UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS de ENSEÑANZA

Nº 4/2014

CONDICIONAMIENTOS DE FUNCIONAMIENTO DE LOS DOCENTES EN EL COLEGIO SECUNDARIO: LO QUE NOS ENSEÑA EL ESTUDIO DE "CURSOS FLOJOS"

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona y Mabel Aguilar con la colaboración del equipo del Programa de Transformación de la Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires.

Editores: **Lorenzo M. Iparraguirre – Laura Buteler**

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA
REPÚBLICA ARGENTINA

CONDICIONAMIENTOS DE FUNCIONAMIENTO DE LOS DOCENTES EN EL COLEGIO SECUNDARIO: LO QUE NOS ENSEÑA EL ESTUDIO DE "CURSOS FLOJOS"[1]

Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Equipe DIDIREM, Université Paris 7 Denis Diderot

Nota: el artículo en su versión original fue publicado en *Petit X*, n° 35, pp. 5 a 40. (1993-1994), con el título: "Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de "classes faibles"". La traducción, con autorización de la autora, fue realizada por un equipo del Programa de Transformación de la Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires, y luego retomada por Dilma Fregona y Mabel Aguilar.

Introducción

El presente artículo se apoya en una parte de mi trabajo de tesis[2] referido a la enseñanza de las matemáticas en clases donde muchos alumnos encuentran dificultades escolares. Precisemos enseguida que este trabajo se sitúa esencialmente en el nivel del diagnóstico y del análisis y no pretende aportar soluciones. Las reflexiones que quisiera presentar aquí conciernen de hecho a la enseñanza de las matemáticas en cualquier curso de colegio secundario. En efecto, ubicándonos en condiciones particulares de funcionamiento del sistema didáctico, es posible observar con cierta ampliación y por ello mismo comprender mejor fenómenos generales de enseñanza que, en el caso de cursos llamados flojos, se imbrican y contribuyen al no-aprendizaje de cierto número de alumnos, especialmente de una buena parte de los que provienen de un medio sociocultural desfavorecido. Quisiera centrarme sobre estos fenómenos generales, aunque para ello deba hacer un rodeo por el análisis de las dificultades de los estudiantes y decir unas palabras sobre las observaciones en las cuales me apoyo, de manera de situar las conclusiones en el contexto del trabajo. Comenzaré por este último punto antes de ilustrar las dificultades de los alumnos a partir de un estudio de caso, y luego buscarle una primera interpretación. Volveré a situar luego este análisis respecto de ciertos conceptos de la teoría de las situaciones didácticas antes de hacer desprender condicionamientos contradictorios que pesan sobre la labor del docente en el colegio.

I. Las observaciones en las que me apoyo

Debo precisar inmediatamente lo que entiendo aquí por "curso flojo". Son cursos donde la mayoría de los alumnos tienen al menos un año de retraso escolar, ya sea que hayan sido producidos intencionalmente (cursos de nivelación) o que se hayan constituido por azar en una escuela geográficamente desfavorecida. No se trata, pues, de cursos especiales ni necesariamente de cursos muy difíciles donde la posibilidad misma de enseñar no esté siempre garantizada.

De este modo, presento sucintamente, en tres etapas, las observaciones sobre las cuales se apoyó mi tesis, en las que se origina de la presente reflexión.

Etapa 1. Observaciones en clase en una experimentación de tipo ingeniería didáctica: años 1983-1984 y 1984-1985. Retomé en cursos de CM2 y de 6º[3] ingenierías didácticas sobre los decimales y las áreas que ya habían sido experimentadas[4] y que de alguna manera ya habían "hecho sus pruebas" con la idea de que si se les daba a los alumnos la ocasión de construir las nociones enseñadas con suficiente sentido, el aprendizaje se produciría.

---

[1] Este artículo retoma una exposición hecha en el seminario de formación en didáctica del IUFM y del IREM de Reims.
[2] Véase también un artículo aparecido en Recherches en Didactique des Mathèmatiques, nº 13/1.2
[3] *NdeT*: CM2 corresponde, en el sistema educativo francés, al quinto año de escolaridad primaria, que es el último. Sexto, es el primero de nivel secundario.
[4] Véase por ejemplo el Cuadernillo 62 del IREM Paris 7 sobre los decimales, artículos en Petit X nº 6 y nº 8 sobre las áreas.

Detuve la experimentación luego de dos años para recurrir a otros medios de investigación. Se obtuvieron ciertos resultados positivos: los alumnos de CM2 tuvieron resultados mucho mejores en test sobre fracciones y decimales que los alumnos de 6º de igual condición social. Pero estos resultados positivos concernían sobre todo a uno de los cursos de CM2 y el conjunto de la experimentación me dejaba insatisfecha. En primer lugar, los alumnos no parecían adquirir un saber reutilizable: si bien una situación didáctica había permitido obtener los resultados esperados, los alumnos no podían reutilizar lo adquirido en otra situación algunas semanas más tarde. Teníamos la impresión de empezar siempre de nuevo. Por otra parte, la observación bastante somera de las clases me permitió detectar enseguida, sobre todo en sexto donde detuve la primera forma de experimentación al cabo de un trimestre, un disfuncionamiento de las ingenierías didácticas: las situaciones tratadas en clase no solían ser las que yo creía previstas. El primer año, atribuía las distorsiones observadas a una incomprensión de los docentes, debida esencialmente a mis malas explicaciones, así como a mi conocimiento demasiado impreciso de las dificultades de los alumnos. El año siguiente, hice esfuerzos de explicitación al mismo tiempo que tomaba algunas medidas para recoger más producciones escritas de los alumnos. Sin embargo, se reveló que no era fácil encontrar un equilibrio modificando el funcionamiento habitual de las clases.

Operé entonces un cambio de problemática que consistió, por una parte, en tomar estas distorsiones como objeto de estudio y buscar las razones por las cuales los docentes hacían algo distinto de lo que parecía acordado entre nosotros, y por otra parte intentar analizar más precisamente las dificultades de los alumnos, ampliando así el campo de la problemática.

Etapa 2. Cuestionarios y entrevistas informales destinados a alumnos y a docentes:

- ✓ a alumnos de CM2 en junio de 1985 sobre la utilidad de la escuela y las matemáticas,
- ✓ a alumnos ayudantes inscriptos en la opción “matemáticas” del DEUG –Diploma de Estudios Universitarios Generales- 1er. Grado en 1985 sobre sus representaciones de las matemáticas, de la enseñanza de las matemáticas y su experiencia en matemáticas,
- ✓ a profesores de cuarto[5] que cursan una pasantía en el IREM, sobre sus prácticas acerca de la enseñanza de los números reales y racionales, en mayo de 1985,
- ✓ a profesores de colegio secundario sobre el lugar asignado a la graduación de una semirrecta en su práctica de la enseñanza de los números, en mayo de 1986,
- ✓ discusión en una pasantía en octubre de 1987 sobre la base de un cuestionario referido a las prácticas de clase y las representaciones en matemáticas,
- ✓ observación de un alumno de CM1 en trabajo individual fuera del sistema escolar, entre setiembre de 1987 y marzo de 1988

Esta etapa transitoria me llevó a formular hipótesis sobre ciertos componentes de las representaciones de los docentes y de los alumnos y a elaborar los cuestionarios de la etapa 3.

Etapa 3. Cuestionarios escritos y entrevistas a alumnos y docentes y reinicio de una experimentación:

- ✓ cuestionario escrito a alumnos de CM1 y CM2 de medio social contrastado, referido a la vez a las representaciones de las matemáticas y la resolución de ejercicios (en marzo de 1988),
- ✓ entrevistas individuales con alumnos de CE1, que contenían también un cuestionario general y la resolución de ejercicios (en junio de 1988),
- ✓ reinicio de una experimentación en 6º y entrevistas con los alumnos en dos oportunidades (setiembre de 1988, febrero de 1989),
- ✓ entrevistas con 4 maestros y 4 profesores de secundaria entre junio de 1989 y junio de 1990 (docentes de los cursos experimentados o coordinadores de IREM),
- ✓ observación de alumnos voluntarios de 6º en trabajo individual o en pequeños grupos fuera de la clase en sesiones de apoyo en 1989-1990.

---

[5] *NdT*: “Cuarto” corresponde al octavo año de escolaridad, tercer año del nivel secundario en Francia. IREM: Institut de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques.

La repetición de fenómenos observados en las primeras experimentaciones, tanto de parte de los alumnos como de los docentes, me llevó a buscar explicaciones teóricas y a examinar la cuestión en términos de regularidades y condicionamientos.

II. lustración de las dificultades de los alumnos a partir de un estudio de caso

Me impresionó ***la irregularidad de los rendimientos*** del alumno de CM1 que observé en privado durante 6 meses y que llamaremos Didier. El puede resolver un ejercicio que no resuelve más al final de la sesión o algunos días más tarde. Se podría resumir la descripción diciendo que Didier tiene *conocimientos a la vez difusos y rígidos, sin verdadera organización*:

- difusos porque rara vez está seguro de sí, "voy a intentarlo", "lo dije al azar", …
- rígidos porque tiene muchas dificultades en cambiar de punto de vista, de estrategia y no puede captar las indicaciones que se le dan: las informaciones que no entran en su procedimiento lo desestabilizan y empieza a decir cualquier cosa.

Otro hecho característico es justamente esta ***facilidad para perder el hilo*** apenas se le hace una pregunta o incluso en cuanto él mismo debe interrumpirse para buscar el resultado de un cálculo o para verificar algo. Esto explica sin duda su *reticencia a comprometerse en un proceso largo para resolver un problema cuya solución él no ve cómo encontrar en una o dos operaciones*. Por ejemplo, puede hacer sumas repetidas para encontrar la solución de una división cuando los números son simples y puede encontrar inmediatamente el resultado pero no puede iniciar un proceso a partir de este método cuando los números son más complicados. Al mismo tiempo, este rechazo a los procesos largos tiene como consecuencia una falta de entrenamiento en la organización y la memorización de resultados intermedios en curso de resolución. Así se llega a una suerte de círculo vicioso: al rechazar los procesos largos, no aprende a organizarse, lo que hace que pierda fácilmente el hilo de lo que está buscando, y que se vuelva incapaz de llevar a buen término los procesos largos.

Por otra parte, Didier es un niño que ***busca los algoritmos***, más tranquilizadores y menos cansadores. Se puede ver esto como una consecuencia del punto precedente: así tiene un modo de dar una respuesta rápida que no le exige organizarse ni reflexionar.

Además –sobre todo tal vez- los algoritmos lo liberan de la responsabilidad de avanzar. En efecto, según las reflexiones que hace en varias oportunidades sobre lo que dice la maestra, se puede pensar que *teme tomar la responsabilidad de sus conocimientos y prefiere referirse a una autoridad*: "la maestra dice que se hace así". Señalemos sin embargo que las alusiones a lo que dice la maestra son tal vez también un medio de hacerme saber lo que es legítimo hacer en clase, que no es tal vez idéntico a lo que es legítimo hacer conmigo.

A través de lo que dice, se puede pensar que Didier percibe el discurso de la maestra como una *serie de recomendaciones y reglas sobre la conducta a seguir*. El papel que le cabe a él, aun cuando no siempre logre cumplirlo, es escuchar y hacer lo que dice la maestra. Sin duda, éste es el caso de muchos alumnos de la misma edad que no están necesariamente en situación de fracaso. Por lo tanto, no es solamente el hecho de referirse al discurso de la maestra lo que nos parece característico, sino de usarlo *como modo de justificación*.

Demos algunos ejemplos de extractos de protocolos:

1. El reconoce una situación multiplicativa, pero no se preocupa por saber si 978 representa chocolates o cajas o, más bien, evita preocuparse por ello para poder dar rápidamente una respuesta al problema. Eventualmente tergiversa el texto del problema y lo lee de manera que corresponda al modelo que reconoció:

M. Vamos a hacer un problema. Un repostero hace chocolates que coloca en cajas de 20. El repostero fabricó 978 chocolates. ¿Cuántas cajas llena?

D. Ya sé qué hay que hacer. Una multiplicación, 978 x 20

M. ¿Por qué?

D. Hay varias cajas… ¿Eran 978 cajas o 978 chocolates?

M. 978 chocolates.

D. Porque hay varios chocolates.

M. Sí, hay 978, son varios, ¿y entonces? ¿Qué pregunta te hice?
D. ¿Cuántos chocolates?
M. No, porque te dije cuántos chocolates había.
D. ¡Cajas!

2. Búsqueda de una regla de cálculo.

El tiene 9 años, su hermana tiene 2.

Le pregunto qué edad tendrá su hermana cuando él tenga 18 años, luego cuando tenga 35 años. Sin duda, elige un procedimiento correcto al comienzo: de 9 para llegar a 18, reconoce un doble, 9 + 9 = 18. Pero vuelve a comenzar por allí, por la técnica utilizada y no por la pregunta que se hacía. Esto tal vez lo favoreció el número elegido: 35, es casi 18 + 18 como 18 era 9 + 9.

D. 9 años… ah, no, 11 años. Lo hice en la cabeza, ya tenía los 2 en la cabeza, y conté hasta 18 cuántos había y corté por la mitad y agregué los 2, entonces va a tener 11.
M. Porque, ¿cuántos años van a pasar hasta tus 18?
D. 9 años
M. ¿Cuándo tengas 35, qué edad va a tener ella?
D. ¿A partir de 11 años?
M. No, cuando vos tengas 35, ¿qué edad va a tener ella?
D. Ella va a tener 25… no…
M. ¿Cómo se podría saber?
D. 23, va a tener.
M. ¿Cómo lo sabes?
D. Porque hice… dividí 35, da 25, entonces saqué 2, da 23.
…
M. ¿Y por qué 25? ¡Yo te dije 35!
D. Bueno, justamente, va a ser la mitad, le dije.
M. ¿Y por qué habría que hacer la mitad?
D. Y después se suman 2.
M. ¿Y por qué la mitad? No entiendo.
D. Hice la mitad, mire.
M. Ah, sí, pero por qué la mitad, 18 era el doble de 9.
D. Es difícil esta vez.
M. Si es difícil, tal vez puedas buscar intermedios.
D. ¿Cómo? No entiendo.
M. No vas a pasar directamente de 18 a 35 años.
D. Ah, no, seguro que no.
M. Tal vez haya intermedios más fáciles de calcular.
D. Bueno, digamos que tengo 18. ¿18 y 18, cuánto hace… 32? No… 36! Saco uno, da 35, entonces si quiero hacer lo mismo tiene que dar 25, Ud. entiende.

3. Didier nos muestra una parte de sus dificultades en la resolución de problemas a través del enunciado que propone él mismo el 12 de marzo. “Tengo 36 bolitas, quiero ponerlas en 20 bolsas, ¿cuántas me quedan?” Por una parte falta un dato: la cantidad de bolitas por bolsa; por otra parte, parece que la ausencia de soltura en el cálculo mental le impide a Didier hacer previsiones. Al comienzo, Didier pensaba tal vez poner una bolita por bolsa[6] o 20 bolitas en una bolsa y hacer una sustracción, pero no parece tener idea muy precisa sobre la influencia del número de bolitas por bolsa puesto que, cuando le pregunto cómo pone las bolitas en las bolsas, responde “una por una, por ejemplo, o bien de a 4”. Dibuja 20 cajas y escribe 4 en cada una y todavía no prevé de inmediato que no le alcanzarán las 36 bolitas.

Pareciera que hay allí una contradicción entre una lógica concreta en que se dispone de datos un poco anárquicos: se puede tener cualquier número de bolitas y cualquier número de cajas e

[6] Sin duda es lo que preveía puesto que parece muy contento un poco más tarde cuando le hago la pregunta “si tienes 36 bolitas y 20 cajas y pones una bolita en cada caja, ¿qué pasa?” D. “Ya está, lo encontré, creo saber cuántas van a quedar: 16!” Responde así exactamente en los términos en que había formulado la pregunta al comienzo, es la respuesta a su problema.

igualmente guardar las bolitas en cajas, y una lógica de problema escolar de matemáticas en la cual los datos deben ser tales que se pueda resolver el problema con las operaciones disponibles, y en el cual hay que anticipar la solución para elegir los datos. Didier sabe bien que las 20 cajas con 4 bolitas cada una da 80 bolitas, aunque no esté tan seguro de sí –"voy a intentar una multiplicación", dice- pero no ha pensado que había que hacerlo antes de elegir la cantidad de bolitas.

Retomamos su problema con otro valor: 340 bolitas.

D. Tomo dos cifras en el dividendo. ¿En 34 cuántas veces 20? No conozco la tabla del 20, entonces calculo qué se acerca más a 3 en la tabla del 2, es 1, da 20, quedan 14, bajo el cero y lo que se acerca más del 14 en la tabla del 2 es siete, queda 0.

M. ¿Conclusión? ¿Puedes responder al problema?

D. Queda.

M. ¿Cuál era la pregunta?

D. Con 20 cajas, ¿tendré suficientes bolitas para poner 340 bolitas?

M. No era esa la pregunta, ¿340 qué es?

D. Bolitas.

M. ¿Y 20?

D. Cajas.

M. ¿Qué tenías que hacer?

D. Guardaba bolitas en las cajas

M. Sí, ¿y cuál era la pregunta?

D. Si tendría suficientes, no, no era eso. ¿Cuántas me quedarán?

M. ¿Pero 17 es la respuesta a esa pregunta? ¿Qué representa 17 en tu problema?

D. Representa lo que da, el resultado.

M. ¿De qué?

D. Bueno, de mi división.

M. Pero qué quiere decir en tu problema… Si te pidiera hacer un dibujo (D. al mismo tiempo: ya sé). Haz un dibujo que represente tu problema.

D. dibuja 17 bolitas que reparte en dos paquetes.

M. ¿Dónde está 340?

D. Ahí, los paquetes son los 340.

M. Ya no entiendo nada. Tenías 340 bolitas.

D. Que guardo en cajas de 20

M. ¿En cajas de 20 o en 20 cajas?

D. En 20 cajas.

M. Recién hiciste un dibujo.

D. Sí, pero va a ser aburrido.

M. Dibuja tus 20 cajas. (Lo hace.) ¿Y entonces qué es 17?... Tienes 20 cajas y 340 bolitas. Veo las cajas pero no veo las bolitas.

D. Veamos, ¿cuántas tengo? 17.

M. ¿Qué es 17? ¿Bolitas o cajas?

D. Es lo que quedará de más … Claro, recién quedaban 16 y 12.

M. ¿Quedaban 16 y 12? (…)

M. Entonces tienes 17 bolitas en cada caja, escríbelo.

N. No voy a escribir 17 en todos lados.

M. Escribe 17 en cada caja, en fin algunas veces, y cuando te canses, dejas de hacerlo.

Escribe cinco y se detiene.

D. Listo, da 340 bolitas.

El conjunto de estas características se encuentra a menudo en niños con dificultades en la escuela. En mi opinión, hacen *difíciles la devolución*[7] *a los alumnos de un problema un poco complejo*

[7] Volveremos sobre esta noción en la sección IV. Digamos por el momento que la devolución es aquello por lo cual el docente hace que el alumno acepte comprometer su responsabilidad en la resolución de un problema. Véase Brousseau R.D.M. 7.2.

y la implementación de juegos de marcos[8] porque estos alumnos difícilmente acepten lanzarse a un procedimiento costoso y poco seguro, sobre todo porque el maestro conoce la solución.

Sin embargo, en el curso de mis ulteriores observaciones, pude encontrar también otro tipo de alumno con dificultades, un poco opuesto: es ***el alumno que no puede aceptar reglas o algoritmos que no comprende***. Por ejemplo, en observaciones de alumnos de 6º, vi a niños que no podían aceptar la multiplicación para tratar una situación de proporcionalidad en el caso en que tenían que trabajar con números decimales. Y, en efecto, si sólo se ha comprendido la proporcionalidad en el caso de cantidades discretas donde se puede pensar en términos de adiciones repetidas, hay mucho por hacer para pasar a las cantidades continuas y a la multiplicación en los decimales.

Por ejemplo, una alumna de 6º vino a verme porque no comprendía la corrección de un ejercicio donde se trataba de encontrar el precio de un asado de cerdo de 1,35 kg a 46 F el kg[9]. Ella sabía que pagaría entre 46 y 92 F, pero no sabía cómo hacer y sobre todo no veía por qué había que multiplicar como lo había visto en la corrección. Podía utilizar perfectamente la proporcionalidad en forma de isomorfismo sobre los enteros y encontrar, cuando se lo sugerí, el precio de 500 g y luego de 100 g de asado. Con esta ayuda, podría encontrar incluso el precio de 1,35 kg haciendo 46 + 3 x 4,60 + 2,30. Pero seguía sin ver la relación entre 1,35 x 46 que daba el mismo resultado, como lo había constatado haciendo la multiplicación. Para aclarar esta coincidencia, hizo falta ver primero que 3 x 4,60 = 0,3 x 46 y que 2,30 = 0,50 x 4,60 = 0,05 x 46, e incluso que 46 x 1,35 = 46 x 1 + 46 x 0,3 + 46 x 0,05. Este razonamiento no estaba disponible en la mayoría de los alumnos de 6º que deben hacer un “acto de fe” para pasar al modelo multiplicativo en el caso en que el multiplicador es un número decimal, sin que se les diga en general que hay que admitir efectivamente algo no evidente.

Los alumnos que están en este caso tienen tendencia, en cambio, a evitar los algoritmos. Su actitud parece más positiva, pero corren también el riesgo de decirse rápidamente que no comprenden nada de matemáticas porque no comprenden todo, luego que no hay que intentar comprender y esto puede llevarlos finalmente a la conducta precedente donde se busca el algoritmo a aplicar.

Evitar las técnicas de las que no se está bien seguro puede llegar a veces bastante lejos. Así observé a un alumno que utilizaba procesos muy complejos y muy largos pero que no exigían más que técnicas rudimentarias, lo que pedía en cambio proezas de memorización, para evitar implementar técnicas más eficaces pero de adquisición más reciente. Para este tipo de alumnos, parece que el problema no se sitúa en el nivel de la devolución sino más bien en el de la *institucionalización*[10]*, que supone la aceptación de renunciar a métodos que conocen bien para intentar métodos nuevos que aún no dominan.*

III. Balance de las dificultades de los alumnos e interpretación

III. 1. Un punto crucial: capitalización del saber y reinversión

El punto que parece crucial a nivel de las dificultades de muchos alumnos en el plano de la clase de matemáticas es la falta de capitalización y la dificultad de reinversión de los conocimientos. Es en este campo que aparecen las diferencias más grandes. En efecto, en los contenidos, las dificultades que encuentran los alumnos de estos cursos flojos no son verdaderamente específicas: se

[8] Para darle al alumno los medios para crearse herramientas nuevas, el docente puede elegir un problema que se traduce en varios dominios matemáticos (ej. geometría, numérico) entre los cuales los conocimientos de los alumnos no permiten una correspondencia perfecta. El desequilibrio así producido y el deseo de reequilibración lleva a los alumnos a crear herramientas que mejoren la correspondencia entre los marcos. Véase Douady, R.D.M. 7.2.

[9] *NdeT*: “F” hace referencia a “francos”, la moneda en Francia por esos años.

[10] Volveremos sobre esta noción en la sección IV. Digamos por el momento que la institucionalización es aquello mediante lo cual el docente va a dar un estatus a los conocimientos producidos o utilizados en las actividades de la clase.

encuentran las concepciones erróneas ya inventariadas, auque más resistentes. Lo que parece más característico y fuente de nuevas dificultades es que a menudo hay, en los alumnos con dificultades mucho más masivamente que en los otros, *un divorcio neto entre las situaciones de acción que apuntan a dar sentido a las nociones enseñadas y la institucionalización que luego hace el maestro*. En el curso de la acción, en las primeras situaciones que tienden a abordar una nueva noción, en la medida que el problema permita realmente el compromiso de los alumnos, no se ven muchas diferencias en los procedimientos que ponen en práctica los alumnos de cursos de niveles diferentes. Por el contrario, la diferencia se acentúa muy rápido en cuanto se trata de reutilizar los conocimientos introducidos en esa ocasión.

Esta ausencia aparente de diferencia en el momento de la acción puede parecer paradójica, habida cuenta de las diferencias observadas en la capitalización de los conocimientos. Sin embargo, hay que señalar que en el nivel considerado (CM2 y 6º), las situaciones de acción utilizadas para introducir un concepto nuevo, especialmente las que se han observado durante la experimentación, permiten a menudo desarrollar procedimientos pertinentes que solo necesitan conocimientos matemáticos muy elementales. Además, la contextualización elegida por lo general deja un gran espacio a la manipulación que permite utilizar conocimientos generales ligados al contexto. Pero si se propone otra situación en la que sea pertinente utilizar el nuevo conocimiento, los alumnos vuelven a empezar de cero o se observan confusiones en la utilización del nuevo conocimiento. Es probable que, para niveles más elevados, se manifiesten diferencias desde la fase de acción si no estuvieran disponibles herramientas básicas indispensables para la acción, como por ejemplo el cálculo algebraico.

Por ejemplo, para la introducción de las fracciones, hemos utilizado repetidas veces la situación "segmento" que consiste en pedirles a los alumnos que dibujen un segmento arbitrario sobre una hoja de papel, luego enviar un mensaje a un receptor que debe dibujar un segmento de igual longitud. Los alumnos no pueden utilizar la regla graduada, pero tanto el emisor como el receptor disponen de cintas de papel de igual longitud. Esta situación lleva siempre a los alumnos a subdividir la unidad por plegados sucesivos por la mitad para evaluar la parte que supera un número entero de iteraciones, pero una vez que se pasa a la escritura formal de las fracciones, para algunos alumnos se produce una confusión, pasan a modelos numéricos erróneos para simplificar o agregar las fracciones (por ejemplo $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ o $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Parece que el objeto matemático no tuviera para ellos ninguna relación con la situación (o situaciones) de acción que le ha/n dado sentido y que estos alumnos no parecen poder utilizarla/s como referencia. Así, todo ocurre como si *el saber institucionalizado por el maestro y descontextualizado estuviera situado en un registro estanco respecto de los conocimientos utilizados en la situación de acción*. Esto hace que, incluso en el caso en que es memorizado, el saber solo puede funcionar en el registro formal, por ejemplo numérico para las fracciones, sin que la situación de introducción pueda servir de control, y no puede ser utilizado para resolver nuevos problemas.

Lo que los alumnos retienen es lo que sale directamente de la institucionalización. Lo repiten tal cual, como n x $\frac{1}{n}$ = 1, pero no lo utilizan para encontrar otros resultados como n x $\frac{1}{2n}$ = $\frac{1}{2}$. Por otra parte, las reglas y las codificaciones que retienen no son precisas, por ejemplo confunden $\frac{171}{2}$ con 171,2. Otro ejemplo de una toma en cuenta parcial del sentido se observa a menudo a propósito de la división. Algunos alumnos no ven la diferencia entre a:b y b:a. Reconocen una situación de división y proponen por ejemplo hacer a:b cuando habría que hacer b:a. Cuando, al cabo de media hora de trabajo, se llega finalmente al método adecuado, el alumno protesta diciendo "¡lo dije desde el principio!". Pareciera que bastara saber que se hace una división. Tal vez piensan que se divide siempre el número mayor por el menor, o que la división es conmutativa como la multiplicación y la adición.

III.2. Interpretaciones posibles del lado de los alumnos

Una de las principales explicaciones que adelanto es que los alumnos que no encuentran este tipo de dificultades tienen de algún modo *un proyecto, casi siempre implícito, de descontextualización desde el momento en que trabajan en la situación de acción*. Saben que tal vez habrá ocasión de reutilizar la experiencia adquirida y buscan comprender lo que tiene de generalizable la operación que aplican sobre un problema particular. Se crean *representaciones mentales no solo para resolver el problema planteado actualmente sino para poder recordar y reutilizar sus elementos en otras ocasiones*, lo que les permite reinvertir parcialmente un conocimiento, aún cuando no esté totalmente identificado. En lo que respecta a otros niños, esto no ocurre porque lo único que hacen es resolver el problema planteado, en los términos en que está planteado, sin tener proyecto de conocimiento. No hay *creación de representaciones mentales que ya tienen valor simbólico y en las cuales se podrá trabajar luego, en ocasión de otras situaciones*. Esto contribuye a explicar, en estos alumnos, la ausencia de posibilidad de reutilizar, adaptándolas, herramientas forjadas para resolver un problema. Por lo demás, en el ejemplo de la situación “segmento”, la confusión formal se produce para ciertos alumnos a partir del balance que surge de la fase de acción cuando el docente pide si se pueden imaginar otros plegados y otras escrituras: algunos niños afirman en ese momento que $\frac{1}{6}$ es el doble de $\frac{1}{3}$.

Estas representaciones mentales intermedias entre la acción y la formulación permiten sin duda a los alumnos *liberar espacio en la memoria de trabajo*, ya que no están obligados a recordar todos los detalles de una situación ni a tratarla nuevamente para reencontrar el sentido contextualizado de un conocimiento.

Además, y esto está ligado sin duda a la ausencia de una primera descontextualización en el curso mismo de la acción, no hay, para ciertos alumnos, puestas en relación, *“enganchar” con lo anterior para reforzarlo o cuestionarlo*. Inversamente, el hecho de no confrontar las experiencias nuevas con los conocimientos anteriores contribuye a su vez a la ausencia de representación mental de nivel intermedio y al estancamiento de los registros. Las experiencias parecen yuxtaponerse sin que en estos alumnos haya interacción entre lo antiguo y lo nuevo. Cada experiencia es nueva, o más exactamente, *sólo es reconocido el contexto*: “plegamos tiras de papel, cortamos rectángulos”… Este fenómeno está ligado sin duda a la *ausencia de conocimientos anteriores sólidos y bien organizados a los cuales referirse*, y contribuye a su vez a la falta de organización y de integración de los saberes nuevos. Es así como se instala *un proceso acumulativo*: los conocimientos anteriores, no activados, no tienen ocasión de estabilizarse; los conocimientos nuevos no pueden insertarse y tienen a su vez pocas posibilidades de ser retenidos, y el alumno no podrá confiar en lo que sabe.

La falta de confiabilidad en los conocimientos antiguos explica sin duda también, en parte, el *no reconocimiento del verdadero desafío* de las situaciones propuestas en clase, la ausencia de identificación del objeto del trabajo propuesto por el docente lo que obstaculiza también el aprendizaje: por ejemplo, si el docente pide recortar rectángulos para trabajar sobre las fracciones en tanto que, para el alumno, se trata de aprender a dividir los rectángulos, éste no vincula esta actividad y el plegado de tiras de papel. Las fracciones utilizadas en ambos contextos no tienen relación entre sí; por ende, los alumnos no tienen razones para buscar una coherencia.

El no reconocimiento del objeto de enseñanza tiene también por consecuencia *el desgaste rápido de las situaciones*: los alumnos que identifican la situación en su contexto se cansan antes de que se pueda tener una descontextualización local suficiente para una reinversión ulterior de los conocimientos puestos en práctica en una situación.

Otras dificultades se vinculan al plano cognitivo o a las exigencias del “oficio de alumno”. Las examinaremos a continuación.

III. 3 Otras dificultades vinculadas al plano cognitivo

- *Dificultad para cambiar el punto de vista*

En el plano cognitivo, hay que añadir la dificultad para cambiar de punto de vista. Esta se manifiesta por ejemplo durante un cambio de actividad: algunos alumnos se quedan en una consigna anterior o siguen utilizando los procedimientos que convenían en la actividad anterior. Además, otros tienen dificultad para tener en cuenta dos relaciones simultáneamente. Una noción abordada en un contexto es difícil de reutilizar en otro contexto. Esto hace también más difíciles los cambios de marco. La dificultad para cambiar de marcos no es específica: requiere un aprendizaje para todos los alumnos y el cambio de marcos[11] está a menudo bajo la responsabilidad del docente. Pero la utilización de los juegos de marcos es tanto más difícil para algunos alumnos en cuanto tienen conocimientos muy poco movilizables en uno de los marcos en juego. Ahora bien, estos cursos flojos son en general heterogéneos y los alumnos no siempre tienen las dificultades más profundas en el mismo campo. Por ejemplo, uno de los alumnos del curso de 6º de 89-90 tiene muy buenos resultados en el campo de la geometría pero muchas dificultades con los números; se resiste a traducir los problemas en el marco numérico; con otro alumno, ocurre exactamente lo contrario. En ambos casos, los juegos de marcos entre lo numérico y lo geométrico son difíciles pero por diferentes razones.

- *Relación con lo real*

Los problemas vinculados a la modelización constituyen una dificultad que no concierne solamente a la población más especialmente estudiada aquí sino que es más bien específica de las matemáticas para los niveles elementales (en niveles más elevados, está más bien a cargo de la física). La modelización exige manejar las *relaciones de las matemáticas con la realidad, del razonamiento matemático con la lógica de lo cotidiano*.

Por una parte, es importante que los alumnos tengan la ocasión de utilizar sus conocimientos en matemáticas para tratar problemas concretos o plantearse preguntas de orden matemático a partir de preguntas surgidas de la realidad. Sin embargo, estos problemas requieren a la vez poner en relación conocimientos matemáticos con otros que dependen de otros dominios y escoger entre lo que es tomado en cuenta en el modelo y lo que no es tomado en cuenta: no se pide a un modelo que describa completamente la realidad sino que permita prever de manera satisfactoria. Por ejemplo, es claro que la proporcionalidad solo modeliza las carreras (a pie) que se desarrollan a velocidad constante, y esto no ocurre en ninguna carrera real, pero este modelo permite prever de manera razonable el tiempo que se pondría en una distancia no muy diferente de aquella sobre la cual se ha corrido.

El hecho de trabajar con situaciones concretas requiere también distinguir lo que depende de la lógica matemática y de la lógica de lo cotidiano, que no siempre coinciden. Esta dificultad existe para todos los alumnos pero las relaciones que éstos mantienen con las matemáticas, la escuela y el saber en general les facilitan más o menos esta distinción. En efecto, hay que señalar que los alumnos están muy desigualmente confrontados a otra lógica en sus actividades extraescolares, según su práctica en ciertos juegos, en particular juegos practicados con adultos que los llevan a aprender a hacer razonamientos bajo hipótesis o a utilizar categorías de clasificación (juegos de estrategia o juegos de adivinanza en un campo a seriar, por ejemplo).

Además, se tiende a recurrir más a los problemas concretos que se apoyan en la realidad cotidiana en el caso de alumnos con dificultades, y a veces puede instalarse por este hecho un verdadero malentendido y una comunicación absurda entre el profesor y ciertos alumnos, uno ubicado en la lógica matemática, el otro en la lógica de lo cotidiano. Así, un alumno de 6º que yo observaba en trabajo individual tenía que resolver el siguiente problema: “Se venden cuadernos a 4,60 F la unidad o por lotes de 5 cuadernos a 18 F el lote. Un profesor necesita 114 cuadernos para los alumnos de sus clases. ¿Qué debe comprar para pagar lo más barato posible? ¿Cuánto pagará?” Con una calculadora, sin poder formular lo que busca en cada etapa, hace la siguiente serie de operaciones: 114 : 5 = 22,8 x 18 = 410,4 y escribe 410,4 en su hoja. Le hago notar que solo se pueden

[11] Véase nota 5.

comprar lotes enteros. Entonces hace 23 x 18 = 414. Le pregunto si no se puede pagar más barato comprando cuadernos por unidad. Me responde que 23 x 5 = 115 y que el profesor se quedará con el último cuaderno. Se niega a considerar cualquier otra solución. He podido ver qué comprendía el problema y podía resolverlo porque lo observé individualmente. A través de sus producciones, se hubiera podido pensar que no comprendía el problema o que no sabía tratarlo. Así se subvalúa a veces la comprensión de esos alumnos porque encuentran también muchos problemas de expresión. Volveremos sobre este punto en el siguiente apartado.

Esto no quiere decir que la lógica de lo cotidiano no pueda o incluso no deba ser un punto de partida, pero habrá a veces oposiciones entre ambas, lo que traerá aparejada la necesidad de distinguir lo que se puede decir sirviéndose de las matemáticas y lo que se diría o haría en la vida. Esto exige construir situaciones que se apoyen en la realidad familiar y permitan superarla planteándoles a los niños verdaderos problemas teóricos.

- *En el plano del lenguaje*

En los problemas vinculados al lenguaje, es necesario distinguir al menos dos órdenes. Los que son propios del lenguaje matemático mismo intervienen desde luego en las dificultades de los alumnos observados, pero no son específicos de esta población. Por lo tanto dejamos de lado estos problemas que deberán superar todos los alumnos y que ya han sido objetos de varias investigaciones, por ejemplo la tesis de Colette Laborde (Laborde 1982). En cambio, los problemas más generales ligados al dominio del francés son a menudo importantes en los alumnos que he observado. De hecho, esos problemas contribuyen a incrementar las dificultades propias del lenguaje matemático y tienen repercusiones en varios niveles:

a) Intervienen en lo escrito en la comprensión de los enunciados, por una dificultad para estructurar los datos por ejemplo, y también en la formulación de los resultados. Este nivel externo está en relación con el éxito. Los problemas de lenguaje se añaden a las dificultades conceptuales en las situaciones complejas. Así, los alumnos en dificultad observados rara vez retienen toda la información contenida en un enunciado de matemáticas no redundante, en especial la mayoría de ellos sólo muy difícilmente llega a tomar en cuenta varias condiciones simultáneas. Una de las dificultades en la comprensión de los enunciados reside también en el no reconocimiento del alcance del enunciado y de sus elementos, en particular en lo que respecta a la generalidad: ¿qué enunciado es general, cuál está contextualizado, cuáles son los elementos del enunciado que están cuantificados universalmente, cuáles son los que están vinculados al contexto?

Las dificultades de lenguaje se traducen también en la expresión, la formulación de resultados o preguntas, lo que por lo demás suele conducir a un sub-rendimiento en relación a los conocimientos reales de estos alumnos.

b) El manejo del francés interviene también (con otros factores) en la interpretación de lo que se hace en clase. En el desarrollo de la enseñanza, por cierto, el maestro utiliza varios niveles de discurso que están a menudo bastante imbricados y que el alumno debe lograr decodificar con su significación en la situación. En un mismo período de discurso del maestro, hay a menudo pasaje de un tipo de discurso a otro. Los alumnos deben ser capaces de detectar estos cambios de nivel para sacar provecho del discurso no matemático del maestro, lo que podría llamarse el discurso perimatemático, para apropiarse más fácilmente del discurso matemático del maestro y eventualmente de los demás alumnos.

c) Las dificultades de lenguaje tienen sin duda repercusiones en un nivel más fundamental, en el desarrollo del lenguaje interno en el sentido de Vygotsky (1985) y del pensamiento. Es verdad que las dificultades debidas a la lengua no se reducen al dominio del francés, puesto que hay niños extranjeros que lo manejan muy mal y que no tienen problemas de conceptualización en matemáticas, aun cuando las dificultades aparecen en el nivel externo del que hablé. Tengo dos ejemplos de esto en los cursos de 6º que he observado.

La imprecisión del lenguaje y la ausencia de hábito de formularse a sí mismo las preguntas y los procedimientos de resolución implicados en la investigación de un problema contribuyen sin duda a la dificultad de ciertos alumnos de crearse las representaciones mentales intermedias que constituirían puntos de apoyo de la conceptualización. El desarrollo del lenguaje en general y para la conceptualización en matemáticas es, pues, un punto muy importante para considerar en el análisis de las dificultades de los alumnos. Por otra parte, esta relación entre el francés y las matemáticas debe considerarse en los dos sentidos. Es probable que el desarrollo del lenguaje matemático pueda ayudar también al dominio del francés. Sin embargo, es de lo que surge de la negociación del contrato didáctico más que de la relación entre el lenguaje y las dificultades en matemáticas que llevo a cabo mi investigación. En efecto, las dificultades de orden cognitivo que hemos examinado están imbricadas con dificultades más generales que tienen repercusiones en la gestión de la clase.

III.4. En un plano más general

Así, el docente encuentra en estos cursos flojos cierto número de **dificultades en la gestión de la clase** que se deben al hecho de que muchos alumnos con grandes dificultades en la escuela tienen, fuera de la escuela, *problemas de orden afectivo* sobre los que no tenemos ninguna competencia. Además, su situación de fracaso en la escuela contribuye a *darles una imagen desvalorizada de sí mismos*. Esto puede tener repercusiones en la aceptación de ciertas formas de trabajo, especialmente el trabajo en grupos, y hace difícil las fases de balance colectivo. La dificultad de comunicación con sus pares, ligada a la falta de socialización, hace que alumnos flojos tengan miedo de no poder expresarse o tener la peor parte en un grupo, donde las decisiones suelen ser tomadas con argumentos de autoridad. Además, puede ser más difícil aceptar un saber proveniente de otro alumno: es normal no encontrar lo que el profesor encuentra puesto que se supone que él sabe, es mucho más desvalorizador no encontrar o no comprender lo que otro alumno ha encontrado. Estos alumnos necesitan ser reasegurados y buscan una relación privilegiada con el docente. Toman la palabra de manera intempestiva y no escuchan lo que dicen los demás alumnos, lo que hace que, en cursos flojos, se ocupe mucho tiempo en resolver problemas de disciplina. El tiempo de trabajo efectivo es, pues, más corto y por ende la presión del tiempo sobre el docente es más fuerte.

A esto hay que agregar diferencias culturales que hacen que ciertos alumnos tengan **una visión del "oficio de alumno"**, para retomar la expresión de Chevallard (1988), más o menos bien adaptada al sistema escolar. La enseñanza tal como se la practica en general supone en efecto la adhesión tácita a un buen número de presupuestos culturales, que no son realmente compartidos por todos los alumnos. Así, de acuerdo a su medio familiar, los alumnos tendrán o no el hábito de argumentar sobre cuestiones de principios (véase por ejemplo Lautrey, 1980), encontrarán o no natural entender una pregunta que se les formula y la respuesta que tienen que dar como destinada a probar que saben y no solamente para dar una información que le falta al interlocutor. Por lo demás, es esta una explicación a la que se recurre en general para explicar la diferencia de éxito en la escuela de acuerdo al medio social de origen (distancia respecto de la norma escolar).

Esta distancia respecto de las expectativas del docente corre el riesgo de ser aún más grande en el caso de una enseñanza que se ubica en una perspectiva constructivista. Para que un alumno tenga un proyecto (implícito) de aprendizaje frente a la resolución de un problema, es necesario, en efecto, que tenga una concepción de su trabajo compatible con el nacimiento de tal proyecto: será difícil si piensa que un deber es como un trabajo material que debe hacerse y que luego se lo olvida para pasar a otra cosa, o que un deber se hace para ser juzgado, testigo de que se tiene o no se tiene un conocimiento que hay que adquirir aprendiendo una lección. Para que se pueda hacer devolución a un alumno de un problema al cual no puede proporcionar respuesta inmediata, es necesario que acepte su responsabilidad en la resolución de ese problema. Ahora bien, puede encontrar ilegítimo que se le proponga un problema cuya respuesta no se le ha enseñado y rechazar esta responsabilidad. Puede considerar también que es una pérdida de tiempo puesto que el maestro conoce la respuesta y podría enseñársela.

Su **relación con la evaluación** puede contribuir también a la puesta en marcha de un círculo vicioso. Por una parte, el alumno reclama que todo lo que hace sea evaluado porque todo esfuerzo merece salario y no quiere trabajar por nada. Por otra parte, sabe que la evaluación sirve para juzgarlo; piensa, pues, que lo importante es tener buenas notas para evitar disgustos tanto en la escuela como en su casa. Pero es difícil para él tener buenas notas haciendo el juego del conocimiento, juego cuya existencia tal vez ni siquiera ha percibido; se pone entonces a la búsqueda de indicios que podrían ayudarlo a adivinar con el menor costo lo que espera el maestro. Como ocurre (muy a menudo, en suma) que el profesor lo ayuda en esa empresa, puede producir hasta cierto punto respuestas justas sin poner en juego conocimientos. La ausencia de aprendizaje solo se revela más tarde, en un momento en que puede ser más difícil volver a dar al alumno ocasiones de aprendizaje.

Por otra parte, si el alumno espera de la escuela que ésta lo prepare para tener un oficio, busca en lo que se le propone la utilidad respecto de su proyecto y en general no la encuentra: los desvíos de las carreras escolares en general son desconocidas para él. Además, los niños con dificultades en la escuela suelen tener un proyecto social muy modesto que no exige más que pocos estudios; los saberes escolares les parecen particularmente desconectados de los saberes prácticos que les parecen útiles.

IV. Una lectura didáctica. Devolución, institucionalización y dialéctica herramienta-objeto. Puntos claves

La teoría de las situaciones, así como la dialéctica herramienta-objeto, se sitúan en una perspectiva constructivista y dan un lugar importante al proceso de contextualización y descontextualización de los conocimientos considerado como uno de los motores de la construcción del sentido de los conceptos matemáticos para los alumnos. Así, G. Brousseau declara (R.D.M. 7:2, 1987, p. 51) *"en la didáctica moderna, la enseñanza es la devolución al alumno de una situación adidáctica correcta; el aprendizaje es una adaptación a esa situación"*. Asimismo, en la dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1987), se supone que los alumnos van a comprometerse en la resolución de problemas para los cuales no disponen aún explícitamente de las herramientas eficaces porque es justamente el conocimiento al que se apunta lo que constituye una herramienta adaptada. Pero pueden abordar estos problemas y darles un sentido, porque pueden decir al menos si una respuesta propuesta es o no solución del problema.

En esta perspectiva, la devolución –que Brousseau (1990, p. 325) define como "*el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o de un problema y él mismo acepta las consecuencias de esa transferencia"* –es un proceso necesario dentro de la situación didáctica porque el alumno no tiene inmediatamente acceso a la situación adidáctica: *"La situación adidáctica final de referencia, la que caracteriza el saber, puede ser estudiada de manera teórica, pero en la situación didáctica, tanto para el maestro como para el alumno, es una suerte de ideal hacia el cual se trata de converger: el docente, en cuanto sea posible, debe ayudar constantemente al alumno a despojar a la situación de todos sus artificios didácticos para dejarle el conocimiento personal y objetivo"* (R.D.M. 7.2. 1987, p. 50). La devolución es una condición para que el alumno funcione de manera científica y no en respuesta a indicios externos a la situación, de orden didáctico especialmente, condición necesaria si uno se ubica en la hipótesis en la cual el alumno construye conocimientos nuevos en respuesta a problemas.

A partir de la observación de alumnos con dificultades, pueden formularse varias preguntas acerca de la devolución:

- ¿En qué consiste exactamente? ¿Cómo operarla? ¿Cómo se sabe que ha tenido éxito?
- ¿Es siempre posible? ¿Qué condiciones debe cumplir?
- Si no pudo realizarse con ciertos alumnos que siguieron a los otros o utilizaron indicios didácticos, ¿puede producirse igualmente el aprendizaje de que se trata? ¿En qué condiciones?

En el comienzo, para Brousseau, se trata esencialmente de hacer que los alumnos entren en un funcionamiento matemático frente al problema que se les quiere hacer resolver. Pero esto ya supone que el alumno está en una lógica de aprendizaje. Escribe por ejemplo (R.D.M. 7.2, 1987) *"El* *alumno sabe bien que el problema fue elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirla sin recurrir a razones didácticas".*

Ahora bien, mis observaciones sobre los alumnos con dificultades me hacen pensar que no es seguro que los a priori sobreentendidos aquí sean cumplidos por todos los alumnos. Según su origen cultural o su experiencia escolar anterior, ciertos alumnos saben bien, en efecto, que hay siempre un objetivo de aprendizaje en lo que se les propone y se acostumbra en la enseñanza a hacer como si esta evidencia fuera compartida. Tal vez no siempre ocurra así, aun en el caso en que el alumno espere aprender algo, puede haber malentendido sobre la naturaleza del conocimiento considerado (¿se trata de resolver el problema planteado o de adquirir un conocimiento más general reutilizable en otros problemas, incluso muy diferentes de éste?). La pregunta que me hago es la siguiente: ¿qué es lo que le permite al alumno "converger hacia" la situación adidáctica, qué es lo que hace que ponga en juego un saber matemático al intentar resolver el problema que plantea el maestro? ¿Qué devolución del problema es necesaria, antes de la resolución, para que el alumno aprenda? ¿Cómo hacer devolución para que el alumno tome bajo su responsabilidad su propio aprendizaje (a nivel general tanto como a nivel de cada situación)?

Otra pregunta es saber si, para que haya aprendizaje a partir de la resolución de un problema, es necesario que la devolución se haga antes de la resolución. Por mi parte, pienso que *el proceso de devolución puede seguirse más allá de la acción e incluso más allá de la situación adidáctica*. En efecto, pienso que, para ciertos alumnos que durante la acción funcionaron de manera no científica, por ejemplo utilizando indicios didácticos o remitiéndose a compañeros, hay una posibilidad de "devolución a posteriori" mediante un retorno reflexivo sobre la acción, en el momento de la institucionalización. Si esta posibilidad no existiera, la situación sería efectivamente desesperada para ciertos alumnos. La cuestión entonces es saber cómo se les puede dar a estos alumnos una nueva ocasión de dar sentido a las nociones ya institucionalizadas o en curso de institucionalización.

Esto me lleva a considerar los vínculos entre devolución e institucionalización. Las hipótesis dominantes actualmente sobre el aprendizaje conducen a pedir a los docentes que se apoyen en la actividad de los alumnos. Y por otra parte encontramos ahora, en los cuadernillos IREM o en los manuales, cantidades de actividades para proponer a los alumnos. El esquema, grosso modo, es éste: se propone al comienzo a los alumnos un problema que pone en juego la noción considerada o que muestra su valor. Los alumnos ponen en práctica procedimientos más o menos adaptados. El docente separa los que son eficaces, la nueva herramienta a la que se apuntaba, es institucionalizada en ese momento y se exigirá luego, especialmente en el control que se realizará más tarde. En este esquema, la institucionalización viene después de la resolución del problema de introducción: es el curso del profesor.

Ahora bien, dijimos que se observa en ciertos alumnos una ruptura entre la situación de acción y la institucionalización que el profesor realiza. Esto hace pensar por una parte que la devolución no ocurrió como se esperaba; por otra parte, que la institucionalización tal vez no está suficientemente vinculada al problema sobre el cual los alumnos realmente trabajan. Primero, vimos que los alumnos tal vez no saben que hay otra cosa por aprender además de la resolución de un problema particular. Un discurso sobre lo que es central en lo que se les pide, ¿puede ayudarlos? ¿En qué momento incluirlo? ¿Hay que señalar algo en ese nivel antes de la resolución? ¿Después? ¿Qué intervenciones? Estas preguntas son objeto de las investigaciones sobre lo "meta", es decir el discurso no estrictamente matemático sino sobre las matemáticas que sostiene el docente en clase (véase Robert y Robinet, 1993). La respuesta de la teoría de las situaciones (y también de la dialéctica herramienta-objeto) es más bien construir una situación tal que las variables permitan una evolución de los conocimientos puestos en juego por los alumnos: una primera elección debe permitir la devolución; otras permitirán construir el sentido de los conceptos considerados. Pero siendo la institucionalización el proceso por el cual el maestro va a dar un estatus oficial a los conocimientos en juego, ¿sería ya una primera institucionalización y no hacer saber a los alumnos que habrá algo general y reutilizable por aprender en la resolución del problema particular que se les plantea?

Estas reflexiones me llevan a considerar también *la institucionalización como un proceso que se desarrolla a lo largo de la enseñanza, un motor del avance del contrato didáctico y no como una fase al final del proceso donde el maestro da su clase*. La institucionalización de los conocimientos comienza desde el inicio mismo de la devolución, ya que el docente tiene que darle al alumno, si éste no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; de allí *la imbricación de los procesos de devolución y de institucionalización que son de este modo, en cierta medida, contemporáneos*. Evidentemente, encontramos allí una de las paradojas del contrato didáctico que Brousseau puso en evidencia: el maestro no puede hablar del conocimiento nuevo[12] dado que es justamente el centro del aprendizaje; sin embargo, puede decir que se va a aprender algo nuevo e ilustrar a los alumnos sobre los conocimientos antiguos que hay que movilizar para "enganchar" este conocimiento nuevo. De hecho, el maestro tiende a la institucionalización a lo largo del proceso, pero no puede develar enteramente su proyecto so pena de hacerlo fracasar: si quiere que la institucionalización pueda llevarse a cabo con sentido para los alumnos en buenas condiciones, no puede ir directo a la meta, pero la tiene siempre presente para manejar desde el comienzo y a lo largo del proceso de enseñanza las condiciones que van a permitirle negociar el contrato didáctico en ese sentido. Devolución e institucionalización son así los dos procesos complementarios respecto de los cuales el maestro va a intentar controlar la adquisición por parte de los alumnos de las nociones matemáticas con su sentido: la devolución para que ellos se comprometan realmente en la resolución de los problemas, la institucionalización para que los alumnos sepan en lo que pusieron en juego, a qué se apuntaba y que habrá que retener.

Además, *el margen de maniobra es muy estrecho, en particular en el caso de alumnos con dificultades donde el equilibrio a adoptar en momentos de la institucionalización no es fácil de encontrar*: si al cabo de una fase de búsqueda, no hay institucionalización, los alumnos sólo retienen el contexto y una parte de la acción sin reflexión sobre ésta, pero en cuanto hay institucionalización, hay riesgo de implementar una regla que va a ser utilizada sin referencia al sentido. Estamos entonces ante la necesidad de desestabilizar estas reglas tan pronto como se instalen, lo que puede destruir entonces toda posibilidad de referencia a la situación en la construcción de la noción a la que se apuntaba en esa situación.

Pienso pues, que al menos para ciertos alumnos, la institucionalización sólo puede hacerse de manera muy progresiva con numerosos ciclos contextualización-descontextualización, lo que conduce a distinguir etapas en la institucionalización:

- institucionalizaciones locales en uno o varios contextos, en el sentido en que R. Douady (1984) utiliza esta expresión en la descripción de la dialéctica herramienta-objeto,
- reinversión de un contexto a otro: institucionalización de un vínculo entre diferentes contextos,
- curso construido por el profesor, que da un estatus de objeto matemático a algunas de las nociones encontradas por la exposición de las razones del saber.

Estas etapas conciernen tanto a conceptos como prácticas, métodos y representaciones que se les asocian en las situaciones presentadas. Además, no corresponden enteramente a un orden cronológico; la reinversión se ubica a lo largo del proceso, con grados de descontextualización diferentes: cuando los alumnos encontraron una primera situación sobre la noción, pueden reinvertir prácticas reconociendo una analogía entre dos situaciones, incluso después de la clase donde tal vez podrán reinvertir el saber en tanto objeto matemático.

[12] Por "conocimiento nuevo" entendemos también una profundización o un nuevo empleo de un conocimiento antiguo.

V. Las restricciones de funcionamiento de los docentes. Polos contradictorios

La interpretación que hemos dado de las dificultades de los alumnos, el análisis que acabamos de hacer de ellas en términos de devolución y de institucionalización nos conducen a desprender restricciones percibidas como contradictorias por los docentes, y que son particularmente sensibles en los cursos flojos.

V.I. ¿Cómo equilibrar la construcción del sentido y la adquisición de automatismos de base?

¿Hay que privilegiar en la enseñanza la construcción por parte de los alumnos del sentido de los conocimientos matemáticos o la adquisición de técnicas y mecanismos de base? Esta pregunta suele ser vivida como un dilema por los docentes de los cursos "flojos". Si bien todo el mundo está convencido de la importancia de la capitalización de saberes descontextualizados disponibles para tratar problemas referidos a contextos variados, las opiniones difieren sobre la posibilidad de llegar a ese resultado con todos los alumnos y cuáles son los medios para lograrlo.

Por un lado, sólo hay seguridad de que el alumno dispone de un concepto matemático con suficiente sentido cuando es capaz de resolver sin ayuda problemas bastante complejos donde ese concepto funciona, ya que el hecho de reconocer que se puede utilizar un concepto en una situación forma parte del sentido de ese concepto. Para llegar a ese resultado, parece necesario que el alumno haya tenido la ocasión, durante el aprendizaje, de funcionar de manera suficientemente "adidáctica" sobre este tipo de problemas. Por lo demás, la hipótesis según la cual la acción del alumno es importante para la adquisición de los conocimientos, es actualmente valorizada en la noosfera como lo muestran los últimos programas de los primeros años del secundario donde se le asigna un gran lugar a las "actividades" que sirven para introducir las nociones matemáticas.

Sin embargo, como hemos podido verlo en el caso de Didier, la resolución de problemas complejos no puede concebirse más que apoyándose en conocimientos antiguos y técnicas suficientemente sólidas, aunque sea para volver a cuestionarlos.

La implementación de juegos de marcos requiere también un mínimo de conocimientos en cada uno de los marcos en juego.

Además, las actividades en las cuales se deja mucho lugar a la iniciativa de los alumnos son grandes consumidoras de tiempo. En esas condiciones, los docentes estiman como un costo muy elevado la adquisición por todos los alumnos de las nociones matemáticas con suficiente sentido, al mismo tiempo que la adquisición de los mecanismos de base, que no creen poder lograr ambos objetivos en todas las clases y se sienten presionados a elegir. Entonces, solo pueden dar prioridad a la enseñanza de los mecanismos de base.

Sin embargo, el sentido y el funcionamiento automático de los conocimientos no se oponen necesariamente: es incluso indispensable tener un funcionamiento automático sobre ciertas cosas para liberar espacio en la memoria de trabajo y trabajar sobre objetos nuevos. Se requiere que ciertos conocimientos tengan un funcionamiento automático en los sujetos, cuando llegan a un nivel suficiente de pericia. Es lo que ocurre especialmente con los algoritmos, el cálculo algebraico, etc. Pero tener un funcionamiento automático no implica, para el experto, no tener medios de control en tanto que para el alumno con dificultades, se comprueba a menudo un funcionamiento automático sin medios de control.

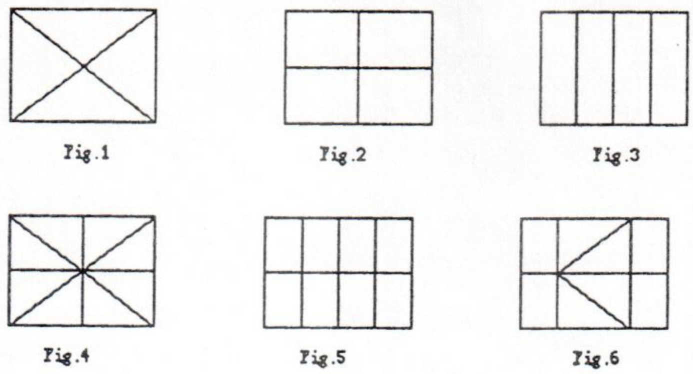
Una cuestión que me parece fundamental cuando uno se preocupa por la enseñanza a los alumnos con dificultades es, pues, la del equilibrio entre los polos aparentemente contradictorios del sentido y de los automatismos. Y como las cuestiones de tiempo son particularmente importantes en este tipo de cursos, hay que preguntarse: ¿se puede trabajar la técnica al mismo tiempo que el sentido? ¿Cómo? ¿El dominio de la técnica no contribuye también al sentido? Por ejemplo, si se piensa en el cálculo algebraico, es claro que es necesario que los alumnos procesen situaciones de modelización para ser capaces de utilizar las técnicas de resolución de ecuaciones en el momento oportuno en la resolución de los problemas, pero el trabajo sobre las escrituras mismas no es menos necesario y contribuye también a dar sentido a la resolución de las ecuaciones, proveyendo medios de control de otra naturaleza (sintácticos).

V.2. ¿Cómo partir de las producciones de los alumnos y hacerles adquirir un saber matemático descontextualizado?

Ya hemos señalado el escaso margen de maniobra concerniente a la institucionalización: por una parte, los alumnos no pueden desprender solos lo que tiene de general y reutilizable el procedimiento que han utilizado en la resolución de un problema; por otra parte, el riesgo de confusión formal es grande desde el momento en que hay descontextualización. Si se quiere partir de las actividades de los alumnos en fases de búsqueda, ¿cómo articular la clase con lo que han hecho los alumnos? ¿En qué momento aportar información, bajo qué forma? ¿Cómo conservar el dominio del desarrollo de la enseñanza sin provocar ruptura con lo que han producido los alumnos? ¿Cómo gestionar el balance y la institucionalización si los alumnos produjeron cosas muy diversas en la fase de búsqueda?

Sucede que el docente se equivoque sobre la significación real de los conocimientos en juego respecto de los alumnos y saltee etapas importantes para que esta descontextualización se haga sin pérdida excesiva de sentido. Este fenómeno puede aproximarse al efecto Jourdain identificado por G. Brousseau. He aquí un ejemplo de tomado en un curso de 6º donde los alumnos habían trabajado sobre las fracciones a partir de áreas de rectángulos. Yo había formulado la siguiente pregunta a alumnos con los cuales trabajaba en apoyo fuera de clase: "Aquí tenemos un rectángulo. ¿Puedes fabricar cuartos de formas diferentes?" Los tres alumnos, interrogados individualmente, produjeron todos los dibujos de las figuras 1 y 2 así como uno de ellos el de la figura 3. Al no ser superponibles los pedazos de la figura 1, se planteaba la cuestión de la validación pero los alumnos no podían proporcionar argumentos.

Les pregunté entonces, dejando de lado aparentemente el problema de los cuartos, si podían fabricar octavos de formas diferentes. Tuve entonces, entre otras, producciones de los tipos mostrados en las figuras 4 y 5:



Los alumnos podían decir en cada caso que 2 x $\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ y concluir en la igualdad de los diferentes cuartos de la figura 1. Pero les pregunté entonces qué se lograba pegando un octavo del primer tipo con un octavo del segundo. Los alumnos ya no sabían; pensaban que no debía dar $\frac{1}{4}$ pero que, para saberlo, había que recortarlos y pegarlos encima. Sólo pudieron concluir después de haber realizado los embaldosados del tipo de la figura 6.

Para ellos la determinación de una fracción estaba siempre ligada a la posibilidad de embaldosar mientras que durante ese tiempo en clase, se suponía que se trabajaba a nivel numérico. Esto parecía razonable ya que figuras de formas diferentes eran codificadas por una misma fracción y porque los alumnos de ese curso habían trabajado también sobre las fracciones en el contexto de las longitudes. Pero, en ambos contextos, se trataba de una problemática de superposiciones. Señalemos que la medición de áreas está también en juego en este ejemplo y que la existencia de una medición independientemente de la posibilidad de embaldosar no es una cosa fácil de concebir para alumnos de 6º.

La descontextualización demasiado rápida puede explicarse por la dificultad para los docentes de conocer el estado de los conocimientos reales de los alumnos, y también por la necesidad en que se encuentran de hacer avanzar el tiempo didáctico.

Retomando las distinciones de Claire Margolinas (1993), podemos analizar este hecho diciendo que los docentes, responsables de la fase de conclusión, si no tienen los medios para hacer una fase de validación (es decir de hacer producir por parte de los alumnos argumentos verificables o falsificables por la situación), por ejemplo si la situación no lo permite, van a concluir con una fase de evaluación (concluir bajo su propia autoridad) y los alumnos van a pasar directamente de la acción a la evaluación. Además, puede ocurrir que una fase de validación funcione de hecho como una fase de evaluación para ciertos alumnos.

La conclusión es, sin embargo, necesaria: los alumnos necesitan disponer de una síntesis clara del trabajo realizado y de notas reutilizables[13]. Sin embargo, el vínculo entre el trabajo efectivamente realizado en clase y la síntesis del profesor será tal vez precario para ciertos alumnos. Nos parece necesario, pues, distinguir diferentes niveles en la descontextualización par los alumnos:

- si el contexto es material, poder prever o concluir sin recurrir al material, imaginando solamente la manipulación que está interiorizada,
- utilizar argumentos que pongan en relación conocimientos que ya no se refieren forzosamente al contexto,
- utilizar el conocimiento en otro contexto.

Esta última etapa debería también jerarquizarse según que la problemática de reinversión sea similar a las problemáticas ya encontradas o que sea muy nueva: por ejemplo, para las fracciones, la problemática de la medición de superficies planas es relativamente próxima a la de medición de las longitudes de segmentos aunque el pasaje de una a la otra plantee problemas nuevos e importantes (no superposición de las partes de igual medida) en tanto que la problemática de la medición es diferente de la de las codificaciones de aplicaciones lineales.

V.3. ¿Qué relaciones entre éxito y aprendizaje? ¿Cómo conciliar éxito a corto plazo y éxito a largo plazo?

El análisis de las entrevistas que realicé con maestros y profesores de los primeros años del secundario puso en evidencia también una especie de contradicción entre la voluntad de que los alumnos aprendan y asimilen los contenidos de enseñanza con sentido de manera de poder reinvertirlos en el largo plazo, por una parte, y por la otra la necesidad de un mínimo de éxito en el corto plazo. La presión del éxito a corto plazo proviene tanto de los alumnos y de los padres como de los colegas y parece más fuerte en la secundaria que en la escuela primaria. El profesor necesita un mínimo de éxito de los alumnos para el funcionamiento de su curso. Es también el principal medio de valorización del profesor mismo. El éxito del profesor puede evaluarse según dos criterios:

- por una parte, el éxito de los alumnos en los exámenes o en los controles, especialmente si son comunes a varios cursos del mismo nivel (evaluación oficial). Es además, lo que esperan también los alumnos y los padres de los alumnos,
- por otra parte, la buena marcha del curso, el ambiente propicio al trabajo, con alumnos interesados y que sientan placer en hacer matemáticas. Un índice de esto es la participación de los alumnos.

Según el primer criterio, el profesor debe ayudar lo más posible a los alumnos a adquirir los contenidos que serán objeto de la evaluación importante, la que tiene consecuencias institucionales. Para ello, es necesario una gradación bien adaptada de las dificultades, explicaciones claras, incluso explicaciones "modelo" que los alumnos podrán reproducir (frases de resumen escritas en el cuaderno, ejercicios tipo integrados en el curso). Hay que evitar sobre todo que los alumnos cometan errores en estas evaluaciones oficiales y para ello es necesario ante todo corregir todos los errores

[13] Véase sobre este punto el artículo de J. C. Duperret en Repères-IREM nº 13.

que se producen durante el aprendizaje (un error no corregido tiene todas las chances de reproducirse), e incluso, en la medida de lo posible, prevenir los errores poniendo en guardia a los alumnos, señalándoles zonas peligrosas.

En cuanto al segundo criterio, el profesor debe lograr motivar a los alumnos, captar y conservar su atención, hacerlos participar. Ya no puede pensarse en dar clases magistrales, en todo caso en la secundaria. Los alumnos tienen que tener una parte bastante grande de actividad visible. En cuanto a los profesores, los buenos alumnos son lo que contribuyen a los dos tipos de éxito. El profesor se siente responsable de los dos tipos de éxito pero asegura prioritariamente el segundo con la esperanza de lograr el primero. Pero también asegurando el primero, dando a los alumnos la impresión de que lo que hace es útil para la evaluación, va a obtener el segundo.

V.4. Gestión de la complejidad en los problemas de búsqueda: ¿cómo encontrar problemas con suficiente complejidad y sin embargo abordables para que los alumnos apliquen las nociones con sentido?

Hemos visto que los alumnos con dificultades difícilmente utilizan situaciones que ya han encontrado como situaciones de referencia para tratar cuestiones nuevas. Una cuestión didáctica es la elaboración de situaciones que pueden desempeñar ese papel de referencia permitiendo al mismo tiempo *una gestión de la complejidad de los problemas propuestos a los alumnos* según los diferentes momentos del aprendizaje.

El interés de los *problemas de referencia* es permitir evocar un contenido a partir de un contexto con el sentido que tenía en ese contexto en el momento en que se lo quiere utilizar en otro. Pero no todos los problemas pueden servir de referencia. Por una parte, un problema de referencia debe ser suficientemente característico del saber que pone en juego: éste debe cobrar allí una significación que se encuentra en muchos otros problemas y al mismo tiempo dar varios medios de acceso, por ejemplo permitir una traducción en varios marcos. Para ello debe tener una complejidad suficiente. Por otra parte, y debido a esta complejidad, debe exigir a los alumnos un trabajo y una inversión significativos. Para que pueda desempeñar su papel, el problema debe agradar a los alumnos y ser fácilmente memorizable. Los problemas de referencia tienen una función bien diferente de simples ejemplos que están allí para ayudar a comprender pero no están destinados a ser retenidos. Al contrario, van a formar parte integrante de la clase, e incluso constituir lo esencial de ella durante cierto tiempo, hasta que sea posible una descontextualización suficiente.

En cuanto a cursos compuestos mayoritariamente por alumnos con dificultades, la búsqueda de tales problemas va a ser particularmente importante y delicada. Deben ser suficientemente complejos para que las nociones en juego cobren allí suficiente sentido, pero también deben poder ser abordados por los alumnos sin desalentarlos. De todos modos, si son demasiado complejos, el profesor deberá negociar a la baja y a conducir él mismo lo esencial de la búsqueda. Esto supone también una gestión de la complejidad que debe estudiarse cuidadosamente, sobre todo porque los medios utilizados habitualmente para ello, como el trabajo en grupos, suelen ser un recurso más difícil en este tipo de cursos.

V.5. Gestión de la evaluación: ¿cómo mantener las exigencias sin desalentar?

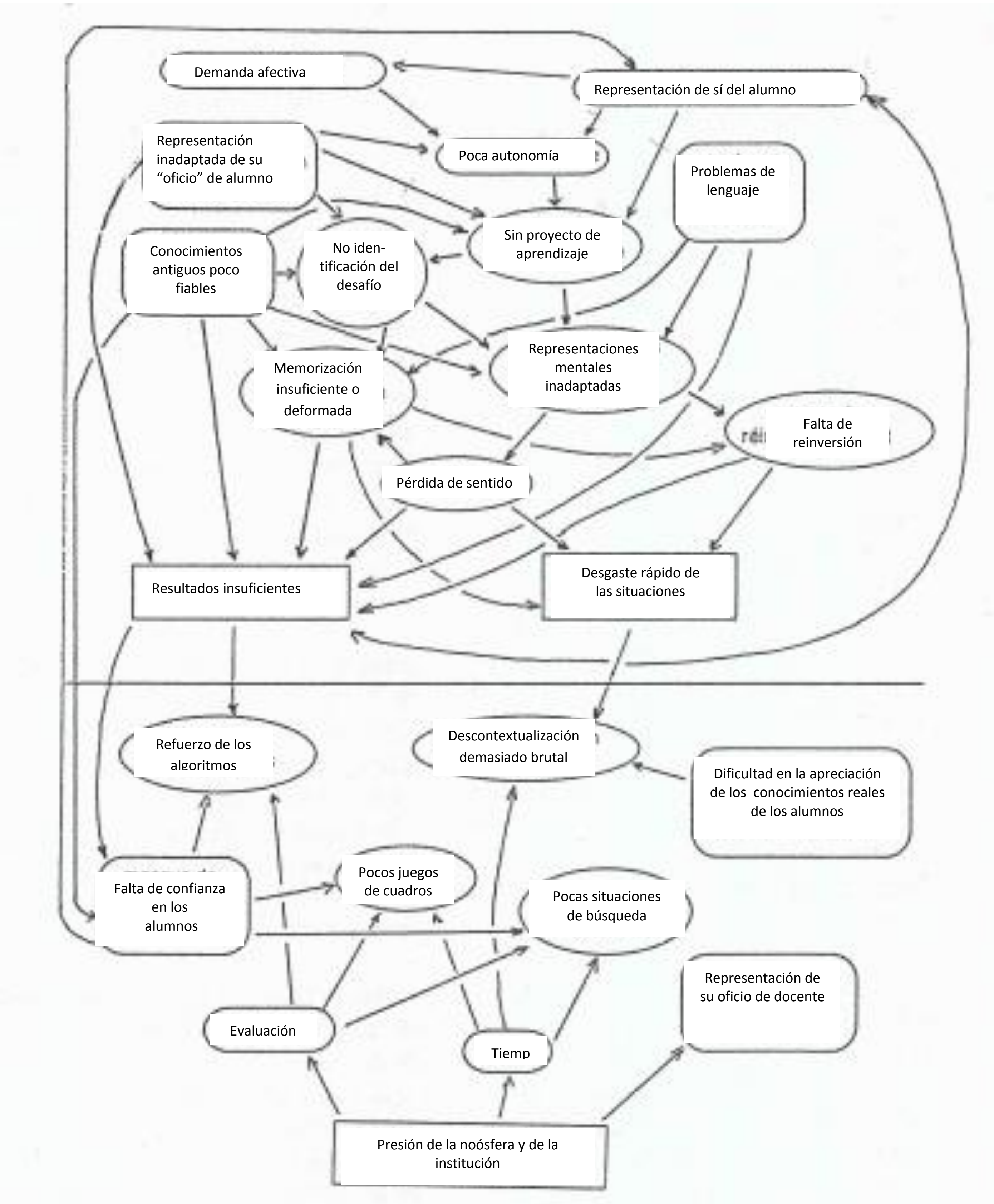
La gestión de un curso flojo plantea también problemas en el nivel de la evaluación. ¿Debe hacerse una evaluación relativa al curso que permita situar a los alumnos unos respecto de los otros y evaluar los progresos en función del nivel de partida o se deben mantener las mismas exigencias que en un curso común? Hemos visto que el docente necesita un mínimo de éxito para gestionar convenientemente su curso. Estará tentado de hacer entonces la primera elección. Pero entonces, ¿cómo aceptarán los alumnos y los padres la orientación de fin de año si las notas del año dejaban esperar otra cosa? Si opta por lo segundo, los alumnos corren el riesgo de desalentarse y a él mismo le cuesta evaluar el efecto de su enseñanza. ¿Deben practicarse entonces varios tipos de evaluación en paralelo, una interna al curso para regular la enseñanza y la otra, externa (controles comunes con otros cursos por ejemplo, con pautas comunes) para decidir la orientación?

Se plantea también otra cuestión: ¿qué tomar en cuenta en la evaluación? Si los alumnos trabajan para tener buenas notas, el contenido de los controles va a determinar aún más lo que les parece importante. Si los controles solo incluyen la aplicación de algoritmos, el riesgo es que los alumnos se desentiendan un poco más de los problemas de búsqueda y esperen que se les dé la técnica a aplicar. Si hay una verdadera parte de búsqueda, el riesgo es tener poco éxito. ¿Cómo calificar la búsqueda de un problema un poco abierto? ¿Puede calificarse separadamente el compromiso del alumno y su resultado? ¿No se corre el riesgo entonces de alentarlo a cumplir solo su oficio de alumno sin involucrarse realmente en el nivel del contenido?

Frente a estos sistemas de restricciones enfrentadas, y frente a las restricciones de tiempo a menudo determinantes, los docentes hacen a veces elecciones diferentes, privilegiando la búsqueda y la expresión de los alumnos o el avance del tiempo didáctico y el entrenamiento en las técnicas. Los sistemas de restricciones que hemos detectado no son independientes y se puede prever que las elecciones de los docentes no van a repartirse de manera aleatoria. Por ejemplo, puede esperarse que la preocupación por hacer adquirir automatismos esté ligada a la presentación del saber descontextualizado y al deseo del éxito a corto plazo. Además, pareciera que las diferencias de elección se acentúan en el caso de cursos flojos porque los docentes refuerzan en ese caso lo que les parece esencial a causa de la presión más fuerte del tiempo.

VI. Imbricación de las dificultades de los alumnos y de las restricciones de los docentes. Desencadenamiento de círculos viciosos. Paradojas

Las dificultades de los alumnos y las restricciones de los docentes se imbrican y producen círculos viciosos y paradojas que vamos a describir en los parágrafos siguientes. He intentado dar cuenta de esa imbricación en el diagrama que sigue:


Demanda afectiva
Representación de sí del alumno
Representación inadaptada de su "oficio" de alumno
Poca autonomía
Problemas de lenguaje
Sin proyecto de aprendizaje
Conocimientos antiguos poco fiables
No iden-tificación del desafío
Memorización insuficiente o deformada
Representaciones mentales inadaptadas
Falta de reinversión
Pérdida de sentido
Resultados insuficientes
Desgaste rápido de las situaciones
Refuerzo de los algoritmos
Descontextualización demasiado brutal
Dificultad en la apreciación de los conocimientos reales de los alumnos
Falta de confianza en los alumnos
Pocos juegos de cuadros
Pocas situaciones de búsqueda
Representación de su oficio de docente
Evaluación
Tiempo
Presión de la noósfera y de la institución

VI.1 Simplificación de las situaciones y desencadenamiento de un círculo vicioso

La dificultad de reinversión de los alumnos es particularmente grande en el caso de situaciones complejas donde hay que identificar un problema conocido dentro de una situación donde intervienen otros elementos. Esto refuerza la idea que se facilita el aprendizaje simplificando el problema, poniendo escalones intermedios. Esto acarrea también, tanto entre los docentes como entre los alumnos, el deseo de recurrir lo más posible al aprendizaje de procedimientos de tratamiento estereotipados, más seguros tanto para unos como para otros. En efecto, en cuanto salen de la rutina, los alumnos con dificultades buscan la aprobación del maestro a cada paso, reclaman pues, algoritmos. Además, del lado de los docentes, se confía menos en los alumnos, se tiende a ayudarlos más y se piensa que, gracias al refuerzo de los algoritmos se les da el medio de lograr al menos algo.

Es cierto que los propios algoritmos suelen ser insuficientemente memorizados por esos alumnos. Esto acarrea una carga en memoria insoportable en el momento de la resolución de problemas, les hace perder el hilo de la resolución y alienta entonces al docente a dar más lugar aún al aprendizaje de las lecciones y los algoritmos. Además, la presión del tiempo unida a la falta de autonomía de los alumnos da a los docentes una doble razón para dudar si deja iniciativas a los alumnos en los cursos flojos.

Además, con los alumnos con dificultades, los profesores tienden a concentrarse en el marco numérico descuidando las actividades geométricas o gráficas que podrían darles otras referencias. El funcionamiento de un juego de marcos requiere por parte de los alumnos, por un lado un mínimo de conocimientos sólidos en cada uno de los marcos puestos en juego –aunque este mínimo pueda ser muy débil en uno de los dos, y por el otro un aprendizaje: la mayoría de los alumnos no lo hacen espontáneamente, porque un cambio de punto de vista es siempre difícil. A causa de estas dificultades, los docentes piensan generalmente que, para los alumnos flojos, hay que hacer el mínimo de mezclas posibles. Rara vez dan a estos alumnos problemas donde se hallan en juego varios marcos o varias nociones. Esto contribuye a aumentar el déficit de conocimientos y a disminuir aún más las fuentes de desequilibrio y por ende las ocasiones de aprender y encontrar relaciones.

Las dificultades de los alumnos contribuyen así al desencadenamiento de un círculo vicioso reforzado luego por las elecciones de los docentes: se dan tantas ayudas que se obtiene un éxito que no indica ningún aprendizaje. Se asiste entonces a un proceso en bola de nieve: los alumnos no se representan las acciones, no perciben los desafíos → los alumnos no memorizan → el profesor se concentra en el aprendizaje de los resultados del curso y del saber-hacer algoritmizado → las situaciones propuestas a los alumnos se resumen en la repetición de problemas de ejecución, del tipo de lo que se pedirá en el momento del control → los alumnos no se representan, no ponen en relación → … y el aprendizaje se resume a un refuerzo de algoritmos cuyas condiciones de utilización jamás son dominadas.

VI. 2. Actividades sin conclusión

Es posible tener otro fenómeno: el docente se preocupa por hacer que los alumnos busquen para dar sentido a las nociones, hacer participar a los alumnos y motivarlos. Pero estas actividades toman tiempo y la fase de conclusión desaparece o es muy reducida, lo que hace que no se despegue de lo que los alumnos saben hacer solos o que el curso, si tiene lugar luego, quede desconectado de la parte de búsqueda. Se vuelve a encontrar allí la presión del tiempo y también dificultades de gestión de la clase durante un balance colectivo: los alumnos deben poder escucharse unos a otros comprometiendo personalmente sus conocimientos y defendiendo los procedimientos que pusieron en práctica en la actividad. Hay así en ciertas clases una presión por limitar las fases de conclusión o reemplazarlas por una conclusión del propio maestro.

VI. 3. Gestión de las fases de búsqueda

Algunos alumnos, ya lo hemos recordado varias veces, alentarán al docente a una negociación a la baja del contrato didáctico. También intentarán encontrar respuestas para evitar comprometer su responsabilidad en la resolución del problema, tratando de funcionar solo en el nivel del contrato. Su falta de autonomía y su necesidad de atraer la atención del profesor aumentarán las ocasiones para que el profesor dé, eventualmente a su pesar e inconscientemente, los indicios que buscan para tener éxito al menor costo cognitivo. Además, los problemas de disciplina y las dificultades de comunicación entre alumnos dificultarán a veces el trabajo en grupo. Esta dificultad en el nivel de la organización de la clase también contribuirá a alentar al docente a simplificar los problemas: colaborando, los alumnos podrían abordar problemas más complejos que los que pueden abordar solos. Se tiene así otro círculo vicioso en el nivel de la gestión de la clase: como los alumnos carecen de autonomía, se adopta una gestión de la clase que reducirá las oportunidades de enseñar la autonomía.

VI. 4. Una paradoja: se está obligado a exigir a los alumnos flojos argumentos y explicaciones que no se piden a los buenos alumnos

Esta paradoja está vinculada con el hecho de que el profesor les tiene menos confianza a los alumnos en un clase floja: sucede así que el profesor reconoce lo que espera al comienzo de una explicación de un buen alumno, y suele entonces completar él mismo para ganar tiempo, pensando que el alumno también podría haberlo hecho; por el contrario, cuando no está seguro que el alumno podría terminar la explicación por sí mismo, va a pedir más detalles, nuevas razones; es entonces para él un medio de evaluación, de verificación de que el alumno ha comprendido bien. Por ejemplo, en una clase floja de 2º[14], para justificar un mínimo de una función lineal por segmentos, un alumno afirma que se trata de una parábola porque es simétrica. El profesor, que ha trabajado las parábolas algún tiempo antes, pide a los alumnos que expliquen por qué no puede ser una parábola: espera una justificación vinculada con la ecuación, de primer grado en un caso, de segundo en el otro. Se observa que los alumnos no son capaces de producir esta justificación, pero no es seguro que muchos alumnos de 2º sean capaces de producirla. En una clase buena, no se habría tenido siquiera la oportunidad de plantear este problema, ya sea porque no se habría presentado la ocasión (una ocasión semejante es casi siempre provocada por el error de un alumno), ya sea porque un alumno hubiera respondido bien enseguida, permitiendo que el profesor piense que estaba claro para el resto de la clase. Este fenómeno tiene como consecuencia que, en un curso flojo, la estructura de una sesión de enseñanza es en general menos lineal que en un curso bueno, a causa de las digresiones numerosas y diversas (del tipo de la que acabamos de señalar, pero también por la solución de problemas de disciplina). Es más difícil, pues, detectar el objetivo de enseñanza y lo que hay que retener de la secuencia.

VI. 5. La pérdida de sentido por atomización de la tarea

Además, cuando el alumno no encuentra o no proporciona la respuesta esperada, el docente es llevado a plantear nuevas preguntas y a descomponer la tarea, lo que lo obliga a explicitar etapas intermedias que quedan casi siempre implícitas cuando los alumnos responden rápidamente. Esta introducción de etapas intermedias contribuye a hacer perder de vista el problema inicial a los alumnos que ya tienen muchas dificultades para mantener el hilo de lo que están haciendo. Uno se encuentra un poco en la misma situación que se produce con la lectura: si se lee un texto descomponiendo cada sílaba, se tienen dificultades para comprender el sentido; del mismo modo, es difícil aprehender el sentido y el interés de un problema cuando uno se ve obligado a descomponer demasiado la tarea. Con frecuencia me vi confrontada a este problema con el alumno que he observado en trabajo individual (ver en anexo como ejemplo, un fragmento de una entrevista a

---

[14] *NdeT:* corresponde al décimo año de escolaridad.

Didier). El mismo fenómeno se ve en el problema de los huevos que relata E Hébert (1992, p. 74) en el momento de la elección de la incógnita.

VII. Perspectivas de búsqueda

Frente a estas restricciones contradictorias, ¿cuáles son los márgenes de maniobra del docente? ¿Cómo ayudarlo a hacer sus elecciones?

VII.1. Aprender a gestionar la complejidad

Hemos denunciado el círculo vicioso que lleva a simplificar los problemas propuestos a los alumnos flojos hasta vaciarlos de su sentido. Sin embargo, tampoco es razonable proponerles problemas que no puedan encarar. Debe preverse un aprendizaje de la resolución de problemas complejos que exija sobre todo la estructuración de los datos, el recorte de problemas más simples. Esta cuestión se plantea tanto para las situaciones de reinversión como para las situaciones de introducción de una noción nueva.

Diversas estrategias han sido ampliamente experimentadas con los alumnos de la escuela primaria y del secundario para este aprendizaje, especialmente:

- propuesta de una situación que comporte un gran número de datos de diferente naturaleza, sin pregunta, y pedir a los alumnos que formulen ellos mismos preguntas a las que podrían responder a partir de los datos, o búsqueda de datos necesarios, eventualmente faltantes, para responder a una pregunta que tengan deseos de plantearse.
- propuesta de una situación compleja sobre la cual se permite a los alumnos buscar sin proveer la solución, luego proposición de un problema más simple que contribuya a la solución del problema precedente. D Butlen y M. Pezard (1992) han obtenido resultados alentadores mediante este método con alumnos de CM2 flojos para problemas de productos cartesianos (menús con elecciones múltiples).

Sin embargo, la gestión de la complejidad es un problema fundamental en didáctica y dista de estar resuelto. La determinación de las variables didácticas y de los criterios de elección para los valores que deben dárseles es un punto central de la teoría de las situaciones didácticas.

VII. 2. Conversión de registros y cambios de marcos

Los problemas complejos pueden requerir cambios de marcos que son uno de los resortes posibles para actuar sobre las concepciones de los alumnos, ayudarlos a superar las dificultades resistentes. La definición de los juegos de marcos posibles a partir de un problema requiere un análisis fino del problema en relación con las concepciones actuales de los alumnos: según el problema y según el nivel de los alumnos, no serán siempre los mismos marcos (en el sentido matemático del término) que se querrán distinguir. La noción de ventana conceptual definida ahora por R. Douady (1992) puede contribuir a este análisis.

Una manera de reconciliar el sentido y la técnica es trabajar las conversiones entre registros para una misma noción (Duval, 1988). La noción de registro se distingue de la de marco en que apunta al significante, las representaciones semióticas ligadas a un concepto, en tanto que la de marco pone en juego el significado: cuando se traduce un problema en el marco algebraico o en el marco geométrico, se va a utilizar objetos de ese marco con sus propiedades, con las relaciones que mantienen con otros objetos del marco: se utilizará modos de procesamiento diferentes pero también objetos diferentes. Por ejemplo, cuando se representa gráficamente ecuaciones mediante rectas, se podrán utilizar propiedades geométricas como el paralelismo, los puntos de intersección… que pueden traducirse en el marco algebraico. Por el contrario, cuando se pasa de las notaciones fraccionarias a las notaciones decimales, se tiene un cambio (o conversión) de registro dentro del marco numérico. Las conversiones de registro, por ejemplo, los cambios de notación de los números, son actividades que contribuyen al sentido al mismo tiempo que desarrollan las técnicas.

VII.3. Las ocasiones para construir el sentido

Uno de los tiempos fuertes en el proceso de despersonalización y descontextualización de los saberes construidos en clase se sitúa en el transcurso de los balances que siguen a una fase de búsqueda de los alumnos. En esos balances, junto a momentos de institucionalización, hay momentos en que el maestro intenta homogeneizar el curso y en que se efectúa una primera despersonalización de los procedimientos puestos a punto por los alumnos en la fase de búsqueda. Pero, ¿qué pasa con los alumnos que no han producido el conocimiento esperado en la fase de acción? ¿O con aquellos que han actuado, incluso tenido éxito en la tarea asignada, pero sin creación de representaciones mentales? ¿Cómo darles la ocasión de hacerlo?

Esta ocasión puede darse pidiendo a los alumnos que digan lo que ha sucedido en una situación de acción, poco después, pero otro día, lo que distingue a esta evocación del balance. Intentando decir colectivamente lo que sucedió, qué problema fue tratado, los alumnos son llevados a repensar el problema, los procedimientos de tratamiento encarados en la clase. Los alumnos que no se han construido representaciones mentales durante la fase de acción encuentran una nueva ocasión y una razón para hacerlo puesto que deberán hablar de lo que ha sucedido y describirlo sin poder actuar de nuevo. Puede ocurrir que para algunos alumnos la acción sea de nuevo necesaria, pero ahora estará ubicada en una nueva perspectiva: hay que actuar no sólo para encontrar una solución sino también para poder hablar de ella. Por una parte, se produce entonces una despersonalización de las soluciones en la medida en que son retomadas y expuestas por alumnos distintos de los que las han encontrado; por otra, se produce una predescontextualización: retomando en frío lo que ha ocurrido, uno elimina los detalles para identificar lo que es importante. En esta ocasión, el sentido oculto, el rol para el aprendizaje de uno u otro de los problemas planteados puede revelarse a algunos alumnos. Al mismo tiempo, por el retorno reflexivo a la acción que supone, estas situaciones favorecen la construcción de representaciones mentales por parte de los alumnos.

Este primer tipo de fase de evocación llena sobre todo las funciones de devolución a posteriori y, por ende, de homogeneización de la clase y de despersonalización de las soluciones con institucionalización local. Debe permitir adaptar la institucionalización local a las concepciones actuales de los alumnos.

VII. 4. Poner en relación, articular varias situaciones

No sólo es importante que los alumnos construyan el sentido de las nociones matemáticas a través de la resolución de problemas bien elegidos y que tengan la ocasión de reconocer ese sentido y no solamente de resolver el problema; también es necesario que tengan la oportunidad de relacionar sentidos diferentes de un mismo concepto y también conceptos diferentes que intervienen en el mismo campo. Los momentos de evocación pueden también tener la función de unir sentidos diferentes de una misma noción vista en contextos diferentes o articular diferentes conceptos. Este segundo tipo de evocación apunta a una serie de problemas sobre un tema, por ejemplo, la simetría ortogonal. Se trata de que los alumnos recuerden varias situaciones ya tratadas en sesiones precedentes sobre un mismo tema, con un poco de distancia: ¿qué se ha aprendido desde que se trabaja con la simetría ortogonal? ¿Qué problemas se han encontrado? Cada uno de los problemas tratados es entonces integrado en un proceso, es interiorizado con un sentido nuevo. Durante esa situación, las formulaciones de los alumnos evolucionan, puede haber retornos a debates de validación que ya se han producido o encontrar la necesidad de nuevos debates. No se está en una situación de formulación propiamente dicha, en la que se trata de producir un nuevo lenguaje, ni en una situación de validación, sino que se vuelve a trabajar con las formulaciones y los argumentos ya producidos.

Este segundo tipo de evocación tiene sobre todo una función de descontextualización y de anclaje de los saberes nuevos en los saberes antiguos con el establecimiento de diversas relaciones.

Estos dos tipos de fases de evocación tienen un rol esencial en la articulación del curso y las actividades de los alumnos. Contribuyen a la institucionalización de las nociones y desempeñan un rol esencial en la constitución de lo que G. Brousseau llama “la memoria de la clase”. ¿Pero no se introduce una nueva contradicción en la gestión del tiempo: estas situaciones de evocación que podrían hacer ganar tiempo a nivel del sentido (a largo plazo) no corren el riesgo de hacer perder demasiado tiempo en el corto plazo?

VII. 5. El rol del maestro en las fases de balance y evocación

En las fases de evocación sobre las que acabamos de hablar, el rol del maestro es esencial en la gestión de la palabra de unos y otros y del tiempo. La elección de dar la palabra a un alumno y no a otro da a la situación una significación completamente distinta: si quiere que la función de homogeneización y de despersonalización se cumpla, dará la palabra a los alumnos que no han encontrado la solución o que no han tenido éxito, para verificar si siguen y retoman por cuenta propia los métodos utilizados; si quiere avanzar en la descontextualización y la formulación, dará más la palabra a los "líderes", con el riesgo de hacer retomar las nuevas formulaciones del problema por el conjunto de la clase durante la sesión o posteriormente. Se ve así una evolución respecto de la fase de balance, en la que son más bien los "líderes" quienes exponen los métodos de resolución que han encontrado, los "seguidores" se contentan con escuchar o con intervenir en los detalles que pertenecen al dominio de lo antiguo. Los márgenes de maniobra del maestro se sitúan también en la elección de las preguntas, en lo que retoma o no de las intervenciones de los alumnos, en sus comentarios. Puede actuar sobre estos márgenes para anclar "lo nuevo" en los conocimientos antiguos y en lo que los alumnos han hecho realmente, o hacer avanzar el conocimiento apartándose un poco del problema realmente tratado, proponiendo un comienzo de generalización o de reinversión en un contexto ligeramente diferente.

El rol del maestro es esencial en el proceso de institucionalización, cualquiera sea el estilo de enseñanza. Debe especialmente elegir lo que debe retenerse en cada sesión y decidir al mismo tiempo qué de lo "antiguo" removilizar, qué retomar en las actividades de los alumnos, hasta dónde ir en la descontextualización. Estas decisiones van a depender de lo que los alumnos han hecho realmente y de la evaluación que hace de ello el profesor: ¿lo que considera como antiguo está realmente adquirido por una cantidad suficiente de alumnos, la apropiación de los métodos de resolución está suficientemente generalizada en el curso? Se trata de una evaluación global, intuitiva de los alumnos, que tiene vínculos con la evaluación oficial realizada aparte, pero que no se reduce a ella (Cf. Perrenoud, 1984). Esta lectura por parte del profesor del trabajo de los alumnos va a hacer intervenir las representaciones que tiene sobre el saber al que se apunta, así como sobre la manera de aprender, sobre su rol en el aprendizaje de los alumnos. Por su parte, los alumnos están preparados de manera desigual para seguir al maestro en una descontextualización de lo que ha sido verdaderamente tratado. También corresponde al maestro dejar o no la posibilidad de rehacer este camino en otros momentos para aquellos que no estuvieran aún preparados.

VII. 6. ¿Qué rol puede desempeñar el discurso "metamatemático" del docente?

Hemos tenido la ocasión de abordar varios aspectos del rol del maestro: en la elección de las situaciones, en la gestión de las intervenciones de los alumnos y de sus propias intervenciones sobre el contenido. Resta aún considerar las intervenciones del docente sobre las matemáticas y los contenidos enseñados. Estas contribuyen a dar puntos de referencia a los alumnos y a poner en relación diferentes contenidos, diferentes situaciones, a poner de relieve el interés de un método u otro. Las investigaciones tratan actualmente las características de este discurso no estrictamente matemático sino referido a las matemáticas, y sobre las variaciones de este discurso que están vinculadas con los docentes, con los contenidos o con un nivel supuesto de los alumnos (ver por ejemplo Josse y Robert, 1993).

Conclusión

Si se encaran desde una óptica de aplicación a la enseñanza, las perspectivas que acabo de desarrollar parece que pueden agravar ciertos problemas, en especial a nivel de la gestión del tiempo: si se prevén más etapas en la descontextualización, si se pide a los alumnos que cuenten lo que han hecho en las sesiones precedentes, se va a pasar mucho tiempo y aumentará la presión a ese nivel. No será posible trabajar de este modo todos los contenidos del programa.

Para interpretar lo expuesto en este trabajo hay que evitar tomar estas perspectivas como sugerencias modelo para el docente; antes bien hay que considerarlas como una búsqueda de herramientas de análisis. Por ejemplo, a propósito de las fases de evocación, se identifican diferentes tipos de funcionamiento del saber según los alumnos y lo que puede estar en juego allí. Es el análisis del funcionamiento de la clase y de las dificultades de los alumnos lo que nos hace pensar que es importante para el docente dar a algunos alumnos una nueva oportunidad de construir el sentido de las nociones puestas en juego en situaciones de acción. Pero esto no quiere decir que la implementación sistemática de tales fases sea posible, ni siquiera eficaz en la enseñanza. Por ejemplo, si los alumnos no logran, en el transcurso del balance o de la evocación, hacer emerger el sentido matemático de la situación de acción, el docente deberá hacerlo por ellos: los alumnos tienen que poder disponer de una conclusión clara a la que podrán referirse. Sucede lo mismo para la puesta en relación de situaciones diferentes que ponen en juego diferentes aspectos de un mismo concepto. Sin embargo, puede pensarse que el hecho de pedir a los alumnos una reflexión a posteriori sobre los problemas resueltos, incluso en el caso en que no lleguen a buen término, les indica que ese trabajo es importante, que está a su cargo y que forma parte de la actividad de la clase de matemáticas. Se puede entonces esperar que tomarán progresivamente a su cargo ese trabajo de reflexión y de ahí también posiblemente su actitud durante la resolución de problemas. Esto no tiene la misma significación.

Quisiera terminar este artículo refiriéndome a las relaciones entre investigación y enseñanza. La didáctica dice cosas sobre la enseñanza y debe ser útil a la enseñanza. El objeto de la didáctica es desarrollar herramientas de análisis que permitirán describir mejor, comprender mejor, prever o reproducir fenómenos didácticos, y por ello mismo podrá contribuir al mejoramiento de la enseñanza. Sin embargo, hay que abstenerse de una difusión demasiado rápida de los resultados de la investigación en la enseñanza: por naturaleza, la investigación pone de relieve ciertos fenómenos que son estudiados y deja en la sombra otros elementos que también son pertinentes para la enseñanza. Una aplicación demasiado rápida de los resultados de la investigación a la enseñanza corre el riesgo, pues, de sobreestimar ciertos factores y producir desequilibrios, que llevan a los efectos de péndulo tan conocidos. Además, los estudios relativos al rol del docente, que se desarrollan actualmente, tienen aún pocos resultados, lo que limita las posibilidades de control de la reproductibilidad de las situaciones.

Bibliografía

AMIGUES R., CHEVALLARD Y., JOSHUA S., PAOUR J. L., SCHUBAUER-LEONI M. L. (1988) Le contrat didactique : différentes approches, *Interactions didactiques* nº 8. Neuchatel et Genève.

BAUTIER E et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* nº 84 p.13-19, INRP, Paris.

BEILLEROT J. et collectif (1990) *Savoir et rapport au savoir*. Editions Universitaires, Paris.

BOERO P. (1987) Analyse de quelques facteurs d'erreur dans l'apprentissage des mathématiques dérivant de l'origine socio-culturelle des élèves. *Actes de la réunion CIEAEM Sherbrooke 1987.* Ed. Université de Sherbrook, 1988.

BONNEVILLE J.F., COMITI C., GRENIER D., LLAPIERRE G. (1990) Eléments d'étude des répresentations des enseignants de mathématiques. Le métier, les contraintes, l'apprentissage. *Publications de l'Institut de Formation des Maîtres, équipe IMAT*. Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 7.2, p. 33-115. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 11.2.

BRUNER J.S. (1983) *Savoir faire, savoir dire.* Presses Universitaires de France, Paris.

BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2. *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 12.2.3.
CHARLOT B. (1983) L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir. Journées Nationales de l'APMEP Lille, 22-24 sept. 1983. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques* nº 342 fév. 1984.
CHARLOT B. ; BAUTIER E. ; ROCHEX J.Y. (1992) *École et savoir dans les banlieues… et ailleurs*. A. Colin.
CHAUVEAU G. (1982) L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire* nº 39 p. 21-39.
CHEVALLARD Y. (1983) *Remarques sur la notion de contrat didactique.* Brochure de l'IREM d'Aix-Marseille repris dans CHEVALLARD Y. (1988b) *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et situation.* Publication de l'IREM de Marseille nº 14.
CHEVALLARD Y. (1988) *Notes sur la question de l'échec scolaire.* Publication de l'IREM de Marseille nº 13.
C.I.E.A.E.M. (1988) *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique.* Comptes rendus de la 39ème rencontre de la C.I.E.A.E.M. Sherbrook, août 1987.
DOUADY R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 7.2 p. 5-31. La Pensée Sauvage, Grenoble.
DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères* nº 6.
DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1986) *Nombres décimaux.* Brochure nº 62 IREM Paris 7.
DUPERRET J.C. Point de vue : objet sans âme, outil sans vie… *Repères* nº 13.
DURU M. (1986) Notation et orientation. Quelle cohérence, quelles conséquences ? *Revue Française de Pédagogie* nº 77 oct-nov-déc 1986.
DURU BELLAT M. et MINGAT A. (1989) Analyse de la genèse temporelle des trajectoires scolaires. *Revue Française de Pédagogie* nº 88.
DUVAL R. (1988) Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg.
FORQUIN J.C. (1981) *L'approche sociologique de la réussite et de l'échec scolaires*. CREFED-ENS Saint-Cloud.
FRANÇOIS F. (1980) Analyse linguistique, normes scolaires et différenciations socioculturelles. *Langages* nº 59 sept. 1980.
FREUDENTHAL H. (1984) L'échec des coureurs. Conférence aux Journées APMEP de Lille, oct. 1983, *Bulletin de l'APMEP* nº 342, fév. 84.
GILLY M. (1980) *Maître – élève. Rôles institutionnels et représentations*. Paris P.U.F.
HEBERT E. (1992) « Les œufs ». Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde. *Cahier DIDIREM* nº 20, IREM Paris 7.
HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de Pédagogie* nº 84 p. 5-12 INRP Paris.
ISAMBERT-JAMATI V. (1990) *Les savoirs scolaires. Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leur réforme*. Ed. Universitaires, collection « Savoir et formation », Paris.
JODELET D. (ed.) (1989) *Les répresentations sociales*. PUF, Paris.
JOSSE E. et ROBERT A. (1933) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 13 nº 1/2 p. 119-154. La Pensée Sauvage, Grenoble.
LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'État, Université J. Fourier, Grenoble.
LAUTREY J. (1980) *Classe sociale, milieu familial, intelligence*. PUF Paris.
LEGER A. (1983) Enseignants du secondaire. PUF Paris.
LEGER A. et TRIPIER M. (1986) Fuir ou construire l'école populaire ? Méridiens Klincksieck.

LEGRAND M. (1990) Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 9.3 p. 365-406. La Pensée Sauvage, Grenoble.
MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
NIMIER J. (1988) *Les modes de relation aux mathématiques*. Coll Psychologie sociale, Ed. Méridiens Klincksieck.
NOIRFALISE R (1987) Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 7.3 La Pensée Sauvage, Grenoble.
PERRENOUD P. (1984) *La fabrication de l'excellence scolaire*. Librairie Droz, Genève.
PERRET-CLERMONT A.N. (1979) *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. Peter Lang, Genève.
PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 7, février 1992.
PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 13 nº 1/2 La Pensée Sauvage, Grenoble.
PERRIN-GLORIAN M.J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) Élèves en difficulté en classe de 6ème. *Repères* nº 3, p. 97-139.
PLAISANCE E. (1985) Colloque du C.N.R.S. de 1984. *L'échec scolaire. Nouveaux débats, nouvelles approches.* Éditions du C.N.R.S.
ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier DIDIREM* nº 1, IREM Paris 7.
ROBERT A. et ROBINET J. (1993) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Cahier DIDIREM* nº 21, IREM Paris 7.
VERGNAUD G. (1991a) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* nº 10.2.3 La Pensée Sauvage, Grenoble.
VERGNAUD G. (1991b) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* nº 96 p. 79-86 INRP Paris.
VYGOTSKI L.S. (1985) Pensée et langage. Editions Sociales Messidor, Paris.

Anexo: extracto de una entrevista con un alumno de CM1

Trabajo en cálculo mental:
Didier intenta hacer 11 x 15 sin escribir:
D. Una vez 5 da 5, una vez 5 otra vez porque debemos hacer así y así, da cinco. Después una vez uno, da 1; otra vez 1 da 1. ¡Ya encontré 15!
M. Entonces, ¿podrías encontrar 10 veces 15?
D. No, no puede ser 150.
M. ¿Por qué?
D. Espere, tengo que pensar, porque siempre hay que pensar antes de decir una pavada. Ah, sí, le voy a decir por qué. Porque yo me detuve en 10, 10 veces 15… y me dije con 11 da 110, con 12, 120, con 13, 130, con 14, 140… da 150.
M. 10 x 15, da 150, ¿estás seguro?... Entonces, ¿puedes encontrar 11 veces 15?
D. 151, lo dije por casualidad.
M. ¿Por qué 151? Escucha, supongamos que tengas cajas de bombones y que hay 15 bombones en cada caja.
D. ¿Y cuántas cajas hay?

M. 11 cajas.
D. Ah, eso tengo que hacerlo también por escrito.
M. No, ya hiciste una parte, vamos, hoy trabajamos primero oralmente; te daré lápiz y papel después.
D. ¿Qué me dijo?
Repito.
D. 15 y 15 da 30, 30 y 15 da 45. 15 y 40 da 55.
M. No estábamos en 40, estábamos en 45.
D. 40 y 15 da 45.
M. Te perdiste, vamos, retoma.
D. 15 y 15 da 30, 15 más 30… ¿Es así? Ya no me acuerdo.
M. ¿Qué es lo que intentas hacer?
D. Trato de ver cuánto da. No puedo. Me pierdo todas las veces.
M. ¿Por qué no puedes?
D. Porque no pienso lo suficiente.
M. Te pierdes porque no sabes dónde estás en tus + 15. Haces + 15… + 15, sumas una caja cada vez. *Es porque no conoces un medio que te permita encontrar más rápido el número de bombones; el problema es que te pierdes con todo eso… No sabes cuántas cajas has contado.*
M. (Después de haber repetido el problema): ¿Qué podrías hacer?
D. Una multiplicación… no, una suma. A menos que parta de un número y después reste 15.
M. ¿Cuál era tu método?
D. Quería hacer +++ hasta que encontrara el número.
M. Adelante. No te olvides de contar las cajas.
Después de haber sumado 3 veces más 15, pierde el hilo y no logra utilizar los métodos precedentes.
D. 75. ¿Cuántas cajas tengo ya? Creo que tengo 5. Después de 75, viene 85.
M. ¿Te parece, 75 más 15?
D. 85.
M. No, 75 más 15.
D. ¿No es 95?
M. Tampoco, mira el 75, para sumar 15, ¿qué puedes hacer primero? Trata de que sea más fácil… 15 es 10 más 5.
D. Entonces yo pongo 5, y dará 80, dará 90.
M. Sí.
D. Eso daría ya 7 cajas, no, daría 6, porque antes tenía 5.
M. Sí. 90, ¿y después?
D. 95.
M. Es 15.
D. 100, estoy en los 100, 115, 105, me equivoco.
M. 105.
D. Da 7 cajas… 115… 130
M. Estabas en 105, 105 y 15, ¿cuánto da?
D. Conté con los dedos.
M. Ah, bueno, te equivocas siempre cuando cuentas con los dedos. Es demasiado grande para que cuentes con los dedos. ¿Cómo haces para sumar 15? Ya lo dijimos.
D. 105, espere, da 125.
M. Pero no, 105 más 5, ¿cuánto da?
D. 110
M. ¿Y qué más?
D. 10
M. ¿Cuánto da?
D. 120

M. Muy bien
D. Después es 135, después 145.
M. No, 145, mira, ¿puede terminar en 5 después de 135?
D. No, 140.
M. 135 más 5 da 140.
D. Ah, sí, son números impares.
M. ¿Cuáles son impares?
D. Los números impares son 1, 3, 5, … 19.
M. De acuerdo, ¿y dónde estabas?
D. 7 cajas.
M. 7 cajas, ¿te acuerdas cuánto era?
D. No.
M. Ah, ¿ves? También hay que contar las cajas. Estábamos en 135, no es 7 cajas.
D. Era 105, 7 cajas.
M. 105, 7 cajas, de acuerdo, entonces 135, ¿cuánto era?
D. 8 cajas.
M. No, porque de 105 a 135, ¿cuánto hay?
D. 15.
M. De 105 a 135, ¿hay 15? Se nota al decirlo, 105, 135, ¿cuánto de más?
D. 15, si es más uno hay 15.
M. Didier, estabas en 7, entonces vuelve a comenzar en 7, 105, ¿8 cuánto da?
D. 135.
M. No.
D. Ah, 105… 120.
M. 120 para 8, ¿y para 9?
D. 135.
M. ¿Para 10?
D. 145.
M. No
D. 160
M. 135 y 5 da 140, ¿y qué tienes que sumar?
D. 150, y 11 es… 150, 155, 160, 170…
M. 165. Has encontrado el resultado, pero te cansaste mucho. ¿No podrías haber encontrado más rápido el resultado para 10 cajas? En cada caja había 15 bombones, si hay 10 cajas, ¿podrías haber encontrado más rápido?
D. No, no podría haber encontrado más rápido.
M. ¿Por qué? Hace un momento lo encontraste.
D. Ah, sí, contando las decenas.
M. Entonces, ¿cuántas decenas tenías que encontrar?
D. Ya no me acuerdo. Ay, tengo poca memoria, sin duda.
M. Te recuerdo que tenemos 15 bombones en cada caja y 10 cajas.
D. Ah, 10, espere, da 110, 120… cuenta de 10 en 10 hasta 240.
M. ¿Qué estás buscando?
D. Estoy buscando si puedo ir más rápido.
M. Dime, si fueran cajas de 10 bombones y tuvieras 15 cajas, ¿lo habrías encontrado fácilmente? Digamos que tenemos bolsas con bolitas. Tienes 10 bolitas en cada bolsa y tienes 15 bolsas, ¿lo habrías encontrado fácilmente?
D. No
M. Tienes 10 bolitas en una bolsa, en 2 bolsas, ¿cuántas tendrías?
D. 10 y 10, 20, después 30, 40, 50.

M. Y entonces en 15 bolsas, intenta decirlo rápido.
D. 155
M. 150, no 155. ¿Cómo hiciste para encontrarlo rápido?
D. 10, 20, 30… y continúa hasta 100…
M. Sí, agregas de a 10, y entonces ¿cuántas veces habías hecho 10?
D. 10 veces
M. No, tenías 15 veces 10
D. Ah, yo creía que Ud. me decía por lo que acabo de decirle
M. Sí, entonces, ¿es parecido 10 cajas con 15 chocolates en cada caja o 15 cajas con 10 chocolates en cada una?
D. Dará 150
M. Puedo tomar un chocolate de cada caja y llenar bolsitas de 10 chocolates. ¿Cuántas bolsitas tendría?
D. 15
M. Entonces, ¿puedes encontrar fácilmente 10 veces 15?
D. 10 veces 15 da 150