rm.$$

Ley de permutabilidad. Si $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$, entonces

$$\begin{matrix} AB \\ CD \end{matrix} := \begin{Bmatrix} AB \\ CD \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix}.$$

Sean

$$\mathbf{D} := \{D \in \mathcal{B} : \ l(D), b(D) \in \mathcal{P}\},$$
$$\mathbf{E} := \{E \in \mathcal{B} : \ r(E), t(E) \in \mathcal{P}\}.$$

$\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ tienen estructuras naturales de grupoides con base $\mathcal{P}$. Estos son variantes de los llamados *grupoides núcleo* de $\mathcal{T}$; han sido estudiados por Brown y Mackenzie en [**BMa**]. La aplicación $A \mapsto A^{-1}$, induce un isomorfismo de grupoides $\mathbf{D} \to \mathbf{E}$. Aquí, para $A \in \mathcal{B}$, $A^{-1} \in \mathcal{B}$ denota el inverso horizontal del inverso vertical de A, que coincide con el inverso vertical del inverso horizontal, según la ley de permutabilidad.

Se consideran las funciones $\ulcorner, \llcorner, \urcorner, \lrcorner : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ definidas como sigue: $\ulcorner(X)$ es el número de cajas $U \in \mathcal{B}$ con $l(U) = l(X)$ y $t(U) = t(X)$, etc.

En lo que sigue se considerará un grupoide doble $\mathcal{T}$ que satisface la siguiente condición:

$$\text{(2.5)} \qquad \urcorner(g, x) \neq 0, \qquad \forall x \in \mathcal{H},\ g \in \mathcal{V},\ r(x) = t(g).$$

Estos grupoides dobles han sido estudiados por Brown y Higgins [**BH**].

Teorema 2.24. *$k\mathcal{T}$ es un grupoide cuántico con multiplicación y comultiplicación definidas por*

$$A.B = \begin{cases} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}, & si \dfrac{A}{B}, \\ 0, & \textit{en otro caso}, \end{cases}$$

$$\Delta(A) = \sum_{XY=A} \frac{1}{\urcorner(Y)} X \otimes Y = \sum_{XY=A} \frac{1}{\ulcorner(X)} X \otimes Y,$$

para todo $A, B \in \mathcal{B}$.

Es decir, como álgebra, $k\mathcal{T}$ es el álgebra de grupoide del grupoide vertical de $\mathcal{T}$, mientras que la estructura de coálgebra es una modificación del dual del álgebra de grupoide del grupoide horizontal.

La antípoda está determinada por la fórmula

$$\mathcal{S}(A) = \frac{\ulcorner(A)}{\llcorner(A)}\, A^{-1},$$

para todo $A \in \mathcal{B}$. Las aplicaciones de fuente y de llegada están determinadas, respectivamente, por

$$\epsilon_s(A) = \begin{cases} {}_{\phi(A)}\mathbf{1}, & \textit{si} \quad t(A) \in \mathcal{P}, \\ 0, & \textit{en otro caso}; \end{cases}$$

$$\epsilon_t(A) = \begin{cases} \dfrac{\ulcorner(A)}{\llcorner(A)}\, \mathbf{1}_{\psi(A)}, & \textit{si} \quad b(A) \in \mathcal{P}, \\ 0, & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

Las subálgebras fuente y llegada son isomorfas a las álgebras de grupoide $k\mathbf{D}$ y $(k\mathbf{E})^{\mathrm{op}}$, respectivamente.

Aquí,

$$_D\mathbf{1} := \sum_{z\in\mathcal{H},\, r(z)=e(D)} \{\mathrm{id}\, z\, D\}, \quad \mathbf{1}_E := \sum_{x\in\mathcal{H},\, l(x)=e(E)} \{E\ \mathrm{id}\, x\}.$$

para $D \in \mathbf{D}$, $E \in \mathbf{E}$. Las aplicaciones ϕ y ψ se definen mediante las fórmulas $\phi(A) = \left\{\begin{matrix} A^{-1} \\ \mathrm{id}\, r(A) \end{matrix}\right\}$, si $t(A) \in \mathcal{P}$, $\psi(A) = \left\{\begin{matrix} \mathrm{id}\, l(A) \\ A^{-1} \end{matrix}\right\}$, si $b(A) \in \mathcal{P}$.

Se tiene así una categoría tensorial rígida $\operatorname{rep} k\mathcal{T}$. Esta es una categoría de multi-fusión, que *no siempre* es de fusión, esto es: no siempre se tiene $\operatorname{End}\mathbf{1} \simeq k$. El funtor de olvido $\operatorname{Rep} k\mathcal{T} \to \mathbf{D} - \operatorname{Bimod}$ es un funtor tensorial.

EJEMPLOS 2.25. (1) **Bimódulos sobre un álgebra separable.** Sea $s, e : \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide finito. Se le asocia a $\mathcal{G}$ un grupoide doble

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{G}) = \begin{matrix} \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \times \mathcal{P} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{G} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{matrix},$$

donde

- $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightrightarrows \mathcal{P}$ es el grupoide basto sobre $\mathcal{P}$,
- $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$ es el grupoide basto sobre $\mathcal{G}$,
- $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ es el grupoide producto directo.

Una caja en este grupoide doble se puede indicar en la forma

$$(g, h) = g \,\square\, h = g \begin{matrix} s(g) & s(h) \\ \boxed{\quad (g,h) \quad} \\ e(g) & e(h) \end{matrix} h.$$

En este ejemplo, el grupoide núcleo $\mathbf{D}$ es isomorfo a $\mathcal{G}$.

Se tiene así un grupoide cuántico $k\mathcal{T}(\mathcal{G})$ asociado, y *a fortiori* una categoría tensorial rígida $\operatorname{rep} k\mathcal{T}(\mathcal{G})$.

LEMA 2.26. *La categoría* $\operatorname{rep} k\mathcal{T}(\mathcal{G})$ *es equivalente a* $k\mathcal{G} - \text{bimod}$.

DEMOSTRACIÓN. $k\mathcal{G}$ es un álgebra separable, cuyo idempotente de separabilidad es

$$e = \sum_{g \in \mathcal{G}} \frac{1}{d(s(g))}\, g \otimes g^{-1} \, \in \, k\mathcal{G} \otimes (k\mathcal{G})^{\mathrm{op}},$$

donde $d(s(g))$ es el número de flechas en $\mathcal{G}$ que salen de $s(g)$. Luego, para todo par de $k\mathcal{G}$-bimódulos V y W, la inclusión $e.(V \otimes_k W) \subseteq V \otimes_k W$ induce un isomorfismo natural

$$V \otimes_{k\mathcal{G}} W \simeq e.(V \otimes_k W).$$

Veamos que esto coincide con la estructura de $k\mathcal{D}(\mathcal{G})$-módulos. Como álgebra, $k\mathcal{T}(\mathcal{G})$ es isomorfa a $k(\mathcal{G} \times \mathcal{G})$; que a su vez es isomorfa a $k\mathcal{G} \otimes (k\mathcal{G})^{\mathrm{op}}$, invirtiendo el segundo factor. Esto da una equivalencia natural entre $\operatorname{rep} k\mathcal{T}(\mathcal{G})$ y $k\mathcal{G} - \text{bimod}$. Además, usando la observación anterior, puede verse que esta equivalencia preserva el producto tensorial. Esto demuestra el lema. $\square$

Notar que cualquier álgebra separable R es isomorfa al álgebra de grupoide de algún grupoide finito (no canónico). Se tiene entonces

PROPOSICIÓN 2.27. Sea R un álgebra separable sobre k. Existe un grupoide finito $\mathcal{G}$, tal que $R - \text{bimod}$ es tensorialmente equivalente a $\operatorname{Rep} k\mathcal{T}(\mathcal{G})$. $\square$

(2) Este ejemplo ilustra la reconstrucción de un grupoide cuántico a partir de una categoría de fusión. Se considera el grupoide doble

$$\mathcal{T}_0 = \begin{array}{ccc} G \times G \times G & \rightrightarrows & G \times G \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ G \times G & \rightrightarrows & G \end{array},$$

donde

- el grupoide horizontal $G \times G \times G \rightrightarrows G \times G$ es el grupoide correspondiente a la relación de equivalencia en $G \times G$ definida por $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $y = y'$;
- el grupoide vertical $G \times G \times G \rightrightarrows G \times G$ es el grupoide de transformaciones asociado a la acción regular $. : G \times G \times G \to G \times G$, $(x, y).g = (xg, yg)$;
- el grupoide horizontal $G \times G \rightrightarrows G$ es el grupoide basto sobre G;
- el grupoide vertical $G \times G \rightrightarrows G$ es el grupoide de transformaciones asociado a la acción regular de G en sí mismo.

Notar que $\mathcal{T}_0$ es un grupoide doble *vacante*.

Sea $\sigma : \mathcal{B} \times_{b,t} \mathcal{B} \to k^{\times}$,

$$\sigma\left(\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \square & \\ ag & & bg \end{array} \;,\; \begin{array}{ccc} ag & & bg \\ & \square & \\ agh & & cgh \end{array} \right) = \frac{\omega(a, g, h)}{\omega(b, g, h)}. \tag{2.6}$$

La condición de 3-cociclo para ω implica que σ es un 2-cocycle normalizado para el grupoide vertical de $\mathcal{T}_0$. Más aún σ es compatible con el cociclo trivial $\tau = 1$ en el grupoide horizontal, de modo que hay un grupoide cuántico asociado $k_\sigma \mathcal{T}_0$.

El resultado siguiente es una consecuencia del Teorema 2.7.

PROPOSICIÓN 2.28. Se tiene una equivalencia tensorial $\operatorname{rep} k_\sigma \mathcal{T}_0 \simeq \operatorname{vec}_\omega^G$.

2.8. Algunos Resultados de Clasificación

En esta sección se enuncian los principales resultados de clasificación de categorías de fusión que se conocen. Se supone que $k = \mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos.

Los resultados siguientes generalizan resultados conocidos sobre álgebras de Hopf semisimples.

Teorema 2.29. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre el cuerpo k y sean p y q números primos distintos.*

(a) ([**ENO**, Corollary 8.30]*.) Supongamos que* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = p$*. Entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a* $\operatorname{rep}(k^{\mathbb{Z}_p}, \omega)$*, para un único $\omega \in H^3(\mathbb{Z}_p, k^\times)$.*

(b) ([**ENO**, Corollary 8.32]*.) Supongamos que* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = p^2$*. Si $p > 2$, $\mathcal{C}$ es equivalente a* $\operatorname{rep}(k^G, \omega)$*, para algún grupo G tal que $|G| = p^2$, y $\omega \in H^3(\mathbb{Z}_p, k^\times)$. Si $p = 2$, $\mathcal{C}$ es equivalente a* $\operatorname{rep}(k^G, \omega)$*, donde $|G| = 4$, o bien $\mathcal{C} \simeq \mathcal{TY}(\mathbb{Z}_2, \chi, d)$.*

(c) ([**EGO**]*.) Supongamos que* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = pq$*. Si $p > 2$, $\mathcal{C}$ es equivalente a* $\operatorname{rep}(k^G, \omega)$*, para algún grupo G tal que $|G| = pq$, y $\omega \in H^3(\mathbb{Z}_p, k^\times)$. Si $p = 2$, $\mathcal{C}$ es equivalente a* $\operatorname{rep}(k^G, \omega)$*, donde $|G| = 2q$, o bien $\mathcal{C} \simeq \mathcal{TY}(\mathbb{Z}_q, \chi, d)$.*

La clasificación de las álgebras de Hopf semisimples en dimensión p es debida a Y. Zhu [**Z**]; en dimensión p^2 se debe a Masuoka [**M3**], y en dimensión pq se debe a Etingof, Gelaki, Masuoka y Westreich [**EG2, GW, M2**].

Ejercicios

1. Demostrar que $\mathcal{TY}$ es una categoría de fusión sobre k.
2. Calcular las dimensiones de Frobenius-Perron de las categorías de Tambara y Yamagami y de las categorías de tipo grupo.
3. Sea $\mathcal{TY}(G, \chi, d)$ una categoría de Tambara y Yamagami.
   a) Demostrar que $\operatorname{FPdim} a = 1$, para todo $a \in G$, y $\operatorname{FPdim} m = \sqrt{(|G|)}$.
   b) Deducir que $\mathcal{TY}(G, \chi, d)$ es la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf si y sólo si $|G|$ es un cuadrado en $\mathbb{Z}$.
4. Demostrar que las dimensiones de Frobenius-Perron en una categoría de tipo grupo $\mathcal{C}(G, \omega, F)$ son enteras.
5. Sea $G = \mathbb{S}_n$ el grupo simétrico en n símbolos, y sea F el subgrupo formado por todas las permutaciones $\sigma \in \mathbb{S}_n$, tales que $\sigma(1) = 1$. Probar que $\mathcal{C}(G, 1, F)$ admite un funtor de fibra $\mathcal{C} \to \operatorname{vec}_k$.

Bibliografía

[A] N. Andruskiewitsch, *About finite dimensional Hopf algebras*, Contemp. Math. **294** (2002), 1–57.

[AN1] N. Andruskiewitsch y S. Natale, *Double categories and quantum groupoids*, preprint `math.QA/0308228` (2003).

[AN2] N. Andruskiewitsch y S. Natale, *Double groupoids encoding tensor structures*, preprint (2004).

[BK] B. Bakalov y A. Kirillov Jr., *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, Amer. Math. Soc., Providence (2001).

[BNS] G. Böhm, F. Nill y K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*, J. Algebra **221**, 385–438 (1999).

[BS] G. Böhm y K. Szlachányi, *A coassociative C^*-quantum group with nonintegral dimensions*, Lett. in Math. Phys. **35**, 437–456 (1996).

[BH] R. Brown y P. Higgins, *On the algebra of cubes* J. Pure Appl. Algebra **21**, 233-260 (1981).

[BMa] R. Brown y K. Mackenzie, *Determination of a double Lie groupoid by its core diagram*, J. Pure Appl. Algebra **80**, 237–272 (1992).

[BS] R. Brown y C. Spencer, *Double groupoids and crossed modules*, Cahiers Topo. et Géo. Diff. **XVII**, 343–364 (1976).

[CE] D. Calaque y P. Etingof, *Lectures on tensor categories*, preprint `math.QA/0401246`.

[CP] V. Chari y A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[DPR] R. Dijkgraaf, V. Pasquier y P. Roche, *Quasi-quantum groups related to orbifold models* In: Proc. Modern Quantum Field Theory, Tata Institute, Bombay (1990), 375–383.

[D] V. Drinfeld, *quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419–1457.

[E] C. Ehresmann, *Catégories doubles et catégories structurées*, C. R. Acad. Sci. Paris **256**, 1198–1201 (1963).

[EG] P. Etingof y S. Gelaki, *Some properties of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 551-561.

[EG2] P. Etingof y S. Gelaki, *Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial*, J. Algebra **210** (1998), 664-669.

[EG3] P. Etingof y S. Gelaki, *Isocategorical groups*, Int. Math. Res. Not. **2** (2001), 59–76.

[EG4] P. Etingof y S. Gelaki, *On families of triangular Hopf algebras*, Int. Math. Res. Not. **2002** (2002), 757–768.

[EGO] P. Etingof, S. Gelaki y V. Ostrik, *Classification of fusion categories of dimension pq*, preprint `math.QA/0304194`.

[EO] P. Etingof y V. Ostrik, *On tensor categories*, (2003).

[ENO] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *On fusion categories*, preprint `math.QA/0203060` (2002).

[ES] P. Etingof y O. Schiffmann, *Lectures on quantum groups*, Lectures in Mathematical Physics, International Press, Cambridge (1998).

[GW] S. Gelaki y S. Westreich, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq*, Proc. Am. Math. Soc. **128** (2000), 39–47. (Corrigendum: Proc. Am. Math. Soc. **128** (2000), 2829–2831.)

[HN1] F. Hausser y F. Nill, *Doubles of quasi-quantum groups*, Comm. Math. Phys. **199** (1999), 547–589.

[HN2] F. Hausser y F. Nill, *Integral theory for quasi-Hopf algebras*, preprint `math.QA/9904164`.

[HN3] F. Hausser y F. Nill, *Diagonal crossed products by duals of quasi-quantum groups*, Rev. Math. Phys. **11** (1999), 553-629. Preprint `q-alg/9708004`.

[H] T. Hayashi, *A brief introduction to face algebras*, in “New trends in Hopf Algebra Theory”; Contemp. Math. **267** (2000), 161–176.

[Ka] G. Kac, *Extensions of groups to ring groups*, Math. USSR. Sb. **5** (1968), 451–474.

[KP] G. Kac y V. Paljutkin, *Finite ring groups*, Trudy Moskov. Mat. Obš č. **15** (1966) 224–261.

[K] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer-Verlag, New York (1995).

[Mc] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York (1988).

[Mj1] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press (1995).

[Mj2] S. Majid, *Quantum double for quasi-Hopf algebras*, Lett. Math. Phys. **45** (1998), 1–9.

[M1] A. Masuoka, *Extensions of Hopf algebras*, Trabajos de Matemática **41/99**, FaMAF (1999). Disponible en `http://www.mate.uncor.edu/natale`.

[M2] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension 6, 8*, Israel J. Math. **92** (1995), 361–373.

[M3] A. Masuoka, *Self dual Hopf algebras of dimension p^3 obtained by extension*, J. Algebra **178** (1995), 791–806.

[M4] A. Masuoka, *Cocycle deformations and Galois objects for some co-semisimple Hopf algebras of finite dimension*, Contemp. Math. **267** (2000), 195–214.

[Mo1] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their Actions on Rings*, CMBS Reg. Conf. Ser. in Math. **82**, Amer. Math. Soc., 1993.

[Mo2] S. Montgomery, *Classifying finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Contemp. Math. **229** (1998), 265–279.

[N1] S. Natale, *Semisolvability of Semisimple Hopf Algebras of Low Dimension*, Memoirs Amer. Math. Soc., to appear.

[N2] S. Natale, *On group theoretical Hopf algebras and exact factorizations of finite groups*, J. Algebra **270** (1) (2003), 199-211. Preprint math.QA/0208054.

[N3] S. Natale, *Frobenius-Schur indicators for a class of fusion categories*, preprint `math.QA/0312466` (2003).

[Nk] D. Nikshych, *K_0-rings and twisting of finite-dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Algebra **26** (1998), 321–342. (Corrigendum: Commun. Algebra **26** (1998), 2019.)

[NTV] D. Nikshych, V. Turaev y L. Vainerman, *Invariants of knots and 3-manifolds from quantum groupoids*, Topology Appl. **127** (2003), 91–123.

[NV] D. Nikshych y L. Vainerman, *Finite Quantum Groupoids and Their Applications*, MSRI Publ. **43** (2002), 211–262.

[O1] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, Transform. Groups **8**, 177–206 (2003), preprint `math.QA/0111139`.

[O2] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a finite group*, Int. Math. Res. Not. **2003**, 1507–1520 (2003), preprint `math.QA/0202130`.

[S1] P. Schauenburg, *Hopf bigalois extensions*, Commun. Algebra **24** (1996), 3797–3825.

[S2] P. Schauenburg, *Hopf Algebra Extensions and Monoidal Categories*, MSRI Publ. **43** (2002), 321–381.

[S3] P. Schauenburg, *Hopf modules and the double of a quasi-Hopf algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. (2001).

[Sc] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras*, Trabajos de Matemática 31/95, FaMAF (1995).

[SS] S. Shnider y S. Sternberg, *Quantum groups from coalgebras to Drinfeld algebras. A guided tour*, International Press, Cambridge (1993)

[Sz] K. Szlachanyi, *Finite quantum groupoids and inclusions of finite type*, Fields Inst. Commun. **30** (2001), 393–407. Preprint math.QA/0011036.

[T] D. Tambara, *Representation of tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, Israel J. Math. **118** (2000), 29–60.

[TY] D. Tambara y S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, J. Algebra **209** (1998), 29–60.

[Tu] V. Turaev, *Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds*, W. de Gruyter, Berlín (1994).

[U1] Ulbrich, *Galois extensions as functors of comodules*, Manuscr. Math. **59** (1987), 391–397.

[U2] Ulbrich, *On Hopf algebras and rigid monoidal categories*, Israel J. Math. **72** (1990), 371–378.

[Z] Y. Zhu, *Hopf algebras of prime dimension*, Int. Math. Res. Not. **1** (1994), 53–59.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
CIEM–CONICET

Ciudad Universitaria
(5000) Córdoba, Argentina.
e-mail: natale@mate.uncor.edu
URL: http://www.mate.uncor.edu/natale

Parcialemente financiada por CONICET, Fundación Antorchas, Agencia Córdoba Ciencia, ANPCyT y Secyt (UNC)