

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “B”

TRABAJOS de ENSEÑANZA

Nº 5/2015

FUNDAMENTOS Y MÉTODOS DE LA DIDÁCTICA

Guy Brousseau

Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Mabel Aguilar.



Editores: **Lorenzo M. Iparraguirre – Laura Buteler**

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA
REPÚBLICA ARGENTINA

NOTA PRELIMINAR

Este documento fue publicado en versión papel en 1993 por la Facultad de Matemática, Astronomía y Física en colaboración con el Centro de Estudios Avanzados de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Se incluyó en la Serie "B" de Trabajos de Matemática No. 19/93. Para la redacción de ese documento, fue muy importante la colaboración de Facundo Ortega, y de gran utilidad una versión en español publicada por el Seminario Matemático García de Galdeano, de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, España. Dicha traducción fue realizada por profesores del Departamento de Matemáticas de la E. U. de Formación del Profesorado de E.G.B. de Logroño de la Universidad de Zaragoza.

La versión digital que ahora presentamos corresponde a la publicación revisada y aumentada por el autor tal como fue difundida en *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990*, (1998), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Córdoba, diciembre de 2014

FUNDAMENTOS Y MÉTODOS DE LA DIDÁCTICA

1. OBJETOS DE LOS ESTUDIOS EN DIDÁCTICA

1.1. El saber matemático y la transposición didáctica

El saber constituido se presenta bajo formas diversas, por ejemplo, bajo la forma de preguntas y respuestas. La presentación axiomática es una presentación clásica de las matemáticas.

Además de las virtudes científicas que se le conocen, parece maravillosamente adaptada para la enseñanza. Permite a cada instante definir los objetos que se estudian con la ayuda de nociones introducidas precedentemente, y así organizar la adquisición de nuevos saberes con la ayuda de adquisiciones anteriores. Asegura entonces al estudiante y a su profesor un instrumento para ordenar su actividad y acumular en un mínimo de tiempo un máximo de "saberes" bastante próximos al "saber sabio". Evidentemente, debe completarse con ejemplos y problemas cuya solución pone en práctica esos saberes.

Pero esta presentación borra completamente la historia de esos saberes, es decir la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas, la aparición de técnicas y preguntas nacidas de los progresos en otros sectores, el rechazo de algunos puntos de vista encontrados falsos o torpes, y las innumerables discusiones al respecto. Encubre el "verdadero" funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar y de describir fielmente desde el exterior, para colocar en su lugar una génesis ficticia. Para hacer más fácil la enseñanza, aísla algunas nociones y propiedades del tejido de actividades donde ellas han tomado su origen, su sentido, su motivación y su empleo. Las transpone al contexto escolar. Los epistemólogos llaman *transposición didáctica* a esta operación. Tiene su utilidad, sus inconvenientes y su rol, aún para la construcción de la ciencia. Es a la vez inevitable, necesaria y en cierto sentido lamentable. Debe ser puesta bajo vigilancia.

1.2. El trabajo del matemático

Antes de comunicar lo que piensa haber encontrado, un investigador debe ante todo determinarlo: no es fácil distinguir en el laberinto de reflexiones, las que son susceptibles de devenir un saber nuevo e interesante para los otros; las demostraciones obtenidas raramente son las de las conjeturas consideradas; debe ser emprendida toda una reorganización de conocimientos vecinos, anteriores o nuevos.

Es necesario también suprimir todas las reflexiones inútiles, la huella de los errores cometidos y de los caminos erráticos. Se deben ocultar las razones que lo han conducido en esa dirección y las condiciones personales que lo han llevado al éxito, problematizar hábilmente las observaciones aún banales, pero evitar las trivialidades... Es necesario también buscar la teoría más general en la cual los resultados sean válidos... Así, el productor del saber despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados.

Este trabajo es indispensable para que el lector pueda tomar conocimiento de estos resultados y convencerse de su validez sin que tenga que recorrer el mismo el camino para descubrirlos, beneficiándose de las posibilidades que ofrecen para su uso.

Otros lectores entonces, transforman a su vez esos resultados, los reformulan, los aplican, los generalizan, según sus necesidades. En ocasiones los destruyen, ya sea identificándolos con saberes conocidos, ya sea incluyéndolos en resultados más potentes, o simplemente olvidándolos... y hasta mostrándolos falsos. Así la organización de los conocimientos depende, desde su origen, de las exigencias impuestas a su autor para su comunicación. No deja de ser luego modificada por los mismos motivos al punto de que su sentido cambie bastante profundamente: la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y se continua en los espacios cultos (la noosfera¹ más exactamente). El funcionamiento de esta comunidad está basado en las relaciones que mantienen la inversión y la recuperación personales y contextuales de cuestiones matemáticas y el rechazo a esa inversión para favorecer la producción de un texto de saber lo más objetivo posible.

1.3. El trabajo del alumno

El trabajo intelectual del alumno debe ser por momentos comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas, no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la oportunidad de utilizarlos y aplicarlos, sabemos bien que hacer matemáticas implica ocuparse de problemas. Se hace matemáticas solamente cuando uno se ocupa de problemas pero se olvida a veces que resolver un problema es sólo una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar sus soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las cambie por otras, que reconozca las que se adaptan a la cultura, que recurra a las que son útiles, etc.

Para hacer posible tal actividad, el profesor debe entonces imaginar y proponer a sus alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y posible de ser descubierta de los problemas planteados.

1.4. El trabajo del profesor

El trabajo del profesor es en cierta medida inverso al trabajo del investigador, debe producir una *recontextualización* y una *repersonalización* de los conocimientos. Estos van a devenir el conocimiento de un alumno, es decir una respuesta bastante natural a condiciones relativamente particulares, condiciones indispensables para que tengan un sentido para el alumno. Cada conocimiento debe nacer de la adaptación a una situación específica, ya que no se crean las probabilidades o se inventa o utiliza la aritmética o el álgebra en los mismos tipos de contexto y de relaciones con el medio.

Entonces el profesor debe simular en su clase una micro sociedad científica si quiere que los conocimientos sean instrumentos económicos para plantear buenas preguntas y zanjar debates, si quiere que los lenguajes sean instrumentos de control en situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas.

Pero también debe dar a sus alumnos los instrumentos para reencontrar en esta historia particular que les ha hecho vivir, lo que es el *saber* cultural y comunicable que se

¹ NdE: El término "noosfera" fue creado en los años 20 por Teilhard de Chardin. Dicho simplemente, ese término designa el mundo de las ideas, de las cosas espirituales. Ha sido introducido por Yves Chevallard en didáctica de las matemáticas, como una parodia, en el contexto de la construcción de la teoría de la transposición didáctica. Designa entonces la esfera donde se piensa el funcionamiento del sistema didáctico (Chevallard 1985, 1992, p. 25; Arzac 1992).

les ha querido enseñar. Los alumnos a su vez deben *redescontextualizar* y *redespersonalizar* su saber y esto de modo tal que puedan identificar su producción con el saber que circula en la comunidad científica y cultural de su época.

Por supuesto, se trata de una simulación que no es la "verdadera" actividad científica como tampoco el saber presentado de manera axiomática constituye el "verdadero" saber.

1.5. Algunas cuestiones preliminares ingenuas y fundamentales

Esta evocación de la comunicación del saber parece bastante clásica. Sugiere sin embargo algunas observaciones y plantea cuestiones interesantes.

En primer lugar, el acento está muy fuertemente puesto sobre todas las actividades sociales y culturales que condicionan la creación, el ejercicio y la comunicación del saber y de los conocimientos.

El enfoque clásico considera como central la actividad cognitiva del sujeto que debe ante todo ser descripta y comprendida de manera relativamente independiente. Supone luego, al menos implícitamente, que los conocimientos sobre el conocimiento necesario para la enseñanza, deben primero establecerse de forma independiente, por ejemplo para la matemática y la epistemología. Esto mismo es para los conocimientos sobre las relaciones sociales específicas de la educación, etc. El enfoque clásico consiste entonces en obtener de esos saberes previos consecuencias para la enseñanza: lo hace directamente, es decir con el único apoyo de reflexiones "ingenuas".

Hay allí más de un matiz: los saberes importados de disciplinas fundamentales, ¿permiten por sí mismos, sin modificaciones e independientemente unos de otros, explicar los fenómenos de enseñanza y producir de manera controlada las modificaciones deseadas? ¿O por el contrario, es necesario crear conceptos nuevos, un campo de conocimientos y de métodos próximos para estudiar las situaciones didácticas?

Una de las hipótesis fundamentales de la didáctica consiste en afirmar que sólo el estudio global de las situaciones que presiden a las manifestaciones de un saber, permite elegir y articular los conocimientos de orígenes diferentes, necesarios para comprender tanto las actividades cognitivas del sujeto, como el conocimiento que utiliza y la forma en que lo modifica.

Una segunda hipótesis, más fuerte, consiste en decir que un primer estudio de las situaciones (didácticas) debiera finalmente permitir derivar o modificar los conceptos necesarios actualmente importados de otros campos científicos:

¿Existe una "variedad didáctica" de los conceptos: sentido, memoria, estructura, decimal, etc., desconocida en lingüística, en psicología o en matemática?

La enseñanza también es concebida como un proyecto social: el de hacer apropiar a un alumno un saber constituido o en vía de constitución. Este punto de vista coloca en el centro de las preocupaciones de la enseñanza los debates culturales y políticos sobre el saber pero tratándolos, más bien como objetos de estudio que forman parte de situaciones, que como condicionamientos filosóficos.

¿No es el aprendizaje un acto esencialmente individual? ¿Es necesario reubicarlo en un contexto tan vasto para comprenderlo? La enseñanza individual, ¿no es una especie de condición óptima que solo condiciones económicas impiden realizar?

Aún admitiendo que los saberes sobre las situaciones de puestas en práctica, de apropiación y enseñanza de los conocimientos pueden jugar un cierto rol técnico, en tanto que instrumento para la enseñanza, queda una cuestión importante: estos saberes

una vez elevados al rango de objetos culturales, ¿no perturbarán profundamente la comunicación y tal vez la construcción del saber? Esto último está fundado, lo hemos visto en el rechazo y el olvido de las circunstancias que lo han provocado.

¿Por qué la posesión del saber en sí mismo, junto con los conocimientos generales de ciencias humanas, con un poco de sentido común por supuesto, y seguramente con cualidades pedagógicas que ninguna enseñanza lograría desarrollar, no sería suficiente para todos los profesores, con todos los alumnos, como lo es para algunos?

A continuación podemos preguntarnos en qué medida esta referencia al funcionamiento de la investigación es necesaria y pertinente para el estudio del aprendizaje y sobre todo de la enseñanza. ¿Hasta qué punto hay una semejanza y bajo qué condiciones?

Parece que una buena teoría epistemológica acompañada de una buena ingeniería didáctica sean indispensables para responder a esas cuestiones.

La didáctica estudia la comunicación de los saberes y tiende a teorizar su objeto de estudio, pero sólo puede responder a este desafío bajo dos condiciones:

- poner en evidencia fenómenos específicos que los conceptos originales que ella propone parecen explicar,

- indicar los métodos de pruebas específicas que utiliza para ello.

Estas dos condiciones son indispensables para que la didáctica de las matemáticas pueda conocer de modo científico su objeto de estudio y permitir en consecuencia acciones controladas sobre la enseñanza.

2. FENÓMENOS DE DIDÁCTICA

Fenómenos ligados al control de la transposición didáctica han podido ser puestos en evidencia en niveles muy diferentes: el mismo fenómeno puede regir la intimidad de una lección particular o afectar a toda una comunidad durante generaciones.

Identificar estos fenómenos conduce a construir un "modelo" de los protagonistas en presencia, de las relaciones y de las restricciones que los vinculan y a mostrar que el juego de estas restricciones produce los efectos y el desarrollo observados.

Es más cómodo en un texto relativamente corto tomar ejemplos ya conocidos de los lectores que exponer en su complejidad los casos realmente tratados.

2.1. El efecto "Topaze" y el control de la incertidumbre

La primera escena del célebre "Topaze" de Marcel Pagnol ilustra uno de los procesos fundamentales: Topaze hace un dictado a un mal alumno².

Como no puede aceptar tantos errores tan groseros y como tampoco puede dar directamente la ortografía pedida, "sugiere" la respuesta disimulándola bajo códigos didácticos cada vez más transparentes: "... des moutons étaient réunis dans un parc..." se trata en principio para el alumno de un problema de ortografía y gramática... "des moutonsses étai-hunt ..." ³ ¡el problema es completamente otro! Ante los fracasos

² NdE: Pagnol (1928). *Topaze*. Acto 1, escena 1.

³ NdT: "En la obra de Marcel Pagnol, Topaze es un profesor al que el director del colegio privado para niños ricos en que trabaja le exige que obtenga mejores resultados. Agobiado por esta exigencia que pone en peligro su puesto de trabajo, para conseguir que sus alumnos no tengan faltas en los dictados, pronuncia con énfasis todas las letras que, como las eses finales de "moutons" o "réunis", no se pronuncian en

repetidos, Topaze mendiga una señal de adhesión y negocia a la baja las condiciones en las cuales el alumno terminará por poner una "s". Se adivina que podría continuar exigiéndole el recitado de la regla, y luego haciéndosela copiar un determinado número de veces. El derrumbamiento completo del acto de enseñanza está representado por la simple orden: ponga una "s" a "moutons": el profesor terminó por tomar bajo su responsabilidad lo esencial del trabajo.

La respuesta que debe dar el alumno está previamente determinada, el maestro elige las preguntas a las cuales esta respuesta puede ser dada. Evidentemente los conocimientos necesarios para producir estas respuestas cambian también su significación. Haciendo preguntas cada vez más fáciles, intenta obtener la máxima significación para el máximo de alumnos. Si los conocimientos en la mira⁴ desaparecen completamente, es el "efecto Topaze". La conservación del sentido a través de los cambios de preguntas está bajo el control de los conocimientos del maestro en la disciplina enseñada, pero la elección de las situaciones de aprendizaje y su gestión, habitualmente dejadas a la "sensatez" de los profesores, son actualmente objeto de activas investigaciones tanto teóricas como de ingeniería didáctica⁵.

2.2. El efecto "Jourdain" o el malentendido fundamental

El efecto "Jourdain" -así nombrado en referencia a la escena del "Burgués Gentilhombre"⁶ donde el maestro de filosofía enseña a Jourdain lo que son la prosa y las vocales- es una forma de efecto Topaze.

El profesor, para evitar polemizar con el alumno y eventualmente percibir el fracaso de la enseñanza, admite reconocer señales de un conocimiento sabio en los comportamientos o en las respuestas del alumno, aunque sean, en efecto, motivadas por causas y significaciones banales.

Por ejemplo: el alumno, a quien se le hacían realizar manipulaciones un poco extrañas con potes de yogur o con figuritas coloreadas, llegaba a escuchar: "Acabas de descubrir un grupo de Klein".

Dicho de una forma menos grosera, el deseo de insertar el conocimiento en las actividades familiares puede conducir al profesor a sustituir la problemática verdadera y específica por otra, por ejemplo metafórica o metonímica y que no da un sentido correcto a la situación. A menudo las dos problemáticas están presentes, yuxtapuestas y el profesor intenta obtener "el mejor" compromiso.

Algunos métodos pedagógicos centrados en las preocupaciones del niño provocan a menudo este efecto, pero la reforma de los años sesenta y el uso de las estructuras matemáticas que esos métodos han propuesto, han sido evidentemente también una poderosa incitación a este juego.

Al mismo tiempo, la ideología estructuralista le ofrecía una justificación epistemológica. Se trata entonces de un doble efecto "Jourdain": el primero, a nivel de las relaciones del alumno con el profesor: el alumno trata un ejemplo y el maestro ve allí la estructura. El segundo a nivel de las relaciones de los didactas o de los matemáticos con el profesor. Los primeros pegan una justificación filosófica y científica sobre la práctica del

francés." Nota tomada de "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?" en *Enseñanza de las Ciencias*, 1990, 8 (3).

⁴ NdT: usamos esta expresión como traducción de *connaissances visées*.

⁵ NdE: sobre la ingeniería didáctica ver (Artigue 1990).

⁶ NdE: comedia-ballet de Molière (1670)

profesor, y la sacralizan, el reconocimiento de la estructura ha devenido en actividad científica.

2.3. El deslizamiento metacognitivo

Cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor puede ser llevado a justificarse, y para continuar su acción, a tomar sus propias explicaciones y sus instrumentos heurísticos como objetos de estudio, en lugar del verdadero conocimiento matemático.

Este efecto puede componerse varias veces, afectar a toda una comunidad y constituir un verdadero proceso que escapa al control de sus actores. El ejemplo más sorprendente es probablemente el que concierne al uso de los grafos para enseñar las estructuras en los años sesenta, método al cual está ligado el nombre de G. Papy.

A fines de los años treinta, la teoría de conjuntos abandona su función científica inicial para devenir un instrumento de enseñanza, a fin de satisfacer las necesidades que tienen los profesores de una metamatemática y de un formalismo fundamental. Como consecuencia, son obligados a proponer a los estudiantes un control semántico de esta teoría (llamada entonces "ingenua"). Para evitar los errores, no es suficiente aplicar los axiomas, es necesario saber de qué se habla y conocer las paradojas ligadas a ciertos usos para así evitarlas. Este control difiere bastante del control matemático habitual, más "sintáctico". Este uso ya didáctico de la teoría de conjuntos hará posible para las otras teorías una exposición axiomática cuya negociación será más clásica.

Este instrumento de enseñanza deviene entonces en el objeto de enseñanza para niños cada vez más jóvenes. El control semántico es confiado a un "modelo" que se remonta a Euler⁷ y que recurre a diversos grafos⁸. El "modelo" no es en efecto un modelo correcto, no permite el control esperado y provoca dificultades en la enseñanza. Debido a esas dificultades, este "instrumento" se convierte a su vez en objeto de enseñanza y se sobrecarga de convenciones, de lenguajes específicos a su vez enseñados y explicados en cada etapa de difusión. En este proceso, cuanto más la actividad de enseñanza produce comentarios y convenciones, menos pueden los estudiantes controlar las situaciones que se les proponen.

Este es el efecto de "*deslizamiento metacognitivo*". Sería ingenuo creer que la sensatez hubiera permitido escapar a las consecuencias bastante extravagantes a las cuales condujo ese proceso. La fuerza de los efectos didácticos es incontenible a partir del momento en que el profesor no puede sustraerse, cueste lo que cueste, a la obligación de enseñar. Cuanto más vasto es el público comprometido en la negociación, más escapa el proceso al control "ingenuo".

Además la sensatez, como cualquier otro factor corrector, no puede jugar un rol en los procesos sociales sin la mediación de una estructura social adecuada. Existen pruebas de que ese tipo de "errores" no es el efecto de la estupidez ni en la mayor parte de los casos de la ignorancia de la disciplina matemática; es más o menos como decir "cuando la enfermedad es imputable a errores de comportamiento" -si está permitido utilizar una metáfora audaz.

⁷ Euler (1768) *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Ver, en particular, la Carta XXXIV del 14 de febrero 1761 y las figuras 39 a 89.

⁸ Círculos de Euler, diagramas de Venn, los Papygramas (o "papas") de Papy. NdE: la palabra "papas", adoptada por los alumnos y los docentes, fue utilizada oralmente por Georges Papy, en los escritos prefería usar "figura" (Papy 1964), el término "Papygrama" fue introducido por Frédérique Papy (Papy F. 1970).

2.4. El uso abusivo de la analogía

La analogía es un excelente instrumento heurístico cuando es utilizada bajo la responsabilidad de aquel que hace uso de ella. Pero su utilización en la relación didáctica hace de ella una herramienta peligrosa para producir efectos "Topaze". Sin embargo es una práctica natural: si los alumnos han fracasado en su aprendizaje, es necesario darles una nueva oportunidad sobre el mismo tema. Los alumnos lo saben. Aún si el profesor disimula el hecho de que el nuevo problema se parece al antiguo, los alumnos van a buscar -es legítimo- la solución que ya se les ha dado. Esta respuesta no significa que los alumnos la encuentren idónea para la pregunta planteada, sino solamente que han reconocido señales, tal vez totalmente exógenas y no controladas, que el profesor quería que ellos la produjesen.

Los alumnos obtienen la solución leyendo las señales didácticas y no por una inversión en el problema. Y tienen interés en ello porque después de varios fracasos sobre problemas semejantes pero no razonados, no reconocidos, el profesor se apoyará sobre estas analogías súbitamente renovadas, para reprochar al alumno su resistencia tenaz (este efecto es utilizado por R. Devos en su sketch sobre los dos extremos de una madera.)⁹ "¡Hace mucho que se los digo!"

2.5. El envejecimiento de las situaciones de enseñanza

El profesor encuentra dificultades para reproducir la misma lección, a pesar de que se trate de nuevos alumnos: la reproducción exacta de lo que dijo o hizo precedentemente no tiene el mismo efecto y frecuentemente, los resultados son menos buenos, pero él experimenta también y quizás como consecuencia, una cierta reticencia a esta reproducción. Experimenta una necesidad bastante fuerte de cambiar al menos la formulación de su exposición o de sus instrucciones, los ejemplos, los ejercicios, y si es posible la estructura misma de la lección. Estos efectos aumentan con el número de reproducciones y son tanto más fuertes cuanto la lección comprende más interacciones entre el maestro y el alumno: las lecciones que tienen una exposición seguida de ejercicios o una simple instrucción seguida de una situación de aprendizaje que no exige la intervención del profesor envejecen menos rápidamente. Este efecto fue observado directamente en la Escuela Jules Michelet de Talence¹⁰, en numerosos casos en que los maestros estaban comprometidos en reproducir una lección determinada. Pero también, en los casos en que son libres en su trabajo, los esfuerzos de renovación intentados por los docentes son también una señal segura y fácilmente observable.

Este fenómeno, como los precedentes, puede ser observado a nivel de una clase pero también en el conjunto del sistema educativo y entre otros participantes: los programas y las instrucciones ministeriales (o los currículum en otros países) son *el* instrumento casi único de explicitación de las exigencias didácticas del cuerpo social hacia los profesores y *el* instrumento para acordar la división de tareas entre ellos. Teniendo en cuenta la complejidad de los mecanismos a controlar, estos textos generalmente bastante cortos y que deben dejar abierto lo esencial de las cuestiones pertinentes aparecen como totalmente inadecuados. Sus modificaciones periódicas aparecen completamente

⁹ NdE: Devos R. 1976, pp.149-151.

¹⁰ NdE: La Escuela Jules Michelet de Talence, cerca de Bordeaux, es el lugar donde Guy Brousseau ha organizado los medios para la observación de las situaciones de clase organizadas para las investigaciones. NdT: véase <http://guy-brousseau.com/le-corem/presentation/>

ridículas, ya sea que se las compare entre ellas o que se las compare a la importancia que parecen acordarle los profesores y la administración. Los textos para la escuela primaria, desde los años 1980, no ofrecen más que diferencias mínimas sobre lo esencial y difieren solamente en matices.

Las modificaciones de programas son objeto de proyecciones de los deseos de los profesores para la renovación de sus situaciones didácticas en respuesta al envejecimiento de su curso.

La desproporción enorme entre esa inversión en la novedad y la sorprendente estabilidad de las prácticas de enseñanza es también una señal de las restricciones que intervienen en la regulación del envejecimiento: el tiempo de respuesta a toda modificación del sistema educativo es muy elevado y las retroacciones muy débiles y aleatorias. La mejor garantía contra la deriva es en consecuencia una importante inercia. Pero la misma actividad de enseñanza exige una inversión personal intensa por parte del profesor y esta inversión solo puede mantenerse si es renovada. La reproducción exige entonces una cierta renovación que corre el riesgo de comprometer las reproducciones futuras. Los instrumentos de equilibrio no se conocen, el sistema tiende a centrar la renovación sobre factores que no tienen mucha influencia sobre el objeto principal de enseñanza: las modificaciones de programa obedecen a procesos semejantes a los de la moda en relación a la vestimenta.

Esta cuestión del envejecimiento y del efecto del tiempo didáctico¹¹ pone de relieve una cuestión esencial para la didáctica: ¿qué es lo que está realmente reproducido a lo largo de una lección?

Un profesor que reproduce *la misma historia*, la misma sucesión de las mismas actividades y las mismas declaraciones por su parte y por parte de los alumnos, ¿reprodujo el mismo *hecho didáctico* que produjo los mismos efectos, desde el punto de vista del sentido?¹²

No existe un instrumento ingenuo para diferenciar una buena reproducción de una lección -que produzca en las mismas condiciones un desarrollo idéntico y dé también un mismo sentido a los conocimientos adquiridos por el alumno- de una mala reproducción de esa lección -que en las mismas condiciones, produzca un "desarrollo" idéntico pero que dé un sentido diferente a los conocimientos adquiridos. En el segundo caso, la semejanza del desarrollo es obtenida por intervenciones discretas pero repetidas del profesor que sin afectar aparentemente su "historia", transforman toda la situación.

Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objeto de la didáctica, no es un resultado de observación, sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que ellos dejan invariante.

¹¹ Es objeto de investigaciones realizadas por Y. Chevallard y A. Mercier. *NdE*: ver por ejemplo Chevallard y Mercier (1983) o Mercier (1992), y Brousseau y Centeno (1991).

¹² Esta cuestión está estudiada en el artículo "Didáctica de los decimales": obsolescencia de las situaciones, y es retomada por M. Artigue en su tesis sobre la reproductibilidad. *NdT*: disponible en español en http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BEns03.pdf (consultado el 9-12-2014). *NdE*: véase Artigue (1986).

3. ELEMENTOS PARA UNA MODELIZACION

Estos diferentes fenómenos pueden ser observados tanto en las relaciones particulares entre dos personas como en las relaciones mucho más complejas que implican organismos y cientos de personas.¹³

¿Es posible "modelizar" todo un sistema educativo por un sistema "docente" definido por algunas de las relaciones que mantiene con un sistema "enseñado" que representa unas centenas de alumnos cuya diversidad parece justamente la primera fuente de dificultades para los docentes? Es un desafío inevitable del proceso de teorización.

Los problemas que ponen de relieve los enfoques sistémicos a los cuales este método se aproxima, serán discutidos más adelante.

La forma en la cual hemos descrito rápidamente estos fenómenos prepara su modelización. Se trata ahora de identificar las relaciones fundamentales que hay que tener en cuenta.

Conviene sin embargo abstenerse aún de una formalización excesiva y prematura. Una formulación más rigurosa intervendrá en una etapa posterior.

3.1. Situación didáctica, situación adidáctica¹⁴

En la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre las buenas preguntas y las buenas respuestas. El docente plantea un problema que el alumno debe resolver: si el alumno responde, muestra a través de esto, que sabe; si no, se manifiesta una necesidad de saber que requiere una información, una enseñanza. A priori, todo método que permite memorizar las asociaciones favorables, es aceptable.

La mayéutica socrática limita estas asociaciones a aquéllas que el alumno puede efectuar por sí mismo. Esta restricción tiene por objeto garantizar la comprensión del saber por el alumno, porque él mismo lo produce. Pero entonces se está obligado a suponer que el alumno ya poseía ese saber, sea que lo poseyera desde siempre (reminiscencia), sea que lo construyese por sí mismo por su actividad propia y aislada. Todos los procedimientos donde el maestro no da, él mismo, la respuesta, son aceptables para dar a luz ese saber en el alumno.

El esquema socrático puede ser perfeccionado si se supone que el alumno es capaz de obtener su saber de sus propias experiencias, de sus propias interacciones con el medio, aún si ese medio no está organizado con fines de aprendizaje: el alumno aprende viendo el mundo (hipótesis empirista-sensualista) o haciendo hipótesis entre las cuales su experiencia le permite elegir (hipótesis aprioristas) o aún en una interacción más compleja hecha de asimilaciones y de acomodaciones tales como Piaget las describe.

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

¹³ *NdE*: la teorización propuesta por G. Brousseau no podría ser encerrada a las situaciones de enseñanza con niños pequeños y al sistema escolar, como en este artículo. El lector puede ver por ejemplo Bessot et al. (1993), o Rogalsky y Samurçay (1994) donde se analiza el funcionamiento de la teoría de las situaciones didácticas en el caso de la enseñanza o de la formación profesional.

¹⁴ *NdE*: Dado que el término "adidáctico" fue ampliamente adoptado, hemos elegido la ortografía según el uso corriente del francés utilizando el "a" privativo, abandonando la escritura inicial "a-didáctico", cuyo fin era probablemente facilitar la toma de conciencia de la significación de este concepto nuevo.

Este proceso psicogenético piagetiano es opuesto al dogmatismo escolástico. Uno no parece deber nada a la intención didáctica, mientras que el otro le debe todo. Atribuyendo al aprendizaje "natural" lo que reposa sobre el arte de enseñar según el dogmatismo, la teoría de Piaget corre el riesgo de aliviar al maestro de toda responsabilidad didáctica: jesto constituye una vuelta paradójal a una especie de empirismo! Pero un medio sin intenciones didácticas es incapaz de inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera.

La concepción moderna de la enseñanza va entonces a exigir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas por una elección sensata de los "problemas" que él le propone. Esos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos deben hacerlo actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por su propio movimiento. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe que el problema fue elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presente razones didácticas. No solamente puede, sino que también debe porque solo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando sea capaz de ponerlo en práctica él mismo en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de toda indicación intencional. Tal situación es llamada situación *adidáctica*¹⁵. Cada conocimiento puede caracterizarse por una (o unas) situación *adidáctica*, que preserva el sentido de este conocimiento, y que nosotros llamaremos *situación fundamental*. Pero el alumno no puede resolver de entrada cualquier situación *adidáctica*, el maestro entonces le acondiciona aquellas que están a su alcance. Estas situaciones *adidácticas* acondicionadas con fines didácticos determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar por efecto de las restricciones y deformaciones así aportadas a la situación fundamental.

Esta situación o este problema elegido por el docente es una parte esencial de la siguiente situación más amplia: el maestro busca devolver al alumno una situación *adidáctica* que provoque en él la interacción más independiente y más fecunda posible. Para esto, comunica o se abstiene de comunicar, según el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. El docente está entonces implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le plantea. Este juego o esta situación es la *situación didáctica*.

El alumno no distingue de entrada, en la situación que vive, lo que es de naturaleza *adidáctica* y lo que es de origen didáctico. La situación *adidáctica* final de referencia, aquella que caracteriza el saber, puede ser estudiada de forma teórica pero, en la situación didáctica, para el maestro como para el alumno, la situación *adidáctica* es una especie de ideal hacia el cual se trata de converger: el docente debe sin cesar ayudar al alumno a despojar, lo antes posible, la situación de todos sus artificios didácticos para dejarle el conocimiento personal y objetivo.

El contrato didáctico es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica: es el instrumento que tiene el maestro de ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato que permite entonces la obtención de situaciones nuevas. De la

¹⁵ En el sentido de que desaparece de ella la intención de enseñar (la situación es siempre específica del saber). Una situación pedagógica no específica de un saber no sería llamada *adidáctica* sino solamente no didáctica.

misma manera, el conocimiento es lo que se expresa por las reglas de la situación adidáctica y por las estrategias. La evolución de estas estrategias requiere producciones de conocimientos que permitan a su vez la concepción de nuevas situaciones adidácticas.

El contrato didáctico no es un contrato pedagógico general. Depende estrechamente de los conocimientos en juego.

En la didáctica moderna, la enseñanza es la devolución al alumno de una situación adidáctica, correcta, el aprendizaje es una adaptación a esta situación. Veremos que se puede concebir esas situaciones como juegos formales y que esta concepción favorece la comprensión y el dominio de las situaciones de enseñanza.

3.2. El contrato didáctico

Así, en todas las situaciones didácticas, el profesor intenta hacer saber al alumno lo que él quiere que haga. Teóricamente, el pasaje de la información y de la consigna del profesor hasta la respuesta esperada, debería exigir por parte del alumno la puesta en práctica del conocimiento en la mira, ya sea en curso de aprendizaje o conocido. Sabemos que el único modo de "hacer" matemáticas, es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a este fin, plantear nuevos interrogantes. El maestro debe entonces efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución del problema adecuado. Si esta devolución se opera, el alumno entra en el juego y si gana, se opera el aprendizaje.

¿Pero si el alumno rehúsa o evita el problema, o no lo resuelve? El maestro tiene entonces la obligación social de ayudarlo y aún a veces de justificarse por haber planteado una situación demasiado difícil.

Entonces se establece una relación que determina -explícitamente por una pequeña parte, pero sobretodo implícitamente- lo que cada participante, el docente y el enseñado, tiene la responsabilidad de gestionar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir la parte de ese contrato que es específica del "contenido": el conocimiento matemático en la mira.

Es por esto que no podemos detallar aquí esas obligaciones recíprocas, de hecho lo importante son las *rupturas del contrato*. Pero examinemos algunas consecuencias inmediatas.

- Se supone que el profesor cree condiciones suficientes para la apropiación de los conocimientos, y debe "reconocer" esta apropiación cuando se produce.
- Se supone que el alumno pueda satisfacer esas condiciones.
- La relación didáctica debe "continuar", cueste lo que cueste.
- El profesor asegura entonces que las adquisiciones anteriores y las nuevas condiciones den al alumno la posibilidad de la adquisición. Si esta adquisición no se produce, se le abre al alumno una causa porque no hizo lo que se tiene el derecho de esperar de él pero también una causa al maestro porque no hizo lo que debía (implícitamente).

Observemos que este juego de obligaciones no es exactamente un contrato:

En primer lugar, no puede hacerse completamente explícito en tanto que pretende referirse al resultado de la acción de enseñar. No existen modos conocidos, localizados y suficientes que permitan construir u obtener saberes nuevos ante cualquier resistencia de apropiación por parte del alumno de los saberes en la mira. Y si el contrato se refiere solo a las reglas de comportamiento del profesor o del alumno, su respeto escrupuloso condenará la relación didáctica al fracaso.

Sin embargo, es necesario que el profesor acepte la responsabilidad de los resultados y que asegure al alumno los instrumentos efectivos de adquisición de los conocimientos. Esta seguridad es engañosa pero indispensable porque le permite resolver problemas cuya solución no se le ha enseñado aunque no vea, a priori, las elecciones que se le ofrece y sus consecuencias, y que esté por lo tanto en un caso patente de irresponsabilidad jurídica.

Veremos que un contrato de este tipo, totalmente explícito, está condenado al fracaso. En particular las cláusulas de ruptura y lo que está en juego en el contrato no pueden ser descriptos previamente. El conocimiento será justamente lo que resolverá las crisis surgidas de esas rupturas; éstas no pueden estar pre-definidas. Sin embargo, en el momento de esas rupturas, todo transcurre como si un contrato implícito ligara docente y enseñado: sorpresa del alumno que no sabe resolver el problema y que se rebela porque el maestro no supo capacitarlo, sorpresa del maestro que estimaba razonablemente suficiente su desempeño... rebelión, negociación, búsqueda de un nuevo contrato que depende del nuevo "estado" de saberes... adquiridos y en la mira.

El concepto teórico en didáctica no es entonces el contrato (el bueno, el malo, el verdadero o el falso contrato) sino *el proceso de búsqueda de un contrato* hipotético. Es este proceso el que representa las observaciones y debe modelizarlas y explicarlas.

3.3. Un ejemplo de la devolución de una situación adidáctica

En un juego con micro-computadoras, niños pequeños (5 años) deben, con el lápiz óptico, conducir uno a uno, los conejos a un prado y los patos a un charco. Las reglas de la manipulación no presentan a esa edad dificultades insalvables. Los niños pueden interpretar que la desaparición y después la reaparición de un animal en otro lugar, corresponde a un desplazamiento. Pero pronto pasa a ser algo más que una manipulación según la regla: el maestro quiere que el alumno señale *todos* los conejos uno después de otro y una sola vez a cada uno, *antes* de dirigirlos hacia el prado, con el fin de desarrollar en el niño la enumeración de una colección. La serie de operaciones a efectuar no está dada en la consigna, está a cargo del alumno. La devolución de esta tarea se hace por etapas:

Primera etapa: aproximación puramente lúdica

Los alumnos todavía no han comprendido que entre los resultados del juego, algunos son deseables: todos los conejos van al prado y bailan en una pequeña ronda, y otros no son deseables: los conejos olvidados se ponen rojos y emiten un gruñido.

Los niños juegan, marcan los conejos y están contentos con el efecto que provocan, sea cual fuere.

Segunda etapa: devolución de una preferencia

Los alumnos comprendieron cuál es el efecto deseado (por ejemplo, se suprimió todo efecto de falsas manipulaciones) pero ellos atribuyen los resultados, buenos o malos, a una especie de fatalidad o azar.

Este tipo de interpretación es adecuada para numerosos juegos: en "la batalla" o en los "caballitos", el placer nace de la espera de lo que la suerte le depara, mientras que el jugador no toma decisiones.

Tercera etapa: devolución de una responsabilidad y de una causalidad

Para aceptar una responsabilidad en lo que le sucede, el alumno debe considerar lo que hace como una elección entre diversas posibilidades y luego visualizar una relación de causalidad entre las decisiones que tomó y sus resultados.

En esta etapa, los alumnos pueden, inmediatamente después, considerar que el desarrollo del juego hubiera podido ser diferente. Esto supone que pueden recordar algunas de sus acciones y más precisamente, lo que en ellas era pertinente o no.

Esta devolución es delicada: la mayoría de los niños está dispuesto a aceptar del maestro la idea de que ellos son responsables del resultado del juego, aunque sean incapaces de establecer en ese momento que podrían haber obtenido una mejor a partir de una elección apropiada. A decir verdad, solo el conocimiento de esta relación justificaría la devolución.

Si el alumno resuelve bastante rápido el problema, el hecho de haber aceptado a priori el principio de su responsabilidad no ha sido más que un prólogo necesario al aprendizaje, éste viene a justificar inmediatamente después este acto de ser responsable, dando al alumno los instrumentos para asumir y, finalmente, escapar de la culpa.

Pero para el alumno que no puede franquear la dificultad y asociar, por el conocimiento, su acción a los resultados obtenidos, el hacerse responsable debe ser renegociado bajo pena de provocar sentimientos de culpa y de injusticia, muy pronto nocivos a los aprendizajes ulteriores y a la noción misma de causalidad.

Cuarta etapa: devolución de la anticipación

La relación entre la decisión y el resultado debe ser visualizada *antes* de la decisión, el alumno asume entonces las anticipaciones que excluyen toda intervención oculta. Aún si no está totalmente dominada, esta anticipación se considera como responsabilidad cognitiva del jugador y no solamente su responsabilidad social.

Quinta etapa: devolución de la situación adidáctica

Para tener éxito en el juego de los conejos, el alumno debe efectuar la enumeración de una colección. Pero no es suficiente que la produzca una vez "al azar". Es necesario que sepa reproducirla a voluntad en circunstancias diferentes. Es necesario que sea consciente de este poder de reproducción y que tenga un conocimiento, al menos intuitivo, de las condiciones que le dan buenas oportunidades de tener éxito. El alumno debe reconocer los juegos a los cuales acaba de aprender a jugar. Pero lo que sabe hacer no ha sido nombrado, identificado y sobretodo no ha sido descrito como un procedimiento "fijo". Así, la devolución no es sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan. Este ejemplo ha sido elegido para distinguir claramente las distintas componentes de la devolución. La enumeración no es un concepto matemático culturalmente muy importante. Solo interviene en la enseñanza mucho más tarde, con lenguajes y problemáticas diferentes. Ni el vocabulario, ni los conocimientos formales llegan entonces a perturbar el objeto de enseñanza.

El niño, antes de este aprendizaje, había podido "enumerar" colecciones desplazando los objetos o marcándolos de modo de tener siempre una materialización cómoda del conjunto que faltaba enumerar.

Pero aquí, debe efectuar la misma tarea mentalmente, sus representaciones deben extenderse a un control intelectual mucho más complejo: buscar un primer conejo fácil de ubicar, después otro, de forma tal de recordar que esos dos ya fueron tomados; buscar otro bastante próximo de los primeros y que forme con ellos una disposición (pequeño grupo, línea...) que permita no perderlos "de vista" para buscar un cuarto, que entra a su

vez en la estructura a fin de no retomar un conejo ya tomado y de poder saber si todavía quedan..., etc.

Esta "tarea" no puede ser descripta como un procedimiento, ni aún "mostrada" porque enumerar una colección *delante* de un niño no le da ninguna idea de los instrumentos de control que debe adquirir.

En este ejemplo, la devolución de la situación adidáctica puede ser observada independientemente de la devolución del objeto de enseñanza (que no puede tener lugar en este momento). Ni el maestro ni el alumno pueden identificar, salvo por el éxito de una tarea compleja, lo que es enseñado, lo que es por conocer o por saber.

Un poco más tarde, las enumeraciones, en tanto que producciones pueden convertirse en objetos de estudio para el alumno. Este puede reconocer las que son semejantes o diferentes, las que son correctas o las que fracasan... concebir y comparar métodos... y conocer -inmediatamente después- el objeto de enseñanza ligado al juego de los conejos. Podrá abordar problemas de enumeración y de combinatoria mucho más próximos a los problemas científicos y definir entonces lo que debe aprender, lo que debe resolver y lo que se le exige saber. Esas devoluciones de objetos de estudio, de objetos de saber y de objetos de enseñanza deberían poder interpretarse como devoluciones de situaciones adidácticas de otro tipo.

3.4. La epistemología de los profesores

El profesor está obligado entonces a explicitar ante el alumno un método de producción de la respuesta: cómo *responder* con la ayuda de los conocimientos anteriores, cómo *comprender*, *construir* un conocimiento nuevo, cómo "*aplicar*" las lecciones anteriores, *reconocer* las preguntas, cómo aprender, adivinar, resolver..., etc. Se refiere así a un funcionamiento implícito de las matemáticas o a un modelo (como la geometría elemental) construido por el uso que se hace de ella: resolver los conflictos del contrato didáctico.

Esta "epistemología del profesor" (en el uso profesional) debe ser de hecho también la del alumno y la de sus padres. Debe estar presente en la cultura para permitir a las justificaciones funcionar y ser recibidas. El profesor no es libre de cambiarla a su antojo. Se comprende que tiene pocas oportunidades de ser consistente, y entonces de servir de base a una teoría didáctica.

Para enseñarlos, un profesor debe entonces reorganizar los conocimientos a fin de que se presten a esta descripción, a esta "epistemología". Es el comienzo del proceso de *modificación* de los conocimientos que cambia la organización, la importancia relativa, la presentación, la génesis... en función de las necesidades del contrato didáctico. Hemos llamado a esta transformación *transposición didáctica*.

Notemos que a priori, la práctica empírica de la enseñanza de las matemáticas -cualquiera sea la calidad científica de los profesores- no lo conduce espontáneamente a construir una simulación correcta de la génesis de las nociones. Por el contrario, es grande la tentación de economizar el doble trabajo (de recontextualización y de redecontextualización) y de hacer aprender directamente un texto del saber: para respetar las otras obligaciones del contrato, los problemas están bien propuestos a los alumnos pero su solución puede ser encontrada por procedimientos que economizan el conocimiento específico de la noción (como en el ejemplo de la analogía). La solución está oculta bajo una ficción didáctica, conocida por el alumno y que sirve en el momento de la negociación. Ya que el maestro debe "probar" al alumno que le era posible responder y

aprender el saber en la mira, debe al menos poder decirle cómo "a priori". Por cierto, si la solución está articulada como un texto matemático, ella comprende la justificación científica correcta del resultado pero muchos alumnos obtienen "la respuesta no por el razonamiento matemático deseado" sino por la decodificación de la convención didáctica.

3.5. Ilustración: el efecto "Dienes"

El estudio de las concepciones de Dienes¹⁶ y los ecos que han despertado en los docentes en el marco de las reformas de los años setenta es al respecto muy demostrativo (Maudet 1982).

A través de su proceso psicodinámico Dienes propone un modelo de aprendizaje fundado sobre el reconocimiento de las semejanzas entre juegos estructurados, luego sobre la esquematización y formalización de estas generalizaciones guiadas.

Se trata, de hecho, de una descripción y de una sistematización de algunas prácticas de enseñanza en uso, como la repetición de problemas o de ejemplos semejantes para inducir una respuesta tipo. Pero se acompaña de una traducción en términos matemáticos: problemas semejantes se vuelven "isomorfos" y una generalización un "paso al cociente". La teoría de conjuntos y las estructuras fundamentales se convierten en el instrumento de descripción de todos los elementos de la situación de enseñanza que, a su vez, las ilustran perfectamente.

Esta traducción implica una confusión sistemática entre la estructura de la situación (el juego), la estructura de la tarea, el proceso intelectual y el conocimiento mismo (en tanto que estructura matemática). Conduce entonces implícitamente a erigir los fundamentos de las matemáticas, tal como eran concebidos en la época, en un modelo universal, tanto como instrumento de descripción y de organización de las matemáticas (la lógica), instrumento de su construcción y de su funcionamiento (epistemología), instrumento para explicar el funcionamiento psicológico del alumno al respecto (psicología cognitiva), instrumento para describir el proceso de aprendizaje y las etapas del desarrollo de un conocimiento (epistemología genética) y finalmente los instrumentos didácticos para obtener este aprendizaje.

La epistemología espontánea de los profesores se encontraba de esta manera súbitamente justificada, "sacralizada" por su reformulación en términos "científicos" y reconciliada milagrosamente con todos los dominios susceptibles para cuestionarla. Este hecho fue una de las causas del éxito inicial de las proposiciones de Dienes.

Tal didáctica es independiente de los contenidos. Conduce tanto al profesor a poner el acento en variables no pertinentes a la situación matemática (aquellas que no lo modifican) en detrimento de condiciones específicas ("principio de variabilidad"). Finalmente no es más que un método de presentación de saberes que favorece su memorización.

El hecho más evidente en la utilización de este método es el siguiente: solo los adeptos a este método son susceptibles de hacerlo funcionar con éxito. Todo uso "servil" de los materiales Dienes conduce a decepciones y a fracasos.

El análisis en términos de contrato didáctico puede proponer una explicación a este hecho.

¹⁶ *NdE*: Dienes (1970)

El método didáctico de Dienes, que se apoya en "el proceso psicodinámico", no deja explícitamente otro lugar al docente que la elección de los materiales, presentación de las fichas, y las promociones de uso... El método debe operar gracias a un proceso interno del sujeto, *ineluctable* desde el momento en que las condiciones de ingreso son satisfechas: presentación repetida de juegos estructurados, pedido de esquematización... etc. Libera así al maestro de la responsabilidad técnica de obtener él mismo el aprendizaje esperado. Puede presentar sus ejercicios, esperar... proveer eventualmente las respuestas acompañadas de una pequeña explicación, remitir a la ficha siguiente, organizar el juego correspondiente... pero el contrato de enseñanza ya no lo ata más a la evolución del comportamiento cognitivo porque se supone que "el juego" se encarga de eso. Al contrario, debe dejar al alumno pensar por sí mismo. Ahora bien, los juegos de Dienes no son a menudo satisfactorios porque postulan que las reglas propuestas al alumno (para jugar) son las mismas que las que hay que enseñarle: ¡la estructura del juego y la que "es" el saber son idénticas! De esta forma la comprensión de la regla, condición para trabajar, exige previamente el conocimiento por parte del alumno de lo que se pretende enseñarle. Si el maestro enseñara en primer lugar la regla, el juego se transformaría entonces en ejercicio. Para evitar esto, trata de hacer adivinar la regla - actividad que no está teorizada en el proceso psicomatemático.

Pero la insuficiencia teórica y práctica de los juegos de Dienes no explica por sí sola que los fracasos sean observados menos frecuentemente entre los adeptos al método que en los utilizadores conscientes pero no comprometidos. Un profesor que confía en el proceso psicodinámico se contenta con proponer al alumno las fichas y los juegos y espera que el efecto anunciado, la generalización o la buena formalización, se produzca. Esta se produce mal a causa de la ruptura de la negociación ligada a la disminución de presión del maestro.

El contrato de enseñanza puede subsistir si el maestro se preocupa de los resultados cuantitativos del alumno, pero la articulación de los conocimientos y su génesis permanecen ignorados. Al contrario, la acción "militante" de un profesor decidido a mostrar que el método es eficaz lo conduce a restablecer ese debate. La insuficiencia de las situaciones adidácticas propuestas en lo que concierne la justificación y la significación de los conocimientos en la mira no impide que el discurso del maestro les dé un sentido y un lugar suficiente para un aprendizaje, pero provoca en ciertos casos el fracaso a nivel de contrato.

Es exacto sin embargo que si las situaciones eran matemáticamente incorrectas, ninguna devolución permitiría a los juegos de Dienes producir el conocimiento anunciado. El problema queda abierto para "buenas" situaciones. En todos los casos los métodos de enseñanza de Dienes permitirían obtener resultados pero por razones diferentes a las expuestas en la teoría que los acompañaba.

Este análisis muestra la utilización que puede hacerse de la noción de contrato para intentar explicar un fenómeno de didáctica ligado a la epistemología de los profesores. Problema importante: ¿es que todo método o toda situación considerada eficaz mediante cualquier "ley psicológica" o "didáctica" que liberara al profesor de la negociación didáctica, no produciría el mismo efecto?

¡En la medida que el profesor se sienta más seguro del éxito por causas independientes de su inversión personal, más fracasará...! Llamamos *efecto Dienes* a este fenómeno que muestra la necesidad de integrar las relaciones maestro-alumno en toda

teoría didáctica. Y esta conclusión remite a una pregunta más difícil: la epistemología de los profesores, ¿es inevitable?

3.6. Heurística y didáctica

Está claro que no se conocen las condiciones a la vez necesarias, mínimas para dar el máximo de sentido a la actividad del alumno y sin embargo suficientes para permitirle satisfacer su contrato. No se conoce epistemología genética efectiva que permita la economía de estas negociaciones, de modo que el maestro y el alumno son frecuentemente reducidos (inconscientemente por supuesto) a soluciones rápidas:

- la sustitución del problema que puede conducir al efecto Topaze o más fríamente al efecto Jourdain,
- el uso abusivo de la analogía, el deslizamiento metacognitivo, etc.

Ahora bien, el profesor junto a los problemas, debe dar los instrumentos para resolverlos (el saber teórico por ejemplo) y dar cuenta de que los instrumentos ya enseñados permitían construir la solución. Debe entonces hacer como si supiese de qué manera, partiendo de determinados saberes (enseñados), se fabrican soluciones a problemas nuevos. Y un día, debe explicarse en estos instrumentos: cómo se los encuentra, cómo se los reconoce...

Su acción, ¿presupone una epistemología? ¡Va a estar obligado a producirla, a distribuirla! ¿Por qué el alumno ha hecho tal error? ¿Cómo puede evitar los próximos? ¿Cómo encontrar una solución?

"El algoritmo" constituye un instrumento de desbloqueo y de solución a los conflictos didácticos, en el sentido en que permite momentáneamente compartir con claridad las responsabilidades. El maestro muestra el algoritmo, el alumno lo aprende y "lo aplica" correctamente: si no, debe ejercitarse pero su incertidumbre es casi nula. Se le afirma que existe toda una clase de situaciones diferentes en las cuales el algoritmo da una solución (el conflicto va a recomenzar cuando se trate de elegir un algoritmo para un problema dado).

El algoritmo es prácticamente el único instrumento "oficial" de desbloqueo; es decir que ha sido objeto de la explicitación de los métodos de enseñanza que le conciernen. Y sirve de modelo único o casi único a todas las aproximaciones culturales de la enseñanza.

Debe entonces esperarse que el alumno reciba todas las indicaciones del profesor del mismo modo: como los instrumentos "eficaces" para resolver los problemas (tales como los algoritmos) y esto aunque el profesor las elige con la intención de que reactiven la búsqueda del alumno, lo estimulen, lo ayuden *sin* tocar lo esencial de lo que debe quedar a su cargo. Así serán exigidas las indicaciones de tipo heurístico, dadas y recibidas en el seno de un malentendido, sugerencias inciertas para uno, conocimientos comparables a los algoritmos o a los teoremas de matemáticas para el otro.

Con este Arte de resolver problemas, donde lo esencial se funda en la introspección, el maestro querría enseñar a su alumno a investigar; él espera algoritmos.

Ahora bien, lo que el maestro querría presentar al alumno como oportunidades de investigaciones típicas no es sino una colección de objetos culturales, de problemas cuyas soluciones son conocidas e inventariadas por la heurística. El alumno entonces tiene razones para recibirlas como el modo del saber. En este sentido, como Glaeser (1984-1985, p. 151) lo señala fuertemente, "la heurística no puede enseñarse porque su materia es la parte imprevisible y creativa de toda investigación de un problema. No se puede más

que dar un entrenamiento a la heurística que habitúe al estudiante a situaciones de investigación".

¡Pero entonces el proceso queda bloqueado! El profesor no debería, por ejemplo, invitar al alumno a hacer uso de los pasos de pensamiento inventariados por Polya (1957) y que él mismo reconoce haber utilizado en la época de sus éxitos como matemático.

No hay peligro sin embargo a *distribuir*, ocasionalmente, ¡informaciones o consejos...! "Dibujen una figura, introduzcan la notación apropiada. ¿Cuál es la incógnita? ¿Conocen un problema que se relacione con éste?... Enúncielo de una manera diferente... Remítase a las definiciones..." (Polya, comentarios). Por el contrario, se trata de hábitos a adquirir.

"Para resolver un problema ustedes deben sucesivamente: comprender el problema..." (Polya, 1957). El contrato se desliza; ahora, la búsqueda de informaciones o de sugerencias laterales se convierte en un instrumento didáctico *reconocido*, más adelante se puede exigir a un alumno que pretende investigar y cuya actividad real se ponga en duda.

A su vez se le exige al maestro aclarar estos instrumentos, clasificarlos, identificarlos, definirlos, responder de su eficacia. Entonces, tal vez va a elegir los problemas que permitirán ilustrarlos mejor, aplicarlos, hacerlos funcionar, a título de ejemplo. Pero, no puede limitar los problemas de matemáticas a aquéllos donde la aplicación casi automática de un procedimiento anunciado anticipadamente, dé la solución. El alumno busca entonces qué sugerencia respecto al procedimiento lógico está bien. El círculo está cerrado, las "heurísticas" han sido sustituidas o puestas al lado de los teoremas y de las teorías, entre los instrumentos que hay que elegir para resolver un problema, pero el problema permanece y el contrato didáctico también.

¿Por qué no buscar entonces heurísticas de segundo orden? (!)

Esta vía inicia un tipo de deslizamiento (heurístico) recurrente comparable al *deslizamiento metacognitivo*. Es posible identificar también un *deslizamiento metamatemático* que consiste en reemplazar un problema matemático por un debate sobre la lógica de su solución y atribuirle todas las fuentes de errores.

El proceso que acabamos de describir es entonces una tendencia que resulta naturalmente de las necesidades del contrato didáctico. Es fácil encontrar ejemplos en varias etapas de la historia de la enseñanza. Igualmente, está claro que no tiene nada de ineluctable: las reticencias, luego las resistencias, se hacen más y más fuertes a medida que el deslizamiento se vuelve importante. Parece que, como ocurre con el efecto de deslizamiento metacognitivo, la única fuerza antagonista, es la vigilancia epistemológica.

Como para las analogías, el uso -ingenuo o sistemático- de las heurísticas es un excelente instrumentos de investigación de soluciones a problemas (siendo la heurística el instrumento por definición y por excelencia) a condición que sea puesto en marcha bajo la responsabilidad exclusiva de su usuario. Todo crédito acordado a priori a un método particular es una fuente de decepciones a menudo amargas, que lo hacen inapropiado al contrato didáctico. Con Glaeser (1984-1985), podemos llamar "procedología" "todo repertorio de recetas probadas" (en los stocks de problemas clásicos) que la enseñanza... inculca" (ibid. p. 151) y que no son teoremas o metateoremas. La enseñanza no parece tener por misión explícita inculcar estas recetas, y preferimos admitir que lo hace bajo la presión del contrato didáctico.

Por el contrario, propondré extender el término "*procedimientos algorítmicos*" "que parecen... como sub-programas de una investigación heurística" (ibid.) a todo lo que, en

el contrato didáctico, tiende a jugar el mismo rol, comprendidas allí las heurísticas o las ideas originales, cuando son utilizadas o presentadas como recetas.

Es la función y la presentación didácticas quienes dejan o quitan su valor a un procedimiento. Más exactamente, es la naturaleza del contrato que se establece a este fin. Como el efecto Dienes (para el maestro), la afirmación al alumno de que existe un método automático (o casi) para establecer una familia de resultados, aún si *es verdad*, tiende a descargarlo de la responsabilidad fundamental de controlar su trabajo intelectual, bloquea entonces la devolución del problema, lo que hace fracasar generalmente la actividad (y además, permite al alumno, si quiere, contradecir y refutar el método).

Me parece necesario remarcar lo que acabamos de mostrar:

- que no hay diferencia de naturaleza entre un uso reservado y legítimo de "la heurística normativa" de Polya, en vista de la "educación" matemática y una fina procedología de segundo orden; solamente una diferencia de grado en la aceptación del deslizamiento bajo la presión del contrato (o para ir hacia el alumno).

- no hay razón para declarar a priori ilegítimo, para el maestro, el dar indicaciones de esta naturaleza (como lo que hemos llamado "la epistemología de los profesores"), se puede considerar que ellas son, en ausencia de una auténtica ciencia de la didáctica, una necesidad profesional inevitable.

Es más importante comprender las condiciones antagónicas que influyen en el equilibrio entre las tendencias opuestas (sin informaciones - demasiadas informaciones).

Este análisis pone en relieve la hipótesis siguiente: la heurística podría no ser más que una racionalización fundada en la epistemología de los profesores, una invención didáctica para las necesidades del contrato, recuperada y desarrollada por los matemáticos a modo de epistemología espontánea.

4. COHERENCIA E INCOHERENCIAS DE LA MODELIZACIÓN CONSIDERADA: LAS PARADOJAS DEL CONTRATO DIDÁCTICO

Considerar la enseñanza como la devolución del profesor al alumno de una situación de aprendizaje ha permitido señalar ciertos fenómenos. La tentativa de modelizar esta devolución como la negociación de un contrato permite explicarlos en gran parte, y en otras preverlos.

El resultado de este abordaje hará considerar al maestro como un jugador frente a un sistema formado a su vez por un par de sistemas: el alumno y, digamos por el momento, un "medio" que está desprovisto, en relación con él, de intenciones didácticas.

En el "juego" del alumno con el medio, los conocimientos son los instrumentos para aprehender las reglas y las estrategias de base, y luego son los instrumentos para elaborar estrategias ganadoras y obtener el resultado buscado.

En el juego del maestro con el sistema alumno-medio, el contrato didáctico es el instrumento para establecer las reglas y estrategias de base, adaptándolas después a los cambios de juegos del alumno.

Para cada conocimiento, y tal vez para cada función de un conocimiento, deben corresponder situaciones (problemas) específicas y probablemente contratos didácticos. La evolución de los jugadores y del juego -contrariamente a los juegos de reglas fijas- conduce a reconsiderar los conocimientos y el contrato didáctico.

Esta didáctica está en la base misma de la constitución de los saberes en tanto que articulan lo específico y lo general. Antes de profundizar y de sistematizar esta modelización, es útil examinar su *coherencia*. Este estudio permitirá también *precisar* las funciones o las relaciones que conviene representar (a través de reglas) y las dificultades del proyecto.

Este párrafo permitirá exponer más claramente la metodología de la didáctica.

Considerar la enseñanza como la devolución a un alumno de la responsabilidad del uso y de la construcción del saber, conduce a paradojas que es útil señalar.

4.1. La paradoja de la devolución de las situaciones

El docente debe obtener que el alumno resuelva los problemas que le propone a fin de constatar y de poder hacer constatar que ha cumplido su propia tarea.

Pero si el alumno produce su respuesta sin haber hecho él mismo las elecciones que caracterizan el saber conveniente y que diferencian este saber de conocimientos insuficientes, el indicio se vuelve engañoso. Esto se produce en particular en el caso en el que el profesor ha sido conducido a decir al alumno *cómo* resolver el problema planteado o qué respuesta dar. Dado que el alumno no tuvo que efectuar ni elecciones, ni ensayos de métodos, ni modificación de sus propios conocimientos o de sus convicciones, no dio la prueba esperada de la apropiación en la mira. No dio de ello más que la ilusión. El profesor tiene la obligación social de *enseñar* todo lo que es necesario respecto del saber. El alumno -especialmente cuando fracasa- se lo pide.

De esta forma, cuanto más el profesor cede a estos pedidos y revela lo que él desea, cuanto más especifica al alumno *lo* que éste debe hacer, más se arriesga a perder sus oportunidades de obtener y de constatar objetivamente el aprendizaje que en realidad debe estar en la mira.

Esta es la primera paradoja: no es completamente una contradicción, pero el saber y el proyecto de enseñar deberán avanzar bajo una máscara.

Este contrato didáctico coloca entonces al profesor ante una verdadera obligación paradójica: todo lo que emprende para que el alumno produzca los comportamientos que él espera, tiende a privar a este último de las condiciones necesarias para la comprensión y el aprendizaje de la noción en la mira: si el maestro dice lo que él quiere, no lo puede obtener más.

Pero el alumno está, él también, ante una obligación paradójica: si acepta que, según el contrato, el maestro le enseñe los resultados, no los establece por sí mismo, entonces no aprende matemáticas, no se las apropia. Si por el contrario, rechaza toda información por parte del maestro, entonces, la relación didáctica se rompe. Aprender, implica, para él, que acepte la relación didáctica pero que la considere provisoria y se esfuerce por rechazarla. Veremos más adelante de qué manera.

4.2. Las paradojas de la adaptación a las situaciones

Admitimos que el sentido de un conocimiento proviene, en gran parte, del hecho que el alumno lo adquiere adaptándose a las situaciones didácticas que se le proponen (devueltas).

Admitiremos también que existe, para todo conocimiento, una familia de situaciones susceptible de darle un sentido correcto.

En ciertos casos, existen algunas situaciones fundamentales accesibles al alumno en el momento deseado. Estas situaciones fundamentales le permiten fabricar bastante rápidamente una concepción correcta del conocimiento que podrá insertarse, llegado el momento, sin modificaciones radicales, en la construcción de nuevos conocimientos.

Pero supongamos que existen conocimientos para los cuales las condiciones enunciadas no se cumplen: no existen situaciones suficientemente accesibles, suficientemente eficaces y en número suficientemente reducido que permitan, a los alumnos de cualquier edad, acceder de entrada, por adaptación, a una forma de saber que pueda ser considerada correcta y definitiva: es necesario aceptar etapas en el aprendizaje. El saber enseñado por adaptación en la primera etapa será provisoriamente, no solo aproximado, sino también en parte falso o inadecuado.

El docente se encuentra entonces ante nuevas paradojas:

4.2.1. Inadaptación a la exactitud

Aún si el saber enseñado en el transcurso de una primera etapa es necesario para abordar una etapa ulterior, el docente debe esperar a que se le reprochen los errores de este modo tolerados o suscitados. Los reproches vendrán tanto de sus alumnos como de los profesores de niveles superiores, a menos que una tradición o que una negociación cultural lo disculpen.

En la hipótesis considerada, existe una alternativa: el profesor renuncia a la enseñanza por adaptación, enseña directamente un saber conforme a las exigencias científicas. Pero entonces esta hipótesis implica que debe renunciar a dar un sentido a este saber y a obtenerlo como respuesta a situaciones de adaptación porque entonces los alumnos lo teñirán de significaciones falsas.

El profesor tiene que elegir entre enseñar un saber formal y desprovisto de sentido o enseñar un saber más o menos falso que será necesario rectificar.

Las elecciones intermedias podrán conjugar los dos inconvenientes y aún complicarlos.

El alumno a quien se le enseña, por una parte, un saber "sabio" y a quien se le presenta, por otra parte, situaciones de referencia inadecuadas, es capaz de constatar toda clase de contradicciones e inadaptaciones entre estos dos objetos de enseñanza. Los saberes que él obtiene al comprender, son inclusive falsos o diferentes de aquéllos que se pretende enseñar.

Las distinciones que se establecen entre saber teórico y saber práctico no son quizás a menudo más que una simple consecuencia y una recuperación de esta dificultad puramente didáctica. Aquí, de nuevo, el alumno está ante una obligación paradójica; debe comprender Y aprender; pero para aprender debe, en cierta medida, renunciar a comprender y para comprender, debe arriesgarse a no aprender. Tomar como objeto de enseñanza el saber y su génesis (verdadera o ficticia), y entonces enseñar el saber y su sentido no es tampoco una solución perfecta.

4.2.2. Inadaptación a su adaptación ulterior

La memorización de saberes formales, ampliamente despojados de sentido, puede ser muy costosa en ejercicios de aprendizaje. Estos últimos no deben reintroducir demasiado sentido, lo que aumenta todavía más su dificultad. La representación que se hace el alumno del saber matemático y de su funcionamiento se encuentra profundamente perturbada. Cuanto más el alumno ha sido entrenado en ejercicios formales, más difícil le

resulta posteriormente restaurar un funcionamiento fecundo de los conceptos así recibidos. "La aplicación" de un saber aprendido ya hecho se produce mal porque la lógica de la articulación de las adquisiciones que lo componen es únicamente la del saber mismo y porque el rol de las situaciones ha sido excluido a priori.

Examinemos la elección inversa, la de una comprensión, provisoriamente errónea, de un saber obtenido por adaptación a problemas "introductorios". Será necesario retomar y modificar este saber.

Una nueva paradoja aparece: si los alumnos se han adaptado *bien* a las situaciones que les son propuestas, han comprendido mejor las razones de sus respuestas y las relaciones de su saber con los problemas, será entonces más difícil, a continuación, cambiar este saber para hacerlo correcto y completarlo.

Acabamos de mostrar que para ciertos conocimientos, es bastante previsible que el saber será tanto más difícil de "retomar" y de modificar cuanto mejor haya sido aprendido, mejor comprendido y mejor confirmado en la primera etapa.

Este hecho se debe sin duda a razones de orden psicológico: es más difícil cambiar sus hábitos o sus opiniones, cuando están íntimamente ligados a actividades más personales, más numerosas y más antiguas.

Pero podría deberse también a una razón más directamente epistemológica. La sobreadaptación del "saber" a la solución de una situación particular no es necesariamente un factor favorable a la solución de una situación nueva. Una diferenciación demasiado fuerte, una dependencia demasiado grande en relación a los "conocimientos" directos y la evolución se hace imposible. El primer saber obstaculiza. Algunos de estos obstáculos son inevitables y constitutivos del saber -otros son el resultado de una sobreinversión didáctica.

Así, en la hipótesis de un saber inaccesible a cualquier alumno por una adaptación bastante corta a una situación fundamental bastante correcta, el profesor se encuentra delante de una nueva paradoja.

Ya sea que elija una enseñanza formal o por adaptación, mientras más insiste sobre el aprendizaje de conocimientos intermediarios, más se arriesga a contrariar las enseñanzas ulteriores.

Inversamente, si renuncia a fijar, a institucionalizar las adquisiciones, aún parciales, el alumno no encontrará ningún apoyo durante las etapas siguientes. En algunos casos, cuanto mejor se adapta un alumno a una situación didáctica intermediaria, más inadaptado está en la etapa siguiente.

Es plausible que sea este fenómeno el que conduce a los profesores de los niveles superiores a utilizar las enseñanzas más elementales solo bajo la forma de procedimientos o de algoritmos y, si hace falta trabajar el sentido, a hacerlo en situaciones con un vocabulario y métodos tan diferentes como sea posible de aquéllos de los niveles precedentes.

4.3. Las paradojas del aprendizaje por adaptación

4.3.1. Negación del saber

La hipótesis que el alumno podría construir su saber por una adaptación personal adidáctica, ¿es consistente?

Imaginemos en efecto que el profesor haga devolución al alumno de una fuente de preguntas auto-controlables¹⁷ o de un problema. Si el alumno resuelve este problema, puede pensar que lo ha hecho por el ejercicio normal de sus conocimientos anteriores. El hecho de haber resuelto el problema le parecerá como la prueba de que no tenía nada nuevo que aprender. Aún cuando es consciente de haber reemplazado una estrategia antigua y culturalmente identificada por otra de su "invención", le será muy difícil declarar que esta "innovación" es un saber nuevo: ¿qué necesidad de identificarla como un método cuando parece poder ser producida fácilmente cuando es necesaria? ¿Cómo un sujeto solo podría distinguir en todas las decisiones que ha tomado aquellas que se pueden separar de la situación y que le podrán servir del mismo modo en otras situaciones, de aquellas que son puramente coyunturales y locales?

Las condiciones sociales de un aprendizaje por adaptación, que rechaza el principio de la intervención de los conocimientos de un tercero para producir la respuesta, tiende a volver imposible la identificación de esta respuesta como una novedad, es decir que corresponda entonces a una adquisición de conocimientos.

El sujeto banaliza la pregunta cuyas respuestas conoce en la medida en que no tiene los instrumentos de saber si otros sujetos se la han planteado antes que él, o si nadie supo contestarla, o aún si otras preguntas se le asemejan o están relacionadas por el hecho de que podrán recibir una respuesta gracias a ésta..., etc. Es necesario entonces que alguien del exterior venga a señalar sus actividades y que identifique las que tienen algún interés, un status cultural. Esta *institucionalización* es en efecto una transformación completa de la situación. Elegir ciertos interrogantes entre aquéllos que uno sabe resolver, ubicarlos en el corazón de una problemática que confiere a las respuestas que evocan estos interrogantes un status de saber más o menos importante, ligarlos a otros interrogantes y a otros saberes, constituye finalmente lo esencial de la actividad científica. Este trabajo cultural e histórico difiere totalmente de lo que parecía debía ser dejado a cargo del alumno y que vuelve al docente. No es entonces el resultado de una adaptación del alumno.

En cierto modo, la adaptación contradice la idea de la creación de un saber nuevo. Inversamente, el saber es casi el reconocimiento cultural de que el conocimiento directo es incapaz de resolver naturalmente ciertas situaciones (paradaptación).

4.3.2. *Destrucción de la causa*

Las situaciones que permiten la adaptación del alumno son a menudo, por naturaleza, repetitivas: el alumno debe poder hacer numerosas tentativas, implicarse en la situación con la ayuda de sus representaciones, sacar consecuencias de sus errores o de sus éxitos más o menos fortuitos...

La incertidumbre en la cual está inmerso es a la vez fuente de angustia y de placer. La reducción de esta incertidumbre es la finalidad de la actividad intelectual y su motor. Pero conocer la *solución* por anticipado, es decir haber transformado las respuestas satisfactorias, pero locales, en método que da respuesta en todos los casos, destruye el carácter incierto de la situación, que se encuentra entonces vaciada de interés. Así el conocimiento priva al alumno del placer de buscar y de encontrar una solución "local". La adaptación -por el conocimiento- coincide entonces con el renunciamiento a una

¹⁷ Es decir aquellas que el alumno no sabe a priori responder pero podrá hacerlo cuando tenga una solución y sepa si es exacta sin recurrir al maestro.

incertidumbre en definitiva agradable. La adaptación del alumno tiende a destruir la motivación que la produce como tiende a quitarle todo sentido a la situación que la provoca.

Debería entonces detenerse rápidamente y, en última instancia, no producirse más que cuando un proceso se convierta en necesario.

La simple imagen de una adaptación a perturbaciones exteriores no es satisfactoria para representar el fenómeno del aprendizaje. No deja lugar a dos elementos esenciales para la conservación del proceso:

- por una parte, la creación de una motivación intrínseca que reenvía al alumno a la búsqueda de otra "ocasión" de adaptarse sin la tentativa de adaptar el medio a sí mismo,
- y por otra parte, la adaptación interna del sujeto sin perturbaciones exteriores y sin "actividad" real (como por ejemplo la resolución de contradicciones internas del sujeto nacidas de la asimilación de esquemas nuevos de la cual habla Piaget).

4.4. La paradoja del comediante

¿Puede el profesor escapar a la devolución, a la intención directa de enseñar cierto saber particular? ¿Puede escapar a la situación didáctica? Después de todo, tal vez sería suficiente con *ser* matemático y comportarse como tal delante y con el alumno. La participación progresiva de este último en esta actividad podría permitirle aprender las matemáticas como una actividad cultural directa, sin desfase de lenguaje o de método, sin transposición tampoco. El alumno aprendería matemáticas como aprendió su lengua materna. ¿Puede ser el medio cultural "naturalmente" docente sin ser localmente didáctico? ¿Se puede considerar el sistema didáctico sin docente?

Ciertamente, numerosos trabajos han mostrado el importante rol jugado por el medio familiar, social y cultural en las diferencias de comportamiento y de éxito escolar.

Es probable que el niño pueda aprender muchas cosas en la medida en que la actividad matemática de los miembros de la familia se traduzca en debates y en cuestiones que puedan serle accesibles; retendrá especialmente métodos, exigencias, hábitos y una referencia de las dificultades; es decir datos de naturaleza epistemológica. Pero cuando un proyecto de aprendizaje personal de un determinado saber se perfile, el niño se convertirá en el alumno y el sistema fundamental reaparecerá: uno será el docente, otro el enseñado y ya sea espontáneo o institucional, el maestro no puede escapar a la devolución del saber.

Este saber cuyo texto ya existe no es más una producción directa del maestro, es un objeto cultural, citado o recitado. Y su reproducción en el momento deseado se puede comparar mejor a una pieza de teatro repuesta para el alumno, luego por el alumno mismo, que a una aventura vivida por él mismo. Si el alumno puede *vivir* su aprendizaje, el maestro, es necesariamente un actor, desde el momento en que sabe de antemano lo que quiere enseñar. No se trata de una metáfora: el docente es realmente un actor -con o sin texto- que se ocupa de hacer vivir una reproducción del saber a su alumno.

Esta aproximación responde en parte a la cuestión inicial, pero la transforma y la fragmenta:

i) ¿Debe el maestro "hacer" las matemáticas que quiere enseñar, en el sentido en que el actor debería experimentar los sentimientos que quiere compartir con el espectador?

ii) ¿Debe el maestro rehacer cada vez su texto en torno a un esbozo como en la comedia del arte, o debe atenerse a un "texto" bien probado?

Sobre el último punto, Diderot ha formulado en un célebre estudio, la paradoja inherente a la actividad del comediante:

Tanto más experimenta el actor las emociones que quiere presentar, menos es capaz de hacerlas experimentar al espectador porque "observador continuo de los efectos que produce, el actor se transforma en cierta manera en espectador de espectadores al mismo tiempo que lo es de sí mismo y puede así perfeccionar su juego"¹⁸.

Esta paradoja se prolonga en el caso del profesor. Si produce él mismo sus preguntas y sus respuestas de matemáticas, priva al alumno de la posibilidad de actuar. Debe entonces dejar tiempo, dejar preguntas sin respuestas, utilizar aquéllas que el alumno le da e integrarlas en su propia gestión dejándole un espacio cada vez más grande... Este esquema idílico puede desarrollarse en tanto que el profesor fabrique un saber nuevo, pero si el saber está determinado de antemano, esta "libertad" no es más que un juego de actor y el alumno es invitado a ser otro actor, sujeto a un texto o al menos a un patrón, que se presume ignora. Algunos esquemas pedagógicos postulan la necesidad de que el maestro ignore él mismo el saber. La existencia de estos esquemas es la prueba de la pertinencia de nuestro análisis. Es fácil mostrar su carácter ilusorio (lo que no quiere decir que todos los intentos de este tipo fracasen, sino que solo tienen éxito bajo otras condiciones).

Así como lo muestra nuestro estudio¹⁹, la paradoja de Diderot se aplica al profesor de modo extensivo y es tal vez más fundamental y más aguda que para el comediante. Entre otros, la explicación de la resistencia de los actores a este análisis puede extenderse a aquellas observadas en el mundo de los profesores...

La "paradoja" en el sentido de Diderot es "una oposición absurda en apariencia debido a que es contraria a las opiniones recibidas y que sin embargo en el fondo es verdadera"²⁰. Nosotros le hemos dado un sentido más restringido. Nuestras paradojas son especies de contradicciones funcionales entre un juego, aparentemente exhaustivo, de decisiones y su finalidad.

La resolución de estas paradojas, del mismo modo que la explicación de los fenómenos observados, es uno de los objetivos de una teoría de las situaciones al mismo tiempo que un instrumento para poner a prueba su consistencia.

5. INSTRUMENTOS Y MÉTODOS PARA LA MODELIZACIÓN DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Se trata aquí de exponer el instrumento de la modelización: el juego, y luego de discutir cuáles serán las relaciones de estos "modelos" con la realidad que describen.

Estas relaciones no son aquellas de un original, que sería el juego fundamental como modelo, con su copia, que sería la realidad didáctica, y donde las dificultades serían imputables a las desviaciones introducidas por una "mala" respuesta de los jugadores. Estas relaciones, al contrario, dejan un espacio a la confrontación con las observaciones y son falsables. La aproximación sistémica así propuesta será ilustrada por una discusión de los primeros subsistemas fundamentales a tomar en cuenta. Mostraremos que la necesidad de introducir un sistema "medio" en el juego didáctico del alumno no es una

¹⁸ NdE: Diderot 1773 pp. 186-187.

¹⁹ *The fragility of knowledge*, G. Brousseau, M. Otte 1991.

²⁰ Encyclopédie. NdE: ver nota 18.

reificación del modelo (los instrumentos del juego) ni el producto de una observación sino el de una necesidad interna.

5.1. "Situación fundamental correspondiente a un conocimiento"

Modelizar una situación de enseñanza consiste en producir un juego específico del saber en la mira, entre sub-sistemas: el sistema educativo, el sistema alumno, el medio, etc. No se trata de describir precisamente estos sub-sistemas sino a través de las relaciones que ellos mantienen en el juego.

Antes de precisar el tipo de juego que será utilizado, es necesario identificar las dos grandes finalidades de la modelización:

5.1.1. Con respecto al conocimiento

El juego debe ser tal que el conocimiento aparezca bajo la forma elegida, como la solución, o como el instrumento para establecer la estrategia óptima:

- conocer tal propiedad, ¿es el único instrumento de pasar de una estrategia a otra?
- ¿Por qué el alumno buscaría reemplazar esta por aquella?
- ¿Qué motivación cognitiva conduce a producir tal formulación de una propiedad o tal demostración?
- ¿Qué razón para producir este saber es mejor, más justa, más accesible o más eficaz que tal otra?

Este tipo de preguntas puede plantearse a priori. En un primer momento, las respuestas pueden ser tomadas de la lógica del juego, de la historia de las ciencias o del análisis matemático o didáctico: el juego específico de un saber debe justificar su empleo o su aparición, conforme con la didáctica teórica.

5.1.2. Con respecto a la actividad de enseñanza

El "juego" debe permitir representar todas las situaciones observadas en las clases -ya que no los desarrollos particulares- aún las menos "satisfactorias" desde el momento en que llegan a hacer aprender a los alumnos una forma del saber en la mira. Debe poder engendrar todas las variantes, aún las más degeneradas. Estas serán obtenidas por la elección de los valores de ciertas variables características de este juego²¹.

Los conceptos generales de la didáctica deberían permitir establecer la significación relativa de estas diferentes variantes, explicar y prever sus efectos, sobre el tipo de conocimiento que hacen adquirir, sobre el desarrollo de las actividades de enseñanza que ellas discriminan y sobre la calidad de su resultado.

Inversamente, ellos deberían permitir proveer un conocimiento de las condiciones que lo justifican, que lo vuelven necesario, bajo sus diferentes formas.

Ajustar estas condiciones en función de lo que sabemos de la epistemología, de la psicología del niño, de la lingüística, o de la sociología, es un objetivo razonable de la didáctica.

Proporcionar un contrapunto experimental a las reflexiones de epistemólogos o de teóricos del conocimiento es una ambición legítima. Tampoco es cuestión pretender que toda actividad de producción de saber sea asimilable a un comportamiento "económico"

²¹ Cf. "Ingénierie et didactique" en Brousseau (1982). NdE: ver también Artigue (1990)

dentro de un juego explicitable. Por otra parte, el saber está siempre ampliamente sobredeterminado. No se trata más que de modelos, asumidos como tales.

5.2. La noción de juego

Modelizar la noción vaga de "situación" por la de "juego" exige una precisión sobre los sentidos acordados a esta palabra. Sus cinco definiciones principales tienen todas una relación con los elementos que se presentan.

i) La primera caracteriza al conjunto de relaciones, el "hiposistema" para modelizar: "Actividad física o mental, puramente gratuita, generalmente fundada en la convención o en la ficción, que solo tiene en la conciencia de aquel que se involucra un fin en sí misma, el objetivo de lograr el placer que procura." [Definición 1]

Esta definición pone en escena esencialmente *un jugador* -capaz de experimentar placer, de concebir una ficción y de establecer convenciones y *relaciones* con un *medio* no precisado. Proporciona una actividad y su placer depende de ella. Pero la definición insiste sobre todo en el carácter casi aislado del sistema evocado de este modo. Para el jugador -se admite que pueda existir un "Deus ex machina" del cual no debe tener conciencia. Para él entonces, la actividad es gratuita. ¿Pero cómo conciliar esta idea de una acción motivada por el placer y no obstante gratuita? Finalmente, ¿todas las acciones no serían motivadas por placer? Interpretaremos la frase en el siguiente sentido: las decisiones y las acciones en el *transcurso* del juego no están reglamentadas más que por el placer que el jugador experimenta cumpliéndolas, experimenta con sus efectos, pero la decisión de entregarse al juego mismo no tiende a ningún fin. Volveremos más adelante sobre esta noción de gratuidad. Al lado de este primer sentido, otros cuatro:

ii) El juego es "la organización de esta actividad bajo un sistema de reglas que define un éxito y un fracaso, una ganancia y una pérdida". (Lalande) [Definición 2]. Es el "game".

iii) Es también, y nosotros utilizaremos a menudo la palabra en este sentido, "lo que sirve para jugar, los instrumentos del juego", y eventualmente uno de los estados del juego determinado por un montaje particular de los instrumentos del juego. [Def. 3].

iv) Es a veces "la manera como se juega", el "play". En los casos en que se trate de procedimientos, preferimos los términos "táctica" o "estrategia". [Definición 4]

v) Finalmente es el conjunto de posiciones entre las cuales el jugador puede elegir en un estado dado del juego (en el sentido 2) -y por extensión, en mecánica por ejemplo, el conjunto de las posiciones posibles y en consecuencia los movimientos de un sistema, de un órgano, de un mecanismo que además está obligado a respetar ciertas exigencias. [Definición 5]

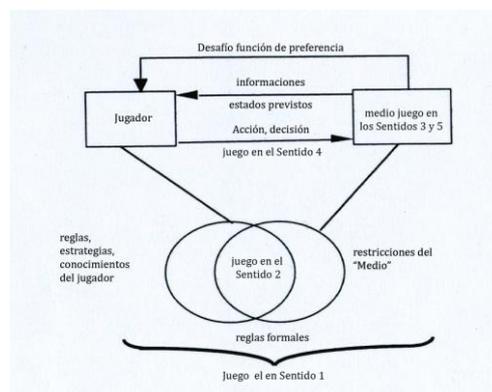


Figura 1.

Las relaciones entre los diferentes sentidos aparecen en la figura [1]. Recordemos que formalmente, un "juego" de k personas (por ejemplo), es la estructura definida por el dato de:

a) Un conjunto X de "posiciones" distintas entre las cuales se pueden encontrar los objetos y las relaciones pertinentes.

b) Una aplicación Γ de $X \rightarrow P(X)$ que, a todo estado $x \in X$ hace corresponder el conjunto $\Gamma(x)$ de las posiciones permitidas entre las cuales el jugador "al que le toca jugar" puede elegir a partir del estado x . Γ representa, por consiguiente, las reglas.

c) Un estado inicial I y uno o unos estados terminales F (tales que $\Gamma^{-1}(I) = \emptyset$ y $\Gamma(F) = \emptyset$).

d) Un conjunto J de k jugadores y una aplicación Θ de $J \times X$ en J que, a cada estado x de juego, designa al sucesor que le toca $\Theta(j,x)$ del jugador j .

e) Una función llamada ganadora, de apuesta o de preferencia y que es una aplicación de A , parte de X que *contiene* a F , en R .

Esta definición no es general y se pueden encontrar ejemplos de juegos que exigen una modelización diferente, sensiblemente más compleja: por ejemplo, es conveniente para el ajedrez o para el juego de los caballitos, no para el juego de roles.

Sin embargo, es suficiente para definir algunos términos de didáctica.

. Un *partido* es una serie finita de estados (x_i) $1 \leq i \leq n$ de X tal que $x_1 = I$ $x_n \in F$ y $\forall i$ $x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$. Los "*estados permitidos*" son las posiciones de X que pueden figurar en un partido (en ajedrez, los estados no permitidos se denominan, a veces, hechizo).

. Una *estrategia* S es una aplicación de $X \rightarrow X$ que determina las elecciones de un jugador en todos los estados permitidos $S(x) \in \Gamma(x)$, ya que hay k jugadores, k estrategias suficientes para determinar un partido.

. Una *táctica* T_A será una aplicación de una parte A de X en X y tal que $x \in A$, $T_A(x) \in \Gamma(x)$. Una estrategia es entonces, una táctica definida sobre todo X .

. Un estado de "*conocimiento*" de un jugador C será caracterizado por una aplicación de X en $\Gamma(x)$ tal que para todo x $C(x) \in \Gamma(x)$. Un "conocimiento" (no vacío) restringe estrictamente las elecciones de los jugadores. (Esta definición se puede aproximar a la de información).

. Un conocimiento "determinante" reduce a un solo estado la elección del jugador en un cierto número de estados (respectivamente en todos los estados), y entonces caracteriza una táctica (respectivamente una estrategia).

Una adquisición de conocimientos, por ejemplo bajo el efecto de una información recibida (o de un aprendizaje), es una modificación del estado de conocimiento: un par (C, C') -en realidad C en el instante t , C' en el instante $t + \Delta t$.

A menudo, según la teoría de la información, se considera que $C'(X) \neq C(x)$, es decir, que el conocimiento *reduce* la incertidumbre del sujeto suprimiendo las posibilidades de elección.

Pero es necesario, para modelizar las modificaciones de los conocimientos del alumno, imaginar que él no considera al instante *todas* las posiciones permitidas (aunque lo sean por las reglas, objetivamente) y que una modificación de su estado de conocimiento puede consistir no en reducir su incertidumbre sino por el contrario en aumentarla por la consideración en el instante $t + \Delta t$ de posibilidades nuevas abiertas a su elección. Esta consideración aleja el uso estricto de la teoría de la información.

*Modelo de acción*²²: llamaremos "modelo de acción" a toda estrategia o todo procedimiento de cálculo que genere una estrategia (o una táctica).

Asimismo, podríamos llamar representación "lo" que, en un juego particular, va a generar los estados de conocimiento, lo que va a permitir preverlo.

La primera ventaja de un modelo de este tipo es permitir en casos precisos, considerar a priori "todas" las series de respuestas y compararlas desde el punto de vista de su eficacia.

Una *estrategia ganadora* proporciona contra toda defensa una parte de ganancia positiva, aunque podemos evaluar diversas características:

- su costo, por ejemplo, el número de jugadas que llevan al fin de un partido,
- la ganancia que ella produce...

Una *estrategia no ganadora* podrá ser sin embargo mejor que otra desde el punto de vista de los riesgos de pérdidas que acarrea, de las ganancias que permite esperar, etc. La teoría de juegos permite entonces estudiar los dilemas que se presentan. La mayoría de los ejercicios de aprendizaje fundamentales son concebidos contra un adversario que es la "naturaleza".

La construcción de modelos de acción permite ir más lejos en el análisis de comportamientos posibles del sujeto, como lo hacemos en numerosos ejemplos (cf. tesis H. Ratsimba-Rajohn). El estudio de la adecuación de una situación a un conocimiento apunta entonces a mostrar que la estrategia óptima puede ser generada por este conocimiento y no por otro. Recíprocamente, se hace entonces posible formular hipótesis sobre las variables de la situación, sobre su influencia sobre las estrategias y sobre los cambios de estrategias (cf. tesis de Bessot-Richard).

El sentido de una decisión, de una elección del alumno, puede ser también modelizado con la ayuda de ciertas componentes, entre ellas:

1. El conjunto de elecciones visualizadas por el alumno y rechazadas por una elección retenida.
2. El conjunto de estrategias posibles visualizadas y excluidas, en particular la serie de elecciones o de estrategias de reemplazo visualizadas por el sujeto.
3. Las condiciones mismas del juego que parecen determinantes por la elección retenida, en particular el espacio de las situaciones generadas por los valores de las variables pertinentes que le dan a la decisión caracteres de óptimo, de válido, o de pertinente.

5.3. El juego y la realidad

5.3.1. Semejanza

En la vida "real", el sujeto organiza sus acciones según sus intereses, en el marco de reglas desconocidas y cambiantes; en oposición a estas actividades serias, profesionales o privadas, se presentan las situaciones de juego donde se puede, por el contrario, elegir las reglas, librarse al placer, liberarse de otras presiones.

No obstante se conocen numerosos ejemplos donde la descripción precisa del funcionamiento de ciertas relaciones sociales, financieras, económicas, militares, etc. está

²² He utilizado estas definiciones en varios casos y especialmente en el estudio de las estrategias de medición con H. Ratsimba-Rajohn (1981). Se encontrará en su tesis una redacción mucho más detallada con varios ejemplares interesantes, así como en la tesis de A. Bessot y F. Richard (1979).

aclarado y facilitado por su transcripción en términos de juego; la situación de juego es a menudo un buen modelo de situaciones reales.

Es por eso que el juego puede ser una fuerte derivación y un símbolo de la vida: ¡se le parece! Al mismo tiempo, uno puede volverse dueño de las presiones que, en la realidad, oprimen al jugador y esta libertad juega un papel fundamental en el equilibrio de las frustraciones que ellas causan.

Examinemos por ejemplo el juego de la muñeca estudiado por Freud. El chico hace desaparecer la muñeca bajo un mueble "fuerte", luego a su voluntad, la hace reaparecer "da"²³... Ciertamente, la reproducción del placer está ligada al proceso y es necesario que la muñeca desaparezca para poder reaparecer. Sin embargo, es el control por el niño lo que constituye la condición fundamental. Una muñeca "automática" que apareciera a intervalos de tiempo regulares no jugaría el mismo rol. Desde el momento en que el niño pudiera prever las reapariciones, el juego cesaría de interesarle.

Una muñeca que hiciera apariciones aleatorias (que uno no pudiera encargar ni prever) sería angustiante, demasiado "realista", es decir demasiado cercana de la situación simbólica de la madre. A menos que descubra que la muñeca reaparecerá pronto, que la acecha y que la muñeca se muestra efectivamente durante ese tiempo de espera en un momento sin embargo imprevisto: en esas condiciones, ocurre que el bebé estalla de risa, sobre todo si descubre que alguien maneja la muñeca con picardía. Pero esta risa es una reacción de defensa, en oposición al placer del control de las situaciones, como el sarcasmo es opuesto al poder. Risas, pero risas de la angustia a punto de ser superada.

El juego es un símbolo en el sentido que se asemeja "suficientemente" a la vida. Exige del jugador el mismo tipo de posibilidad de acción, el mismo tipo de emociones, de motivaciones, y se distingue porque allí se controla la mayoría de las condiciones que, en la realidad, oprimen y escapan al jugador.

La semejanza es el medio de dar sentido a la diferencia.

5.3.2. Desemejanza

Se podría creer así que se ha justificado y explicado la separación fundamental que opone el juego a la vida, o más exactamente el deseo y la realidad, permitiendo al mismo tiempo ubicarlos uno en relación al otro:

- el juego convencional y simbólico que juega su papel al interior del juego de la vida,
- el juego símbolo de la vida...

Pero si seguimos a Lacan²⁴, el símbolo creado para equilibrar las frustraciones y las tensiones nacidas de las relaciones con el objeto del deseo, hereda de hecho su carácter frustrante. Por ejemplo, cuando la muñeca aparece cuándo se quiere y dónde se quiere, se ha logrado el control y el juego desaparece como tal. Así, el juego que sigue siendo un juego por definición no satisface al jugador y crea la necesidad de un nuevo partido, de un nuevo juego o de un nuevo símbolo. Lacan dice que las relaciones con el símbolo deben entonces ser ellas mismas equilibradas por la creación de un nuevo símbolo; así la cadena de sentido está abierta.

²³ *NdE*: en alemán en el texto. Concerniente al juego "fort-da", ver más particularmente (Brousseau y Otte, 1991, pp. 32-35).

²⁴ *NdE*: según G. Brousseau (comunicación personal) la contribución original de Lacan sobre este problema clásico es haber mostrado que el problema del sentido está siempre abierto, que todo símbolo es impotente para dar respuesta a las preguntas que están en el origen de la existencia.

El juego debe ser, sea controlado totalmente y entonces rechazado como objeto de deseo, sea reproducido sin fin. Estos dos rasgos son muy importantes:

- un "juego" donde el jugador controlaría todas las salidas, todos los resultados, y ganaría con seguridad, no ofrecería ninguna incertidumbre, y no dejaría lugar a ninguna simulación de las incertidumbres de su "modelo".

Si "un juego complicado no es un juego utilizable tal cual en clase, ... un juego analizado es un juego muerto" (A. Deledicq²⁵), el juego no puede ser puramente gratuito. Es necesario que haya, frente al jugador, un adversario, un medio, una ley de la naturaleza que se oponga en cierta medida a que obtenga siempre el resultado deseado.

5.4. Aproximación sistémica a las situaciones de enseñanza

La aproximación sistémica a las situaciones de enseñanza parece indicada en la medida en que los sub-sistemas en presencia: el enseñado, el sistema educativo, son identificables inmediatamente como actores.

Ella presenta interés en la medida en que la consideración de los sub-sistemas desprendidos permite, sea simplificar sensiblemente el estudio de los problemas planteados, sea aislar algunos de estos problemas que pueden ser resueltos en estos sub-sistemas. La aproximación se muestra indispensable si la totalidad de los fenómenos didácticos puede ser tomada en cuenta de este modo y puede entonces pretender suministrar un fundamento teórico.

Pero presenta una cierta ambigüedad y existe el peligro de que no sea sino el instrumento de una proyección sobre la realidad del modelo pensado por el investigador.

La aproximación (sistémica) clásica de las situaciones de enseñanza pone el acento sobre estos sistemas concretos, en presencia (el maestro, el alumno) y sus funciones, sus propiedades. Conduce a examinar, con la ayuda del modelo de funcionamiento social, la manera en que estas funciones están aseguradas e interiorizadas. Las dificultades observadas serán entonces imputadas a las malas respuestas dadas a las necesidades del sistema. Este razonamiento constituye una reificación, (Berger y Luckmann, 1966), es decir que el esquema abstracto y la realidad "deben" coincidir, y que no hay más lugar para la experiencia y para la falsificación. Por el contrario, la descomposición en sub-sistemas, considerada aquí, tiene por objeto la definición de los *juegos* que permiten coordinar las estrategias opuestas de participantes relacionados. Encontraremos de este modo los juegos del alumno con su entorno didáctico, relativo al saber, los juegos del maestro que juega con los juegos del alumno... Se trata de postular el objeto del estudio didáctico y de probar su existencia. El método aparece, desde 1970, en los trabajos que reagrupamos más adelante²⁶, y se mejora luego de forma empírica. Es muy próxima de aquélla preconizada por Crozier y Friedberg (1977) para el estudio de los sistemas sociales y políticos:

"Si se pueden... descubrir estrategias suficientemente estables en el interior de un conjunto [de personas] y si se pueden, por otra parte, descubrir los juegos, las reglas de juego y las regulaciones de esos juegos a partir de los cuales estas estrategias pueden ser efectivamente consideradas como racionales, se tiene a la vez, la prueba efectiva que

²⁵ NdE: Brousseau recuerda aquí un comentario de André Deledicq en una conferencia internacional en Saigón en 1975.

²⁶ NdE: aquí Guy Brousseau reenvía a la sección 6, el lector encontrará una versión original en Brousseau (1970).

este conjunto puede ser considerado como un sistema y las respuestas ya precisas sobre su modo de gobierno". (Ibid. p. 215)

Sería aún ingenuo creer que la construcción de esos "sistemas de acción concretas" que articulan los juegos de los actores presentes, según Crozier y Friedberg, puede eludir la confrontación permanente con la realidad. Anticipar la pertinencia de los elementos retenidos para explicar un fenómeno, comporta evidentemente el riesgo de encerrarse en las categorías previas que se han aceptado como punto de partida porque eran conformes a las ideas recibidas. Y es solamente por un trabajo incesante de análisis de la significación de numerosas observaciones naturales o provocadas y de exigencias metodológicas locales y globales que se pueden ligar esas observaciones a las hipótesis sobre los juegos en relación a los cuales ellas son racionales y sobre el sistema didáctico que contiene esos juegos.

6. LAS SITUACIONES ADIDACTICAS

6.1. Los sub-sistemas fundamentales

6.1.1. Esquemas clásicos

En una primera aproximación, el juego didáctico pone en relación un primer jugador: el sistema educativo -el maestro- portador de la intención de enseñar un conocimiento y un segundo jugador, el enseñado, el alumno. Hemos mostrado anteriormente la necesidad del maestro, real o interiorizada. ¿Es posible definir el juego didáctico limitándose a estos dos sub-sistemas? Se han propuesto para esto varios esquemas, el de la comunicación debido a Osgood²⁷ y el del condicionamiento escolar debido a Skinner²⁸.

En el esquema de la comunicación, el sistema educativo es un emisor de informaciones, el alumno un receptor que decodifica los mensajes que recibe, con la ayuda de su repertorio. La enseñanza consiste en suscitar, con la ayuda de mensajes formados únicamente con el repertorio del receptor -para que sean inteligibles- la creación de nuevos elementos para agregar al repertorio (fig. 2). Está claro que la regla que se impone a un maestro que adoptara este modelo, sería de no introducir una construcción conocida que contenga conceptos conocidos. Lo que se comunica, es solamente el saber bajo su forma cultural y para las matemáticas, bajo su forma axiomática. Este modelo es insuficiente por numerosas razones. Por ejemplo, no permite definir el sentido de mensajes memorizados de otro modo que como reformulación de los mensajes anteriores. ¿Por qué esos mensajes serían memorizados de todos modos?

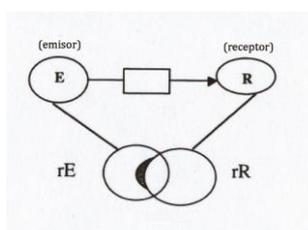


Figura 2

²⁷ NdE: Osgood et al. (1957)

²⁸ NdE: Bramaud du Boucheron et al. (1970).

Los aprendizajes "por aprehensión estadística donde los semantemas más frecuentemente propuestos por el emisor se insertan poco a poco en el repertorio del receptor modificándolo"... imaginados por A. Moles (1967, p. 110) dan cuenta de hipótesis empiristas sensualistas refutadas hace mucho tiempo. Esta interpretación supone también que en todo mensaje que le sea dirigido, el alumno reconocerá lo que es un saber nuevo a aprender... ¡Qué transparencia!

El conductismo (fig. 3) responde a esta objeción proponiendo un esquema de aprendizaje compuesto por dos subsistemas: el alumno que influye (diremos que actúa sobre) el medio, y el medio que "informa" o sanciona al alumno.

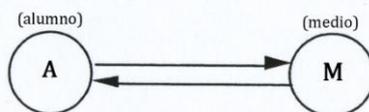


Figura 3

El alumno, perturbado por la influencia del medio, intenta anular estas sanciones por modificaciones del medio y/o por aprendizajes que lo modifiquen a él. Por supuesto, el docente es una parte del medio y puede incluso sustituirlo. Este esquema supone que el saber puede expresarse bajo la forma de una lista de pares estímulo-respuesta. Esta tesis ha sido en primer lugar refutada por Chomsky-Miller en relación al aprendizaje de la lengua materna que ha sido reconocido como que no pudiendo ser generado, en el mejor de los casos por un autómata finito y por un modelo estímulo-respuesta. A pesar de la objeción de Suppes (para todo autómata finito, existe un modelo S.R. que le es asintóticamente equivalente), las consideraciones de Nelson y Arbib sobre la velocidad de convergencia de estos modelos, los ha condenado²⁹.

6.1.2. Primera descomposición propuesta

Sin rechazar por el momento las reducciones anteriores, parece que hay que considerar dos tipos de juegos distintos:

a) Los juegos del alumno con el medio adidáctico, que permiten precisar cuál es la función del saber después y durante el aprendizaje. Estos juegos son evidentemente específicos de cada conocimiento.

b) Los juegos del maestro en tanto que organizador de esos juegos del alumno (en tanto que estos juegos son también específicos del saber en la mira). Estos juegos conciernen al menos a tres rivales y generalmente a cuatro: (el maestro, el alumno, el medio inmediato del alumno y el medio cultural). El juego del maestro (figura 4) en cada sistema de acción concreto, define y da un sentido al juego del alumno y al conocimiento.

²⁹ Brousseau y Gabinski (1976) da una precisión bastante concreta de este problema y una experiencia (Maysonnave 1972) aporta una verificación experimental que consiste en comparar la velocidad de aparición de ciertos teoremas (en actos) en los alumnos de 10 años con las previsiones de un modelo estocástico de aprendizaje. El acuerdo es conveniente en el caso de una situación simple (carrera a siete). Los niños son más rápidos de lo que prevé el modelo cualquiera sean los valores de los parámetros que se piden. *N.de E:* Ver "La carrera a 20". Para las referencias indicadas por Brousseau, ver Suppes (1969, 1976), Nelson (1969) y Arbib (1976, 1976^a)

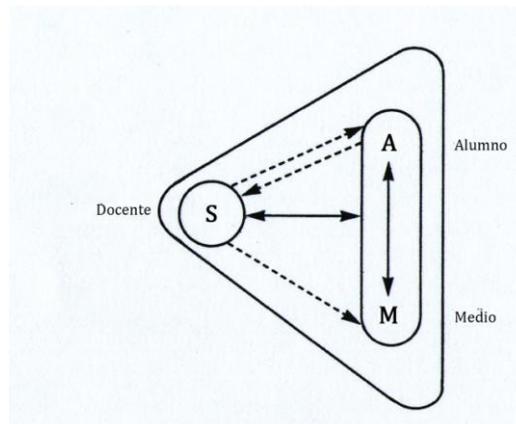


Figura 4

Se desprende de esta definición que los dos tipos de juegos principales del maestro son la *devolución*, que ya hemos presentado, y la *institucionalización*. En la devolución, el maestro pone al alumno en situación adidáctica o pseudo adidáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un estatuto. Estos dos géneros de negociación son muy distintos. Las discusiones que preceden han hecho sentir claramente para el primero los elementos de elección, lo que está en juego y sus reglas, permiten modelizarlo en términos de juego. El segundo, mucho más ligado al contrato didáctico, es objeto de trabajos en la actualidad³⁰. Es preferible volver a él luego del estudio de la situación adidáctica.

6.1.3. Necesidad del sub-sistema "Medio adidáctico"

Así, en el caso general, la situación didáctica no puede ser modelizada como una simple comunicación, o como una simple interacción social. Es necesario hacer intervenir otro sistema.

Esta necesidad deriva de una de las cláusulas del contrato didáctico mismo que implica el proyecto de su extinción: está sobrentendido, desde el comienzo de la relación didáctica, que debe llegar un momento en el que se rompa. En este momento, al final de la enseñanza, se supondrá que el sistema enseñado podrá hacer frente, con la ayuda del saber aprendido, a sistemas desprovistos de intenciones didácticas. Se supone que el saber enseñado al alumno le da entonces la posibilidad de *leer* sus relaciones con esos sistemas como nuevas *situaciones adidácticas* y por este instrumento, aportarle una respuesta apropiada. El *medio* es el sistema antagonista del sistema enseñado, o más bien, precedentemente enseñado.

Esta lectura puede hacerse en realidad de diferentes maneras, pero la coherencia exige que la modelicemos bajo forma de *juegos* reconocidos como semejantes a los que el alumno conoce. El sistema enseñado puede entonces tomar decisiones sostenidas por sus conocimientos, y además, establecer entre las dos situaciones, la antigua y la nueva, relaciones de significación. Contrariamente, puede leer estas situaciones adidácticas como juegos nuevos que recurren a respuestas nuevas sin referencia a aquéllas que él

³⁰ NdE: ver, por ejemplo, Rouchier (1991) en particular la sección titulada "L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques" (*Ibid.* pp. 26-65); ver también Margolinas (1993).

conoce. Puede, en todos los casos, ver allí la ocasión de plantearse nuevos interrogantes y, eventualmente, aún sin respuesta para él.

Inversamente, la situación didáctica debe comprender, real o simplemente evocada, una representación de estas relaciones futuras. Debe incluir y poner en escena otro sistema distinto del sistema educativo y que representará "el medio". Se supone que a medida que los alumnos progresen, esta representación cultural y didáctica del medio se aproximará a la "realidad" y las relaciones del sujeto con este medio deberán empobrecerse de intenciones didácticas.

Derivan así varias consecuencias:

- La relación didáctica se apoya siempre sobre hipótesis epistemológicas, conscientes o no, explícitas o no y coherentes o no;
- El análisis de las relaciones didácticas implica la definición o el reconocimiento de estos juegos "fundamentales" y adidácticos, que ponen en presencia un medio y un jugador, siendo estos juegos tales que el saber -tal saber preciso- aparecerá como *el* medio para producir estrategias ganadoras. Es necesario para ello disponer de una forma particular y muy concreta de conocimientos epistemológicos;
- En un momento dado de la enseñanza, el alumno se encuentra comprometido por su contrato didáctico en una relación más o menos real con un medio organizado (al menos en parte) por el sistema educativo. Esta relación ha sido organizada a fin de justificar la producción *pertinente* por el alumno de comportamientos que son indicios de la apropiación del saber. Es decir que la respuesta del alumno no debe ser motivada por obligaciones ligadas al contrato didáctico sino por necesidades adidácticas de sus relaciones con el medio.
- Las relaciones del alumno con el medio pueden ser concebidas (en particular por el sistema educativo) jugando papeles muy diferentes:
 - Por ejemplo la situación adidáctica puede ser incapaz de provocar algún aprendizaje. Toda la virtud didáctica está contenida en el contrato;
 - Contrariamente, se puede esperar que los efectos recíprocos del medio y del alumno sean suficientes en sí mismos para provocar las adaptaciones y los aprendizajes esperados (hablamos entonces de situación de aprendizaje en sentido estricto). El sistema educativo se limita entonces a elegir, organizar y mantener las relaciones que aseguran la génesis del conocimiento del sujeto. El volver permanente del alumno a la interrogación sobre el medio no le deja ignorar por mucho tiempo que el contrato pedagógico está vacío de todo contenido didáctico;
 - El caso general es evidentemente intermedio y conjuga un contrato didáctico y una situación adidáctica que puede ser también una situación de aprendizaje por adaptación.

6.1.4. Estatuto de los conceptos matemáticos

Hemos visto que la producción y la enseñanza de los conocimientos matemáticos exige un esfuerzo de transformación de esos conocimientos en saberes, una despersonalización y una descontextualización que tienden a borrar las situaciones históricas (los juegos) que han precedido su aparición. Sin embargo, esas transformaciones no hacen desaparecer completamente su carácter fundamental que es responder a cuestiones: las cuestiones - las motivaciones- cambian, la mayoría desaparece del cuerpo de la teoría pero subsiste bajo la forma de problemas. Es bastante claro para la mayoría de los docentes de matemáticas que solo la resolución de problemas puede dar cuenta que el alumno ha adquirido, al menos en parte, los conocimientos en la mira. El campo de los problemas

relativos a un conocimiento no cesa a su vez de transformarse a medida que la teoría evoluciona.

Se instaura una especie de dialéctica entre la capacidad de la teoría matemática para resolver más fácilmente el stock de problemas existentes y la capacidad del stock de problemas para hacer funcionar de forma no trivial los conocimientos transmitidos. Esta dialéctica reposa sobre un equilibrio necesario entre la actividad científica que tiende a plantear nuevas cuestiones para resolver, y así aumenta el campo de problemas y de conocimientos, y la comunicación de estos conocimientos que impulsa a una mejor organización teórica que disminuye la complejidad del campo. Esta reorganización banaliza entonces los antiguos problemas y permite la reducción del campo de los problemas necesarios para la aprehensión de conocimientos teóricos que pueden entonces plantear nuevas cuestiones.

Este sistema de acciones y de retroacciones no asegura un desarrollo "regular" de las matemáticas porque un equilibrio puede solamente romperse en ese dominio y provocar los diferentes tipos de actividades. En todo caso, muestra que la correspondencia entre problemas y conocimiento evoluciona, y no es intrínseca. Solo bajo el control de una teoría de esas relaciones se podrá proponer en la enseñanza situaciones adidácticas.

Por otro lado, si se considera la evolución de los conocimientos y de los conceptos matemáticos, es habitual constatar que obedece a menudo a un esquema que el funcionamiento que acabamos de exponer tiende a justificar.

La etapa final, aquélla que pone al concepto bajo el control de una teoría matemática, permite definirlo exactamente por las estructuras donde interviene y las propiedades que satisface. Solo esta etapa le da su *estatuto de concepto matemático* y lo protege de ambigüedades y de los "errores" -pero no de retomarlo y de dejarlo de lado.

Esta etapa es generalmente precedida por un período donde el concepto es un objeto, familiar, reconocido, nombrado, del cual se estudian las características y las propiedades pero que todavía, por diversas razones, no se ha organizado y teorizado. Así sucedió con la noción de función en el siglo XIX o la de ecuación en el XVI, o la de variable en el XX. El funcionamiento y el rol de esos conceptos *paramatemáticos* es bastante diferente del de los *conceptos matemáticos*. Los primeros son más bien herramientas y los segundos objetos en el sentido en que lo entiende R. Douady en su tesis³¹.

Pero se puede decir también tomando "el punto de vista más formal", más "sistémico", que en ausencia de estatuto matemático manifiesto, los términos utilizados son herramientas que responden a necesidades de identificación, de formulación y de comunicación, y que su uso reposa sobre un control semántico. Los matemáticos los utilizan bien, no porque posean una definición que daría sobre ellos un control "sintáctico", sino porque "los conocen bien" y que no ha aparecido en este tema ninguna contradicción que obligaría a matematizarlos más. Este uso paramatemático corresponde a una cierta economía de organización teórica, y entonces de economía para la comunicación, la enseñanza y la resolución de problemas. Es muy aceptable en tanto que no aparezcan dificultades: contradicciones (los fundamentos de las matemáticas al final del siglo XIX) o campo semántico demasiado extendido (como por ejemplo el concepto de probabilidad precisamente antes de Kolmogorov). Pero la etapa paramatemática de un concepto es probablemente precedida por otra que Y. Chevallard ha propuesto llamar "*protomatemática*"³².

³¹ NdE: Douady (1984,1985, 1986).

³² NdE: Chevallard 1985, pp. 49-56.

Se trata entonces de una cierta coherencia en las preocupaciones de los matemáticos de una época, de puntos de vista, de métodos, de elección de cuestiones que se articulan muy netamente en un concepto hoy identificado pero que, en esa época, no lo era.

Para que se pueda hablar de concepto, es necesario seguramente que indicadores suficientes den testimonio de esas preocupaciones convergentes que no son un simple producto del azar o de la necesidad matemática, sino también el de una elección de los matemáticos de la época y que esas proximidades entre las cuestiones eran percibidas por ellos como ligadas, aún si no poseían ningún término para identificarlas. No se trata entonces de confundir concepciones históricas en nombre de su identidad matemática. Por ejemplo, y simplificando mucho, Al Kwarismi se ocupaba de los racionales pero no verdaderamente de los reales³³; por el contrario, Stevin expone toda la problemática de los reales y el concepto alcanzó entonces con él, el nivel protomatemático.

Esta hipótesis de un objeto de conocimiento aún implícito pero que regula las decisiones en un campo de cuestiones, reposa de hecho sobre el reconocimiento, a priori, de la posibilidad de interpretar los textos matemáticos con la ayuda de una especie de representación del trabajo del matemático. Ella implica entonces responsabilizarse, no solamente de las matemáticas, de su historia y de su epistemología clásicas, sino también de una cierta parte de la didáctica, en la medida en que pretende modelizar ese trabajo.

6.2. Necesidad de distinguir diversos tipos de situaciones adidácticas

A pesar de que no sea ni el original ni la copia, esta clasificación de los diferentes estatutos de un concepto matemático corresponde de hecho bastante bien a la diferenciación de los sub-sistemas de la situación adidáctica.

Se trata ahora de establecer:

- una clasificación de las interacciones del sujeto con el medio adidáctico,
- una clasificación de los tipos de organización de ese medio,
- una clasificación de los tipos de funcionamiento de un conocimiento,
- y una clasificación de los modos de evolución espontánea de los conocimientos.

Cada clasificación deberá justificarse bastante claramente en su propio dominio:

- por las diferencias importantes y evidentes entre los objetos clasificados,
- por la simplificación que puede aportar en su descripción, su análisis y su comprensión,
- por la pertinencia de esta clasificación (y su importancia en relación a otros posibles) para cada dominio de interés,
- por su carácter completamente exhaustivo.

Las clases obtenidas deben corresponderse y poder organizarse en un hiposistema. Por ejemplo, un cierto tipo de interacción es específico de un tipo de organización social y material, favorece una cierta forma de conocimiento y puede también hacerla evolucionar.

Estos hiposistemas, así identificados, tienen por fin prever y explicar ciertas relaciones entre las interacciones que se observan, (o que se quieren obtener), los conocimientos de los cuales se constata o se visualiza la adquisición, los condicionamientos creados por el

³³ NdE: ver sección 1.3. de «Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique», en Brousseau Guy (1998) *Théorie des situations didactiques*. Y sección 1.2. de “Problèmes de didactique des décimaux”. NdT: http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BEns03.pdf, consultado el 14-01-2015.

medio, etc. Son entonces un soporte para producir hipótesis falsables. No se exige que sean exclusivos, una misma situación "real" podrá presentar generalmente varios que corresponderán a los diversos componentes y a los diversos saberes en juego. Se espera de ellos que hagan evolucionar aisladamente los conocimientos y las cuestiones del alumno, pero pueden apoyarse los unos en los otros y articularse en procesos o en dialécticas organizadas o espontáneas.

Nada obligará entonces a tomarlos como una norma, un cebo en el cual encerrar el funcionamiento del conocimiento y de la ingeniería didáctica.

Estas condiciones no serán trivialmente satisfechas, especialmente la correspondencia evocada anteriormente no está asegurada de antemano, aún si es posible presuponerla o creerla inevitable. Posteriormente parecerá evidente pero sus puestas a prueba experimentales han mostrado hasta qué punto estas apuestas son azarosas.

El carácter nuevo del objeto de estudio torna difícil la percepción del interés relativo de las cuestiones y la necesidad o la contingencia de las respuestas aportadas.

6.2.1. Las interacciones

Las relaciones de un alumno con el medio pueden ser clasificadas en al menos tres grandes categorías:

- los intercambios de juicio [3]³⁴,
- los intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje [2],
- los intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje: las acciones y las decisiones que actúan directamente sobre el otro protagonista [1].

Estas categorías están encajadas porque un intercambio de juicios es un intercambio de informaciones particulares, y este un tipo particular de acción y de decisiones. Lo están estrictamente.

i) Existen interacciones donde el jugador expresa sus elecciones y sus decisiones sin ninguna codificación lingüística, por acciones sobre el medio. Asimilaremos a esta clase de interacciones aquellas donde aparecen mensajes de una codificación tan fácil con respecto a la acción que no jugará ningún papel en el juego. Lo mismo que aquellas donde existen intercambios de mensajes pero sin relación con la solución del problema. Por ejemplo, el jugador se expresa o mantiene una conversación anodina con un tercero sin esperar la retroacción.

Puede suceder también que el "jugador" sea un par de alumnos que coopera tomando una decisión común después de haber intercambiado informaciones y juicios. Pero esta relación compuesta lleva una componente de acción bien identificable a la cual se superponen otras interacciones que tienen finalidades locales y temporarias. Si el intercambio de información no es *necesario* para obtener la decisión, si los alumnos comparten las mismas informaciones sobre el medio, la componente "acción" es preponderante. [1]

ii) Asimismo, existen interacciones donde el jugador actúa emitiendo un mensaje dirigido a un medio antagonista sin que ese mensaje signifique el intento de emitir un juicio. No se trata solamente de clasificar en esta categoría las órdenes, las cuestiones, etc., sino también todas las comunicaciones de informaciones. Ciertamente, la mayoría de las informaciones están implícitamente acompañadas por una afirmación de validez. Pero en la medida en que el emisor no indique específicamente esta validez, no espera

³⁴ Estos números reenvían al mismo tipo de hipótesis: [1] acción, [2] formulación, [3] validación.

ser contradicho o llamado a verificar su información, si el contexto no da una cierta importancia a la cuestión de saber si la información es verdadera, cómo y por qué o si esta validez es susceptible de ser establecida sin dificultad, entonces el mensaje será clasificado como simplemente informativo. Se supone que la información así dada cambia al menos la incertidumbre del medio y en general su "estado". [2]

iii) Existen finalmente interacciones tales que los mensajes intercambiados con el medio son aserciones, teoremas, demostraciones, emitidas y recibidas como tales. La diferencia entre una información y una afirmación de validez es suficientemente clara e importante en matemática para que sea inútil insistir aquí. Veremos más adelante que esas declaraciones pueden ser ellas mismas de diferentes tipos, según que se basen en la validez *sintáctica* o en la validez *semántica* del enunciado contenido en la aserción, según que intervengan como prueba, demostración o como axiomas o definiciones. Se podría también evocar la validez pragmática, apreciación en la eficacia del enunciado. [3]

No es necesario probar aquí la importancia para la enseñanza de distinguir estos tres tipos de producción esperadas por parte de los alumnos.

Estos están designados en los trabajos experimentales que acompañaban este ensayo teórico³⁵:

- el primero como "*acciones*" sobrentendido que no comprende las formulaciones o las declaraciones de validez que pueden acompañarlas,
- el segundo como "*formulación*" sobrentendido sin debates de prueba,
- el tercero -el término no es muy feliz, pero es utilizado hace catorce años³⁶- como "*validación*".

6.2.2. Las formas de conocimiento

Las formas de conocimiento que controlan las interacciones del sujeto han sido objeto de numerosos trabajos. Todos tienden a oponer la forma más explícita y mejor asumida del conocimiento las que se expresan sobre el modo "declarativo" por ejemplo (Skemp³⁷), con las formas más implícitas: las representaciones, los esquemas, los saber-hacer... que se expresan sobre un modo más "procedimental". Hemos agregado allí una componente más estrictamente lingüística: los códigos y lenguajes que controlan las formulaciones.

i) Simplificando un poco, las formas de conocimiento que permiten "controlar" explícitamente las interacciones del sujeto relativas a la validez de sus declaraciones, son principalmente sus saberes expresables y reconocidos como tales por el medio. Están organizados en teorías, en demostraciones y definiciones bien determinadas bajo su forma cultural más acabada. [3]

La distinción entre un saber y un conocimiento se refiere en principio a su estatuto cultural; un saber es un conocimiento institucionalizado, el pasaje de un estatuto al otro implica sin embargo transformaciones que los diferencian y que se explican en parte por las relaciones didácticas que se establecen oportunamente.

Pero admitimos en una primera aproximación, que los conocimientos explicitables y los saberes intervienen de forma comparable en el control de los juicios del "alumno".

³⁵ NdT: "Problèmes de didactique des décimaux", consultado el 14-01-2015, disponible en http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BEns03.pdf.

³⁶ NdE: este término fue escrito por Brousseau en 1984 y reenvía a la primera presentación de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau 1970).

³⁷ NdE: Skemp 1979.

Forman de alguna manera el "código" con ayuda del cual construye, justifica, verifica y demuestra sus declaraciones de validez.

Esta justificación se refiere a la vez a la convicción profunda del alumno y a la convención social aceptada.

Se supone que las pruebas y validaciones explícitas se apoyan unas en otras hasta la evidencia, pero su articulación no es seguramente automática. Los saberes y los conocimientos se actualizan en una actividad de investigación o de prueba según modalidades que la heurística busca descubrir y que la inteligencia artificial intenta reproducir. Por el momento, quedan bastante inaccesibles al análisis científico y a priori del sujeto mismo. Podemos suponerlas conducidas por representaciones, esquemas epistemológicos o cognitivos, modelos implícitos, etc. La diferenciación de los tipos de conocimiento que intentamos hacer no debe ir más lejos que lo necesario para organizar el debate didáctico con el alumno. Probablemente, la actividad mental quiebra esas frágiles distinciones y unifica esos modos de control en un pensamiento complejo.

Sin embargo, es útil conservar la distinción hecha en lógica entre el enunciado considerado como una expresión bien formada o como un conjunto de realizaciones, y la aserción que encierra este enunciado en una declaración metateórica sobre su validez en un dominio dado o la deductibilidad en un sistema de axiomas. Generalizando esta distinción, un juicio está compuesto de:

- una descripción o modelo expresado en un cierto "lenguaje" o (en una cierta teoría) referida eventualmente a "una realidad" (es decir al dispositivo del juego en curso),
- y de un juicio sobre la adecuación de esta descripción, sobre su carácter de contingencia o de necesidad o sobre su consistencia frente a los conocimientos del sujeto o del medio.

Es muy importante no confundir a priori los conocimientos y los saberes, objetos de una actividad de construcción por parte del alumno, con los conocimientos que describen las relaciones que buscamos aquí establecer bajo un aspecto unificado o idéntico; estas distinciones son bien evidentes en los trabajos sobre el "pensamiento natural", que hemos utilizado en muchas investigaciones, particularmente las de Wermuz³⁸.

ii) Se trata de la formulación de descripciones y modelos reglada por un tipo diferente de código. Aún si la teoría de los lenguajes permite unificar la construcción de un enunciado y la demostración de un teorema, el recurso constante, en la actividad matemática, a la lengua natural y a toda clase de otros tipos de representaciones tales como los dibujos o los grafos, exige distinguir para ellos códigos y modos de controles propios. [2]

iii) Los diferentes tipos de representaciones o los teoremas en acto³⁹ que rigen las decisiones del sujeto no son muy fáciles de identificar, aún cuando parezcan formulables o explicitables por el sujeto. Pero numerosos trabajos comienzan a mostrar cómo las regularidades de comportamientos pueden dar un acceso a este tipo de "modelos implícitos". La importancia que juegan en las adquisiciones sigue siendo un problema abierto, abordado frecuentemente de manera muy estrecha. Es cierto que estas formas de conocimiento no funcionan ni de forma completamente independiente, ni de forma completamente integrada para controlar las interacciones del sujeto. El estudio de las

³⁸ NdE: Wermuz 1978

³⁹ NdE: el concepto de "teorema en acto" fue introducido por Gérard Vergnaud. Una presentación detallada de la teoría de los campos conceptuales a la cual pertenece este concepto puede ser encontrada en (Vergnaud 1990).

relaciones que se establecen entre estos tipos de controles en la actividad del sujeto y del rol que juegan en las adquisiciones, es un sector de la psicología, esencial para la didáctica, estudio al cual la didáctica pretende además contribuir. [1]

6.2.3. La evolución de estas formas de conocimiento: el aprendizaje

Los conocimientos evolucionan según procesos complejos. Querer explicar estas evoluciones únicamente por las interacciones efectivas con el medio, sería ciertamente un error porque muy pronto los niños pueden interiorizar las situaciones que les interesan y "operar" con sus representaciones "internas", experiencias mentales muy importantes. Organizan así también los problemas de asimilación (aumento de esquemas ya adquiridos por agregación de hechos nuevos) o de acomodación (reorganización de esquemas para aprehender cuestiones nuevas o para resolver contradicciones). Pero la interiorización de estas interacciones no cambia mucho la naturaleza: el diálogo con un oponente "interior" es ciertamente menos fortificante que un verdadero diálogo, pero es un diálogo. ¿Existen formas de aprendizaje y de evolución de los conocimientos distintos según los tipos que acabamos de exponer? Los conocimientos teóricos, ¿crecen y se reestructuran como los lenguajes y como los modelos implícitos? ¿Qué roles juegan las diferentes formas de conocimiento en los diversos tipos de adquisiciones?

En matemática existe un modo "convencional" de crecimiento de los conocimientos por el juego de definición de objetos nuevos cuyo inventario de propiedades sirve para plantear nuevas cuestiones que introducen definiciones, etc. Si este modo "axiomático y formal" no se puede retener como modelo global, aunque restringido a los saberes no puede ser enteramente rechazado, al menos como modelo local. Sin embargo, no puede ser extendido al aprendizaje de las representaciones.

Por el contrario, los modos de aprendizaje de tipo estocástico, fundados en la repetición, no parecen adaptados a los conocimientos complejos (de alto nivel taxonómico). Las descripciones de la adquisición del lenguaje por los niños pequeños (como la propuesta por E. Alarcos Llorach⁴⁰) ponen en evidencia que las producciones propias del sujeto (como el balbuceo) aparecen espontáneamente, pero casi como ejercicios, que se insertan en las relaciones con el medio y allí se ajustan naturalmente o son corregidos por intervenciones bastante variadas. Las etapas de esta adquisición son solo comprensibles por el estudio global de las relaciones del sujeto con su medio. Por ejemplo, el pasaje de la palabra-frase a la frase compuesta de muchas palabras no es una simple concatenación.

Una discusión rigurosa acerca del interés por distinguir las formas de adquisición específicas de las diferentes formas de saber evocadas anteriormente, excede el marco de este texto. En lo esencial, no aparecen contradicciones con los modelos epistemológicos que Piaget asocia a su teoría de la equilibración, ni con las concepciones de Bachelard. Al contrario, hemos mostrado en muchos estudios precisos que la clasificación de los tipos de situaciones podía aclarar esas teorías y prolongarlas⁴¹.

Es necesario insistir en el carácter "dialéctico" de estos procesos: las concepciones anteriores de los alumnos y los problemas que les son planteados por el medio conducen a nuevas concepciones y a nuevos interrogantes cuyo sentido es fundamentalmente local.

⁴⁰ En "langage" enciclopedia de la Pléiade.

⁴¹ NdE: ver "Problèmes de didactique des décimaux". NdT: consultado el 14-01-2015, disponible en http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BEns03.pdf. NdE: ver "Le contrat didactique: l'enseignant, l'élève et le milieu", en Brousseau Guy (1998) *Théorie des situations didactiques*.

Uno de los principales argumentos en favor de los modos de evolución diferentes para los diferentes modos de conocimientos es aquél que hemos esbozado antes y que se apoya sobre la historia de las matemáticas y sobre la epistemología: la evolución de los conceptos protomatemáticos, la de los conceptos paramatemáticos y la de los conceptos ya matematizados es diferente. Inversamente, el estudio de la evolución de los conocimientos de los alumnos, a condición que sea convenientemente apuntalado por el análisis de las condiciones sobre las situaciones, puede aportar un esclarecimiento interesante sobre los procesos históricos y constituir una especie de epistemología experimental. Es lo que intentamos mostrar en numerosos trabajos experimentales⁴².

6.2.4. Los sub-sistemas del medio

El hecho de que los diferentes tipos de interacción con el medio y que las diferentes formas de conocimiento se justifiquen a priori e independientemente, permite discutir las particularidades del medio que le son necesarias.

Por preguntas del tipo: "¿Por qué el alumno haría o diría esto antes que aquello?, ¿Qué puede pasarle si lo hace o si no lo hace?", "¿Qué sentido tendrá la respuesta si se la suministran?", es posible desprender las condiciones más importantes que estas tipologías imponen al medio.

Sin embargo, aún aquí, las categorías son bastante evidentes:

[3] El medio, ¿comprende o no un oponente (o un proponente) al cual el sujeto debe confrontarse para alcanzar el objetivo fijado en un intercambio de opiniones?

[2] El medio, ¿comprende un receptor de mensajes que el alumno debe emitir para alcanzar el objetivo en la mira?

La respuesta a estas dos preguntas determina disposiciones del medio y reglas de juego totalmente diferentes.

Examinémosla destacando que por el momento, el medio del cual se trata es un medio real y no invocado o simulado, y que se supone que el profesor no interviene. Está claro en este caso que las condiciones citadas corresponden a diferencias muy importantes en la organización de la clase o del medio. Encontrar a quién hablar y sobre qué actuar son, tal vez, los problemas principales del alumno.

6.3. Primer estudio de los tres tipos de situaciones adidácticas

6.3.1. Esquema de acción

La figura 1 (p. 29) simboliza el modelo general de la acción sin interlocutor.

Permite ya suministrar una tabla de lectura de una situación real de enseñanza.

- El "participante" (el medio), ¿es percibido como desprovisto de intenciones didácticas?

- En cada jugada, ¿el alumno debe elegir efectivamente entre varias posibilidades? ¿Sabe entre cuáles?

- El alumno, ¿puede perder? ¿Lo sabe? ¿Conoce de antemano el estado final (la clase de los estados finales) en particular el estado final ganador?

- ¿Conoce las reglas precisas del juego *sin* conocer una estrategia ganadora? ¿Se le puede enseñar las reglas sin dar una solución? (¿Se puede buscar una estrategia óptima?)

⁴² G. Brousseau, "Problemas de didáctica de decimales". NdE: consultado el 14/01/2015, http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BEns03.pdf

- El conocimiento en la mira, ¿es necesario para pasar de una estrategia de base a una estrategia mejor (u óptima)? ¿Es este el instrumento principal de este pasaje?
- El alumno, ¿tiene una oportunidad de encontrar él mismo la estrategia buscada si la copia (de otro alumno)?
- Las "respuestas" (adidácticas) del sistema a las elecciones desfavorables del alumno, ¿son pertinentes a pesar de todo para la construcción del conocimiento (el conocimiento da indicaciones específicas del error)?
- Los controles de las decisiones, ¿son posibles (el alumno está conducido a notarlos, a observarlos)?
- Una actitud reflexiva, ¿es útil, necesaria, para progresar en la solución?

Con estos últimos puntos, nos aproximamos a condiciones límites de una situación de acción: considerar la validez de una solución da cuenta de una situación de validación; ciertamente, un alumno que reflexiona naturalmente sobre su juego está en una situación adidáctica efectiva de acción, pero interioriza y simula de alguna manera una situación de validación. Si el docente se ve obligado a querer que el alumno tenga esta posición reflexiva, el sortilegio ("¡Reflexiona! Observa lo que has hecho...") podrá no ser suficiente y el maestro deberá comunicar su deseo didáctico a través de una situación de validación.

La apertura, que representamos en una primera aproximación por una incertidumbre en el sentido de la teoría de la información, es una de las condiciones más importantes sacadas así a la luz. La distinción entre la situación didáctica y la situación adidáctica permite concebir para el alumno, situaciones abiertas de enseñanza del pensamiento matemático porque ya está "hecho"⁴³. La manipulación de esta apertura a nivel de una clase entera es un problema técnico delicado, pero accesible: por ejemplo, hacer de modo que la búsqueda de cada alumno no sea aplastada por el trabajo de otro, es un problema didáctico (y no de pedagogía).

Esta guía de lectura puede servir también a la concepción de situaciones didácticas nuevas. Cada juego propuesto puede ser examinado y comparado con los que ya se conocían. Es posible fijar problemas de ingeniería, clasificar dispositivos conocidos y reagrupar *desde el punto de vista de esta modelización*, las producciones semejantes, prever otras nuevas. El problema esencial que subsiste en el dominio experimental es el de la importancia de la realización o no, de las condiciones así propuestas, como derivando lógica o sistemáticamente de las posibilidades del modelo.

Las variables que aparecen así tienen razones teóricas que las hacen pertinentes, y cálculos económicos de complejidad o de eficacia pueden precisarlas⁴⁴. La confrontación con la contingencia o con la experiencia, tal como se practica en la mayoría de las investigaciones, es inevitable.

El modelo, desde este punto de vista, juega su rol desde hace diez años, su eficacia está comprobada por el número de situaciones de enseñanza originales que no cesa de producir.

⁴³ NdE: Guy Brousseau agrega las siguientes precisiones: el problema en juego aquí está mejor descrito por una metáfora: si uno deja una bolita en el borde de un bol se sabe que terminará su recorrido en el fondo pero no se podrá predecir y menos aún determinar, su trayectoria —esta podrá ser un descenso en espiral, o una oscilación, o... La situación puede a la vez estar cerrada para el docente que sabe que la bolita terminará su recorrido, y abierta para el alumno a quien solamente le pertenece la trayectoria (comunicación personal, setiembre 1995).

⁴⁴ NdE: ver en particular Ratsimba-Rajohn (1982)

Cuando las propiedades de una situación capaz de justificar (o de provocar) la realización de un conocimiento específico son mejor conocidas, es posible estudiar las posibilidades que tiene la primera de hacer evolucionar al segundo. Las variables didácticas son las que influyen sobre el aprendizaje y de las cuales el docente puede elegir el valor. [Ingeniería-Investigación sobre la enseñanza del cálculo numérico]. Numerosos problemas de aprendizaje han sido estudiados con la ayuda de este modelo⁴⁵.

6.3.2. Esquema de la comunicación

El "medio" comprende un sistema receptor y/o un emisor con el cual el jugador intercambia los mensajes.

Supondremos aquí que el objeto de estos mensajes no es el de actuar sobre el receptor (de cambiarlo, de ejercer poder sobre él, de contradecirlo, etc.) sino *de actuar* por su intermedio sobre el dispositivo "medio".

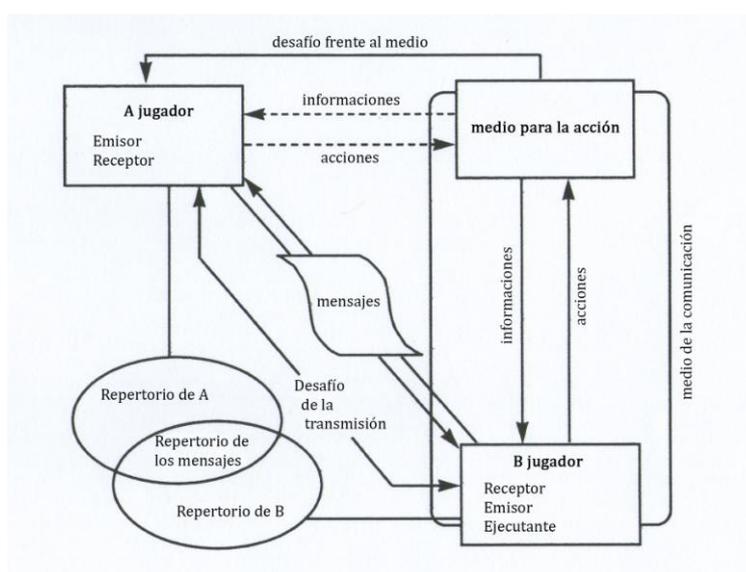


Figura 5.

El alumno está siempre comprometido en un juego con un dispositivo medio desprovisto de intenciones didácticas. Si tuviera simultáneamente, informaciones y medios de acción suficientes para elegir solo los estados del "medio", sus mensajes que no tenían ninguna finalidad en el juego podrían ser cualesquiera. Supongamos también por el momento que no hay más que un solo jugador A. El receptor no tiene otro desafío más que servir. El jugador B no hace personalmente ninguna elección.

Los diferentes casos son evidentes:

- medios de acción insuficientes. A debe describir a B la acción que él debía efectuar y a menudo también una parte del medio para que el mensaje sea inteligible.
- informaciones insuficientes para A pero instrumentos suficientes, es B quien debe describir el medio y A, decodificar la descripción y dirigir la observación.
- instrumentos de acción e informaciones insuficientes para A...

⁴⁵ *NdE*: aquí Guy Brousseau reenvía a trabajos que precisa en una sección particular de la lista de referencias bibliográficas de su artículo. El lector encontrará estas indicaciones en la lista general de referencias de este texto: Balacheff (1982), Berthelot et Berthelot (1983), Bessot et Richard (1979), Brousseau et Brousseau (1987), El Bouazzaoui (1982), Galvez (1985), Katambera (1986), Maudet (1982), Mopondi (1986), Perez (1984), Quevedo de Villegas (1986), Ratsimba-Rajohn (1981), Rouchier (1980).

En el primer caso, por ejemplo para A, el sentido del mensaje (el contenido de información necesaria para el juego) que envía a B, puede ser representado por el pasaje (el par) de las elecciones de acción que el juego ofrece a aquél elegido por A.

En el segundo, es el pasaje de las elecciones consideradas por A antes del aporte de información de B a las que él mismo visualiza después.

El hecho de que B sea también un jugador puede tener una cierta importancia, porque disminuye la libertad de A y entonces el sentido de su acción. Es necesario por supuesto que coopere con A. El esquema no es diferente si los roles estaban bien identificados o indiferenciados (pero entonces un jugador puede no dejar al otro ninguna elección a hacer, ninguna acción).

Los mensajes intercambiados están bajo el control de los códigos lingüísticos, formales o gráficos, y entonces los hacen funcionar⁴⁶.

El desafío de la comunicación misma se expresa por las retroacciones que ejercen uno sobre el otro los dos interlocutores, para asegurarse que se entendieron. Sus exigencias remitirán a la conformidad con el código (mínima para la inteligibilidad del mensaje), la ambigüedad, la redundancia, la falta de pertinencia (de las informaciones superfluas) y la eficacia (los caracteres de optimización) del mensaje.

Combinando juiciosamente un medio (un juego en el sentido 4) y las condiciones convenientes de intercambio del mensaje (referidas al canal por ejemplo), es posible influir en el tipo y en el sentido de los mensajes obtenidos del jugador.

Es posible también hacer evolucionar el código mismo: pasar de una formulación en lenguaje natural a un enunciado formal, o de metáforas a descripciones sistemáticas.

Estos resultados han sido obtenidos en muchas investigaciones, pero también hay que prever decepciones producidas por la enorme capacidad de invención semiológica de los niños⁴⁷.

Este esquema de situaciones adidácticas presenta un cierto interés para dar sentido a (o para analizar el sentido de) un mensaje, una fórmula. Tomemos un ejemplo completamente teórico y un poco provocador: busquemos una organización social (teórica) para hacer aparecer la emisión (por un niño de 5 o 6 años para fijar las ideas) de la fórmula " $13 = 9 + 4$ " tomada como información (y no como aserción). Es necesario que el emisor E de la fórmula se dirija a un destinatario D. Si D conoce la significación de 13 y la de $9 + 4$ el mensaje no puede más que aportar eventualmente información sobre "=", paradigma de un conjunto muy restringido: $\{=, \equiv\}$. El enunciado será más informativo si uno de los dos términos no es conocido por el destinatario, por ejemplo si el alumno describe convencionalmente un cálculo. (9 y 4 son conocidos, el resultado de su suma es 13).

Pero si se considera que el primer término es él mismo un mensaje, el mensaje debe ser emitido por un emisor E_1 para un destinatario D_1 a fin de informarle por ejemplo sobre el estado de un stock. $9 + 4$ es un mensaje emitido por E_2 para D_2 en *otro código* para informarle sobre el estado de otro stock o del mismo, entonces, el mensaje completo informa a D_1 que los dos mensajes 13 y $9 + 4$ designan el mismo objeto. Falta solamente encontrar un juego que haga plausible este funcionamiento de seis personas.

⁴⁶ NdE: las situaciones descritas en esta sección son situaciones de comunicación, el segundo tipo de situación fundamental de la Teoría de las situaciones (Brousseau 1970). Brousseau no introduce explícitamente esta designación en esta sección pero la utiliza reiteradamente al comienzo de la sección siguiente.

⁴⁷ NdE: ver en particular los trabajos de Laborde (1982).

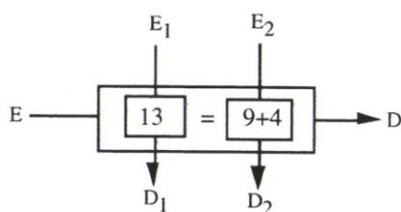


Figura 6.

¿Por qué D tendría necesidad de saber si los dos mensajes en "lengua 1" y en "lengua 2" designan o no el mismo objeto...?

Este tipo de razonamiento no conduce siempre a un juego utilizable en clase (como en este caso), a pesar que se han hecho algunos intentos⁴⁸, pero es un instrumento muy eficaz para analizar el sentido de las producciones de los alumnos y para proponer instrumentos de control.

Algunas variantes son fácilmente considerables como la autocomunicación que conduce más fácilmente por la memorización, a códigos personales. Los pasajes del oral al escrito, o del grafo al discurso han sido observados a menudo y han dado lugar al estudio de la influencia de numerosas variables⁴⁹.

Utilizar el lenguaje matemático de forma precisa en comunicaciones deliberadas entre alumnos es ciertamente uno de los mejores resultados pedagógicos de este tipo de situaciones. Hay que destacar la importancia de:

- la calidad del juego con el medio a fin de asegurar y mantener la pertinencia y la riqueza del discurso de los alumnos,
- la frecuencia de empleo que suscita en las comunicaciones,
- la posibilidad de analizar los mensajes producidos.

6.3.3. Esquema de la validación explícita

Las situaciones de comunicación convenientes favorecen la aparición de mensajes que pueden tener una forma muy próxima al discurso matemático y que son concretamente significativos para un cierto "medio". Pero estos mensajes no tienen el sentido de un texto matemático. Las situaciones de validación van a poner en presencia a dos jugadores que se enfrentarán en relación a un objeto de estudio compuesto por mensajes y descripciones que el alumno ha producido por una parte, y por el medio adidáctico que sirve de referente a esos mensajes por otra parte (figura 7). Los dos jugadores son alternativamente un "proponente" y un "oponente"; intercambian aserciones, pruebas y demostraciones a propósito del par "medio/mensajes". Este par es el nuevo dispositivo, el "medio" -el juego en el sentido 4- de la situación de validación. Puede presentarse como un problema acompañado de sus tentativas de solución, como una situación y su modelo, o como una "realidad" y su descripción...

Aún cuando el informador y el informado tienen relaciones disimétricas con el juego (uno sabe algo que el otro ignora), el proponente y el oponente deben estar en posiciones simétricas, tanto en lo que concierne a las informaciones y a los instrumentos

⁴⁸ NdE: en particular tales situaciones han sido realizadas en el transcurso del año 1971 en clases de aplicación de la Escuela Normal de Caudéran (Gironde).

⁴⁹ Cf. *La création d'un code à l'école maternelle et L'enseignement de la géométrie*. NdE: la primera indicación de Guy Brousseau reenvía a Perez (1984), la segunda a un tema de investigación bien estudiado por el autor (ver Brousseau 1983, 1987).

de acción de que disponen sobre el juego y sobre los mensajes, como en lo que concierne a sus relaciones recíprocas, los instrumentos de sancionarse mutuamente y los desafíos frente al par medio/mensaje.

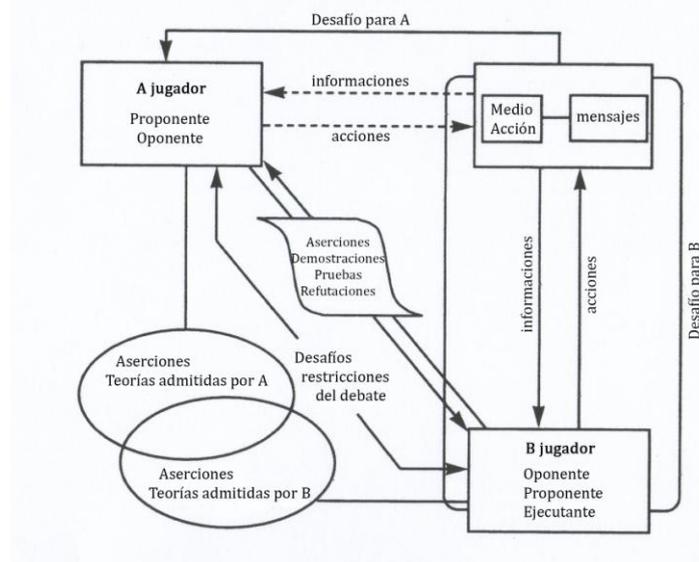


Figura 7

En particular, uno de los jugadores no debe tener la posibilidad de obtener el acuerdo del otro por instrumentos "ilegítimos" tales como la autoridad, la seducción, la fuerza, etc.

La didáctica se encuentra ante el desafío de producir situaciones que permitirán al alumno poner en práctica los saberes y los conocimientos matemáticos como instrumentos efectivos para convencer (y por lo tanto para convencerse), llevándolo a rechazar los instrumentos retóricos que no son buenas pruebas o refutaciones.

El sentido exacto de las declaraciones de matemáticas está condicionado por este abanico de elecciones: lo que dice un teorema es también lo que contradice, lo que dice una demostración no es solamente lo que se supone admitido por el proponente y el oponente sino también lo que hubiera podido ser discutido. El discurso matemático se construye en parte *contra* otros procedimientos de adquisiciones de creencia y de conocimiento y no solamente *con*.

Precisemos el juego de la prueba.

"A" propone un enunciado: es la declaración de una propiedad cuyo conocimiento es útil para controlar las relaciones (de A o de B) con el medio, el desafío fundamental es siempre "ganar" un cierto "juego".

"B", si quiere apropiarse y utilizarlo, debe:

- ya sea "pagar" a A cada vez, es un reconocimiento de validez pragmática,
- sea "pagar" a A de una vez por todas aceptando la proposición como verdadera.

Pero puede también iniciar el proceso de refutación si piensa que la declaración de A es falsa.

Refutación pragmática. Puede "obligar" a A a hacer una jugada que lo haga decepcionarse de su enunciado. Si la declaración es falsa y si la situación es correcta, la jugada *debe* ser perdedora (lo que no es tan fácil de obtener). Es el dispositivo que hace funcionar el contraejemplo. B puede obligar a A a hacer una jugada perdedora tantas veces como esté de mano hasta que A retire su declaración.

Refutación intelectual. B puede también proponer a A un trato: puede proponerle una refutación explícita de su declaración inicial, esta refutación puede economizarle una costosa obstinación. Si A acepta (paga un poco a priori), por ejemplo cediendo la mano, B se convierte en proponente. A acepta la refutación, o la rechaza... Los argumentos son siempre los que el oponente puede recibir -lo mismo que en toda comunicación el repertorio debe ser el del receptor para que el mensaje sea comprendido. Así se crea "de facto" una teoría, en tanto que conjunto de observaciones aceptadas por los dos jugadores. Puede ocurrir en cada instante que uno de ellos descubra que un conocimiento no es compartido mientras que creía que su compañero podía disponer de él. Todas las aserciones de la "teoría" son así susceptibles de explicitarse y ser puestas en duda. La teoría misma es un objeto de estudio y de construcción.

Los medios técnicos de estas demostraciones y los argumentos pueden ser de orden semántico -adecuación al "medio", al problema- o de orden sintáctico a diferentes niveles: articulación y validez matemática, constitución lógica e inclusive formal del argumento. Pero también de orden epistemológico, así como lo muestra Lakatos (1976).

El uso de situaciones de prueba restaura un entorno socio-cultural que da espesor al discurso matemático. Las situaciones de validación pueden ayudar al profesor a vivenciar en su clase una pequeña sociedad matemática verdadera. Pero, al restaurar un sentido, se corre el riesgo de aumentar las dificultades de aquellos que no entrarán en este juego, y para quienes el teorema y aún las demostraciones son solo saberes como cualquier otro que se exhiben en el momento oportuno. Una situación de validación no es, a priori, la mejor situación de aprendizaje de saberes institucionalizados. Puede incluso suscitar obstáculos didácticos y resucitar molestos obstáculos epistemológicos. Sin embargo es esencial como paradigma de otras situaciones matemáticas. Es lamentable por ejemplo que la geometría enseñada en la enseñanza secundaria no utilice estos procesos, cuando puede justificarse como primer ejemplo del pensamiento axiomático frente a un campo naturalmente controlado por otros instrumentos. La matematización dada totalmente hecha, es contradictoria con el objetivo didáctico anunciado.

Al lado de sus propiedades epistemológicas o didácticas, estas situaciones sociales pueden presentar ventajas interesantes en el dominio de la motivación de los alumnos -motivaciones bastante a menudo transferibles.

Esta motivación puede manifestarse, no solamente en el caso en que la situación está realmente organizada y efectivamente vivida, sino también cuando está simulada, contada o interiorizada.

Los alumnos cooperan en la medida en que llegan a compartir el mismo deseo de alcanzar una verdad.

Deben recibir, a priori, con respeto, el punto de vista de su oponente y defender el suyo sin falsa modestia, mientras que no se los convenza de lo contrario; pero si les parece que se han equivocado, deben aprender a cambiar inmediatamente de posición, sin amor propio herido y cualquiera que sea el precio social.

Estas situaciones muestran el anclaje profundo de la actividad matemática en el pensamiento racional y la importancia educativa de lo que ponen en juego que sobrepasa el simple dominio del aprendizaje de conocimientos. En las situaciones concretas que dan cuenta de este modelo, cuando son explotables, desaparece el carácter un poco formal de esta "competencia". Las restricciones están muy presentes, pero no aparecen con esta aridez.

REFERENCIAS

- Alarcos Llorach E. (1968) Acquisition du langage par l'enfant. In: Martinet A. (ed.) *Le langage* (Bibliothèque de la Pléiade). Paris: Editions Gallimard.
- Arbib M. A. (1976) Memory limitations of stimuli-response models. *Journal of Structural Learning* 5 (1/2), 19-23.
- Arbib M. A. (1976 a) A reply to Suppes reply. *Journal of Structural Learning* 5 (1/2), 29.
- Arsac G. (1992) L'évolution d'une théorie en didactique: l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 7-32.
- Artigue M. (1986) Etude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (1), 5-62.
- Artigue M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9 (3), 281-307.
- Balacheff N. (1982) Preuve et démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 3 (3) 261-304.
- Berthelot C., Berthelot R. (1983) *Quelques apports de la théorie des situations à l'introduction de la notion de limite en classe de première*. Mémoire de DEA de Didctique des Mathématiques. Bordeaux: Université de Bordeaux I.
- Bessot A., Richard F. (1979) *Commande de variable dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures, rôle du schéma*. Thèse. Bordeaux : Université Bordeaux I.
- Bessot A., Deprez S., Eberhard M., Gomas B. (1993) Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment. In: Bessot A, Vérillon P. (eds.) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 115-144). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Bramaud du Boucheron G., Champagnol R., Coirier P., Ehrlich S., Ehrlich M.-F. (1970) *Le comportement verbal*. Paris: Dunod.
- Brousseau G. (1970) Processus de mathématisation In: *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428-457). Paris: APMEP.
- Brousseau G., Gabinski P. (1974) *Étude sur la théorie des automates et son application à la didactique des mathématiques*. Bordeaux: IREM de Bordeaux.
- Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-127. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1982) Les objets de la didactique des mathématiques – Ingénierie didactique. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp.10-60). Orléans: IREM d'Orléans.
- Brousseau G. (1983) Étude de questions d'enseignement, un exemple: la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 183-226). Genoble: IMAG.
- Brousseau N., Brousseau G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: IREM de Bordeaux.
- Brousseau G., Centeno J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 11 (2/3), 167-210.
- Brousseau. G., Otte M. (1991) The fragility of knowledge. In: Bishop A. J., Mellin-Olsen S., van Dormolen J. (eds.) *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 13-36). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 73-111.

Chevallard Y., Mercier A. (1983) *Sur le temps didactique*. Marseille: I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

Chomsky N., Miller G.A. (1968) *L'analyse formelle des langues naturelles*. Paris: Gauthier-Villars. [Traduction française de: Handbook of Mathematical Psychology, vol. II, Chapters 11 and 12. New York: Wiley. 1963-65].

Crozier M., Friedberg E. (1977) *L'acteur et le système*. Paris: Editions du Seuil.

Devos R. (1976) *Sans dessus dessous* (Le Livre de Poche, n° 5102). Paris: Editions Stock.

Diderot D. (1773) *Paradoxe sur le comédien*. (1830). Paris: Editions Flammarion (1981).

Dienes Z. (1970) *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques*. Paris: O.C.D.L.

Douady R. (1984) *Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres*. Thèse d'état. Paris: Université de Paris VII.

Douady R. (1985) The interplay between different settings. Tools-object dialectic in the extension of mathematical ability. In: Streefland L. (ed.) *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 33-52). Utrecht: State University of Utrecht.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 5-31.

El Bouazzaoui H. (1982) *Étude de situations scolaires des enseignements du nombre et de la numération*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Euler L. (1843) *Lettres à une princesse d'Allemagne*. Paris: Charpentier.

Galvez, G. (1985) *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano*. Thèse. Mexico.

Glaeser G. (1984-1985) *La didactique expérimentale des mathématiques* (Cours de troisième cycle, Chapitre 3). Deuxième rédaction augmentée avec la collaboration de J. B. Romans. Strasbourg: Université Louis Pasteur.

Katambera I. (1986) *Sur la résolution des problèmes de soustraction au cours élémentaire*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Laborde C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse. Grenoble: Université de Grenoble.

Lakatos I. (1976) *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lalande A. (1972) *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Paris: PUF.

Margolinas C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Maudet C. (1982) *Les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux 1.

Maysonave J. (1972) *Expérience d'apprentissage d'une stratégie pour la course à 7 par une série de parties contre un moniteur*. Cahier 11. Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Mercier A. (1992) *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Molière (1670) *Le bourgeois gentilhomme*.

Mopondi B. (1986) *Le sens dans la négociation didactique. Notion de proportionnalité au cours moyen*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

Nelson R. J. (1969) Behaviorism is false. *The Journal of Philosophy* Vol LXVI (14), 417-452.

- Osgood Ch., Suci G. J., Tannenbaum P. H. (1975) *The measurement meaning*. University of Illinois Press.
- Pagnol M. (1928), *Topaze* (première édition 1930).
- Papy F. (1970) *L'enfant et les graphes*. Paris: Didier.
- Papy G. (1964) *Mathématiques modernes* (vol. 1). Paris: Didier.
- Perez J. (1984) *Construction d'un code de désignation d'objets*. Thèse. Bordeaux : Université de Bordeaux II,.
- Polya G. (1957) *How to Solve It*. (Second Edition). Princeton: Princeton University Press. (Trad. Fr. *Comment poser et résoudre un problème*. Paris: Dunod, 1965)
- Quevedo de Villegas B. (1986) *Le rôle de l'énumération dans l'apprentissage du dénombrement*. Thèse. Bordeaux : Université de Bordeaux I.
- Ratsimba-Rajohn H. (1981) *Etudes de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité en vue de l'élaboration des situations didactiques*. Thèse. Bordeaux: Université de Bordeaux I.
- Ratsimba-Rajohn H. (1982) Éléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3 (1), 65-113.
- Rogalsky J., Samurçay R. (1994) Modélisation d'un «savoir de référence» et transposition didactique dans la formation professionnels de haut niveau. In: Arsac G., Chevallard Y., Martinand J.-L., Tiberghien A. (eds) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35-71). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Rouchier A. (1980) Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1 (2), 225-275.
- Rouchier A. (1991) *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itéro-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse d'état. Orléans: Université d'Orléans.
- Skemp R. (1979) *Intelligence, learning and action*. New York: John Wiley and Sons.
- Suppes P. (1969) Stimulus-response theory of finite automatas. *Journal of Mathematical Psychology* 6, 327-355.
- Suppes P. (1976) Stimulus-response theory of automatas and tote hierarchies: a reply to Arbib. *Journal of Structural Learning* 5 (1/2), 11-17.
- Stevin S. (1585) *La disme*. (1634, 1ère. Edition).
- Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (2/3), 133-170.
- Wermuz H. (1978) Esquisse d'un modèle des activités cognitives. *Dialectica*, 32 (3-4).