UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 66/2017

Exámenes de Doctorado 2009-2016

Recopilación de Agustín García Iglesias - Emilio Lauret

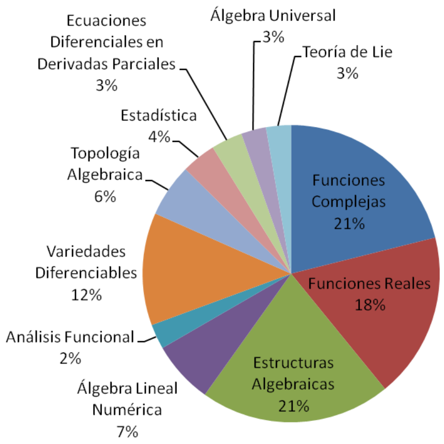
Editor: Jorge G. Adrover

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Exámenes de Doctorado

2009 – 2016



Recopilación de:

Agustín García Iglesias

Emilio Lauret

Marzo 2017

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

Prefacio

Este libro contiene exámenes de doctorado tomados en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) entre diciembre de 2009 y marzo de 2017. Se integra así a la serie de publicaciones que comenzó con el trabajo de la Dra. María J. Druetta en 1995. Entonces, la Dra. Druetta hizo una recopilación de exámenes tomados en el período 1980–1995. Más adelante, retomamos esta tarea y reunimos en una segunda entrega los exámenes correspondientes a los años 1996–2009.

Los exámenes aquí reunidos son un reflejo fiel de los archivos que hemos recibido y solo han sido modificados para ajustarse a parámetros estéticos comunes a la publicación.

Es nuestro deseo que esta serie de publicaciones sea de utilidad para que los doctorandos en matemática de FaMAF puedan superar con éxito esta etapa. Confiamos en que la resolución de los ejercicios que componen los libros de la serie no solo sirve como anticipo del examen sino que también dota a los estudiantes del conocimiento de cada materia que la facultad pretende de los futuros doctores.

A lo largo de estos diez años, hemos recolectado mucha información sobre los exámenes tomados. En esta oportunidad, incluimos en el capítulo final algunas estadísticas que nos resultaron interesantes y que se desprenden de esta base de datos.

Renovamos nuestro agradecimiento a los profesores de la facultad que colaboraron con esta tarea, haciéndonos llegar los exámenes que oportunamente tomaron. Asimismo, agradecemos a la Comisión Editora de Publicaciones de Matemática por llevar a cabo esta publicación.

Los autores.
Marzo 2017.

Contenidos

CAPÍTULO 1

Funciones complejas

Febrero 2017

1. Calcular
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(e^{2\pi z}+1)^2},$$
para $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi \mathrm{i} t}$.

2. Sea D la intersección de los discos $|z| < 1$ y $|z-1| < 1$. Encontrar una aplicación conforme de D sobre el disco unidad.

3. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} n^2 z^n$$
para todo $|z| < 1$. Determinar sus polos y dar la serie de Laurent centrada en $z = 0$ en todos los anillos posibles.

4. Sea f una función holomorfa en el disco unidad con $|f(z)| \leq 1$ y $f(0) = 0$. Probar que para cualquier entero $n \geq 1$, la función $f(z) - 2^n z^n$ tiene precisamente n ceros (contados con multiplicidad) en el disco $|z| < 1/2$.

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente.

(a) Si f es una función entera que satisface $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 2/|z|$ para todo $|z| > 1$, entonces f es constante.

(b) Si f es una función entera tal que $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{1+|z|^4} < \infty$, entonces f es un polinomio de grado ≤ 4.

(c) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Si $\{f_n\} \subset H(G)$ es una sucesión de funciones inyectivas que convergen a f en $H(G)$, entonces f es inyectiva.

6. Demuestre el Teorema de Montel para familias normales. Explique el uso del mismo en la prueba del Teorema de la aplicación de Riemann.

Diciembre 2016

1. Encontrar una aplicación conforme que mande el conjunto

$$\{z = re^{i\theta} : r \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2\},$$

en el disco unidad $|z| \leq 1$.

2. Encontrar todas las funciones enteras tal que $|f(z)| > |f'(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Clasificar las singularidades y dar la parte singular del desarrollo en serie de Laurent en las mismas de la función

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z/2)}{z(1 - e^{2\pi i z})}.$$

4. Encontrar todas las funciones analíticas en el disco unidad tales que

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = f\left(\frac{n^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

(b) Para $n = 2, 3, \ldots$ calcular

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}.$$

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta proporcionando una demostración o un contraejemplo adecuado.

(a) Sea f una función entera e inyectiva. Entones f es un polinomio de grado uno.

(b) Sea f una función tal que las ecuaciones de Cauchy-Riemmann se cumplen para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es una función entera.

(c) No existe ninguna función analítica en el disco unidad tal que $|f(z)| = e^{|z|}$ en todo el disco.

(d) No existe ningun polinomio P de grado N tal que

$$\int_{|z|=2} \frac{P(z)}{(n+1)z - 1} \, \mathrm{d}z = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, N$.

7. Enunciar el Teorema de factorización de Weierstrass.

8. Enunciar y demostrar el Teorema de Casorati-Weierstrass.

9. Enunciar y demostrar el Teorema de Hurwitz.

Agosto 2016

1. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ para $a>0$.

2. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con serie de Taylor $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ centrada en 0. Si $a_k \geq 0$ para todo k y $r = \min\{|z_0| : f \text{ tiene un polo en } z_0\} < \infty$, entonces f tiene un polo en $z = r$.

3. Sea $f : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ analítica tal que $f(1) = 0$. ¿Cuán grande puede ser $|f(2)|$?

4. Determinar dónde converge la función

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)^z}.$$

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente.

(a) En el anillo de funciones enteras $H(\mathbb{C})$, todo ideal maximal es igual a $\mathcal{I}_a := \{f \in H(\mathbb{C}) : f(a) = 0\}$ para algún $a \in \mathbb{C}$.

(b) Si G es un abierto conexo y simplemente conexo de $\mathbb{C}$, entonces toda función holomorfa en G tiene primitiva.

(c) Sea D el disco unidad abierto en $\mathbb{C}$. Si $f : D \to \mathbb{C}$ satisface que f^2 y f^3 son analíticas en D, entonces f es analítica en D.

(d) Sea G abierto y conexo en $\mathbb{C}$, $a \in G$ y f una función analítica en G. Si

$$\mathrm{Re}(f(z) - f(a)) \leq -\,\mathrm{Im}(f(z) - f(a))$$

para todo $z \in G$, entonces f es constante.

6. Enuncie y demuestre las distintas caracterizaciones de dominios simplemente conexos.

Diciembre 2015

Nota: Justifique todas sus respuestas. $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ el disco (abierto) unidad.

1. Sea u una función armónica en $\mathbb{C}$ cuya imagen está contenida en un semiplano. Demostrar que u es constante.

2. Sea $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z+3)}$. Hallar los desarrollos de Laurent centrados en: (i) $z_0 = 0$, (ii) $z_0 = 2$. En cada caso indicar el conjunto en que la serie obtenida representa a la función.

3. (a) Construir una aplicación conforme f de $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ en D.

(b) Calcule el número de tales f si además requerimos que $f(1-i) = 0$ y $f'(0) < 0$.

4. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}_{>0}.$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x.$

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente. Responder correctamente al menos 4.

(a) Existe al menos una función entera f no constante tal que $f(z) = f(\frac{1}{z})$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

(b) Si f es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ tal que $|f(z) + 3 + 7i| > 1/4$ para todo z en $\mathbb{C}$ donde la f esté definida, entonces f es constante.

(c) El polinomio $p(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$ tiene tres ceros en D.

(d) Existe una función analítica $f : D \to D$ tal que $f(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}i$ y $f'(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$.

(e) Existen funciones analíticas no constantes f y g sobre alguna región G tales que $f\bar{g}$ es analítica.

(f) Si f tiene un polo simple en $z = a$ y g es analítica en un abierto que contiene a a, entonces $\operatorname{Res}(fg; a) = g(a)\operatorname{Res}(f; a)$.

(g) Si G es una región y $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica e inyectiva, entonces $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in G$.

6. Enunciar y probar el Teorema de Casorati-Weierstrass.

7. (a) Enunciar el Teorema de la aplicación de Riemann.

(b) Enuncie al menos cinco caracterizaciones de regiones simplemente conexas del plano complejo y demuestre la equivalencia entre al menos tres de dichas caracterizaciones.

Julio 2015

1. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$.

2. Calcular las series de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^4}$ para $|z| < 1$ y para $1 < |z|$.

3. (a) Sea Ω la región comprendida entre $|z| < 1$ y $|z - i/2| < 1/2$. Hallar una biyección conforme de Ω sobre el disco unitario.

(b) Dar una función $\Phi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R}) : \det(g) = 1\} \to \mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ suryectiva tal que $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ si y sólo si $g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{SO}(2) = \{\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) : \theta \in \mathbb{R}\}$.

4. Sea G un abierto conexo en $\mathbb{C}$. Probar las siguientes afirmaciones para $f, g \in H(G)$ y $a \in G$.

(a) f divide a g (i.e. $\exists h \in H(G) : g = fh$) si y sólo si cada cero de multiplicidad $m \geq 1$ de f es un cero de multiplicidad $n \geq m$ de g.

(b) $\mathcal{I}_a := \{h \in H(G) : h(a) = 0\}$ es un ideal maximal de $H(G)$.

(c) Existe un ideal de $H(\mathbb{C})$ que no está contenido en ningún $\mathcal{I}_b$ para cualquier $b \in \mathbb{C}$.

5. (a) Defina la función Gamma como un producto infinito. Enuncie (sin demostrar) la fórmula de Gauss y $\Gamma(z)$ como una integral sobre $(0, \infty)$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(b) Enuncie y demuestre el Teorema del mapeo abierto.

(c) Enuncie y demuestre el Lema de Schwarz.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente.

(a) Existe una función entera no constante f tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $|z| = 1$.

(b) Existe f entera tal que $f(\frac{1}{2\pi i}) = 0$ y $f^{(n)}$ no se anula en todo $\mathbb{C}$ para todo $n \geq 1$.

(c) Existe una función holomorfa biyectiva entre $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

(d) Toda función holomorfa y acotada del disco unitario a $\mathbb{C}$ tiene primitiva.

Agosto 2014

$D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ el disco (abierto) unidad.

1. Dar una aplicación conforme de $G := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - i| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 1| < 1\}$ sobre el complemento de $\overline{D}$.

2. Sea $f(z) = \dfrac{(z - \pi)\, e^{\frac{1}{z-1}}}{\mathrm{sen}(z)(z - 7)}$.

(a) Determinar las singularidades aisladas de f en $\mathbb{C}$ y clasificarlas.

(b) Calcular $\int_\gamma f$, donde γ es la curva simple dada por $|z - 7| = 1$ recorrida en sentido antihorario.

3. Calcular las siguientes integrales.

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)^2}\, \mathrm{d}x. \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \mathrm{sen}^2\,\theta}.$$

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente. Responder correctamente al menos 4.

(a) Existen funciones analíticas no constantes f y g sobre alguna región G tales que $f\,\bar{g}$ es analítica.

(b) El polinomio $f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ tiene 2 soluciones en $A := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| < 2\}$.

(c) Si f tiene un polo doble en $z = a$ y g es analítica en un abierto que contiene a a, entonces $\mathrm{Res}(fg; a) = g(a)\ \mathrm{Res}(f; a)$.

(d) Si f es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ tal que $|f(z) + 2 + 5i| > 1/2$ para todo z en $\mathbb{C}$ donde la f esté definida, entonces f es constante.

(e) Existe una función $f : D \to D$ analítica tal que $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ y $f'(\frac{1}{4}) = \frac{9}{10}$.

(f) Si G es una región y $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica e inyectiva, entonces $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in G$.

5. Enunciar y demostrar el Lema de Schwarz.

6.
- Enunciar el Teorema de la aplicación de Riemann.
- Enuncie al menos cinco caracterizaciones de regiones simplemente conexas del plano complejo y demuestre la equivalencia entre al menos tres de dichas caracterizaciones.

7. Dar la factorización de la función $\operatorname{sen}(\pi z)$ y demostrarla usando el Teorema de factorización de Weierstrass.

Diciembre 2013

1. Sea $\lambda = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ y sea R la región

$$R = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < 1 \text{ y } |z - \overline{\lambda}| < 1\}.$$

Determinar la imagen de R por la función $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$.

2. Sean f y g funciones enteras. Mostrar que $f(z)^2 + g(z)^2 = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, si y sólo si existe una función entera $E(z)$ tal que $f(z) = \cos E(z)$ y $g(z) = \operatorname{sen} E(z)$.

3. (a) Probar que para todo $m, \ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \leq m$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^m}{z^{\ell+1}} = \binom{m}{\ell}.$$

(b) Probar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{27}\right)^n \binom{3n}{n} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

4. Resolver dos de los siguientes ejercicios

(a) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, \mathrm{d}x$.

(b) Para $n = 2, 3, \ldots$ calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + 1}$.

(c) Probar que para todo $0 < a < 1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}$.

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta proporcionando una demostración o un contraejemplo adecuado.

(a) $z = 0$ es una singularidad esencial de la función $\cos(e^{1/z})$.

(b) Sea f una función no-constante holomorfa en un conjunto abierto que contiene el disco unidad (cerrado). Si $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$, entonces la imagen de f contiene el disco unidad.

(c) El polinomio $z^4 - 4z^2 + z + 1$ tiene tres raíces en el disco unidad $\{z \mid |z| < 1\}$.

(d) Para todo z, $|z| \leq 1$ se cumple $|1 - (1-z)e^z| \leq |z|^2$.

6. Enunciar y demostrar el Teorema de Casorati-Weierstrass.

7. (a) Enunciar y demostrar la fórmula de producto para la función $\operatorname{sen}(z)$.

(b) Probar que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m\,2m}{(2m-1)\,(2m+1)}\cdots.$$

Julio 2013

1. (a) Determinar si existe una función analítica del disco abierto de radio 1 en sí mismo y tal que $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ y $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.

(b) Sea ϕ una transformación de Möbius, definida en el plano complejo extendido, tal que transforma el disco cerrado $\bar{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ en un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$ y tal que que $\phi(S) \subset S$, donde $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Probar que $\phi(D) \subset D$.

2. Calcular, usando el método de los residuos: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Determinar si existen funciones analíticas, definidas en $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ tales que:

(a) su parte real sea $f(x,y) = x^2 + y^2$;

(b) su parte imaginaria sea $h(x,y) = x^2 - y^2$;

(c) su parte real esté acotada;

(d) se anule en el borde de un disco.

4. Decidir la validez de las siguiente afirmaciones. Justificar

(a) $\operatorname{sen}(z)\bar{z}$ es analítica en $\mathbb{C}$;

(b) $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ es analítica en $\mathbb{C}$;

(c) Existe una función analítica $f(z)$, no constante, cuyo dominio es el disco abierto de radio 1, y tal que $|f(0)|$ sea un máximo local de de $|f(z)|$.

5. Enunciar y demostrar el Teorema de la aplicación conforme de Riemann.

Marzo 2013

1. (a) Encontrar una aplicación conforme que lleve la región

$$\Omega = \{z = re^{i\theta} : -\tfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{6}\},$$

en el disco unidad $|z| \leq 1$. Dibuje una figura incluyendo algunos puntos característicos y donde son llevados por la aplicación.

(b) Sea D el disco unidad abierto y sea $\mathbb{C}_+$ el semiplano superior abierto. Mostrar que

$$F(z) = \frac{z - i(z^2+1)}{z + i(z^2+1)},$$

es una aplicación conforme de $D_+ = D \cap \mathbb{C}_+$ en D.

2. La función de Bessel $J_n(z)$ se define como el n-esimo coeficiente de la serie de Laurent de la función $e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$:

$$e^{\frac{z}{2}(\zeta - 1/\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\zeta^n.$$

(a) Demuestre que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}$.

(b) Demuestre que $J_n(z)$ tiene la siguiente representación integral

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\operatorname{sen}\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(c) Pruebe que la función de Bessel tiene la siguiente expansión en serie

$$J_n(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(n+v)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2v}.$$

3. Si $u \notin \mathbb{Z}$, demuestre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\operatorname{sen}\pi u)^2}.$$

Ayuda: Integrar la función $f(z) = \dfrac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}$, en el círculo $|z| = R_N = N + \frac{1}{2}$ con $N \geq |u|$ entero y tomar el límite $N \to \infty$.

4. Encontrar todas las funciones f analíticas en el disco unidad tales que

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$.

(b) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq e^{-n}$.

5. Para $n = 2, 3, \ldots$ calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}$.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta proporcionando una demostración o un contraejemplo adecuado.

(a) Toda función meromorfa es el cociente de dos funciones enteras.

(b) Si una función $f(z)$ es entera e invectiva entonces es un polinomio de grado 1.

(c) Sean f y g funciones enteras tal que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$.

(d) Para λ estríctamente mayor a 1, existen exactamente dos soluciones de la ecuación $ze^{\lambda - z} = 1$, en el disco unidad abierto $|z| < 1$.

(e) El polinomio $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ tiene seis raíces en el disco unidad $\{z \mid |z| < 1\}$.

(f) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$z^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z^2 - 2z\cos(\tfrac{2k+1}{2n}\pi) + 1).$$

7. Enunciar y demostrar el Teorema de Rouche.

8. Demuestre que si f y g son analíticas y coinciden en un conjunto con un punto de acumulación entonces son iguales.

Junio 2012

PARTE I

1. Construir una aplicación analítica que lleve $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 5\}$ conformemente sobre el interior del disco unidad $\{z \mid |z| < 1\}$.

2. Encontrar todas las funciones enteras f tales que

$$|f(z)| \leq M(1 + \sqrt{|z - i|}).$$

para algún número positivo M.

3. a) Indicar las singularidades y encontrar la expansión en series de Laurent de la función

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)},$$

en el dominio $0 < |z| < 1$.

b) Si f es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_N\}$ entonces existen $N+1$ funciones enteras $g_0, \ldots, g_N$ tales que

$$f(z) = g_0(z) + g_1(1/(z - p_1)) + \cdots + g_N(1/(z - p_N)).$$

4. Probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{27}\right)^n \binom{3n}{n} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

5. Probar que

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\text{(ii)} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \qquad \text{para } a > 1.$$

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta proporcionando una demostración o un contraejemplo adecuado.

(a) El polinomio $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ tiene seis raíces en el disco unidad $\{z \mid |z| < 1\}$.

(b) Si f es una función entera y $f(z)/z^n \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces f es un polinomio de grado $n-1$.

(c) Existe una función analítica en $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ tal que

$$f(x)^2 = 1 - z^2.$$

(d) Si f es una función analítica que lleva el disco unidad, $\{z \mid |z| < 1\}$, en si mismo, $f(0) = 0$ y $f(1/5) = 1/5$ entonces $f(z) = z$.

PARTE III

7. Enunciar y demostrar el Teorema de Montel.

8. a) Demostrar que

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

donde la convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

b) Demostrar que

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

9. Enunciar el Teorema de la aplicación de Riemann y dar un resumen se su demostración.

Febrero 2012

PARTE I

1. (a) Determinar y dibujar la región de convergencia de la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ y hallar la función que ella representa en esa región.

(b) Sea $f(t)$ continua a trozos en $0 \leq t \leq a$. Mostrar que la función dada por $F(z) = \int_0^a e^{-tz} f(t) dt$ es entera y dar su desarrollo en potencias de z centrado en $z = 0$.

2. Hallar una aplicación conforme que mande el disco unitario $U = \{z : |z| < 1\}$, sobre el disco punteado $U' = \{z : 0 < |z| < 1\}$. ¿Son U y U' conformemente equivalentes?

3. Sea $f(z)$ holomorfa en el disco abierto $D(0, R)$ que satisface $|f(z)| \leq |z|^n$ para algún entero positivo n y $\forall z \in D(0, R)$.

(a) Muestre que f tiene un cero en $z = 0$ de orden mayor o igual a n.

(b) Muestre que $\frac{f(z)}{z^n}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$.

(c) Deducir que si f es entera y $|f(z)| \leq |z|^n$, para algún entero positivo n y para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = cz^n$ para algún $c \in \mathbb{C}$.

4. ¿Verdadero ó falso?

(a) Si $f(z)$ analítica y no idénticamente nula en $|z| < R$ y $f(0) = 0$, entonces existe un número r, con $0 < r < R$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo z con $0 < |z| < r$.

(b) f es entera tal que $g(z) = f(\frac{1}{z})$ tiene un polo en $z = 0$, entonces f es un polinomio.

(c) f entera no constante entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

(d) Sea $f(z)$ una función entera que es real sobre el eje real e imaginaria sobre el eje imaginario, entonces f es una función impar.

(e) f entera tal que $f(\ell)$ es un conjunto acotado para toda recta vertical ℓ, entonces f es constante.

Parte II

5. Demuestre la igualdad $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\mathrm{d}x}{e^x+1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}, \quad 0 < a < 1.$
Analizar qué condición debería satisfacer $a \in \mathbb{C}$ para que siga valiendo la igualdad.

6. (a) Enunciar el Teorema de Mittag-Lefler.

(b) Sea $f(z) = \pi\cot(\pi z)$. Para cada $N = 1, 2, 3...$, calcular por residuos la integral $I_N = \displaystyle\int_{C_N} \frac{f(w)\,dw}{z^2-w^2}$, donde $z \notin \mathbb{Z}$ y C_N es el borde del rectángulo $-(N+\frac{1}{2}) < x < (N+\frac{1}{2})$, $-N < y < N$, recorrido en sentido antihorario.

(c) Deducir que

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Parte III

7. Enunciar y demostrar el teorema que afirma que el "máximo valor del módulo de una función analítica se alcanza en el borde".

8. (a) Enunciar y demostrar el Lema de Schwarz para una función holomorfa en el disco unitario U.

(b) Usando este lema probar el siguiente resultado: Sea $\Omega \neq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa. Suponiendo que existe $f : \Omega \to U$, biyectiva y conforme tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$, para algún punto fijo $z_0 \in \Omega$, entonces tal f es única, es decir no puede haber dos distintas con esta propiedad.

Noviembre 2011

Parte I

1. Describir la región del plano complejo en la cual converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(\frac{nz}{(z-2)}\right).$$

Hacer un dibujo aproximado de dicha región.

2. Dar un mapa conforme de la región $A = \{z : |z-1| < 1, |z-1/2| > 1/2\}$ sobre el semiplano superior.

3. Sea $f(z) = \cos\left(\dfrac{z^2-4}{(z-2)^2}\right)$.

(a) Calcular el desarrollo de Laurent en $z = 2$ y decir que tipo de singularidad es.

(b) Dar el residuo de f en $z = 2$.

4. Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$.

PARTE II

5. Determinar el grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ de funciones analíticas biyectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

6. Sea f analítica en el disco $D = \{z : |z| < 1\}$. Supongamos que hay una constante positiva M tal que

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \le M, \quad (0 \le r < 1).$$

Probar que

$$\int_{[0,1)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

7. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sean f_1 y f_2 analíticas en Ω sin ceros en común. Probar que existen funciones g_1 y g_2 analíticas en Ω tales que $f_1g_1 + f_2g_2 = 1$. *Ayuda:* Mittag-Leffler.

PARTE III

8. El Teorema de Casorati-Weierstrass.

(a) Enunciar el teorema referido sobre la imagen de los entornos de una singularidad esencial por una función analítica.

(b) Probar usando este teorema que la imagen de una función entera no constante es densa en $\mathbb{C}$.

9. El Principio del módulo máximo.

(a) Escribir el enunciado del teorema referido que dice que "el máximo se alcanza en el borde".

(b) Probar el teorema enunciado.

10. El Teorema de factorización de Weierstrass.

(a) Enunciar el Teorema de factorización de Weierstrass, que expresa a una función entera como un producto de cierta función y un producto infinito de factores elementales. Explicar como se definen los factores elementales.

(b) Enunciar el teorema que asegura la existencia de una funcióna analítica con ceros predeterminados.

(c) Usando el teorema del item anterior mostrar que existe una función analítica en el disco unidad que no se puede extender a ningún abierto que contenga al disco unidad.

Julio 2011

1. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo de Taylor de una función f holomorfa en $D(0,R) = \{z : |z| < R\}$.

(a) Probar la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{\mathrm{i}t})|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \qquad \forall\, 0 \leq r < R.$$

Ayuda: si $s_n(z)$ es la n-enésima suma parcial de la serie de Taylor, usar el hecho que $s_n(z) \to f(z)$ uniformemente en $|z| \leq r < R$.

(b) Si $|f(z)| \leq M(r)$ sobre $|z| = r < R$, deducir que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2$. Usar este resultado para dar una demostración del conocido Teorema de Liouville para funciones enteras.

(c) Si $|f(0)| = M(r)$ para algún valor de r con $0 < r < R$, mostrar que f es constante.

2. (a) Enunciar y demostrar con todo detalle el principio de módulo máximo para una función f holomorfa en un abierto $A \subset \mathbb{C}$.

(b) Deducir que si $u(x,y)$ es una función armónica en el disco unitario $D = \{z : |z| < 1\}$, continua en $\overline{D}$ y tal que $u = 0$ sobre el borde $|z| = 1$, entonces $u \equiv 0$ en D.

3. Construir una transformación conforme biyectiva que aplique la región comprendida entre los círculos $|z - 1/2| = 1/2$ y $|z - 1| = 1$, sobre el disco unitario $D = \{w : |w| < 1\}$.

4. Elegir uno de los siguientes problemas:

(a) Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$. Muestre que el radio de convergencia de la serie es 1 y que f no puede extenderse analíticamente más allá del disco unitario.
Ayuda: estudiar el comportamiento de f sobre el conjunto de puntos de la forma $re^{\mathrm{i}\frac{2\pi m}{3^n}}$, con $m, n > 0$ enteros y $0 < r < 1$.

(b) Sea f una función holomorfa nunca nula en el disco unitario $D = \{z : |z| < 1\}$, que es continua en $\overline{D}$. Muestre que si $|f(z)| = 1$, para todo z tal que $|z| = 1$, entonces f es constante.
Ayuda: mostrar que f admite extensión holomorfa a todo $\mathbb{C}$, definiendo $f(z) = 1/\overline{f(1/\bar{z})}$, para $|z| > 1$.

5. Dada $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$, hallar los desarrollos de Laurent centrados en: i) $z_0 = 0$, ii) $z_0 = 1$, iii) $z_0 = \infty$. En cada caso indicar el conjunto en que la serie obtenida representa a la función.

6. Determinar la verdad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones, proporcionando una demostración para aquellas que sean ciertas y dando un contraejemplo o una buena justificación para aquellas que sean falsas.

(a) f entera tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq R$ y $f(\mathrm{i}\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$, entonces f es una función impar i.e. $f(-z) = -f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) f entera tal que $f(z) = f(\frac{1}{z})$ para todo $z \neq 0$, entonces f es constante.

(c) Sea z_0 singularidad aislada de $f(z)$, con $b = \mathrm{Res}(f, z_0)$. Entonces $f(z) - \dfrac{b}{z - z_0}$ tiene una primitiva holomorfa en $\{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, para algún $\varepsilon > 0$.

(d) Dada $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, existe una función holomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $u = \mathrm{Re}(f)$.

(e) No hay funciones enteras suryectivas $f : \mathbb{C} \to \{w : \mathrm{Re}(w) > 1\}$.

(f) Existe una función holomorfa $F : \{z : |z| > \frac{3}{2}\} \to \mathbb{C}$ tal que

$$F'(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1},$$

para todo z con $|z| < \frac{3}{2}$.

(g) Si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ con $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$, entonces z_0 es evitable.

7. Determine el conjunto de los z's para los que $(1 + z) \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z^{2^n})$ converge absolutamente. Deduzca que el producto infinito coincide con $(1 - z)^{-1}$ en la región de convergencia.

8. Elegir al menos uno de los siguientes problemas:

(a) Demuestre la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\mathrm{d}x}{e^x + 1} = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(a\pi)}, \quad 0 < a < 1.$$

Considere el problema de extender esta igualdad para valores complejos de a, determinando la región maximal de $\mathbb{C}$ en el cual la integral sea una función holomorfa del parámetro a.

Ayuda: integrar una función conveniente sobre un rectángulo de vértices $-R, R, R+2\pi\mathrm{i}, -R + 2\pi\mathrm{i}$, recorrido en sentido antihorario.

(b) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x}{1 + x^2}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Febrero 2011

1. Probar que no existe ningún mapa conforme y 1-1 del disco pinchado $G = z : 0 < |z| < 1$ en el anillo $A = z : 1 < |z| < 2$.

2. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \int_0^1 f(t) \cos(tz)\, \mathrm{d}t.$$

Probar que h es entera.

3. Sea f compleja definida en el disco $D = z : |z| < 1$ tal que f^2 y f^3 son analíticas. Probar que f es analítica.

4. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(4\theta)}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$.

5. Probar que si f es entera e inyectiva, entonces existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = az+b$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

6. Enunciar el Teorema de factorización de Weirstrass para el disco unidad y deducir que toda función meromorfa en el disco unidad es cociente de dos funciones holomorfas.

7. V o F.

(a) Sean $\{g_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ funciones enteras con ceros reales. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$ y que la convergencia es uniforme sobre compactos y que g no es idénticamente cero. Probar que los ceros de $g(z)$ son reales.

(b) Si f es entera y $f(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, entonces f es constante.

(c) Si f es entera tal que $|f(z)| = |\operatorname{sen}(z)|$ para todo z, entonces $f(z) = C\operatorname{sen}(z)$ para una constante C de módulo 1.

(d) Existe una f analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ para todo $z \neq 0$.

(e) Si f es entera y lleva sucesiones no acotadas en sucesiones no acotadas, entonces f es un polinomio.

(f) Si f es analítica en un entorno del disco unidad y $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$, entonces la ecuación $f(z) = z^3$ tiene una única solución en el interior del disco unidad.

Diciembre 2010

En este examen, U denota el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(t)$ es un número real para cada número real positivo en U: Escribimos $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la serie de Taylor asociada a f centrada en 0.

(a) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie?

(b) Mostrar que $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. (a) Mostrar que la función definida en el disco unidad definida por la serie de potencias $\sum_{n\geq 1} \frac{z^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$ admite continuación analítica a lo largo de cualquier camino que no pasa por 1 y que se extiende a una función continua en la clausura de U.

(b) Mostrar que no existe ninguna función holomorfa g definida cerca de 1 de manera que $f = g$ en la intersección del dominio de g con U.

3. (a) Enunciar el Teorema de factorización de Weierstrass para funciones holomorfas en el dominio $\mathbb{C}$.

(b) Demostrar que toda función meromorfa es el cociente de dos funciones holomorfas.

4. Sea f una función holomorfa en U. Mostrar que $f_n(z) := f(z^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ es una familia normal en U.

5. Sea f una función holomorfa en U que satisface

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{\mathrm{i}\theta})| \mathrm{d}\theta \leq C < \infty$$

para todo $0 \leq r < 1$. Escribir $f = \sum a_n z^n$. Demostrar:

(a) $a_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i} n} \displaystyle\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n} \mathrm{d}z$, para $0 < r < 1$.

(b) $|a_n| \leq C/n$.

(c) $\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$.

6. Sea u una función armónica en $\mathbb{C}$ cuya imagen está contenida en un semiplano. Demostrar que u es constante.

7. (a) Construir una aplicación conforme f de $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0,\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ en el disco unidad U.

(b) Calcule el número de tales f si además requerimos que $f(1 + \mathrm{i}) = 0$ y $f'(0) < 0$.

8. Determinar las funciones holomorfas definidas en $U \setminus \{0\}$ que son acotadas y sujetas a la condición $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Agosto 2010

1. Sea L una circunferencia en $\mathbb{C}$ y a, b puntos en $\mathbb{C} \setminus L$. Construir una transformación de Moebius f de manera que f transforma a en b y deja invariante a L. ¿Es tal transformación f única?

2. Mostrar que la función definida en el disco unidad definida por la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ admite continuación analítica a lo largo de cualquier camino que no pasa por 1.

3. Enunciar el Teorema de Runge.

4. Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas definidas en un abierto conexo D que satisface:

(a) existe un punto v en D de manera que la sucesión $f_n(v)$ converge,

(b) la sucesión de funciones f_n' es locamente acotada.

Mostrar que f_n es una familia normal en D.

5. Sean $r > 0$ y D un entorno abierto de la bola cerrada de centro 0 y radio r. Sea f una función holomorfa en D y a, b puntos en el disco abierto de centro 0 y radio r.

(a) Calcular $\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}z$ en términos de $\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)} \mathrm{d}z$ y $\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-b)} \mathrm{d}z$.

(b) Deducir el Teorema de Liouville a partir de (a).

6. Enuncie el Teorema de la aplicación de Riemann.

7. Construir una sucesión de polinomios p_n de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) = \begin{cases} 2 & \text{si } \mathrm{Re}(z) > 0, \\ -2 & \text{si } \mathrm{Re}(z) < 0, \\ 2 & \text{si } \mathrm{Re}(z) = 0. \end{cases}$$

8. Mostrar que no existe función holomorfa en el disco unidad sujeta a la condición $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$, para $n = 1, 2, \ldots$.

Marzo 2010

1. (1.75 puntos) Sea f entera y p polinomio. Probar que si $|f(z)| \le |p(z)|$, entonces f es un polinomio. ¿Qué pasa si $|e^{f(z)}| \le |p(z)|$?

2. (1.75 puntos) Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + \alpha^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha > 0.$$

3. (2 puntos) Llevar $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \le 1\}$ sobreyectivamente al disco unidad $D := B(0,1)$ por una función f analítica.

4. (0.75 puntos cada item) ¿Verdadero o falso? Justificar.

(a) Si f es entera no constante y $|f'(z)| \le |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{Z}$, entonces $f(z) = e^{az+b}$ para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) La función $f(z) = z^4 - 6z + 3$ tiene 2 ceros en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

5. (1 punto cada item) Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en G tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos en G. Probar:

(a) f es analítica en G y $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos en G ($k \in \mathbb{N}$ fijo).

(b) Si f_n nunca se anula en G para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f nunca se anula en G o $f \equiv 0$.

(c) Si f_n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es inyectiva o f es constante.

Nota: Enunciar claramente todos los resultados utilizados para resolver los ejercicios.

Diciembre 2009

1. Sea $D = \{z : |z| < 1\}$ y sea f es una función analítica en $\overline{D}$. Probar:

(a) Si $|f'(z) - f'(0)| < |f'(0)|$ para todo z tal que $0 < |z| < 1$, entonces f es inyectiva en D.

(b) Si $f|_D$ es inyectiva entonces no existe $z_0 \in \partial D$ tal que $f(z_0) = f(a)$ para algún $a \in D$.

(c) Si $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, existe un único $z \in D$ tal que $f(z) = z$.

2. Sea G es una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ tal que su borde ∂G tiene al menos dos puntos, $a \neq b$ en $\mathbb{C}$. Construir explícitamente, en función de a y b, una aplicación conforme definida en G tal que $f(G)$ es abierto y acotado en $\mathbb{C}$.

3. Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcular
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

4. (a) Enunciar y probar el Lema de Schwarz.

(b) Describir las biyecciones analíticas de D en D, el disco unidad abierto.

5. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justificar y demostrar en caso que la afirmación es V.

(a) Si $f(z)$ es una función entera e inyectiva entonces $f(z) = az + b$, con a, b números complejos y $a \neq 0$.

(b) Existe una biyección analítica de $B(a, R)$, $R > 0$, sobre $\mathbb{C}$.

(c) La serie
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{2^n}} z^{2^n}$$
representa una función analítica en $|z| < 1$ y es uniformemente convergente en $|z| \leq 1$.

(d) $f(z) = \cos\left(\frac{z^2-4}{(z-2)^2}\right)$ tiene una singularidad esencial en $z = 2$ con $\operatorname{Res}(f, 2) \neq 0$.

(e) Existe una función entera f no constante tal que $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq 1$ para todo complejo z.

Noviembre 2009

1. (Teorema de Morera) Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función continua definida en un conjunto abierto y conexo $A \subseteq \mathbb{C}$. Si $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset A$, probar que f es analítica en A.

2. (a) Obtener el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$ centrado en $z = 0$, válido en la región $|z| > 1$.

(b) Probar que $f(z) = \sum_{n=0} z^{10^n}$ es analítica en $U = \{z : |z| < 1\}$ y que no admite extensión analítica a ningún abierto mas grande que $\overline{U}$. (sug.: la serie diverge sobre un subconjunto denso del borde de U).

3. Decir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar debidamente.

(a) Si f es entera y $g(z) = f(\frac{1}{z})$ tiene un polo en $z = 0$, entonces f es un polinomio.

(b) Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene período $p \in \mathbb{C}$ si $f(z + p) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Si f es entera y tiene períodos $1, i$, entonces f es constante.

(c) Si $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$, entonces existe $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ $\forall z \neq 0$.

(d) No existen funciones analíticas suryectivas $f : \mathbb{C} \to \{z : |z| > 1\}$.

(e) $\int_C z^n \exp(\bar{z})\,\mathrm{d}z = 0$, donde n entero con $n \geq 1$ y $C = \{z : |z| = 1\}$ recorrido en sentido antihorario.

(f) $\{w = \exp(1/z) : 0 < |z| < r\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\forall r > 0$.

4. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3}. \qquad\qquad \text{(b)} \quad I = \int_{C_z} \frac{dw}{w},$$

donde $z \in A = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$ y $C_z \subset A$ es alguna curva que une 1 con z.

5. Construir una aplicación analítica que mande el interior de la franja $\{z : \operatorname{Re} z \leq 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ conformemente sobre el interior del círculo unitario $\{z : |z| \leq 1\}$ y que además mande el borde de la franja sobre el borde del círculo.

CAPÍTULO 2

Funciones reales

Diciembre 2016

1. (a) Enunciar el Lema de Fatou y enunciar y probar el Teorema de la convergencia dominada para funciones medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

(b) Decir si es Verdadero o Falso (y justificar):

(i) Si $\{f_n\}$ son integrables no negativas en $[0,1]$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to 0$ para casi todo punto, entonces existe $g \in L^1[0,1]$ tal que $0 \le f_n(x) \le g(x)$ para casi todo $x \in [0,1]$.

(ii) Sean f, f_n integrables tal que $f_n \to f$ para casi todo punto, entonces $||f_n - f||_1 \to 0$ si y sólo si $||f_n||_1 \to ||f||_1$

2. Sea f una función integrable en $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida. Pruebe que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto medible A con $\mu(A) < \delta$, se cumple que $\left|\int_A f d\mu\right| < \epsilon$.

3. (a) Enunciar el Teorema de Radon-Nikodym.

(b) Denotemos por μ la medida de Lebesgue y por λ de contar puntos en $X = [0,1]$.

(i) Probar que $\mu \ll \lambda$ (μ es absolutamente continua respecto a λ), y que no existe $h \in L^1(X, d\lambda)$ tal que para todo medible E se cumple $\mu(E) = \displaystyle\int_E h\, \mathrm{d}\lambda$.

(ii) ¿Por que no vale, en este caso, el Teorema de Radon-Nikodym?

4. (a) Enuncie el Teorema de la aplicación abierta y enuncie y demuestre el Teorema del gráfico cerrado.

(b) Sean X e Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ lineal acotado e inyectivo. Probar que $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to X$ es acotado si y sólo si $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado.

5. Sea E un conjunto de medida Lebesgue finita. Probar que $||f||_{\infty,\, E} = \lim_{p\to\infty} ||f||_{p,\, E}$.

Ayuda: Considerar $\{x \in E : |f(x)| > M\}$ con $M < ||f||_{\infty,\, E}$ y probar que $\underline{\lim}_{p\to\infty} ||f||_{p,\, E} \ge ||f||_{\infty,\, E}$.

6. (a) Sean f y g una función medible en $(0,1)$. Si $f(x)g(y)$ es integrable en $(0,1)\times(0,1)$, probar que f y g pertenecen al $L^1(0,1)$.

(b) Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} = \pi^{n/2}.$$

Agosto 2016

1. Estudiar y calcular, cuando sea posible, los siguientes límites

$$\text{(a)} \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{k}{kx^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{k}{(k+x)^2+kx^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ el espacio de medida, donde $\mathcal{M}$ es la sigma álgebra de Lebesgue, μ la medida de Lebesgue y μ^* su medida exterior. Demostrar:

(a) Si $A \subset \mathbb{R}$ y $\mu^*(A) < \infty$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto E que es un G_δ tal que $A \subset E$ y $\mu(E) = \mu^*(A)$.

(b) Si $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión creciente de conjuntos en $\mathbb{R}$ ($A_k \subset A_{k+1}$ para todo k) entonces existe una sucesión $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ en $\mathcal{M}$ tal que $U_k \subset U_{k+1}$ y $\mu(U_k) = \mu^*(A_k)$ para todo k.

(c) Sean $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \ldots$ subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$, $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ entonces A es medible y $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

(d) Sean $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \ldots$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ entonces $\mu^*(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$.

3. (a) Sea f la función sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ definida por $f(x) = 0$ para $-\pi \leq x < 0$, y $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq \pi$. ¿Cuales son sus coeficientes de Fourier?

(b) Probar que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c) Usando el inciso anterior

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Enunciar y demostrar el Teorema de Radon–Nykodim.

5. Decida si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** o **falsas**, justificando adecuadamente su respuesta. Para los tres primeros incisos considere (X, μ) un espacio de medida abstracta.

(a) Si $f_n \to f$ en $L^1(X)$ entonces $f_n \to f$ en medida.

(b) Si $f_n \to f$ en $L^p(X)$ entonces $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo punto.

(c) Si $r \leq p \leq s$ entonces $L^p(X) \subset L^r(X) + L^s(X)$.

(d) El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un conjunto G_δ.

Diciembre 2015

Enunciar de manera completa los teoremas que usa para resolver los ejercicios.

1. Sea $\{\Phi_n\}$ una sucesión de funciones absolutamente continuas en $[0,1]$ tales que $\Phi_n(0) = 0$ para todo n y $\Phi_n' \to \Phi$ uniformemente en $[0,1]$. Probar que Φ_n converge uniformemente en $[0,1]$ a una función absolutamente continua.

2. Sea (X, μ) un espacio de medida σ-finito. Sea f medible y $t > 0$. Sea

$$\lambda_f(t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}).$$

(a) Probar que λ_f es no decreciente y continua por derecha.

(b) Probar que $\lambda_f(t) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| \mathrm{d}\mu$, para todo $t > 0$.

(c) Sea f no negativa en X. Si $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ entonces $f(x) = 0$ para casi todo x en X.

(d) Si f es integrable en X entonces f es finita en casi todo $x \in X$.

3. Decir si es verdadero o falso (Justificar).

(a) Si $\{f_n\}$ son funciones continuas positivas en $[0,1]$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 0$.

(b) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, y f medible no negativa en X, si $\nu(E) = \int_X f \mathrm{d}\mu$ entonces $\nu << \mu$.

(c) Si $r \leq p \leq s$ entonces $L^p(E) \subset L^r(E) + L^s(E)$.

4. (a) Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la Transformada de Fourier $\widehat{f}$ como

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix\cdot t} \mathrm{d}t,$$

donde $x \cdot t = \sum_{i=1}^n x_i t_i$.

(b) Probar que la Transformada de Fourier es un operador continuo de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C^0(\mathbb{R}^n)$.
Ayuda: Si f es derivable y de soporte compacto cuanto vale $\widehat{f'}$.

(c) Sean f y g en el $L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y.$$

Probar que $f \star g$ es una función del $L^1(\mathbb{R}^n)$ y estimar su norma.

(d) Probar que $\widehat{f \star g}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(e) ¿Existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f \star g = f$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$?

5. (a) Enunciar los Teoremas de la aplicación abierta y del gráfico cerrado y probar este último en el caso de espacios de Banach.

(b) (i) Mostrar que todo $x \in X$ tiene una única descomposición $x = y + z$ con $y \in S_1$ y $z \in S_2$ si y sólo si $X = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. En este caso S_1 y S_2 se llaman espacios complementarios de X.

(ii) Probar que $|||x||| = ||y|| + ||x||$, es una norma en X y $(X, |||\cdot|||)$ es de Banach.

(iii) Mostrar $|||\cdot|||$ y $||\cdot||$ son equivalentes.

Marzo 2015

1. Enunciar el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de descomposición de Lebesgue. Junto al enunciado redactar las definiciones involucradas en el enunciado de ambos teoremas. Para una función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha, sea μ_α la medida de Riemann-Stieltjes asociada a α. Mostrar que μ_α es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue si y sólo si α es una función absolutamente continua. Para una función α cuyos conjunto de puntos de discontinuidad es igual a el conjunto de los números racionales, ¿cuál es su parte singular?

2. Probar que si X es un espacio vectorial topológico de dimensión finita n, entonces X es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ munido de la topología euclideana.

3. Sean $(S, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles. Suponer existe una función integrable $h : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, de manera que $-h(x) \leq fn(x) \leq h(x)$ vale para todo $n \geq 0$ y casi todo $x \in X$.

(a) Probar las desigualdades

$$\int \liminf f f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int \limsup f_n \mathrm{d}\mu.$$

(b) Dar ejemplos donde las desigualdades son estrictas.

4. Sea T_n una sucesión de operadores lineales acotados en un espacio de Banach B. Suponer para cada $v \in B$ la sucesión $T_n(v)$ converge a un vector $T(v) \in B$. Mostrar que la relación $v \mapsto T(v)$, $v \in B$ es un operador lineal acotado.

5. Demostrar la desigualdad de Hölder. Escribir cuando la desigualdad de Hölder es igualdad y justificar su afirmación.

6. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Mostrar que el subespacio generado por las funciones características de conjuntos medibles de medida finita es denso en $L^p(X, , \mu)$ para $1 \leq p < \infty$. Mostrar que el subconjunto definido en el párrafo anterior no es denso en $L^\infty(\mathbb{R}, \mu_\alpha)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y periódica, de período 2π. Mostrar que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente.

Julio 2014

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Demostrar que f es medible Lebesgue si y sólo si existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ medible Borel tal que $f = g$ en casi todo punto respecto de la medida de Lebesgue.

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $L^1(X, \mu)$ la cual converge en casi todo punto a una función $f \in L^1(X, \mu)$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0 \text{ si y sólo si } \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \mathrm{d}\mu.$$

3. Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones absolutamente continuas en $[0,1]$ tales que $\phi_n(0) = 0$ y $\phi_n' \to \phi$ uniformemente en $[0,1]$. Probar que ϕ_n converge uniformemente en $[0,1]$ a una función absolutamente continua.

4. Probar que si H_1 y H_2 son dos espacios de Hilbert entonces uno de ellos es isomorfo a un subespacio del otro.

5. Si A es un subconjunto de $[0,2\pi]$ medible Lebesgue, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos(nx)\mathrm{d}x = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_A \operatorname{sen}(nx)\mathrm{d}x.$$

6. (a) Enunciar y demostrar la desigualdad de Hölder para espacios L^p.

(b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Minkowski para espacios L^p.

7. (a) Enunciar el Teorema de Fubini.

(b) Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $H(x,y) = f(x-y)g(y)$. Probar que $H \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Usar esto para mostrar que la función $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ existe para casi todo x y $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Luego mostrar que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

8. Enunciar y demostrar el Teorema del gráfico cerrado en espacios de Banach.

Marzo 2014

1. Sea $f_n : (X, \mathfrak{M}, \mu) \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables. Sea $h : X \to \mathbb{R}$ integrable, de manera que satisfacen $-h(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ en casi todo punto de X y para todo n. Mostrar las desigualdades

$$\int_X \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X \limsup f_n \mathrm{d}\mu.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable y de soporte compacto. Mostrar que la función

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \qquad \text{(medida de Lebesgue)}$$

es derivable y que vale la igualdad $g'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y$.

3. Demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si A se lo puede expresar como la union de una familia numerable de conjuntos compactos y un conjunto de medida de Lebesgue cero.

4. Enunciar y demostrar la desigualdad de Minkowsky.

5. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y V un subespacio de dimensión finita de X.

(a) Demostrar que V es cerrado en X.

(b) Demostrar que para cada $x \in X$ existe al menos un vector $v_x \in V$ de modo que $\|v_x - x\| \leq \|v - x\|$ para todo $v \in V$.

(c) Si además la norma en X proviene de una estructura de Hilbert en X, demostrar que v_x es único y que la función $x \to v_x$ es lineal.

6. Enunciar el Teorema de Fubini-Tonelli y dar un ejemplo de una función cuyas integrales iteradas existen y que no es integrable para la medida producto.

7. (a) Enunciar el Teorema de Radon-Nikodym

(b) Bosquejar una demostración del isomorfismo $(L_1)^\star \simeq L^\infty$.

8. Sea f la función de $\mathbb{R}$ en sí mismo que es periódica, de periodo 2π tal que $f(x) = x^2$ para x en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Calcular sus coeficientes de Fourier c_n, $n \in \mathbb{Z}$ y calcular el límite de la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Diciembre 2013

1. Sea $f_n : (X, \mathfrak{M}, \mu) \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a una función f. Suponer que para cada $\varepsilon > 0$ existen: $A_\varepsilon \in \mathfrak{M}$, $g \geq 0$ una función integrable y un número N_0 tal que

$$\int_{X-A_\varepsilon} |f_n| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_0, \qquad\qquad |f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in A_\varepsilon.$$

Mostrar que f es integrable y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \mathrm{d}\mu = 0.$$

2. Mostrar que si f es integrable Riemann en $[0, 1]$, entonces f es integrable Lebesgue en $[0, 1]$. Dar un ejemplo de f tal que la integral impropia de Riemann en $[0, 1]$ existe y f no es integrable Lebesgue en dicho intervalo.

3. Para cada número natural n escribir $n = 2^h + k$ con $0 \geq k < 2^h$. Sea f_n la función característica de $[\frac{k}{2^h}, \frac{k+1}{2^h}]$ considerar esta función en $L^p([0, 1], \mathrm{d}m)$. Mostrar que

(a) para $p \geq 1$ vale $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n|^p \,\mathrm{d}m = 0$.

(b) f_n no converge puntualmente en el intervalo $[0, 1[$.

4. Enunciar y bosquejar la demostración del Teorema de representación de Riez para funcionales lineales en un espacio de Hilbert.

5. Sea f_n una sucesión en $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}m)$ tal que la sucesión numérica $\int f_n f \mathrm{d}m$ converge para cada f en L^2. Mostrar que la sucesión f_n es acotada en L^2.

6. Analizar la existencia de las integrales iteradas y la integral doble con respecto a la medida de Lebesgue en $[-1, 1] \times [-1, 1]$ para la función $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que f es periódica de periodo 2π y f es continuamente derivable. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo $[0, 2\pi]$ converge absoluta y uniformemente.

Diciembre 2011

1. Definir cuándo una función es absolutamente continua y probar que $f(x) = x\alpha$ es absolutamente continua en todo intervalo acotado del $[0, \infty)$ para todo $\alpha > 0$.

2. (a) Enunciar el Lema de Fatou y enunciar y probar el Teorema de la convergencia dominada para funciones medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

(b) Decir si es Verdadero o Falso (y justificar): Si $\{f_n\}$ son funciones continuas positivas en $[0,1]$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $\lim_{n\to\infty} \int f_n \to 0$.

3. Sea E un conjunto de medida Lebesgue finita. Probar que $||f||_{\infty,E} = \lim_{p\to\infty} ||f||_{p,E}$.
Ayuda: considerar $x \in E : |f(x)| > M\}$ con $M < ||f||_{\infty,E}$ y probar que $\underline{\lim}_{p\to\infty}||f||_{p,E} \geq ||f||_{\infty,E}$.

4. (a) Sean f y g en el $L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Probar que $f \star g$ es una función del $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la Transformada de Fourier $\widehat{f}$ como

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{ix\cdot t}\mathrm{d}t$$

donde $x \cdot t = \sum_{i=1}^n x_i t_i$. Probar que $\widehat{f\star}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

5. (a) Enunciar el Teorema de la aplicación abierta, el Teorema del gráfico cerrado, y probar este último en el caso de espacios de Banach.

(b) (i) Sea $\mathfrak{R}$ un espacio de Banach con dos normas $||\cdot||$ y $|||\cdot|||$. Si existe $k_1 > 0$ tal que $||x|| \leq k_1|||x|||$ para todo $x \in \mathfrak{R}$, probar que existe $k_2 > 0$ tal que $|||x||| \leq k_2||x||$.

(ii) Sean S_1 y S_2 dos subespacios cerrados de $\mathfrak{R}$ espacio de Banach.

(A) Mostrar que todo $x \in \mathfrak{R}$ tiene una única descomposición $x = y + z$ con $y \in S_1$ y $z \in S_2$ si y sólo si $\mathfrak{R} = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. En este caso S_1 y S_2 se llaman espacios complementarios de $\mathfrak{R}$.

(B) Probar que $||x||1 = ||y|| + ||z||$, es una norma en $\mathfrak{R}$ y $(\mathfrak{R}, ||\cdot||_1)$ es de Banach.

(C) Mostrar que existe $k_2 > 0$ tal que $||y|| + ||z|| \leq k_2||x||$.

6. Sea espacio de medida (X, Σ, μ) completo, es decir si $Y \subset Z$ y $Z \in \Sigma$ con $\mu(Z) = 0$ entonces $Y \in \Sigma$. (Σ contiene a todos los conjuntos de medida cero). Probar que si f es medible y $f = g$ en casi todo punto, entonces g es medible. ¿Vale si (X, Σ, μ) no es completo?

Agosto 2011

1. Sea ϕ una función integrable en $\mathbb{R}^n$ tal que $\int \phi = 1$ y sea, para $t > 0$, $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x)$. Sea g una función infinitamente diferenciable, de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que
$$\lim_{t\to 0}(\phi_t \star g)(x) = g(x),$$
para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto infinito, ortonormal y completo. Pruebe que el conjunto P de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{u_\alpha\}$ es denso en H, pero que $P \neq H$.

3. (a) Enuncie el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

(b) Halle funciones continuas $f_n : [0;1] \to [0,\infty)$ tales que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$ cuando $n \to \infty$, $\int f_n(x)\mathrm{d}x \to 0$, pero $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ no esté en $L^1([0,1])$.

4. Sean μ y λ medidas sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ siendo μ positiva y λ compleja. Demuestre que las dos siguientes condiciones son equivalentes

(a) $\lambda \ll \mu$,

(b) a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que $|\lambda(E)| < \varepsilon$ para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$.

5. Sean X un espacio vectorial normado, D un subespacio de X, Y un espacio de Banach y sea $A : D \to Y$ una transformación lineal cerrada y acotada. Muestre que D es un subespacio cerrado de X.

6. Enuncie el Teorema de Fubini.

Julio 2010

1. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y tal que $f_n \to f$ p.p.x.

(a) Dar 3 hipótesis distintas que impliquen que
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.$$

(b) Probar que el Teorema de la convergencia monótona implica el Lema de Fatou.

2. Sea (X,μ) un espacio de medida positiva. Para cada f medible no negativa y para cada $t \geq 0$, definimos:
$$\lambda(t) = \lambda(f,t) = \mu\{x \in X : f(x) > t\}.$$
Llamaremos a $\lambda(t)$ la función distribución de f en X.

(a) Probar que λ es monótona decreciente y continua por la derecha.

(b) Sea $f \in L^p(X)$ $(1 \leq p < 1)$. Probar

(i) $t^p\lambda(t) \leq \int_{X\cap\{f(x)>t\}} |f|^p \mathrm{d}\mu$.
(ii) $t^p\lambda(t) \to 0$ si $t \to \infty$.
(iii) $t^p\lambda(t) \to 0$ si $t \to 0$. *Ayuda:* suponer primero $\mu(X) < \infty$.
(iv) $\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Decimos que una familia de Φ_n, $n \in \mathbb{N}$ es uniformemente absolutamente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|E| < \delta$ entonces $|\Phi_n(E)| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, funciones integrables Lebesgue en $(0,1)$, y convergen puntualmente a f integrable Lebesgue en $(0,1)$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f| \to 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{l}\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son uniformemente}\\ \text{absolutamente continuas.}\end{array}$$

4. (a) Enunciar el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema del gráfico cerrado para espacios métricos completos.
(b) Elegir una de las dos posibilidades. Probar el Teorema del gráfico cerrado o hacer un esquema de la prueba del Teorema de la aplicación abierta para espacios de Banach.
(c) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ espacios de Banach. Probar que $A \in B(\mathfrak{N},\mathfrak{M})$ es inyectiva y tiene imagen $A(\mathfrak{N})$ cerrada si y sólo si existe k tal que $\|x\| \leq k\|Ax\|$.

5. Decir si es verdadero o falso (Justificar)
(a) Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida, y f medible no negativa en X, si $\nu(E) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ entonces $\nu << \mu$.
(b) Si $r \leq p \leq s$ entonces $L^p(E) \subset L^r(E) + L^s(E)$.

Marzo 2010

1. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones absolutamente continuas en $[0,1]$ tales que $\varphi(0) = 0$ para todo n y $\varphi_n' \to \psi$ uniformemente en $[0,1]$. Probar que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una función absolutamente continua.

2. (a) Sean f y g en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Definir $f * g(x)$, probar que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que $f * g(x) = g * f(x)$.
(b) Sea $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y definimos

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

Probar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces el operador T está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|T\| \leq \|K\|_1$.

3. Sea (X,μ) un espacio de medida. Sea E medible, f medible y $\lambda > 0$.
(a) Probar que

$$\mu\{x \in E : |f| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\int_E |f|.$$

(b) Sea f no negativa en E. Si $\int_E f = 0$ entonces $f = 0$ para casi todo x en E.

(c) Si f es integrable en E entonces f es finita en casi todo x en E.

4. Decir si es verdadero o falso (Justificar).

(a) Considerar $[0,1]$ con la medida de Lebesgue. Sea $f_n(x) = n\chi_n(x)$ donde $\chi_n(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$. Existe g integrable tal que $f_n(x) \leq g(x)$ para casi todo x y para todo n.

(b) Una función f en $[a,b]$ es absolutamente continua si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \epsilon$ para toda sucesión de intervalos $[a_k, b_k] \subset [a,b]$ que cumpla $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |b_k - a_k| \leq \delta$.

(c) Sean $1 \leq p < \infty 1$, $f_n \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo x y $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ entonces $f_n \to f$ en L^p.

5. Sean los espacios de Banach

$$\ell^1 = \left\{ x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, x_i \in \mathbb{C} : \sum_i |x_i| < \infty \right\},$$
$$\ell^\infty = \left\{ x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, x_i \in \mathbb{C} : \sup_i |x_i| < \infty \right\},$$
$$C = \left\{ x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, x_i \in \mathbb{C} : \exists \lim_{i\to\infty} |x_i| < \infty \right\},$$

con las normas $\|\cdot\|_1$ para ℓ^1 y $\|\cdot\|_\infty$ para ℓ^∞ y C. Probar que $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$, siguiendo los siguientes pasos:

(a) Probar que $\ell^1 \subset (\ell^\infty)'$.

(b) Sea $G_0 : C \to \mathbb{C}$ definida $G_0(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$. Probar que G_0 es una funcional continua.

(c) Probar que no existe $G \in (\ell^\infty)'$ de la forma $G(x) = \sum_i x_i y_i$ con $y = \{y_i\} \in \ell^1$.

Diciembre 2009

1. (a) Sean $1 < p < q < \infty$ y (X,μ) un espacio de medida finita $\mu > 0$. Pruebe que $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$.

(b) Pruebe que si $X = \mathbb{R}^n$ no vale ninguna de las dos inclusiones $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$, ni $L^p(X,\mu) \subset L^q(X,\mu)$.

2. (a) Demuestre el Teorema de Baire.

(b) Pruebe que un espacio de Banach de dimensión infinita posee dimensión no numerable.

3. (a) Sea (X,μ) un espacio de medida finita $\mu > 0$. Pruebe que $L^1(X,\mu)' \simeq L^\infty(X,\mu)$ (isomorfo e isométrico).

(b) Sea $X = \{0, 1\}$ y μ la medida en X tal que $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(X) = 1$ y $\mu(\emptyset) = 0$. ¿Qué relación hay en este caso entre $L^1(X, \mu)'$ y $L^\infty(X, \mu)$?

4. ¿Verdadero o falso? Justifique dando una demostración o un contraejemplo.

(a) Sea A medible, $A \subset \mathbb{R}$ y $f_n \in L^1(A, \mu)$ tales que $f_n \to f$ uniformemente en A, si $n \to \infty$. Entonces se tiene que $\int_A f_n \to \int_A f$.

(b) Existen $f_n, f \in L^1([0, 1])$ tales que $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$, si $n \to \infty$, pero $f_n(x) \not\to f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$.

(c) Existe $A \subset [1, 3]$ medible tal que, para todo intervalo $(a, b) \subset [1, 3]$,

$$\mu(A \cap (a, b)) = \mu(A \cap ([1, 3]) \setminus (a, b)).$$

CAPÍTULO 3

Estructuras algebraicas

Marzo 2017

1. Sea G un grupo finito. Probar que G es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{A}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea A un anillo (con unidad).

1. Probar que si I, I_1, I_2, son ideales de A tales que $I + I_1 = I + I_2 = A$, entonces $I + I_1 I_2 = A$.
2. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de A y sea $\pi : A \to \prod_{j=1}^{n} A/I_j$ el morfismo inducido por las proyecciones canónicas $\pi_j : A \to A/I_j$, $1 \leq j \leq n$. Probar que π es sobreyectivo si y sólo si $I_j + I_k = A$, para todo $1 \leq i \neq k \leq n$.

3.
1. Enunciar el teorema de la forma racional para una matriz $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo F.
2. Dar una demostración del enunciado en la parte (a) usando el teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales.
3. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales. Determinar la forma racional del operador lineal $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definido por $T(f(x)) = f(x) + f'(x)$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi(n)$ el *indicador de Euler*, definido en la forma:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{Z} : \ 0 \leq m < n \text{ y } (n, m) = 1\}|.$$

Probar que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

1. Para cada divisor r de n probar que existe una sucesión exacta corta

$$0 \to r'\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \to r\mathbb{Z}_n \to 0,$$

donde $r' = n/r$.

2. Probar que el morfismo $\mathbb{Z}_n \to r\mathbb{Z}_n$ de la parte (a) se parte si y sólo si $(r, r') = 1$.

6. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

1. Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$. Si $f : V \to W$ es una función tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in V$, entonces f es un morfismo de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales.
2. El grupo abeliano $\mathbb{Z}$ admite una estructura de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-módulo unitario, siendo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ el subanillo de $\mathbb{R}$ de todos los elementos de la forma $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. Si M_1 y M_2 son submódulos de un módulo M tales que $M_1 \cap M_2$ y $M_1 + M_2$ son de tipo finito, entonces también lo son M_1 y M_2.
4. El grupo abeliano $\mathbb{Q}$ contiene un subgrupo maximal (propio).

Noviembre 2016

1. Sea G un grupo finito. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) para todo número primo p, G contiene un único p-subgrupo de Sylow.

(b) G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

2. Sea p un número primo. Probar que el polinomio $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

3. Sea A el grupo abeliano presentado por generadores a, b, c con relaciones

$$3a + 9b + 9c = 0, \quad 9a - 3b + 9c = 0.$$

(a) Hallar los factores invariantes y los divisores elementales de A.

(b) Determinar la estructura del subgrupo de torsión de A.

4. Sea R un anillo y sea M un R-módulo a izquierda.

(a) Probar que M es si y sólo si M es sumando directo de un R-módulo libre.

(b) ¿Es cierto para cualquier anillo R que todo R-submódulo de un R-módulo proyectivo es proyectivo?

5. Enunciar y demostrar los Teoremas de Isomorfismo para anillos.

6. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

(a) Si $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n)$, entonces $\varphi(\mathbb{A}_n) = \mathbb{A}_n$.

(b) Existe un grupo no abeliano G tal que el cociente $G/Z(G)$ es cíclico.

(c) $\mathbb{Z}[X]$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

(d) Existe un morfismo de anillos $f : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tal que $f(1) = 1$.

Agosto 2016

1. Sea G un grupo y sea $\mathcal{M}$ el conjunto de subgrupos maximales propios de G. Sea $\Phi(G) = \cap_{S\in\mathcal{M}} S$, si $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\Phi(G) = G$, si $\mathcal{M} = \emptyset$. Probar que si $g \in \Phi(G)$ y X es un subconjunto de generadores de G tal que $g \in X$, entonces el conjunto $X - \{g\}$ genera G.

2. Sea F un cuerpo y sea G un subgrupo finito de $F^\times = F - \{0\}$. Probar que G es cíclico.

3. Sea A el grupo abeliano presentado por generadores a, b, c con relaciones

$$3a + c = 0, \quad 3a + 8b - 3c = 0.$$

(a) Hallar los factores invariantes y los divisores elementales de A.

(b) Para cada número primo p, determinar la cantidad de elementos de orden p que hay en A.

4. Sea R un anillo y sea M un R-módulo a izquierda.

(a) Probar que si $M = \sum_{i\in I} M_i$, donde cada M_i, $i \in I$, es un submódulo simple, entonces existe $J \subseteq I$ tal que $M = \oplus_{i\in J} M_i$.

(b) Probar que M es suma directa de R-módulos simples si y sólo si todo submódulo de M es un sumando directo de M.

5. Sea G un grupo de orden $2m$, donde $m \in \mathbb{N}$ es impar. Probar que:

(a) G tiene un subgrupo normal de orden m.

(b) Todos los elementos de orden 2 de G son conjugados entre sí.

6. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

(a) Si A es una matriz compleja $n \times n$, entonces toda matriz que conmuta con A es un polinomio en A.

(b) Si G es un grupo finito y p es un número primo tal que todo elemento no trivial de G tiene orden p, entonces G es abeliano.

(c) Todo elemento irreducible de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es primo.

(d) Los anillos $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ son isomorfos.

Julio 2016

1. (a) Sea Γ un grupo y sea G un subgrupo normal minimal de Γ. Probar que los únicos subgrupos de G estables bajo la acción natural del grupo de automorfismos de G son $\{e\}$ y G.

Sea G un grupo finito no trivial tal que los únicos subgrupos de G estables bajo la acción del grupo de automorfismos de G son $\{e\}$ y G, y sea $\{e\} \neq H$ un subgrupo normal minimal de G. Probar que:

(b) Los subgrupos $\varphi(H)$, $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, generan G.

(c) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que G es isomorfo al producto directo $\underbrace{H \times \cdots \times H}_{n \text{ veces}}$, y además H es simple.

2. Sea p un número primo. Probar que (p) es un ideal primo en el anillo de enteros de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si -1 no es un cuadrado módulo p.

3. Sea G un grupo no cíclico de orden N tal que para algún número primo p se tiene que $r_p! < N$, donde r_p es el número de p-subgrupos de Sylow distintos de G. Probar que G no es simple.

4. Sea M un módulo sobre un dominio de ideales principales R.

(a) Probar que si M es finitamente generado y libre de torsión, entonces M es libre.

(b) ¿Es cierta la conclusión de la parte (a) si se omite la hipótesis de que M sea finitamente generado?

5. Sea D un grupo abeliano divisible. Probar que $D = D_t \oplus E$, donde $D_t \subseteq D$ es el subgrupo de torsión de D y E es un grupo abeliano libre de torsión.

6. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

(a) Si A es una matriz compleja $n \times n$, entonces A es semejante a su transpuesta.

(b) Para todo $n \geq 1$, $\mathbb{A}_n = \langle \sigma^2 : \sigma \in \mathbb{S}_n \rangle$.

(c) El ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ generado por 3 y $2 + \sqrt{-5}$ es un ideal principal.

(d) El polinomio $Y^5 - X^4Y^3 + 2X^2Y^2 - 5X^3Y + X$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Febrero 2015

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) Todo grupo de orden 35 es abeliano.

(b) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^5 - x - 2 \rangle}$ es un cuerpo.

(c) Si G es un grupo de orden 63 entonces G tiene un único subgrupo normal de orden 7.

(d) Todo grupo cíclico es divisible.

(e) Si R es un anillo de división y $c \in R$ entonces $x^n - c$ tiene a lo sumo n raíces.

2. Sea $M_n(D)$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con coeficientes en D.

(a) Demostrar que si D un anillo de división el anillo $M_n(D)$ no tiene ideales propios.

(b) Si $p \in \mathbb{N}$ es primo y $D = \mathbb{Z}_p$, probar que el grupo $M_n(D)$ contiene un subgrupo de orden p^3 y tal que todo elemento tiene orden p

3. Sea A un anillo y M un A-módulo. Demostrar que son equivalentes:

(a) Todo submódulo de M está finitamente generado.

(b) Toda sucesión estrictamente creciente de submódulos de M es finita.

(c) toda familia no vacía de submódulos de M posee un elemento maximal.

4. Sea $\mathbb{Z}[i]$ el anillo de los enteros de Gauss.

(a) Mostrar que es un dominio euclídeo.

(b) Determinar el conjunto de las unidades.

(c) Mostrar que $p(x)$ irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ no implica irreducible en $(\mathbb{Z}[i])[x]$.

5. Enunciar el Teorema de estructura de módulos finitamente generados sobre un dominio a ideales principales. ¿Qué implica esto sobre la estructura de un grupo finito?

6. Demostrar que si R es un dominio de ideales principales entonces es un dominio de factorización única. ¿Vale la recíproca?

Julio 2014

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique apropiadamente.

(a) Un grupo G es abeliano si y solo si todo subgrupo de G es normal.

(b) Existe un único elemento en $SL_2(\mathbb{Z})$ de orden 2.

(c) El grupo $\mathbb{Z}_{2014}^{\times}$ posee un único elemento de orden 2.

(d) Todo grupo finito de orden mayor a 2 posee un automorfismo no trivial.

(e) Todo grupo de orden 15 es cíclico.

(f) Si R es un anillo noetheriano entonces $R[x]$ también lo es.

2. Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X con acción dada por $\triangleright : G \times X \to X$. Si $g \in G$, definamos $X^g = \{x \in X : g \triangleright x = x\}$. Demostrar que la cantidad de órbitas distintas en X es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X^g.$$

3. (a) Demostrar que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

(b) Demostrar que $\mathbb{Q}$ es un sumando directo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \dots$.

4. Sea R un anillo. Un R-módulo P se dice *finitamente presentado* (f.p.) si existe una sucesión exacta

$$0 \to K \to F \to P \to 0,$$

donde F es un R-módulo libre finitamente generado y K es finitamente generado.

(a) Sea M un R-módulo, $N \subseteq M$ un R-submódulo finitamente generado tal que M/N es finitamente generado. Demostrar que M es finitamente generado.

(b) Si $0 \to M \to N \to P \to 0$ es una sucesión exacta donde M y N son f.p. entonces P es f.p.

5. Sea $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un subgrupo finito. Sea $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ la proyección canónica.

(a) Si $A \in G$ entonces A es diagonalizable.

(b) Si $A \in G \cap \ker(\pi)$ entonces A no es de orden 2 y $\mathrm{tr}(A) = -1$.

(c) La restricción de la proyección $\pi : G \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ es inyectiva. Es decir, todo subgrupo finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(d) Demostrar que no existe un subgrupo finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ isomorfo a $\mathbb{A}_5$.

6. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Asumamos que $p \in \Bbbk[x]$ es un polinomio irreducible. Sea $F = \Bbbk[x]/(p)$.

(a) Demostrar que $\Bbbk[x,y]p$ es un ideal primo de $\Bbbk[x,y]$ que no es maximal.

(b) Determinar todos los ideales maximales de $F[y]$.

(c) Determinar todos los ideales maximales de $\Bbbk[x,y]$ que contienen a $\Bbbk[x,y]p$.

7. Enunciar el Teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre un d.i.p. Enunciar algún corolario.

8. Sea G es un grupo infinito y $\Bbbk$ un cuerpo. Demostrar que el álgebra de grupo $\Bbbk G$ no es un anillo semisimple.

Aclaraciones: Todo anillo es con unidad distinta de cero. Si R es un anillo, se denota $R^\times$ el grupo multiplicativo de R.

Marzo 2014

1. Dar un ejemplo de un grupo que cumpla las siguientes condiciones o demostrar que dicho ejemplo no existe:

(a) Un grupo que no posea subgrupos no triviales normales.

(b) Un grupo G con un subgrupo H de índice 2 que *no* sea normal.

(c) Un grupo G con un subgrupo normal H tal que el cociente G/H *no* es isomorfo a ningún subgrupo de G.

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique apropiadamente.

(a) Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes complejos. Sea $C(A)$ el espacio vectorial de matrices complejas $n \times n$ B tales que $AB - BA = 0$. Entonces $\dim C(A) \geq n$.

(b) Sea $\Bbbk \subseteq \mathbb{Q}$ el cuerpo dado por $\Bbbk = \{a + b\sqrt{-7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Entonces $\Bbbk \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 7)$.

(c) Todo ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es un ideal principal.

(d) El orden de $SL_2(\mathbb{F}_3)$ es 18.

(e) Si R, S son anillos conmutativos tales que existe un isomorfismo de anillos $M_n(R) \simeq M_n(S)$ entonces existe un isomorfismo de anillos $R \simeq S$.

3. Sea $I \subseteq \mathbb{Z}[x]$ el ideal generado por $\{p, f(x)\}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo y $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio. Demostrar que I es un ideal maximal si y solo si $f(x)$ es irreducible módulo p.

4. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Consideremos H el subgrupo de $\mathbb{Z}^2$ generado por los elementos $(a, b), (c, d)$. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Demostrar que si $n = det(A)$ entonces $(n, 0), (0, n) \in H$.

(b) Demostrar que si $det(A) \neq 0$ entonces $\mathbb{Z}^2/H$ es un grupo finito.

(c) Es cierta la recíproca de (b)? Es decir que si $\mathbb{Z}^2/H$ es un grupo finito entonces $det(A) \neq 0$?

5. Hacer *uno* de los dos siguientes problemas.

(a) Sea R un anillo que es un dominio íntegro. Si M es un R-módulo libre e inyectivo, demostrar que R es un anillo de división.

(b) Sea R un anillo y $a \in R$. Demostrar que el ideal a derecha aR es un R-módulo proyectivo si y solo si el anulador a derecha $Ann_r(a) = eR$ donde $e \in R$ es un idempotente.
Aclaración: $Ann_r(a) = \{r \in R : ar = 0\}$.

6. Describir *todos* los $\mathbb{Z}$-submódulos finitamente generados de $\mathbb{Q}$.

7. Sea M un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ que es un $\mathbb{C}[x]$-módulo. Sea $T : M \to M$ la transformación lineal que viene dada por la acción de x. Demostrar que si M es un $\mathbb{C}[x]$-módulo simple entonces T es diagonalizable.

8. (a) Sea $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$ y sea $I = \mathbb{Z}[i]n$ el ideal bilátero de $\mathbb{Z}[i]$ generado por n. Demostrar que I es un ideal y que $a + bi \in I$ si y solo si $n|a, b$. Demostrar que $\mathbb{Z}[i]/I$ es un anillo finito.

(b) Sea $0 \neq J \subseteq \mathbb{Z}[i]$ un ideal. Demostrar que $\mathbb{Z}[i]/J$ es un anillo finito.

Diciembre 2013

1. Sea A un anillo conmutativo con unidad, sea $(a) = aA$ el ideal principal de A generado por $a \in A$ y sea P un ideal primo de A contenido propiamente en (a).

(a) Muestre que $P = aP$.

(b) Ahora suponga que P es un ideal finitamente generado y pruebe que existe $b \in A$ con $(1 - ab)P = 0$.
Ayuda: Ver a $1 - ab$ como el determinante de cierta matriz con coeficientes en A.

(c) En particular, si A es un dominio concluya que o bien $P = 0$ ó $(a) = A$.

2. Sea G un grupo (no necesariamente finito) y sea $\theta : G \to G$ un homomorfismo que satisface $\theta^n(G) = \{1\}$ para algún entero $n \geq 1$.

(a) Si el núcleo de θ es finito, pruebe que el núcleo de θ^2 es finito, y deduzca que G es finito.

(b) Si $\theta(G)$ tiene índice finito en G, pruebe que $\theta^2(G)$ tiene índice finito en G, y deduzca que G es finito.

3. Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y sea M un A-módulo finitamente generado. Sea $f : M \to M$ un homomorfismo suryectivo de A-módulos. Pruebe que f es inyectiva.
Ayuda: piense en los submódulos $\ker(f^n)$.

4. Sea A un anillo (no conmutativo) con 1 y suponga que A tiene un único ideal maximal a derecha M.

(a) Muestre que M es un ideal bilátero de A.

(b) Pruebe que todo elemento de $A \backslash M$ tiene un inverso (bilátero).

(c) Muestre que 0 y 1 son los únicos elementos idempotentes de A.

5. Responda si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique.

(a) Todo grupo de orden 21 es abeliano.

(b) Los únicos idempotentes en un dominio de integridad son 0 y 1.

(c) Todo submódulo de un módulo libre es libre.

Marzo 2013

1. Sea G un grupo finito. Sea N el subgrupo de G generado por el conjunto $\{x^2 : x \in G\}$. Demostrar que N es un subgrupo normal de G que contiene a $[G, G]$.

2. (a) Demostrar que en el $\mathbb{Z}$-módulo cociente $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ existe un elemento x tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tal que

$$x = 2^n \cdot y_n.$$

(b) Demostrar que no existe un conjunto I y un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos inyectivo $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{Z}^I$.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Existe un grupo infinito con un subgrupo de índice 5.

(b) Sea R un anillo conmutativo. Si el anillo de polinomios $R[x]$ es un dominio de ideales principales entonces R es un cuerpo.

(c) Existen subgrupos no triviales G_1, G_2 del grupo aditivo $(\mathbb{Q}, +)$ tal que $\mathbb{Q} \simeq G_1 \times G_2$.

(d) Sea $n, p \in \mathbb{N}$ con p primo. El orden del grupo $SL_n(\mathbb{Z}_p)$ es $\frac{p^n-1}{p-1}$.

(e) Sea X un conjunto, $\Bbbk$ un cuerpo y $C(X)$ el conjunto de funciones $f : X \to \Bbbk$. (El conjunto $C(X)$ es un anillo con suma y producto punto a punto). Para todo $x \in X$ el conjunto $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ es un ideal maximal de $C(X)$.

(f) Sea $n \in \mathbb{N}$. Todo grupo de orden $4n + 2$ posee un subgrupo de orden $2n + 1$.

(g) El centro de $\mathbb{A}_4$ es trivial.

(h) El anillo $\mathbb{Z}\langle x, y\rangle/(y^2, yx)$ no es artiniano.

4. (a) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $AB = BA$, $A^2 = B^2 = I$. Demostrar que A y B diagonalizan simultáneamente.

(b) Sea G un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ tal que $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Demostrar que G es conjugado a un subgrupo de matrices diagonales.

(c) Demostrar que $GL_2(\mathbb{R})$ no contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{A}_4$.

5. Sea R un anillo conmutativo tal que para todo $x \in R$ existe un $n \in \mathbb{N}, n > 1$, que depende de x, tal que $x^n = x$.

(a) Demostrar que todo ideal primo es maximal.

(b) Si $n = 2$ para todo elemento de R, demostrar que todo ideal finitamente generado es principal.

6. Sea R es un anillo y M, N R-módulos a izquierda. Se define $T_M(N) = \sum_{h:N\to M} \operatorname{Im}(h)$. El *sócalo* de M es

$$soc(M) = \sum_{S \text{ un } R\text{-módulo simple}} T_M(S)$$

(a) Si $I \subseteq R$ es un ideal a izquierda demostrar que $T_M(R/I) = R\{m \in M : r \cdot m = 0 \ \forall r \in I\}$.

(b) Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo. Demostrar que el sócalo de M es el subgrupo generado por los elementos de orden primo.

(c) Sea $p : A \to B$ un morfismo suryectivo de anillos. Demostrar que el anillo B es semisimple si B es semisimple como A-módulo a izquierda. Aquí la estructura de A-módulo a izquierda en B es vía p.

(d) Demostrar que $\mathbb{Z}_n$ es un anillo semisimple si y solo si n es un natural libre de cuadrados.

7. Sea R un anillo y M un R-módulo a izquierda. Sea $S = \operatorname{End}_R(M)$. Entonces M es un S-módulo a izquierda:

$$T \cdot m = T(m), \qquad \text{para todo } T \in S, m \in M.$$

Sea $E = \operatorname{End}_S(M)$. Similarmente, M es un E-módulo a izquierda. Asumamos que M es un R-módulo semisimple.

(a) Demostrar que $N \subseteq M$ es un R-submódulo de M si y solo si $N \subseteq M$ es un E-submódulo de M.

(b) Demostrar que para todo $f \in \operatorname{End}_S(M)$ y para toda $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ existe un $r \in R$ tal que $f(x_i) = r \cdot x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

8. Demostrar que no existe un grupo finito G tal que el cociente $G/Z(G)$ es isomorfo al grupo de los cuaterniones Q_8.

9. Sea G el grupo abeliano generado por elementos x, y, z sujetos a relaciones

$$15x + 3y = 0, \qquad 3x + 7y + 4z = 0, \qquad 18x + 14y + 8z = 0.$$

(a) Escriba a G como producto directo de grupos cíclicos cuyos órdenes sean potencias de primos.

(b) ¿Cuántos elementos de orden 2 posee G?

10. Enunciar los Teoremas de Sylow y dar la demostración de uno de ellos.

Aclaraciones:

- Todo anillo es un anillo con unidad y la unidad es distinta a cero.
- Si R es un anillo, M es un R-módulo y I es un conjunto, $M^I = \Pi_{i\in I} M$ y $M^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} M$.
- El grupo de los cuaterniones Q_8 es el grupo generado por elementos $\{-1, i, j, k\}$ y relaciones
$$(-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Diciembre 2012

1. Hallar la región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(nz)$ representa a una función analítica.

2. Mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} \mathrm{d}x = \pi e^{-|t|}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto A que contiene a $\{z : |z-a| \leq r\} \subset A$, para algún $r > 0$. Probar que $f(a) = \dfrac{1}{\pi r^2} \displaystyle\iint_{|z|\leq r} f(x+iy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. Hallar una aplicación conforme que mande la región $A = \{z : Re(z) > 0 \text{ y } |z-1| > 1\}$ en el disco unitario $U = \{z : |z| < 1\}$.

5. Sea $f(z)$ una función analítica en $\{z : |z| \leq 1\}$ tal que $|f(z)| = 1$, para todo z con $|z| = 1$.

(a) Mostrar que $F(z) := \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})^{-1}}$ es analítica en $\{z : |z| \geq 1\}$ y satisface $F(z) = f(z)$, para todo z con $|z| = 1$.

(b) Probar que f se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un número finito de polos. Deducir que f es una función racional.

6. ¿Verdadero ó falso?

(a) Existe una función analítica $h(z)$ en $C = \{z : 0 < |z| < 1\}$ con una singularidad esencial en $z = 0$, tal que $\dfrac{1}{h(z)-1}$ está acotada.

(b) Sea $f(z)$ una función entera tal que $f(1) = 2f(0)$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| < \epsilon$.

(c) Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada no evitable en $z = 0$, entonces $e^{f(z)}$ tiene un polo en $z = 0$.

(d) Existe una función armónica $u(x, y)$ en todo el plano $\mathbb{C}$, tal que $u(x, y) \geq x^2 + y^2$, $\forall\, x + iy \in \mathbb{C}$.

(e) Toda función entera $f(z)$ que satisface $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y $f(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$, es impar, es decir cumple $f(-z) = -f(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$.

(f) La función $f(z) = \dfrac{z+1}{z(1-z^2)}$ tiene una primitiva analítica en el abierto $0 < |z| < 1$.

7. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función analítica en el disco $U = \{z : |z| < 1\}$. Pruebe que para todo $0 \le r < 1$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Si $f(z)$ es acotada en U, $>$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ converge? Justificar.

8. Caracterizar todas las transformaciones conformes inyectivas del disco unitario $U = \{z : |z| < 1\}$ sobre si mismo.

9. Sea $f(z)$ una función analítica en una región acotada Ω. Si $f(z)$ es continua en $\overline{\Omega}$, mostrar que

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}.$$

Es válido este resultado si Ω es no acotado?

Noviembre 2012

1. (a) Demostrar que $F = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ es un cuerpo.

(b) ¿Cuántos elementos tiene F?

(c) Encontrar el inverso multiplicativo de $\overline{x^2 + 1} \in F$.

2. Se G un grupo finito y p un número primo.

(a) Dar la definición de p-subgrupo de Sylow de G.

(b) Probar que si P es un p-grupo de Sylow, entonces cualquier conjugado de P es un p-grupo de Sylow.

(c) Sea P e un p-grupo de Sylow. Si $g \in G$ tiene orden alguna potencia de p y $gPg^{-1} = P$, entonces $g \in P$.

3. Sea G un grupo finito y sea P un p-subgrupo de Sylow de G para algún primo p.

(a) Asuma que P es cíclico y $p = 2$. Probar que $N_G(P) = Z_G(P)$, donde $N_G(P) = \{g \in G : gPg^{-1} = P\}$, $Z_G(P) = \{g \in G : gxg^{-1} = x, \forall x \in P\}$.

(b) Dar un ejemplo donde $N_G(P)$ es diferente a $Z_G(P)$ con $p = 2$ y P no cíclico.

(c) Dar un ejemplo donde $N_G(P)$ es diferente a $Z_G(P)$ con $p \neq 2$.

4. Considere el anillo $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdaderas o falsa y justifique:

(a) R es DIP.

(b) R es factorial.

(c) R es Noetheriano.

5. Sean I, J ideales de un anillo conmutativo R con unidad.

(a) Probar que hay un morfismo de anillos inyectivo $\phi : R/(I \cap J) \to R/I \times R/J$.

(b) Diremos que I, J son *coprimos* si $I + J = R$. Probar que si I, J son coprimos entonces ϕ es sobreyectiva.

(c) Probar la siguiente versión del Teorema Chino del Resto: si $I_1, \ldots, I_n$ son ideales de R coprimos 2 a 2, entonces dados $a_1, \ldots, a_n$ en R, existe $r \in R$ tal que $r + I_i = a_i + I_i$.

6. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Probar que M es un módulo noetheriano si y solo si todo submódulo de M es finitamente generado.

Julio 2012

1. Sea $R = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{Q}[x]$ el anillo de los polinomios con coeficientes racionales y término independiente entero.

(a) Probar que R es un domino íntegro con unidades ± 1.

(b) Probar que x no es un elemento irreducible de R.

(c) Sea $(x) = Rx$ el ideal de R generado por x. Describir $R/(x)$ y probar que no es un dominio íntegro.

2. Se G un grupo finito y p un número primo.

(a) Dar la definición de p-subgrupo de Sylow de G.

(b) Sea H un p-subgrupo de Sylow de G. Probar que si N es normal en G, entonces H/N es un p-subgrupo de Sylow de G/N.

(c) Probar que si G tiene orden $2p$ es cíclico o isomorfo a D_{2p}.

3. Sea G un grupo finito. Sea p un número primo tal que $|G| = p^k m$ con $k \geq 1$ y p no divide a m. Sea X la colección de todos los subconjuntos de G de orden p^k. Entonces G actúa en X por multiplicación a izquierda, es decir $g \cdot A = \{gh : h \in A\}$. Para $A \in X$ denotemos S_A el estabilizador de A. Probar que $|S_A| \backslash p^k$.

4. Considere el anillo $R = \mathbb{Z}[x]/I$, donde I es el ideal de $\mathbb{Z}[x]$ generado por $x^3 + x + 1$ y $x^3 + x - 1$. Determinar la cardinalidad de R y la estructura del grupo R^*.

5. Sea A una anillo conmutativo con identidad.

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M" \to 0 \tag{3.1}$$

una sucesión de A-módulos y homomorfismos. Entonces la sucesión (3.1) es exacta si y sólo si para todo A-módulo N la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}(M", N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$$

es exacta.

6. Sea A una anillo conmutativo con identidad, M un A-módulo finitamente generado y $f : M \to A^n$ un homomorfismo suryectivo. Probar que $\ker(f)$ es finitamente generado.

Marzo 2012

1. Sean G un grupo finito y p un número primo. Supongamos que $n_p \neq 1 \mod p^2$, donde n_p es la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G. Probar que existen p-subgrupos de Sylow P y Q de G tales que $[P : P \cap Q] = p$.

2. Sea G el grupo abeliano presentado por generadores a, b y c y relaciones

$$2a - 2b = 4c, \quad 2b = -4c, \quad 2a + 8b = -6c.$$

(a) Determinar los factores invariantes y los divisores elementales de G. ¿Es G isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

(b) Para cada primo positivo p, determinar la cantidad de elementos de orden p que hay en G.

(c) ¿Es G libre? ¿Es de torsión?

3. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar.

(a) Sea R un anillo. Entonces todo submódulo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.

(b) (7) es un ideal primo de $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Sean R un dominio de ideales principales y sea M un R-módulo libre de rango n. Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de generadores de M, entonces X es una base de M.

4. Sea R un anillo con identidad y sea J un R-módulo unitario. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) J es un R-módulo inyectivo.

(b) Toda sucesión exacta corta $0 \to J \to M \to N \to 0$ se parte.

(c) J es sumando directo de todo R-módulo M que lo contiene como submódulo.

5. Sean $n \geq 1$, y sea $\sigma \in A_n$. Sean $\mathrm{Cl}(\sigma)$ y $\mathrm{Cl}^+(\sigma)$ las clases de conjugación de σ en S_n y en A_n, respectivamente.

(a) Probar que $\mathrm{Cl}(\sigma) = \mathrm{Cl}^+(\sigma)$ o bien $|\mathrm{Cl}(\sigma)| = 2|\mathrm{Cl}^+(\sigma)|$.

(b) Sea $n \geq 5$, y sea $\sigma \in S_n$ un triciclo. Probar que $\mathrm{Cl}(\sigma) = \mathrm{Cl}^+(\sigma)$.

6. Sea R un dominio de factorización única y sea F su cuerpo de fracciones. Probar que si $f \in R[X]$ es primitivo e irreducible en $R[X]$, entonces f es irreducible en $F[X]$.

Diciembre 2011

1. Pruebe que si G es un subgrupo simple y no abeliano del grupo simétrico S_n, entonces G está contenido en el subgrupo alternante A_n.

2. Verdadero o falso. Justifique las respuestas.

(a) Todo grupo de orden $14077 = 7 \cdot 2011$ es cíclico.

(b) $x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$.

(c) Todo submódulo de un $\mathbb{Z}$-módulo libre es libre.

3. Sea H un subgrupo del grupo G. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ para todo $x, y \in G$.

(b) H es normal en G y G/H es abeliano.

4. Sea R un anillo con unidad 1 y sea V un R-modulo a derecha. Suponga que $V = X \oplus Y$ es la suma directa (interna) de los dos submódulos no triviales X y Y.

(a) Muestre que 0, X, Y y V son los únicos R-submódulos de V si y sólo si X y Y son R-módulos simples y no isomorfos entre si.

(b) Si X y Y son R-módulos simples y no isomorfos entre si, pruebe que $\mathrm{End}_R(V)$, el anillo de R-endomorfismos de V, es isomorfo a la suma directa de dos anillos de división.

Resuelva sólo dos de los siguientes tres ejercicios.

5. Encuentre todos los valores de a en $\mathbb{Z}_3$ tales que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/(x3 + x2 + ax + 1)$ es un cuerpo. Justifique la respuesta.

6. Sean $I \subset J$ ideales a derecha de un anillo R tales que $J/I \simeq R$, como R-módulos a derecha. Pruebe que existe un ideal a derecha K tal que $I \cap K = (0)$ y $I + K = J$.

7. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo y sea R el anillo de todas las matrices 2×2 de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ pb & a \end{smallmatrix}\right)$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$. Pruebe que R es isomorfo a $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$.

Agosto 2011

1. (a) Demostrar que $F = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ es un cuerpo.

(b) ¿Cuántos elementos tiene F?

(c) Encontrar el inverso multiplicativo de $\overline{x+1} \in F$.

2. Se G un grupo finito y p un número primo.

(a) Dar la definición de p-subgrupo de Sylow de G.

(b) Sea H un p-subgrupo de Sylow de G. Probar que si N es normal en G, entonces H/N es un p-subgrupo de Sylow de G.

(c) Probar que si G tiene orden $2p$ es cíclico o isomorfo a D_{2p}.

3. Sea G un grupo.

(a) Sea N el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$ con $g, h \in G$. Probar que N es normal.

(b) Sea N como en 1. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos donde H es abeliano. Probar que existe un homomorfismo de grupos $g : G/N \to H$ tal que $f = g \circ \pi$ donde $\pi : G \to G/N$.

4. Sea $R = \{a + b.i : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ el anillo de enteros Gaussianos.

(a) Probar que R es un dominio de factorización única.

(b) Factorizar el número 70 en factores primos (verificar que cada número en la descomposición sea primo).

5. (a) Sea r un elemento en R un anillo con 1. Probar que si $r^{2007} = 0$, entonces $1 - r$ es una unidad.

(b) Sea $\alpha = \frac{1+\sqrt{-19}}{2}$. Probar que si $\theta : \mathbb{Z}[\alpha] \to \mathbb{Z}_3$ es un morfismo de anillos, entonces $\theta = 0$.

6. Sea R un anillo conmutativo con 1. Sean M, M_1, N, N_1 R-módulos y $f : M \to M_1$, $g : N \to N_1$ morfismos de R-módulos. Si f, g son suryectivos probar que $f \otimes g : M \otimes_R N \to M_1 \otimes_R N_1$ es también suryectiva y que $\ker(f \otimes g)$ es un submódulo de $M \otimes_R N$ generado por la unión de los siguientes conjuntos:

$$\{a \otimes y : a \in \ker(f), y \in N\}, \qquad \{x \otimes b : x \in M, b \in \ker(g)\}.$$

7. Sea R un anillo conmutativo con 1. Sea $\mathcal{N}(R)$ el conjunto de elementos nilpotentes de R.

(a) Probar que $\mathcal{N}(R)$ es un ideal.

(b) Probar que $\mathcal{N}(R) = \mathcal{P}(R)$, donde $\mathcal{P}(R)$ es la intersección de todos los ideales primos de R

Febrero 2011

1. Sea G un grupo finito y sea N un subgrupo normal de G tal que $C_G(x) \subseteq N$, para todo $e \neq x \in N$. Probar que $(|N|, |G : N|) = 1$. *Ayuda:* usar los Teoremas de Sylow.

2. Sea $p \in Z$ un número primo. Para cada $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$, sea $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$ dado por $\overline{f}(X) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 X + \cdots + \overline{a}_n X^n$, donde $a \mapsto \overline{a}$ denota la proyección canónica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$.

(a) Probar que todo ideal P de la forma $P = (p, f)$, donde $p \in Z$ es primo y $\overline{f}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$, es un ideal primo en $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Decidir si el ideal generado por 2 y $X^4 + 5X^3 - X^2 + X - 7$ es primo en $\mathbb{Z}[X]$.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Un grupo simple de orden 360 posee exactamente 35 elementos de orden 5.

(b) Sea R un anillo y sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos. Entonces M es de tipo finito si y sólo si M' y M'' lo son.

(c) Existe un homomorfismo de grupos no nulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^{>0}$. (Aquí, $Q^{>0}$ denota el grupo de los números racionales positivos con la multiplicación.)

4. Considerar el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, $n \geq 2$.

(a) Demostrar que toda permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ se escribe de manera única como producto de ciclos disjuntos dos a dos.

(b) Probar que las transposiciones $(i\ i+1)$, $1 \leq i < n$, generan $\mathbb{S}_n$.

5. Sean A y B los grupos abelianos tales que:

(a) A es un grupo abeliano de orden p^2q^2, donde $p > q$ son números primos, tal que A tiene por lo menos p^2q elementos de orden pq y todo p-subgrupo de A tiene exponente p.

(b) $B = \mathbb{Z}^3/S$, donde con $S = \{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid m_1 \text{ es par}, m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

Dar una descomposición de A y de B como suma directa de grupos cíclicos y decidir si $A \simeq B$. Justificar.

Diciembre 2010

1. Sean G un grupo finito y P un p-subgrupo de Sylow de G, donde p es un número primo. Probar que si H es un subgrupo de G tal que $N_G(P) \subseteq H$ entonces $[G : H] \equiv 1 \mod p$ y $N_G(H) = H$.

2. Sea K un cuerpo. Sean $f, g, h \in K[X][Y]$ y sea $p \in K[X]$ tal que $fp = gh$. Supongamos que los coeficientes de g son coprimos en $K[X]$. Demostrar que p divide a los coeficientes de h en $K[X]$.

3. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar.

(a) Existe un grupo simple de orden 148.

(b) El polinomio $Y^5 - X^4Y^3 + 2X^2Y^2 - 5X^3Y + X$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X, Y]$.

(c) Sea R un anillo y sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos. Entonces M es inyectivo si y sólo si M' y M'' lo son.

(d) Si $f : R \to R$ es un homomorfismo de anillos tal que $f(1) = 1$, entonces $f = \mathrm{id}_R$.

4. Sea R un anillo con unidad $1 \neq 0$. Sean además I, J ideales a izquierda no nulos minimales de R.

(a) Demostrar que $IJ = 0$ o $IJ \simeq J$ como R-módulos a izquierda.

(b) Si $I^2 \neq 0$, demostrar que existe un idempotente $e \in R$ tal que $I = Re$.

5. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de números primos positivos de $\mathbb{Z}$. Se considera el grupo abeliano $A = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$.

(a) Probar que el subgrupo de torsión de A es $\bigoplus\limits_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$.

(b) Demostrar que el subgrupo de torsión de A no es un sumando directo de A.

6. (a) Enunciar el Teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales y demostrar la unicidad.

(b) Sea A un un dominio de ideales principales. Probar que todo módulo de tipo finito y libre de torsión es libre.

Julio 2010

1. Fije un primo p y sea G un grupo finito con la propiedad que todo p-subgrupo no trivial de G está contenido en un único p-subgrupo de Sylow de G. Suponga que $N \lhd G$ y $|N|$ es divisible por p.

(a) Si P y Q son p-subgrupos de Sylow de G, muestre que $Q = nPn^{-1}$, para algún elemento $n \in N$.

(b) Pruebe que G/N tiene un único p-subgrupo de Sylow.

2. Sea R un dominio de integridad (conmutativo) con identidad 1. Un elemento no nulo y no inversible $s \in R$ se dice ser "especial" si, para cada elemento $a \in R$, existen $q, r \in R$ con $a = qs + r$ y tal que r es 0 o una unidad de R.

(a) Si $s \in R$ es especial, pruebe que el ideal principal (s) generado por s es maximal en R.

(b) Muestre que todo polinomio en $\mathbb{Q}[X]$ de grado 1 es especial en $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Pruebe que no hay elementos especiales en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[X]$. *Ayuda:* Aplique la definición de especial con $a = 2$ y con $a = X$.

3. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique.

(a) No existen grupos simples de 56 elementos.

(b) Si M es un A-módulo simple, todo endomorfismo no nulo $f \in \operatorname{End}_A(M)$ es inversible.

(c) Los anillos $Q(\sqrt{3})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ son isomorfos.

(d) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

4. Sea R un anillo y sea V un R-módulo a derecha. Suponga que todo submódulo simple de V es un sumando directo de V.

(a) Si W es cualquier submódulo de V, muestre que todo submódulo simple de W es un sumando directo de W.

(b) Si V es un módulo Artiniano, esto es si sus submódulos satisfacen la condición de cadena descendente, pruebe que V es una suma directa de un número finito de submódulos simples.

5. (a) Enuncie el Teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales.

(b) Sea A un un dominio de ideales principales. Pruebe que todo submódulo de un A-módulo libre es libre.

Marzo 2010

1. *Morfismos de $\mathbb{Z}_n$.* Sea $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ el anillo de enteros módulo n, pensado como $\mathbb{Z}$-módulo.

(a) Probar que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$, donde (m, n) denota el m.c.d. de m y n.

(b) Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo fijo. Calcular $\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_p\right)$.

(c) Calcular $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p)$ con p, q primos.

2. *El grupo de unidades de* $\mathbb{Z}_n$. Denotemos por $\mathbb{Z}_n^*$ al grupo (multiplicativo) de unidades de $\mathbb{Z}_n$, es decir, $\mathbb{Z}_n^* = \{1 \le j \le n-1 : (j,n) = 1\}$. Luego $|\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n)$ donde ϕ es la función de Euler.

(a) Determinar los grupos $\mathbb{Z}_8^*$, $\mathbb{Z}_9^*$, $\mathbb{Z}_{12}^*$ y $\mathbb{Z}_{15}^*$. ¿Son grupos cíclicos?

(b) Sea p un primo y $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\mathbb{Z}_{p^k}^* \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{k-2}} & p = 2, \quad k \ge 2, \\ \mathbb{Z}_{\phi(p^k)} = \mathbb{Z}_{(p-1)p^{k-1}} & p \ne 2, \quad k \ge 1. \end{cases}$$

Más aún, $\mathbb{Z}_{2^k}^* = \langle -1 \rangle \times \langle 5 \rangle$, para $k \ge 3$, y $\mathbb{Z}_{p^k}^* = C_{p-1} \times \langle p+1 \rangle$ donde C_{p-1} es un grupo cíclico de orden $p-1$.

(c) Mostrar que $\mathbb{Z}_{mn}^* \simeq \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$ si $(m,n) = 1$.
Ayuda: $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ si $(m,n) = 1$.

(d) Calcular $\mathbb{Z}_n^*$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y dar condiciones necesarias y suficientes para que $\mathbb{Z}_n^*$ sea cíclico.

3. *Acciones de grupo y conteo (Burnside-Polya).*

(a) Sea G un grupo finito actuando en un conjunto finito X y sea r el número de G-órbitas de X. Probar que

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |X_g|$$

donde $X_g = \{x \in X : gx = x\}$.
Ayuda: estudie el conjunto $\{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$.

(b) Como una aplicación de la (bella) fórmula anterior, decir de cuántas formas distintas se pueden colorear los vértices de un cuadrado, si cada vértice debe ser coloreado con un único color, a elegir de entre 3 colores fijos distintos. Dar los coloreos.

4. *Anillos noetherianos y artinianos.* Sea A un anillo (con 1). Probar que:

(a) Si A es principal entonces A es noetheriano.

(b) Si existe $x \in A$ tal que x no es ni divisor a izquierda de cero ni un inversible en A entonces A no es artiniano.

5. *Dominios íntegros.* Probar que:

(a) Todo dominio euclídeo (DE) es un dominio de ideales principales (DIP) y por lo tanto un dominio de factorización única (DFU). Es decir, probar

$$\text{DE} \Rightarrow \text{DIP} \Rightarrow \text{DFU}.$$

(b) El anillo de enteros de Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ es un dominio euclídeo con la aplicación $\varphi(a + ib) = |a + ib|^2 = a^2 + b^2$.

6. *El A-módulo A_{p^∞}.* Sea A un dominio íntegro y $K = \mathrm{Frac}(A)$ su cuerpo de fracciones. Dado $p \in A \smallsetminus \{0\}$ definimos

$$A_{\{p\}} := \left\{ \frac{a}{p^n} : a \in A,\, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \subset K, \qquad A_{p^\infty} := A_{\{p\}}/A.$$

(a) Probar que A_{p^∞} es un A-módulo de torsión. ¿Es p-primario?

(b) Mostrar que si $A = \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{Z}$ es primo entonces $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un grupo abeliano que no es finitamente generado, no es acotado, y que $\{\langle \overline{(\frac{1}{p^n})} \rangle\}$ es el conjunto de todos los subgrupos finitos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

(c) Probar que $Z_{\{p\}}$ es indivisible pero $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible, con p primo.

7. *Verdadero o Falso (popurrí).* Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar adecuadamente.

(a) Sea M un A-módulo y $S, T \subseteq M$ submódulos con $S \simeq T$. Entonces $M/S \simeq M/T$.

(b) $\mathbb{Z}$ y $k[x]$, con k cuerpo, son anillos noetherianos y artinianos.

(c) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, con p primo, es artiniano pero no noetheriano.

(d) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo con torsión y su torsión es $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(e) $\mathbb{Z}[x]$ es un dominio principal.

(f) No existen grupos infinitos en donde todo elemento es de orden finito.

(g) $Z[\sqrt{-5}]$ no es un DFU.

(h) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \oplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$, donde $\mathbb{P}$ denota al conjunto de primos de $\mathbb{Z}$.

Noviembre 2009

1. *Teoremas de Sylow.* Sea G un grupo finito de orden $p^k m$, con $k \geq 1$ y p primo no divisor de m.

(a) Demostrar que para todo $i = 1, \ldots, k$, G tiene un subgrupo de orden p^i.

(b) Demostrar que todos los subgrupos de G de orden p^k son conjugados entre sí.

(c) Determinar todos los subgrupos de Sylow del grupo de permutaciones de 5 elementos S_5.

2. *Módulos libres y proyectivos.* En este ejercicio asumimos que los anillos tienen identidad y que los módulos son unitarios.
Dado un anillo R, definir R-módulo libre y R-módulo proyectivo. Además determinar cuáles de los siguientes R-módulos M son libres y cuáles proyectivos.

(a) $R = M_n(k)$ el anillo de matrices $n \times n$ sobre un cuerpo k y $M = R$ con la acción que proviene de multiplicar a izquierda.

(b) $R = M_n(k)$ el anillo de matrices $n \times n$ sobre un cuerpo k y $M = k^n$ con la acción que proviene de multiplicar matrices por vectores.

(c) $R = k[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en un cuerpo k. Sea $A \in M_n(k)$ y sea $M = k^n$ con la acción $p \cdot v = p(A).v$ donde $p \in R$, $v \in M$, $p(A)$ denota la evaluación de p en la matriz A y $p(A).v$ es el producto de la matriz $p(A)$ por el vector v.

3. *Dominios de factorización única.* Demostrar que si D es un DFU, entonces $D[x_1, \ldots, x_n]$ también es DFU. Además, encontrar la factorización en irreducibles de los siguientes polinomios en $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $p = 3\,x^4 + 9\,x^3 - 27\,x^2 + 9\,x - 30$.

(b) $p = 12\,x^6 + 36\,x^5 - 36\,x^4 - 54\,x^3 + 162\,x^2 - 90\,x - 270$.

4. *Módulos sobre DIP.*

(a) Sean $v_1 = (2, 4, 6)$ y $v_2 = (4, -2, 2)$ elementos de $\mathbb{Z}^3$ y sea A el subgrupo de $\mathbb{Z}^3$ generado por v_1 y v_2. Determinar la estructura del grupo abeliano $\mathbb{Z}^3/A$.

(b) Sean $v_1 = (x - 1, x^2 - 1)$ y $v_2 = (2x - 2, 3x - 3)$ elementos del $\mathbb{Z}[x]$-módulo $\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x]$. Sea A el submódulo de $\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x]$ generado por v_1 y v_2. Determinar la estructura del $\mathbb{Z}[x]$-módulo $(\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])/A$.

5. *Álgebra lineal.* Sea A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Es la matriz A diagonalizable sobre $\mathbb{Q}$?

(b) ¿Es la matriz A diagonalizable sobre $\mathbb{Z}_5$?

CAPÍTULO 4

Álgebra lineal numérica

Agosto 2016

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

(a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular, entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.

(b) Sea $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior no singular tal que $A = LL^T$ resulta simétrica y definida positiva. Entonces, $\det(L) > 0$.

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular, $A = QR$ (con $r_{ii} > 0, \forall i$) una descomposición QR de A. Sea $A^TA = LL^T$ la factorización de Cholesky de A^TA. Entonces, $R = L^T$.

(d) Existe una matriz definida positiva no simétrica.[1]

(e) Toda norma matricial inducida por una norma vectorial es submultiplicativa.

2. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tridiagonal y $b \in \mathbb{R}^n$. Proponga un algoritmo **eficiente** (pseudocódigo) para obtener la descomposición LU de A y la posterior resolución del sistema $Ax = b$ utilizando dicha descomposición. Realice el conteo operacional ¿Qué estructura tienen las matrices L y U?

3. Sea $Y = \begin{bmatrix} I_n & Z \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, donde $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad. Probar que:

(a) $\kappa_F(Y) = 2n + \|Z\|_F^2$.

(b) $\kappa_2(Y) = \dfrac{2 + \sigma^2 + \sqrt{4\sigma^2 + \sigma^4}}{2}$, donde $\sigma = ||Z||_2$.

4. Supongamos que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface que $||P^TP - I_n||_2 = \varepsilon < 1$. Pruebe que todos los valores singulares de P están en el intervalo $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ y que $||P - UV^T||_2 \leq \varepsilon$, donde $P = U\Sigma V^T$ es la descomposición SVD de P.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ de rango n y sea $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ no nulo y ortogonal a las columnas de A.

[1] Considere aquí la definición de matriz definida positiva excluyendo la simetría

(a) Muestre que existen únicos $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que satisfacen la ecuación:

$$Ax + \lambda z = b,$$

donde $b \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Muestre que el vector x es solución del problema de mínimos cuadrados $\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \|Ax - b\|_2$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva. Considere el siguiente algoritmo:

$A_0 = A$
for $k = 1, \ldots$ **do**
  $A_{k-1} = G_k G_k^T$, donde G_k es el factor de Cholesky de A_{k-1}
  $A_k = G_k^T G_k$
end for

(a) Muestre que el algoritmo está bien definido, es decir, que el factor de Cholesky existe para todo k.

(b) Muestre que A_k tiene el mismo espectro que A, para todo k.

(c) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

con $a > c$ y autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, y sea

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & c_k \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 0,$$

la k-ésima iteración del algoritmo. Demuestre que

$$\lim_{k \to \infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Julio 2015

1. (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ con una descomposición SVD de la forma $A = U\Sigma V^*$. Encontrar una descomposición en autovalores de la siguiente matriz: $\left[\begin{smallmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y la matriz B se obtiene rotando A noventa grados en la dirección de las agujas del reloj. ¿Tendrán A y B los mismos valores singulares? Demostrar o dar un contraejemplo.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonalmente dominante por columnas, esto es

$$|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{jk}|.$$

Mostrar que si se aplica eliminación gaussiana con pivoteo parcial a A no se intercambiaran filas en el proceso.

3. (a) Si la matriz A es tridiagonal y hermitiana con sub y supra diagonal distintas de cero entonces los autovalores de A son todos distintos.

(b) Si A es Hessemberg superior con subdiagonal distinta de cero entonces los autovalores pueden repetirse. Dar un ejemplo.

4. Describir conceptual y algorítmicamente el proceso de deflación en el método QR para autovalores.

5. Enunciar y demostrar la solución del problema de cuadrados mínimos utilizando la descomposición QR para matrices de rango deficiente.

6. Considerar el sistema lineal $Ax = b$ donde los autovalores de A son reales y positivos. Sean λ_1 y λ_n los autovalores de A más chico y más grande respectivamente. Sea $G_w = I - wA$ la matriz de iteración del método de Richardson aplicado a A.

(a) Mostrar que todos los autovalores de G_w son menores que uno.

(b) Probar que el método converge si y solo si $w < 2/\lambda_n$.

(c) Demostrar que el valor óptimo de w es $w_b = 2/(\lambda_1 + \lambda_n)$.

(d) Si A es definida positiva entonces

$$\rho(G_{w_b}) = \frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1}.$$

Diciembre 2014

1. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 1/2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule Ax, $\|Ax\|_2$ y $\|x\|_2$.

2. Sean

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{pmatrix}.$$

(a) Mostrar que la matriz $B - \lambda I$ es definida positiva, donde $\lambda \in [0, 2]$.

(b) Mostrar que la matriz A es definida positiva.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta.

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces A es no singular.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, de rango completo, y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces el conjunto en $\mathbb{R}^n$ $\{x|x$ minimiza $\|Ax - b\|_2\}$ es de dimensión $n - m$.

(c) Existe L matriz triangular inferior con unos sobre la diagonal y U triangular superior tal que $A = LU$ donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertible, y que tiene una descomposición LU. Entonces todos los menores principales de A son no singulares.

4. Mostrar que si $H = H_0$ es dada, y se generan matrices $\{H_i\}$ tal que $H_k - \mu_k I = Q_k R_k$, $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$ con $k \geq 0$, entonces

$$(Q_0 \dots Q_j)(R_j \dots R_0) = (H - \mu_0 I) \dots (H - \mu_j I)$$

con $j \geq 0$.

5. Sea A una matriz singular, simétrica $n \times n$ con autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_i \neq 0$ para $i = 2, 3, \dots, n$. Bajo qué condiciones sobre el factor α, y el vector x^0 la iteración:

$$x^{n+1} = \alpha(b - (A - I)x^n) + (1 - \alpha)x^n$$

convergerá a la solución de $Ax = b$. Justificar la respuesta.

6. Sea A una matriz simétrica definida positiva. Mostrar que el método del gradiente conjugado converge en un número finito de pasos.

7. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Mostrar que

(a) Existen vectores columna $u_j, v_j \in \mathbb{C}^m$, $j = 1, \dots, m$ tal que

$$I - zA = (I - zu_m v_m^*) \dots (i_z u_2 v_2^*)(i - zu_1 v_1^*), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(b) Los productos internos $u_j^* v_j$ son los autovalores de A.

8. Sea $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$. Sea $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz identidad de orden n. Si:

$$A = \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n\times n},$$

determinar $\|A\|_2$ en términos de $\|X\|_2$.

Diciembre 2013

1. ¿Verdadero o Falso? (justifique):

(a) $\|v\|_1\|v\|_\infty \leq \dfrac{1+\sqrt{n}}{2}\|v\|_2$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\|A\|_{\max} = \max\limits_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|$ es una norma matricial submultiplicativa en $\mathbb{R}^{m\times n}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular, $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Demuestre que si $Ax = b$ y $(A+\delta A)\hat{x} = b + \delta b$, entonces

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}},$$

donde $\delta x = \hat{x} - x$.

3. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & d_1 \\ b_2 & a_2 & & & d_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}.$$

(a) Escriba un algoritmo que realice una eliminación gaussiana con pivoteo parcial aprovechando la estructura de la matriz.

(b) Realice el conteo operacional del procedimiento.

(c) Realice un bosquejo de la estructura de la matriz U.

4. Sea $A = [a^1 \ \hat{A}]$ y considere su descomposición QR con $Q = [q^1 \ \hat{Q}]$ ortogonal y $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r^T \\ 0 & \hat{R} \end{bmatrix}$ triangular superior.

(a) Encuentre r_{11}, q^1 y r^T en función de a^1 y $\hat{A}$.

(b) Deduzca que la descomposición QR de $\hat{A} - q^1 r^T$ está dada por $\hat{Q}$ y $\hat{R}$. Por lo tanto puede repetirse lo anterior con matrices de menor dimensión.

(c) Escriba un pseudocódigo de este procedimiento para obtener la descomposición QR de A.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y la sucesión de matrices $\{A_k\}$ definidas por

$$A_k = R_k Q_k,$$

donde $Q_k R_k = A_{k-1}$ es una descomposición QR de A_{k-1} y $A_0 = A$.

(a) Mostrar que $A_k = V_k^{\mathrm{T}} A V_k$ para $k \geq 1$, donde $V_k = Q_1 Q_2 \ldots Q_k$.

(b) Mostrar que $V_k T_k = A^k$ para $k \geq 1$, donde $T_k = R_k R_{k-1} \ldots R_1$.

(c) Supongamos que A es simétrica, tridiagonal y no singular. Mostrar que A_k es también simétrica, tridiagonal y no singular para $k \geq 1$.

6. Muestre que para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale que

$$\|(\alpha I + A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

para $\alpha > 0$.

7. Considerar la matriz tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 6 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos diagonales son iguales a 6, excepto por las dos entradas iguales a 7 que se muestran.

(a) >Es la matriz A invertible? Justificar la respuesta.

(b) Si $B = A - 6I$, se define la siguiente sucesión de vectores:

$$x^{k+1} = \frac{1}{6}\left(b - Bx^k\right), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

con $x^0 = 0$. Mostrar que esta sucesión converge a $x^* = A^{-1}b$.

(c) Sea $\rho(A)$ el radio espectral de A. Determinar $\rho(A)$.

8. Se desea resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva y se propone el siguiente método iterativo: definir x^{k+1} como solución de $\underset{x\in x^k+\mathcal{K}_k}{\text{minimizar}} \|x - x^*\|_A$, donde $\mathcal{K}_k = \text{span}\{r^k, Ar^k\}$ con $r^k = b - Ax^k$ y $Ax^* = b$.

(a) Para la base de $\mathcal{K}_k$ use r^k y el vector p^k obtenido de ortogonalizar Ar^k contra r^k en el producto interno inducido por A. Dé una fórmula para calcular p^k (sin normalizar).

(b) Escriba un pseudocódigo del método iterativo propuesto para hallar x^*.

Febrero 2011

1. Considere los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y SOR.

(a) Explicar las diferencias entre ellos.

(b) En que condiciones convergen.

(c) Escriba un algoritmo en pseudo código que implemente SOR.

2. El siguiente algoritmo pretende implementar las rotaciones de Givens para realizar la descomposición QR de una Matriz A.

Para $j = 1$ a $m-1$
  Para $i = j+1$ a m
    $G = \text{givrot}(A(i-1,j), A(i,j))$
    $A(i-1:i, j:m) = GA(i-1:i, j:m)$

donde givrot(a,b) transforma el vector $[a,b]^t$ en el vector $[\sqrt{a^2+b^2}, 0]^t$.

(a) Decidir si lo hace o no. Justifique.

(b) Si no lo hace, ¿qué cambios debería realizar para que se cumpla el objetivo planteado?

(c) ¿Cuántas operaciones se realizan en el algoritmo corregido?

3. Sea A una matriz diagonalmente dominante en sentido estricto (por columnas).

(a) Mostrar que A es inversible.

(b) Mostrar que en la descomposición LU de A el pivoteo parcial no es necesario.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, b un vector no nulo y x la solución del sistema $Ax = b$. Dar una condición suficiente que permita mostrar que si $\overline{A}$ y $\overline{b}$ son suficientemente próximos (en términos del error relativo) a A y a b respectivamente entonces

(a) la matriz $\overline{A}$ es inversible.

(b) la única solución y del sistema $\overline{A}y = \overline{b}$ satisface una cota de la forma:

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq C\kappa(A),$$

donde C es una constante positiva (finita) y $\kappa(A)$ es el número de condición de A en la norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|$.

Encontrar un valor para C.

5. Sea A una matriz simétrica. Mostrar que el método de Jacobi para el cálculo de autovalores converge.

Diciembre 2010

1. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, no nula:

(a) Probar que los valores singulares no nulos de A son las raíces cuadradas de los autovalores de A^TA o AA^T.

(b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ probar $|\det(A)| = \prod^n \sigma_i$, σ_i =autovalor.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|A\| < 1$ entonces probar:

(a) $I - A$ es no singular.

(b) $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no singular, supongamos que $A = QR = \widetilde{Q}\widetilde{R}$, donde Q y $\widetilde{Q}$ son unitarias y R y $\widetilde{R}$ son triangulares superiores.

(a) Mostrar que $Q = \widetilde{Q}D$, con D diagonal unitaria.

(b) Mostrar que la j-ésima columna de $\widetilde{Q}$ es un múltiplo de la j-ésima columna de Q, $j = 1, \ldots, n$.

4. Sea A simétrica y definida positiva.

(a) Probar que $|a_{i,j}| = \sqrt{a_{i,i}\, a_{j,ij}}$.

(b) Sean A y X dos matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$, A definida positiva, X no singular, sea $B = X^TAX$, probar que B es definida positiva.

5. (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva y b un vector fijo. Para todo x, el vector residual es $r = b - Ax$ y el vector error es $e = A^{-1}b - x$. Demuestre que el producto interno del vector error con el vector residual es positivo a menos que $Ax = b$.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva, con el paso t definido como

$$t = \frac{\langle v, b - Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}.$$

Demuestre que si $y = x + tv$, entonces $\langle v, b - Ay\rangle = 0$.

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva, probar que los vectores v_j del método del gradiente conjugado son efectivamente direcciones A conjugadas, es decir $\langle v_i, v_j\rangle_A = \langle v_i, Av_j\rangle \delta_{i,j}$.

(d) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un sistema A-ortonormal consideremos la siguiente iteración

$$x_i = x_{i-1} + \frac{\langle b - Ax_{i-1}, u_i\rangle}{\langle u_i, Au_i\rangle} u_i$$

con x_0 un vector arbitrario, luego $Ax_n = b$.

6. (a) Describir el algoritmo del Método de las potencias para calcular el autovalor de máximo modulo de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Realizar tres iteraciones con este método para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Modifique el algoritmo del método de las potencias para poder calcular el autovalor de módulo máximo, en el caso que

$$\lambda_1 = -\lambda_2 > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Noviembre 2009

1. Considerar la siguiente factorización de la una matriz A tridiagonal:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ d_2 & 1 & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & \\ & & & d_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & c_1 & & & \\ & e_2 & c_2 & & \\ & & * & * & \\ & & & * & c_{n-1} \\ & & & & e_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(a) Deducir relaciones de recurrencia que determinan los valores de los d_k's y los e_k's en términos de los valores de los a_k's, b_k's y los c_k's.

(b) Dar una condición sobre la matriz A que asegure que las relaciones de recurrencia están bien definidas.

(c) Dar las fórmulas que permitan calcular la solución de $Ax = b$ en $\mathcal{O}(n)$ operaciones.

2. Sean A y B matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$, A no singular, tales que satisfacen la desigualdad $||A^{-1}||_2||B||_2 \leq q$, con una constante $q < 1$.

(a) Mostrar que $C = A + B$ es no singular.

(b) Mostrar que la iteración definida por $Ax^{j+1} = b - Bx^j$, $j = 0, 1, \ldots$ converge para cualquier x^0 a la solución del sistema $Cx = b$. Dar una estimación de $||x^j - x||_2$ en términos de q.

3. (a) Sea A una matriz $n \times n$. Para cada vector x no nulo, el cociente de Rayleigh de x (con respecto a A) está definido por

$$f(x) = \frac{x^T Ac}{x^T x}.$$

Mostrar que x es un punto estacionario de f (esto es, todas las derivadas parciales de f se anulan) si y sólo si x es un autovector de $(A + A^T)/2$ con autovalor λ, y en este caso $f(x) = \lambda$.

(b) Mostrar que si A es simétrica y x es un autovector de A con autovalor λ, entonces para Δx pequeño,

$$f(x + \Delta x) = \lambda + \mathcal{O}(||\Delta x||^2).$$

4. Sea A la siguiente matrix 2×2:

$$A \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & a \end{pmatrix}.$$

donde a y b son números reales tales que satisfacen $a > b > 0$. Mostrar que la iteración de Gauss-Seidel es convergente para este tipo de matrices.

5. Probar que la iteración de Jacobi aplicada al sistema lineal $Ax = b$ converge para todas las matrices 2×2 simétricas y definidas positivas.

6. Considerar el método de gradiente conjugado para la minimización de $f(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u)$. La matriz A es simétrica y definida positiva. Comenzando con $u_0 = 0$, $r_0 = b$ y $p_0 = r_0$, las sucesivas aproximaciones son calculadas mediante:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \qquad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k, \qquad p_{k+1} = r_{k+1} - \beta_k p_k,$$

donde $\alpha_k = \dfrac{(r_k, p_k)}{Ap_k . p_k}$ y $\beta_k = \dfrac{(Ar_{k+1}, p_k)}{(Ap_k, p_k)}$.

(a) Mostrar que para $k = 0, 1, 2, \ldots$ las siguientes relaciones son verdaderas:

$$\operatorname{span}\{p_0, p_1, \ldots, p_k\} = \operatorname{span}\{r_0, r_1, \ldots, r_k\} = \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0\}.$$

(b) Mostrar que si A es de tamaño $n \times n$, entonces existe $m \leq n$ tal que $r_m = 0$ (asumir que todas las operaciones son realizadas exactamente).

7. Enunciar y demostrar el Teorema de la descomposición de Cholesky.

8. Probar que $G = I - uv^T$ es singular si y sólo si $v^T u = I$. Si G es no singular entonces $G^{-1} = I - \beta uv^T$. Dar una fórmula para β.

CAPÍTULO 5

Análisis funcional

Julio 2016

1. Sea X un espacio vectorial topológico.

(a) Dé la definición de *subconjunto acotado* de X.

(b) Demuestre que si K es un subconjunto compacto de X entonces K es acotado.

(c) Demuestre que un subconjunto E de X es acotado si y sólo si todo subconjunto numerable de E es acotado.

2. Sea $s > -2$. Ponemos, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\Phi_s(f) = \int_0^1 \left(f(x) - f(0)\right) x^s dx.$$

(a) Demuestre que si $s > -1$ entonces Φ_s es una distribución temperada de orden cero.

(b) Si $-2 < s \leq -1$, verifique que Φ_s es una distribución temperada de orden menor o igual que uno.

3. Supongamos que X es un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$, T compacto, $r > 0$ y E es un conjunto de autovalores de T tales que $|\lambda| > r$ para $\lambda \in E$. Demuestre que E es un conjunto finito.

4. Sea X un espacio de Hilbert separable, de dimensión infinita con $x_1, x_2, \ldots$ un conjunto ortonormal completo. Para $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, definimos $A \in \mathcal{B}(X)$ por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n+1} x_n.$$

Muestre que el espectro puntual de A es $\{0\}$.

5. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{B}(H)$, T invertible. Demuestre que T tiene una única descomposición polar $T = UP$, donde U es un operador unitario y P es un operador positivo.

Marzo 2015

1. Sea l_1 el espacio de sucesiones infinitas $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de números complejos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.

(a) Pruebe que $\|x\| = \sup_n |\alpha_n|$ define una norma sobre l_1.

(b) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Pruebe que f es lineal pero no continua con respecto a la norma definida en (a).

2. (a) Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. ¿Cuándo se dice que T es compacto?

(b) Sea H un espacio de Hilbert. Sea $E : H \to H$ un operador lineal y continuo que satisface $E^2 = E$. Pruebe que E es compacto si y sólo si el rango de E es de dimensión finita.

3. Se define la función $vp(\frac{1}{x})$ sobre $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ así:

$$vp\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x \right].$$

(a) Pruebe que dicho límite existe y que $vp(\frac{1}{x})(\varphi) \in D'(\mathbb{R})$.

(b) Pruebe que $vp(\frac{1}{x}) \in S'(\mathbb{R})$ y halle $\widehat{xvp(\frac{1}{x})}$.

4. Si H es un espacio de Hilbert no nulo y $T \in B(H)$.

(a) Pruebe que si $(Tx, x) = 0$ para todo $x \in H$ entonces $T = 0$.

(b) Pruebe que la raíz cuadrada positiva de T^*T es el único posible operador $P \in B(H)$ que satisface $\|Px\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$.

5. Enuncie el Teorema espectral para operadores normales.

CAPÍTULO 6

Variedades diferenciables

Marzo 2017

1. Probar las siguientes afirmaciones.

1. No existe $f : S^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ diferenciable, inyectiva y con derivada inyectiva en todo punto.
2. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$ un punto crítico de la función suave $f : M \to \mathbb{R}$. Si dos curvas suaves $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ satisfacen $\alpha(0) = \beta(0) = p$ y $\alpha'(0) = \beta'(0)$, entonces $(f \circ \alpha)''(0) = (f \circ \beta)''(0)$.
3. Sea M una variedad de dimensión dos y $(U, \phi = (x, y))$ un sistema coordenado en M. Dado $p \in U$, existe una 1-forma α definida en toda M tal que $\alpha = dx$ en un entorno abierto $V \subset U$ de p.
4. Sea G un grupo de Lie y sea $X \in \mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G. Dado $g \in G$, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $g \exp(tX) g^{-1} = \exp(tY)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Sea M una subvariedad compacta de dimensión dos incluida en $\mathbb{R}^4$ y sea $u \in \mathbb{R}^4$ un vector unitario. Probar que existe $p \in M$ tal que $T_pM \perp u$ (como es usual, se identifica T_pM con un subespacio de $T_p\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4$).

3. Sea X un campo diferenciable en M y sea ϕ su flujo. Mostrar que si $\lim_{t\to\infty} \phi_t(p) = q \in M$, entonces $X(q) = 0$.

4. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un subconjunto linealmente independiente de V^*. Probar que si $\beta_1, \ldots, \beta_r \in V^*$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \beta_i = 0,$$

entonces $\beta_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\alpha_j$ para ciertos $c_{ij} \in \mathbb{R}$ con $c_{ij} = c_{ji}$.
Sugerencia: Comenzar completando $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ a una base de V^*.

5.
1. Sea L una variedad diferenciable y sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ dos distribuciones integrables en L tales que $\mathcal{D}(q) \subset \mathcal{E}(q)$ para todo $q \in L$. Dado $p \in L$, mostrar que la hoja de $\mathcal{D}$ por p (es decir, la subvariedad integral conexa maximal de $\mathcal{D}$ que contiene a p) está contenida en la hoja de $\mathcal{E}$ por p.

2. Sean M, N dos variedades diferenciables y sea $\mathcal{D}$ una distribución integrable en M. Sea $\mathcal{E}$ la distribución en $M \times N$ definida por $\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{D}(x) \times \{0\}$ ($T_{(x,y)}(M \times N)$ se identifica de la manera natural con $T_xM \times T_yN$). Probar $\mathcal{E}$ es integrable y que la hoja de $\mathcal{E}$ que pasa por (x_o, y_o) está contenida en $M \times \{y_o\}$.

6. Probar que todo campo vectorial en una variedad compacta es completo.

Diciembre 2016

1. Considerar en $\mathbb{R}^2$ la relación de equivalencia $(x,y) \sim (x+k, y)$, con $k \in \mathbb{Z}$, y la única estructura diferenciable en el cociente $C = \mathbb{R}^2/_\sim$ tal que la proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \to C$ es un difeomorfismo local. Sea $\gamma : (0, \pi/3) \to C$ definida por $\gamma(t) = \pi\left(\frac{1}{2} + \cot t, \operatorname{sen} t\right)$. Mostrar que γ es una subvariedad pero no es imbedding.

2. Sea $f : M \to N$ C^∞ y (P, ϕ) una subvariedad de N tal que $f(M) \subset \phi(P)$. Sea $f_0 : M \to P$, $\phi \circ f_0 = f$. Probar lo siguiente:

(a) Si f_0 es continua, entonces f_0 es diferenciable.

(b) Si ϕ es un embedding, entonces f_0 es continua.

3. Sea $\mathrm{O}(n) = \left\{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\right\}$.

(a) Probar que $\mathrm{O}(n)$ es una subvariedad de $M(n, \mathbb{R})$. >Es un embedding? Hallar $T_I\mathrm{O}(n)$, donde I es la matriz identidad $n \times n$.

(b) Mostrar que la aplicación $\alpha : O(n) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ definida por $\alpha(A, B) = AB$ (multiplicación de matrices) es diferenciable.

(c) Sea e_1 el vector columna $(1, 0, \ldots, 0)^t$. Mostrar que la función $F : \mathrm{O}(n) \to \mathbb{RP}^{n-1}$ definida por $F(A) = [Ae_1]$ es diferenciable, donde $\mathbb{RP}^{n-1}$ es el espacio proyectivo real de dimensión $n-1$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$. Se define en $\mathbb{R}^3$ la distribución $\mathcal{D}$ por

$$\mathcal{D}(x,y,z) = \text{ span } \left\{e_1 + f'(x)(\operatorname{sen} y)\, e_3,\ e_2 + f(x)(\cos y)\, e_3\right\}$$

(identificamos $T_p\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$ para cada p, de la manera usual).

(a) Mostrar que $\mathcal{D}$ es involutiva.

(b) Hallar una subvariedad integral $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{D}$ tal que $\phi(0,0) = (0,0,0)$.

5. Sean M y N variedades conexas orientadas y $f : M \to N$ un difeomorfismo.

(a) Probar que $\{\, p \in M\ :\ f$ preserva orientación en $p\,\}$ es abierto en M.

(b) Probar que hay exactamente dos posibilidades: o bien f preserva orientación o bien f invierte orientación.

6. Determinar en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) Si M es una variedad de dimensión n y existen $X_1, \ldots, X_n$ campos C^∞, linealmente independientes en cada punto y tales que $[X_i, X_j] = 0$ para todo i, j, entonces $[Y, Z] = 0$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Si M es compacta y orientada de dimensión m y θ es una $(m-1)$-forma diferencial sobre M, entonces existe $p \in M$ tal que $d\theta_p = 0$.

(c) Si G es un grupo de Lie compacto y $f : G \to (\mathbb{R}, +)$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces f es constante.

Agosto 2016

1. Sea C el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y sea $\alpha : (0, 4\pi) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(s) = \left(\cos s, \operatorname{sen} s, \operatorname{sen} \tfrac{s}{2}\right).$$

Mostrar que $\alpha : (0, 4\pi) \to C$ es una subvariedad de C (en particular diferenciable) que no es incrustada.

2. Sea M una variedad diferenciable compacta conexa, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $f \in C^\infty(M)$ no idénticamente cero. Probar que si $c \in \mathbb{R}$ satisface $X(f) = cf$, entonces $c = 0$.

3. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un subconjunto linealmente independiente de V^*. Probar que si $\beta_1, \ldots, \beta_r \in V^*$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \beta_i = 0,$$

entonces $\beta_i = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\alpha_j$ para ciertos $c_{ij} \in \mathbb{R}$ con $c_{ij} = c_{ji}$.
Sugerencia: Comenzar completando $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ a una base de V^*.

4. Sea ω la 2-forma en $\mathbb{R}^3$ definida por $\omega = x^2 z\, dx \wedge dy + yz\, dz \wedge dx$ y sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(s, t) = \left(st, s^2, 3t\right)$. Calcular $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\phi^*\omega = f\ ds \wedge dt$.

5. Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Si U, V son campos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$U = \frac{\partial}{\partial z}, \quad V = (\cos z)\frac{\partial}{\partial x} + (\operatorname{sen} z)\frac{\partial}{\partial y},$$

entonces la distribución $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{D}(p) = \operatorname{span}\{U(p), V(p)\}$ es integrable.

(b) La subvariedad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = e^{-t}(\cos t, \operatorname{sen} t)$ es subvariedad integral de alguna distribución de dimensión uno en $\mathbb{R}^2$.

(c) Sea $\mathfrak{g}$ el ágebra de Lie de $\mathrm{SO}(3)$. Entonces $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{SO}(3)$ es inyectiva.

6. Sea ω la k-forma en $\mathbb{R}^n$ definida por $f dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^k$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Probar que $d^2\omega = 0$.

7. Sean M una variedad compacta de dimensión n y sea ω una n-forma nunca nula en M. Definir con precisión $\int_M \omega$. En particular, probar que la definición es buena.

Julio 2014

1. Sea $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^t = I\}$ el conjunto de matrices ortogonales $n\times n$.

(a) Mostrar que $\mathrm{O}(n)$ es una subvariedad incrustada de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{O}(3)$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \\ \operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es γ diferenciable?

2. Sea $\pi : M \to N$ una submersión y sea α una curva suave en N con $\alpha(0) = q$. Mostrar que dados $p \in \pi^{-1}(q)$ y $v \in T_pM$ con $d\pi_p(v) = \alpha'(0)$, entonces existe una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ y tal que $\alpha = \pi \circ \gamma$.

3. Sean $U = \frac{\partial}{\partial y}$ y $V = \frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial z}$ dos campos en $\mathbb{R}^3$.

(a) Probar que la distribución definida por $\mathcal{D}_p = \operatorname{span}\{U_p, V_p\}$ no es involutiva.

(b) Mostrar que el plano $z = 0$ es una subvariedad integral de $\mathcal{D}$.

(c) ¿Existe un sistema coordenado (x_1, x_2, x_3) en algún entorno de $(0,0,1)$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_1} = U$ y $\frac{\partial}{\partial x_2} = V$?

4. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un subconjunto linealmente independiente de V^*. Probar que si $\beta_1, \ldots, \beta_r \in V^*$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \beta_i = 0,$$

entonces $\beta_i = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\alpha_j$ para ciertos $c_{ij} \in \mathbb{R}$ con $c_{ij} = c_{ji}$.
Sugerencia: Comenzar completando $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ a una base de V^*.

5. Probar que si n es impar, entonces el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es orientable.

6. Considerar en $\mathbb{R}^3$ el producto definido por

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

(a) Probar que $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ es un grupo de Lie.

(b) Para cada $i = 1, 2, 3$, calcular el campo invariante a izquierda V^i en $\mathbb{R}^3$ tal que $V^i(0) = e_i$. Verificar que $[V^1, V^2] = V^3$.

7. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Probar que existe un subgrupo de Lie conexo H de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Febrero 2014

Todas las variedades consideradas son N_2.

1. Sea $f : M \to N$ un imbedding tal que $f(M)$ es cerrado en N. Dada $g \in C^\infty(M)$ probar que g se extiende a N, es decir, existe $\tilde{g} \in C^\infty(N)$ tal que $\tilde{g} \circ f = g$.

2. Sea $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $(S_n(\mathbb{R}), i)$ es un imbedding en $M_n(\mathbb{R})$ con imagen cerrada. Dar la dimensión de $S_n(\mathbb{R})$ y exhibir una función $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ C^∞ tal que $\varphi_\circ\, i = \mathrm{id}_{S_n(\mathbb{R})}$.

(b) Si $\mathcal{P} = \{A \in S_n(\mathbb{R}) : \langle AX, X\rangle > 0\ \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0\}$, demostrar que $\mathcal{P}$ es abierto y que $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definida por $f(A) = A^2$ es un difeomorfismo.[1]

3. Considerar en $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ la distribución $\mathcal{D}$ generada por los campos X y Z definidos por $\mathrm{X}(x,y,z) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $\mathrm{Z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}$. Demostrar que el cilindro $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$, con la estructura diferenciable usual, es una subvariedad integral conexa **maximal** de $\mathcal{D}$.

4. (a) Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ con grupos monoparamétricos locales $\{\theta_t^1\}$, $\{\theta_t^2\}$, respectivamente, demostrar que $[X_1, X_2] = 0$ si y sólo si $\theta_t^1\,\theta_s^2 = \theta_s^2\,\theta_t^1$ para todo t, s donde estén definidos ambos miembros.

(b) Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes en cada punto de M tales que $[X_1, X_2] = 0$, demostrar que para cada $p \in M$ existe un sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ en p tal que $\frac{\partial}{\partial x_1} = X_1|_U$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = X_2|_U$.

5. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\widetilde{\mathfrak{h}}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Probar que existe un subgrupo de Lie conexo (H, ϕ) de G, con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, tal que $d\phi\,(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$.

6. Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Si M es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $M \subseteq S^n$, entonces M es subvariedad de S^n.

(b) Todo grupo de Lie es orientable.

(c) Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de SO(3) entonces $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{SO}(3)$ es inyectiva.

(d) Existe una forma de volumen exacta en S^3.

Noviembre 2013

1. Sea $M \subset N$ una subvariedad de N. Sea Z un campo vectorial en M y sea p un punto de M. Mostrar que existen entornos abiertos U y V de p en M y N respectivamente, con $U \subset V$, y un campo vectorial $\widetilde{Z}$ en V tal que $\widetilde{Z}_q = d\iota_q\,(Z_q)$ para todo $q \in U$ (donde $\iota : M \to N$ denota la inclusión).

[1]Recordar que si $A \in S_n(\mathbb{R})$, existe una base ortonormal que la diagonaliza; $A \in \mathcal{P}$ si y sólo si A es simétrica y sus autovalores son positivos.

2. Sea $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable. Mostrar que la distribución $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^3$ dada por
$$\mathcal{D}(x,y,z) = \text{ span } \left\{ \left(1,0,f'(x)\operatorname{sen} y\right), \left(0,1,f(x)\cos y\right)\right\}$$
es involutiva (para cada p, se identifica $T_p\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$ de la manera usual).

3. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $N = \mathbb{R}\times(-1,1)$ definida por
$$(x,y) \sim \left(x+k,(-1)^k y\right)$$
para $k\in\mathbb{Z}$, y sea $\pi : N \to M = N/_\sim$ la proyección canónica. Suponer que la cinta de Moebius M tiene la estructura diferenciable tal que π es un difeomorfismo local.

(a) Probar que $\mathcal{D}_{\pi(x,y)} = \mathbb{R}d\pi_{(x,y)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x,y)}\right)$ define (bien) una distribución de dimensión uno en M.

(b) Mostrar que no existe un campo V definido en toda M tal que $\mathcal{D}_q = \mathbb{R}V_q$ para todo $q\in M$.

4. Sea $\mathbb{P} = S^3/_\sim$ el espacio proyectivo de dimensión tres. Sea V un campo vectorial en $\mathbb{P}\times\mathbb{R}$. Probar que existe $\delta>0$ tal que para todo $q\in\mathbb{P}$, la curva integral $\gamma_{(q,0)}$ de V está definida en el intervalo $(-\delta,\delta)$.

5. Sea p un punto de una variedad diferenciable M de dimensión n. Probar que existen un entorno abierto U de p en M y n $(n-1)$-formas cerradas ω^i $(i=1,\dots,n)$ en U tales que $\left\{\omega_q^i \mid i=1,\dots,n\right\}$ es una base de $\Lambda^{n-1}(T_qM)^*$ para todo $q\in U$.

6. Se consideran las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$E(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t\\ 0 & 1 & 0\\ \sinh t & 0 & \cosh t\end{pmatrix}$$
y el grupo de Lie $G = \left\{X\in Gl(3,\mathbb{R}) \mid X^TAX = A\right\}$. Mostrar que Y está en el álgebra de Lie de G y que $\exp(tY) = E(t)$.

7. Escribir dos definiciones equivalentes de que una variedad M sea orientable y demostrar que una de ellas implica la otra.

Marzo 2013

1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n+k$ y sean $X_1,\cdots,X_n$ campos tangentes C^∞ tales que $X_1(p),\cdots,X_n(p)$ son vectores linealmente independientes de T_pM, para todo $p\in M$. Probar que los corchetes de Lie $[X_i,Xj]$, $i,j=1,\dots,n$, son nulos si y sólo si, dado $p\in M$ existe una sistema de coordenadas $(U,x=x_1,\dots,x_{n+k})$ alrededor de p tal que $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, $i=1,\dots,n$

2. Sean X, Y los campos vectoriales tangentes a la esfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definidos por $X(q) = v - \langle v, q \rangle q$, $Y(q) = w - \langle w, q \rangle q$ donde v, w son dos vectores fijos de $\mathbb{R}^{n+1}$. Calcular el campo $[X, Y]$.

3. Sea M una variedad diferenciable y sea X un campo tangente C^∞ en M con soporte compacto. Probar que X es completo (es decir, las curvas integrales de X están definidas en todo $\mathbb{R}$).

4. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales y sean $\mathrm{GL}(n)$, las matrices inversibles y $\mathrm{O}(n)$ las matrices ortogonales. Probar que $\mathrm{GL}(n)$ y $\mathrm{O}(n)$ son subvariedades embebidas de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

5. Sea $\mathcal{D}$ una distribución involutiva C^∞ en M y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo que yace en $\mathcal{D}$. Sea $N \subset M$ una subvariedad integral conexa maximal de $\mathcal{D}$ y sea θ_t el flujo asociado a X. Demostrar que $\theta_t(N) \subset N$ para todo t y que $\theta_t|_N : N \to N$ es diferenciable.

6. Sean X, Y los campos vectoriales C^∞ de $\mathbb{R}^n$ definidos por

$$X(q) = v \in T_q\mathbb{R}^n, \qquad\qquad Y(q) = A.q \in T_q\mathbb{R}^n$$

donde $v \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Calcular:

(a) El flujo ϕ_t asociado al campo X.

(b) El flujo ψ_t asociado al campo Y.

(c) El corchete $[X, Y]$.

Diciembre 2012

M y N denotan variedades diferenciables N_2 de dimensión m y n respectivamente.

1. Sea $f : M \to N$ una función C^∞.

(a) Probar que si df_p es inyectiva y $(x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema de coordenadas de N alrededor de $f(p)$, entonces $(x_{i_1} \circ f, \ldots, x_{i_m} \circ f)$ es un sistema de coordenadas de M alrededor de p para cierto subconjunto $\{i_1, \ldots, i_m\}$ de $\{1, \ldots, n\}$.

(b) Sea (P, ϕ) una subvariedad de N tal que $f(M) \subset \phi(P)$. Sea $f_0 : M \to P$, $\phi \circ f_0 = f$. Probar lo siguiente:

(i) Si f_0 es continua, entonces f_0 es diferenciable.

(ii) Si ϕ es un imbedding, entonces f_0 es continua.

2. (a) Sea $\mathrm{O}(n) = \left\{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\right\}$. Probar que la inclusión $\iota : \mathrm{O}(n) \hookrightarrow M(n, \mathbb{R})$ es un imbedding y hallar $T_I\mathrm{O}(n)$.

(b) Si $\alpha : \mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ es la multiplicación $\alpha(A, B) = AB$ y $\beta : \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ es la inversión $\beta(A) = A^{-1}$, probar que α y β son diferenciables y por lo tanto $\mathrm{O}(n)$ es un grupo de Lie.

(c) Sea e_1 el vector columna $(1, 0, \ldots, 0)^t$. Mostrar que la función $F : \mathrm{O}(n) \to \mathbb{R}P^{n-1}$ definida por $F(A) = [Ae_1]$ es diferenciable.

3. Sea $\mathcal{D}$ una distribución C^∞ e involutiva en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo tal que $X_p \in \mathcal{D}_p$ para todo $p \in M$. Sea $N \subseteq M$ una subvariedad integral conexa maximal de $\mathcal{D}$ y sea θ_t el flujo asociado a X. Demostrar que $\theta_t(N) \subseteq N$ para todo t y que $\theta_t \mid_N : N \to N$ es diferenciable.

4. Sea V un campo diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $V \equiv 0$ en el complemento de un subconjunto compacto. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}\,(V) = 0.$$

5. Decir en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) Existe una subvariedad M de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $(0,0,0)$ tal que T_qM está generado por $\{X_q, Y_q\}$ para todo $q \in M$, donde

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

(b) Si $X_1, \ldots, X_m$ son campos diferenciables en M tales que $\{X_1(p), \ldots, X_m(p)\}$ es una base de T_pM para todo $p \in M$, entonces M es orientable.

(c) Sea $\mathfrak{g}$ el ágebra de Lie de $\mathrm{SO}(3)$. Entonces $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{SO}(3)$ es inyectiva.

Junio 2012

Todas las variedades consideradas son N_2.

1. Sea M una variedad diferenciable y sea $b : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica. Probar que existe una 2-forma ω definida en toda M tal que $\omega_p = b$ y satisface además que $(d\omega)_p = 0$.

2. Sea $\pi : M \to N$ una submersión, sea $\alpha : (-\delta, \delta) \to N$ una curva C^∞. Dados $p \in M$ y $X \in T_pM$ tales que $\pi(p) = \alpha(0)$ y $d\pi_p X = \alpha'(0)$, mostrar que existe una curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $\pi \circ \beta = \alpha$.

3. Sea $F : M \to \mathbb{R}^n$ una función C^∞ tal que dF_p es suryectiva para todo $p \in M$. Mostrar que $\|F\|^2 : M \to \mathbb{R}$ no alcanza máximo.

4. Se define en $\mathbb{R}^3$ la operación

$$(t, x, y) \cdot (t', x', y') = (t + t', x + e^t x', y + e^{-t} y').$$

(a) Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es grupo de Lie con dicha multiplicación.

(b) Calcular el campo invariante a izquierda V tal que $V(0,0,0) = (\tau, \xi, \eta)$.

5. (a) Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ con grupos monoparamétricos locales $\{\theta_t^1\}$ y $\{\theta_t^2\}$, respectivamente, demostrar que $[X_1, X_2] = 0$ si y sólo si $\theta_t^1\,\theta_s^2 = \theta_s^2\,\theta_t^1$ para todo t, s donde estén definidos ambos miembros.

(b) Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes en cada punto de M tales que $[X_1, X_2] = 0$, demostrar que para cada $p \in M$ existe un sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ en p tal que $\frac{\partial}{\partial x_1} = X_1|_U$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = X_2|_U$.

6. Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es C^∞ y $\omega = f dx_2$ es una 1-forma en $\mathbb{R}^2$ tal que $d\omega = 0$, entonces f es constante.

(b) El fibrado cotangente T^*M es orientable para toda variedad M.

(c) Existe $f : S^2 \to \mathbb{R} \times S^1$ C^∞, inyectiva y con derivada inyectiva en todo punto.

Marzo 2012

1. Sean $U = \frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial z}$ y $V = \frac{\partial}{\partial y}$ dos campos en $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostrar que $\mathcal{D}_p = \operatorname{span}\{U_p, V_p\}$ define una distribución en $\mathbb{R}^3$ que no es involutiva.

(b) Encontrar una subvariedad conexa integral de $\mathcal{D}$ por $0 \in \mathbb{R}^3$.

2. Sea M una subvariedad compacta de dimensión dos incluída en $\mathbb{R}^4$ y sea V un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión tres. Probar que existe $p \in M$ tal que $T_pM \subset V$ (como es usual, se identifica T_pM con un subespacio de $T_p\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4$).

3. Sea X un campo nunca nulo en una variedad M, sea γ la curva integral de X tal que $\gamma(0) = p$, y sea $\mathcal{D}$ la distribución en M definida por $\mathcal{D}(q) = \mathbb{R}X(q)$. Probar que si existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t_0) = p$, entonces existe $F : S^1 \to M$ tal que (S^1, F) es una subvariedad integral conexa maximal para $\mathcal{D}$ que contiene a p.

4. Decidir en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Si M es la silla de montar $\{(x, y, xy) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$, entonces $f^{-1}(\{1\})$ es una subvariedad incrustada de M.

(b) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $\theta_1, \ldots, \theta_k \in V^*$. Si $\omega = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k \neq 0$, entonces $\dim\{v \in V : \iota_v\omega = 0\} = n - k$.

(c) Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dados $g \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $g \exp(X) g^{-1} = \exp(Y)$.

5. Sea $M \subset N$ una subvariedad incrustada, con M cerrada en N, y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que existe una función diferenciable $g : N \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$.

Agosto 2011

1. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades diferenciables. Probar que $F : M \to M \times N$, $F(q) = (q, f(q))$, es una subvariedad incrustada.

2. Decidir en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Entonces (M, f) es una inmersión si y sólo si para toda curva regular γ en M se cumple que la curva $f \circ \gamma$ en N es regular. (Una curva α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t.)

(b) Sea $M \subset N$ una subvariedad incrustada N y sean X, Y dos campos suaves en N tales que $X_q, Y_q \in T_qM$ para todo $q \in M$. Entonces $[X, Y]_q \in T_qM$ para todo $q \in M$.

(c) Si ω una 2-forma en $\mathbb{R}^5$ y $\theta = d\omega + \left(x_2^3 + x_3^4\right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5$, entonces $d\theta = 0$.

3. (a) Sea V un campo diferenciable nunca nulo en una variedad M de dimensión m y sea $p \in M$. Probar que existe un sistema coordenado $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ con $p \in U$ tal que $V|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

(b) Sea Y un campo suave en M y sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ curva integral de Y con $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = q$. Mostrar que $Y_q = 0$.

4. (a) Dados (U, ϕ) y (V, ψ) sistemas de coordenadas de M, con $U \cap V \neq \emptyset$, sean $(\pi^{-1}U, \widetilde{\phi})$, $\left(\pi^{-1}V, \widetilde{\psi}\right)$ los sistemas coordenados de TM asociados. Mostrar que el determinante del Jacobiano de $\widetilde{\psi} \circ \left(\widetilde{\phi}\right)^{-1}$ es igual al cuadrado del determinante del Jacobiano de $\psi \circ \phi^{-1}$.

(b) Concluir que TM es orientable.

5. Sea $S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ y sea $G = \mathbb{C} \times S^1$ con la estructura de grupo dada por $(z, u) \cdot (w, v) = (z + uw, uv)$.

(a) Mostrar que G es un grupo de Lie.

(b) Calcular el campo invariante a izquierda V en G tal que $V(0, 1) = (\xi, ai) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}i \cong T_{(0,1)}\left(\mathbb{C} \times S^1\right)$.

Febrero 2011

1. Sea $f : M^m \to N^n$ una submersión (f es C^∞ y df_p es suryectiva para todo $p \in M$). Probar:

(a) f es abierta.

(b) Si M es compacta y N es conexa entonces f es sobre.

(c) ¿Existen submersiones de variedades compactas en espacios euclídeos?

2. Sea

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}.$$

(a) Probar que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad embebida, cerrada de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Exhibir una función diferenciable $g : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tal que $g|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} = \mathrm{Id}$.

(b) Sea

$$\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : A \text{ es definida positiva}\}.$$

Probar que $\mathcal{P}$ es abierto en $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ y la aplicación $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $A \to A^2$ es un difeomorfismo.
Def. A es definida positiva si $\langle Ax, x\rangle > 0$ para todo $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$.

3. Sean M una variedad diferenciable y ω una 1-forma diferencial en M. Probar:

(a) $d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$ para todo $X, Y \in \chi(M)$.

(b) Si ω es nunca nula y $\mathcal{D}$ está definida por $\mathcal{D}(p) = \mathrm{Nu}(\omega_p)$ para $p \in M$, entonces $\mathcal{D}$ es una distribución diferenciable sobre M; dar su dimensión.

(c) Si además $d\omega = 0$, entonces $\mathcal{D}$ es involutiva.

4. Sea M^n una variedad diferenciable N_2 y sean $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento abierto de M y n-formas diferenciales ω_α nunca nulas sobre cada U_α con la propiedad: si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ entonces $\omega_\alpha = f_{\beta\alpha}\omega_\beta$ con $f_{\beta\alpha} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$, $f_{\beta\alpha} > 0$. Probar que M es orientable.

5. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(a) Si $X \in \chi(M)$ tiene flujo local asociado $\{\varphi_t\}$ entonces $(d\varphi_t)_p X_p = X_{\varphi_t(p)}$ para todo $p \in M$.

(b) Sea M una variedad compacta y orientada de dimensión n. Si ω es una $(n-1)$-forma diferencial sobre M entonces $d\omega_p = 0$ para algún $p \in M$.

(c) Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo local e $Y \in \chi(N)$ entonces existe $X \in \chi(M)$ tal que X está f-relacionado con Y.

(d) La curva integral (por la identidad) de un campo invariante a izquierda X en un grupo de Lie es también curva integral del campo invariante a derecha asociado a X.

Noviembre 2010

1. Sean M, N variedades diferenciables. Dados $p \in M$ y $q \in N$, y una transformación lineal $S : T_pM \to T_qN$, mostrar que existe una función diferenciable $F : M \to N$ con $F(p) = q$ tal que $dF_p = S$.

2. Sea $M = \mathbb{C} - \{0\}$ y sea V el campo en M definido por $V_z = z^2$ (para cada z se identifica $T_zM \cong \mathbb{C}$).

(a) Encontrar la curva integral γ de V con $\gamma(0) = 1$. ¿Es V completo.

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en M dada por $z \sim w$ si $z = 2^k w$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y considerar en el toro $M/_\sim$ la única estructura diferenciable tal que la proyección canónica π es un difeomorfismo local.

(a) Mostrar que ningún campo diferenciable en $M/_\sim$ está π-relacionado con V.

(b) Probar que $\mathcal{D}_{\pi(z)} = \mathbb{R}d\pi_z(V_z)$ define (bien) una distribución diferenciable en $M/_\sim$.

(c) Encontrar una subvariedad $\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 \to M/\sim$ integral para $\mathcal{D}$. ¿Es ϕ una subvariedad integral conexa maximal de $\mathcal{D}$?

3. Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Sean U, V campos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$U = \frac{\partial}{\partial z}, \quad V = (\cos z)\frac{\partial}{\partial x} + (\operatorname{sen} z)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Si $\mathcal{D}$ es la distribución en $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{D}(p) = \operatorname{span}\{U(p), V(p)\}$, entonces $\mathcal{D}$ es integrable.

(b) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ es una subvariedad incrustada de $Gl(n,\mathbb{R})$.

(c) Si ω es una 2-forma en $\mathbb{R}^5$ y $\theta = d\omega + \left(x_2^3 + x_3^4\right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5$, entonces $d\theta = 0$.

4. Probar que todo grupo de Lie es orientable, exhibiendo una n-forma diferenciable nunca nula.

5. Sea M una variedad de dimensión m y sean $x_1, \ldots, x_k$ funciones diferenciables definidas en un entorno V de $p \in M$, que son independientes en p. Probar que existe un abierto U de M que contiene a p, y funciones $x_{k+1}, \ldots, x_m$ diferenciables en U tales que $(U, (x_1, \ldots, x_m))$ es un sistema coordenado de M.

Agosto 2010

1. Considerar en $\mathbb{R}^2$ la relación de equivalencia $(x,y) \sim (x+2k, y)$, con $k \in \mathbb{Z}$, y la única estructura diferenciable en el cilindro $C = \mathbb{R}^2/_\sim$ tal que la proyección canónica $p : \mathbb{R}^2 \to C$ es un difeomorfismo local. Sea $\gamma : (-1,\infty) \to C$ definida por $\gamma(t) = p\left(t, t^2\right)$. Mostrar que γ es una subvariedad que no es incrustada.
Sugerencia: Usar sucesiones.

2. Sea (M, f) una subvariedad de la variedad diferenciable N y sea ω una k-forma diferencial en M. Probar que ω se extiende localmente a una k-forma diferenciable en N; más precisamente, probar que para todo $p \in M$ existen abiertos U y V de M y N respectivamente, con $p \in M$ y $f(U) \subset V$, y una k-forma diferencial Ω en V, tales que $g^*\Omega = \omega|_U$, donde $g = f|_U$.

3. Sea $G = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det X \neq 0\}$ y sea $M = \mathbb{R}^n \times G$. Sea $V = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial r_i} \cong (v_1, \ldots, v_n)$ un campo completo en $\mathbb{R}^n$ y sea ϕ_t su flujo. Para $t \in \mathbb{R}$, se define $\Phi_t : M \to M$ por
$$\Phi_t(p, X) = \left(\phi_t(p), \phi_t'(p) X\right),$$
donde, si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces $F'(p)$ denota la matriz de dF_p en la base canónica. Mostrar que para todo $(p, X) \in M$,
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi_t(p, X) = (V(p), AX),$$
donde $A_{ij} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial r_j}\right|_p$.

4. Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión n con un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ que satisface $\det\left(\mathrm{d}\left(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}\right)\right) > 0$ en su dominio, para todo par $\alpha, \beta \in I$. Probar que en M existe una n-forma diferenciable nunca nula.

5. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Dada $\theta \in (T_pM)^*$, existe una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $df_p = \theta$.

(b) Sea (M, ϕ) una subvariedad integral conexa de una distribución involutiva en una variedad N. Si $\phi(M)$ es cerrrada en N, entonces M es una subvariedad integral conexa maximal.

(c) Sea G un grupo de Lie. Si U, V son campos en G, donde U es invariante a izquierda y V es invariante a derecha, entonces $[U, V]_e = 0$.

Marzo 2010

1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean $X_1, \ldots, X_n$ campos tangentes C^∞ tales que $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ es una base de T_pM, para todo $p \in M$. Probar que los corchetes de Lie $[X_i, X_j]$, $i, j = 1, \ldots, n$, son todos nulos si y sólo si, dado $p \in M$ existe una sistema de coordenadas (U, x) alrededor de p tal que $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Probar que M es orientable si y sólo si existe un n-forma C^∞ nunca nula.

3. Sea M una variedad diferenciable compacta y sea X un campo tangente C^∞ en M. Probar que las curvas integrales de X están definidas en todo $\mathbb{R}$.

4. Sea $\mathbb{R}^{n \times n}$ el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales y sean $\mathrm{GL}(n)$, las matrices inversibles y $\mathrm{O}(n)$ las matrices ortogonales. Probar que $\mathrm{GL}(n)$ y $\mathrm{O}(n)$ son subvariedades embebidas de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

5. Sea X el campo tangentes de $\mathbb{R}^n$ definido por $X(q) = O.q$, donde O es una matriz ortogonal.

(a) Calcular el flujo φ_t asociado a X (es decir, $t \mapsto \varphi_t(x)$ es la curva integral de X que pasa por x).

(b) Calcular el corchete $[X, Y]$, donde $Y(q) = O'.q$, O' matriz ortogonal.

(c) Sea S^{n-1} la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^n$ y sean $\overline{X}, \overline{Y}$ las restricciones de los campos X, Y a la esfera (que resultan tangentes a la misma), considerados como campos vectoriales tangentes a la esfera. Calcular $[\overline{X}, \overline{Y}]$.

6. Sea M una variedad diferenciable compacta y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función C^∞. Probar df se anula en al menos dos puntos distintos en M.

Diciembre 2009

1. Sea $M = \mathbb{R}^2$ con la estructura diferenciable usual.

(a) Mostrar que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(s, t) = \left(se^t, t\right)$ es un sistema coordenado.

(b) Si $\phi = (x, y)$, hallar la función f tal que $dx \wedge dy = f(s, t)\, ds \wedge dt$.

2. Sea $M = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 1\right\}$.

(a) Probar que M es una subvariedad incrustada de $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ de dimensión dos y encontrar una base del espacio tangente a M en el punto $\left(\sqrt{2}, i\right)$.

(b) Sea $c : \mathbb{R} \to M$ definida por $c(t) = (\cosh t, i \operatorname{senh} t)$. ¿Es c diferenciable?

3. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3$ definida por $p \sim q$ si y sólo si $p = q + me_3$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Considerar en $M = \mathbb{R}^3/_\sim$ la única estructura diferenciable tal que la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^3 \to M$ es un difeomorfismo local. Sea v el campo vectorial v en $\mathbb{R}^3$ definido por $v(x, y, z) = (0, x, 1)$.

(a) Probar que existe un campo diferenciable V en M que está π-relacionado con el campo v.

(b) Mostrar que v y V son completos y encontrar una curva integral periódica de V.

4. Decidir en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) La imagen de la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(t/2))$$

admite una estructura de variedad diferenciable tal que la inclusión es una subvariedad no incrustada de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sea $S = \left\{\left(t, \frac{1}{t}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\right\}$. Existe una una distribución diferenciable $\mathcal{D}$ de dimensión uno en $\mathbb{R}^2$ tal que S es una una subvariedad integral conexa maximal de $\mathcal{D}$

(c) En un grupo de Lie de dimensión n existe un sistema de coordenadas alrededor de la identidad $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$, tal que los campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son invariantes a izquierda.

5. Sean M una variedad compacta de dimensión n y sea ω una n-forma nunca nula en M. Definir con precisión $\int_M \omega$. En particular, probar que la definición es buena.

CAPÍTULO 7

Topología algebraica

Julio 2014

Parte Práctica.

1. Hallar todos los cubrimientos conexos y localmente arcoconexos de $\mathbb{R}P^3$ salvo equivalencia. (Dos cubrimientos son equivalentes si existe un homeomorfismo entre ellos que preserva las fibras.)

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy, x)$. Ésta induce una $F : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$. Determinar las funciones inducidas en el primer y segundo grupos de homología singular de T^2 .

3. Probar que la cinta de Moebius cerrada y el anillo $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2\}$ son homotópicamente equivalentes pero no son homeomorfos.

4. V o F. Justificar.

(a) Existe estructura de CW-complejo en $S^2 \times S^4$ con una celda en cada dimensión ≤ 6.

(b) Sea $p : X \to Y$ un cubrimiento, con X localmente arcoconexo e Y arcoconexo. Si C es una componente arcoconexa de X, entonces $p|_C : C \to Y$ es un cubrimiento.

(c) Si $n + m = r + l$ con $m, n, r, l > 1$, entonces $S^n \times S^m \simeq S^r \times S^l$.

(d) Si X es conexo, localmente arconexo y su grupo fundamental es finito, entonces todo mapa $f : X \to S^1$ es homotópico a un mapa constante.

Parte Teórica. Elegir y hacer 2 de los siguientes ejercicios.

5. Mostrar que ciertos espacios tienen cubrimiento simplemente conexo. Explicar por qué se llama universal.

6. Enunciar y probar el Teorema del coeficiente universal para cohomología.

7. Enunciar los teoremas de “invariancia de la dimensión” y de “punto fijo de Brouwer”, y probar uno de ellos.

8. Definir homología singular y homología singular relativa. Probar que existe una sucesión exacta larga asociada a un espacio y un subespacio.

Febrero 2014

Parte Práctica.

1. Sea K la botella de Klein.

(a) Calcular el grupo fundamental de K.

(b) Dar infinitos cubrimientos regulares no equivalentes de K.

2. Sean Y un CW finito y $f : X \to Y$ un cubrimiento con k hojas. Probar que X es un CW finito y $\chi(X) = k \cdot \chi(Y)$.

3. Sea X el espacio obtenido de un triángulo cerrado con vértices v_0, v_1, v_2 identificando linealmente las aristas v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0 con v_1v_2, v_2v_0, v_0v_1. Calcule su homología entera.

4. Verdadero o Falso. Justificar (elegir y hacer sólo 5).

(a) Si X es conexo, localmente arcoconexo y su grupo fundamental es finito, entonces todo mapa $f : X \to S^1$ es homotópico a un mapa constante.

(b) $S^1 \times S^1$ y $S^1 \wedge S^1 \wedge S^2$ son no homeomorfos, pero tienen la misma homología al igual que sus cubrimientos universales.

(c) Si $p : \widetilde{X} \to X$ es homeo local y sobre, entonces es cubrimiento.

(d) Existe un cubrimiento $S^4 \to S^2 \times S^2$.

(e) S^k es retracto de S^n para $k < n$.

(f) Existe un mapa $f : S^2 \to S^1$ tal que $f(x, y, 0) = (x, y)$.

(g) Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubrimiento con $\widetilde{X}$ conexo y existe $s : X \to \widetilde{X}$ continua tal que $p \circ s = Id$, entonces p es un homeomorfismo.

(h) La identidad $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ se extiende a una función continua $f : S^2 \to S^1$, con $S^1 \subset S^2$ como el ecuador.

(i) Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento, con $\widetilde{X}$ localmente arcoconexo y X arcoconexo. Si C es una componente arcoconexa de $\widetilde{X}$, entonces $p|_C : C \to X$ es cubrimiento.

(j) $f : S^2 \to \mathbb{RP}^3$ continua y 1-1 implica que $f \simeq$ cte.

Parte Teórica. Elegir y hacer 2 de los siguientes ejercicios.

5. Mostrar que ciertos espacios tienen cubrimiento simplemente conexo. Explicar porqué se llama universal.

6. Enunciar y probar el Teorema del coeficiente universal para cohomología.

7. Enunciar los teoremas de “invariancia de la dimensión” y de “punto fijo de Brouwer”, y probar uno de ellos.

8. Definir homología singular y homología singular relativa. Probar que existe una sucesión exacta larga asociada a un espacio y un subespacio.

CAPÍTULO 8

Estadística

Diciembre 2016

1. (a) Considere la función de densidad normal inversa $NI\left(\mu,\sigma^2\right)$, la cual está dada por:

$$f\left(y,\mu,\sigma^2\right)=\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2y^3}}\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\mu^2\sigma^2y}\right),y>0$$

para $\mu>0$ y $\sigma^2>0$.

(i) Se dice que una variable aleatoria tiene distribución en la familia exponencial en la forma canónica si su función de densidad está dada por

$$f\left(y,\theta,\phi\right)=\exp\left\{\frac{1}{a\left(\phi\right)}\left(y\theta-b\left(\theta\right)\right)+c\left(y,\phi\right)\right\}I_A\left(y\right),$$

donde $I_A\left(y\right)$ es la función indicadora del conjunto A, el cual no depende de θ. Muestre que para $\phi=\sigma^2$ y cierta reparametrización de μ (esto es, tomando θ como una cierta función de μ), la distribución normal inversa pertenece a la familia exponencial en forma canónica.

(ii) Considere una muestra aleatoria de una distribución $NI\left(\mu,\sigma^2\right)$. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 (dejándolo expresado en términos de $\widehat{\mu}$, el estimador de μ).

(b) Sean $Y_1,\ldots,Y_n$ variables aleatorias independientes, donde Y_i tiene función de densidad dada por

$$f\left(y_i,\theta_i\right)=\exp\left(y_i\theta_i-b\left(\theta_i\right)+c\left(y_i\right)\right).$$

Suponga que $\theta_i=x_i'\beta$, donde $x_i'=\left(x_{i1},\ldots,x_{ip}\right)$ es la fila i de una matriz conocida $X\in R^{n\times p}$ y $\beta=\left(\beta_1,\ldots,\beta_p\right)'$ es un vector en R^p. Mostrar que $X'Y$ es un estadístico suficiente para β, donde $Y=\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)'$.

2. (a) Sea Y una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{2\left(\theta-y\right)}{\theta^2} & \text{si } 0<y<\theta,\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$$

(i) Encuentre la función de distribución de Y/θ.
(ii) Encuentre una cota superior de confianza de nivel $1-\alpha$ para θ.

(b) Muestre que un intervalo de confianza de nivel aproximado (asintótico) $1-\alpha$ para el parámetro λ de una distribución de Poisson está dado por

$$\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm \sqrt{\overline{X}\frac{z_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^4}{4n^2}}.$$

3. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

(a) Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que, para todo n, $E(X_n) = \frac{1}{n} + \alpha$, con $\alpha \in R$, y $\operatorname{Var}(X_n) \leq M$ para cierta constante $M > 0$. Entonces, $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \alpha$.

(b) Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y sea $c \in R$. Entonces, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ si y sólo si $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} c$.

(c) Sea X una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2 > 0$ y sea $r = \dfrac{|\mu|}{\sigma}$. Sea D la desviación relativa de X respecto a su media, esto es $D = \dfrac{|X-\mu|}{\mu}$. Entonces, para $\alpha > 0$, $P(D \leq \alpha) \geq 1 - \dfrac{1}{r^2\alpha^2}$.

4. (a) Sea Y una observación de la función de densidad

$$f(y,\theta) = \begin{cases} \theta y^{\theta-1} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(i) Encuentre el test más potente de nivel α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_a : \theta = \theta_a$.
(ii) Considere $\theta_0 = 2$ y $\theta_a = 1$. Tome una decisión a nivel $\alpha = 0.05$ si se observa un valor $y = 0.20$. ¿Cuál es la potencia del test cuando $\theta = 1$?

(b) Según el Código Alimentario Argentino (CAA) un alimento es considerado bajo en sodio si el mismo posee a lo sumo 120 mg de sodio por cada 100 g de producto. Se tomaron 16 muestras aleatoriamente elegidas de galletas rotuladas como bajas en sodio de cierta marca, con el fin de determinar el cumplimiento de las normas. La media y desvío estándar muestrales obtenidos fueron 122.1 y 2.6 mg, respectivamente. Suponga que el contenido de sodio tiene distribución normal.

(i) ¿Esta información sugiere que esta marca de galleta no está cumpliendo las normas alimentarias del CAA? Plantear las hipótesis de interés, indicar cuál es el valor observado del estadístico de prueba y concluir usando un nivel de significancia de 0.05, justificando claramente su respuesta.
(ii) Suponga ahora que el desvío estándar poblacional es conocido y vale 2.5 mg. Realice la prueba correspondiente para las hipótesis planteadas en (i) y calcule el p-valor.

5. (a) Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población con densidad $f(x,\theta)$. Sea $T(\mathbf{X})$ un estadístico. Dar una cota inferior (cota de Rao Cramer) para la $\operatorname{Var}(T(\mathbf{X}))$, suponiendo que valen las condiciones para que esta cota sea válida.

(b) Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Mostrar que la media muestral es un estimador IMVU de μ.

(c) Sean $X_1, \ldots, X_n$ ensayos Bernoulli independientes con probabilidad p de éxito. Mostrar que la proporción muestral de éxitos es un estimador IMVU de p.

Agosto 2016

1. Sean: $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $\mathcal{P}$ una familia de probabilidades sobre $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una σ-álgebra de Ω.

(a) Definición de $\mathcal{B}$ es $\mathcal{P}$-suficiente.

(b) Sea $B = \{\emptyset, \Omega\}$. Probar que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{P}$-suficiente si y sólo si la familia $\mathcal{P}$ tiene un solo elemento.

(c) Sea $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{P}$-suficiente.

(d) Sea $T : \Omega \to \mathbb{R}$ una estadística. Definición de T es $\mathcal{P}$-suficiente.

(e) Enunciar el Teorema de Factorización.

(f) Sean $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a., $n \geq 1$ entero, $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de X. Para cada $\lambda > 0$ sea P_λ la distribución de $(X_1, \ldots, X_n)$ suponiendo que X tiene distribución de Poisson de parámetro λ. Sea $T : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega).$$

Probar que T es suficiente para $\mathcal{P} = \{P_\lambda : \lambda > 0\}$.

2. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a., $\mathcal{B}_1$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, $P_X : \mathcal{B}_1 \to [0, 1]$ la probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ dada por

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

para todo $B \in \mathcal{B}_1$. Se dice que X es P-simétrica (alrededor de 0) si

$$P_X(B) = P_X(-B), \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}_1.$$

Sea F_X la función de distribución acumulada de X. Supongamos que F_X es continua y estrictamente creciente. Sea θ la mediana de X: esto es

$$F_X(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbb{R})$ y sea

$$\mu = E_P(X).$$

Probar que si X es P-simétrica, entonces $\mu = 0 = \theta$.

3. Se tienen tres observaciones normales independientes X_1, X_2 y X_3 con la misma media, θ y desvíos estándar iguales respectivamente a 1, 3 y 5.
Calcular la varianza del EMV de θ basado en (X_1, X_2, X_3) y compararla con la varianza de $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$.

4. En la siguiente Tabla se dan 24 determinaciones de la temperatura de fusión del plomo, en grados centígrados.

333	328	342.4	334	337.5	341
343.3	329.5	322	331	340.4	326.5
327.3	340	331	332.3	345	342
329.7	325.8	322.6	333	341	340

Suponiendo normalidad, calcular:

(a) Un intervalo de confianza bilateral de nivel 0.95 para el desvío estándar.
Ayuda: Aceptar el siguiente resultado: Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de X, suponiendo que X es normal de media μ y desvío estándar σ. Sea

$$U = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$$

donde

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Entonces $\frac{U}{\sigma^2}$ tiene distribución chi cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.

(b) Una cota inferior del mismo nivel para la media.

5. Un lote de n lámparas se considera aceptable si su vida media es mayor o igual a 1000 horas. Se desea que, si el lote es bueno, la probabilidad de rechazarlo sea menor o igual a 0.01. Se supone que la duración de vida de las lámparas tiene distribución exponencial. ¿Qué condición debe cumplir la muestra para que el lote sea considerado aceptable?

Febrero 2016

1. Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio cuya función de densidad discreta o continua es $f(x, \theta)$, con $\theta \in \Theta$. Sea $T = r(X)$ un estadístico.

(a) Enuncie una condición necesaria y suficiente para que el estadístico T sea suficiente para θ. (Teorema de factorización).

(b) Demuestre el teorema enunciado en a) para el caso discreto.

(c) Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_x)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos realizaciones de X, tal que $r(x) = r(y)$. Pruebe que si $\frac{f(x,\theta)}{f(y,\theta)}$ depende de θ, entonces T no es suficiente para θ.

(d) Suponga que la familia $\{f(x, \theta)\}$ tiene soporte común e independiente de θ. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que T sea suficiente para θ es que fijados θ_1 y θ_2 en Θ, el cociente $\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_2)}$ sea función de T.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d., tal que $X_n \sim \mathcal{G}(\theta)$, con $\theta \in (0,1)$, parámetro a estimar.

(a) Determine el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_{MV}$ de θ.

(b) Obtenga la distribución asintótica de $\hat{\theta}_{MV}$.

3. Sean X_1, X_2 v.a.i.i.d. con distribución uniforme en el intervalo $(\theta, \theta+1)$ para testar $H_0 : \theta = 0$ contra $H_a : \theta > 0$. Supongamos que disponemos de dos test que compiten entre ellos:

$$\begin{aligned} \psi_1(X_1): &\ \text{Rechaza } H_0 \text{ si } X_1 > 0.95. \\ \psi_2(X_1, X_2): &\ \text{Rechaza } H_0 \text{ si } X_1 + X_2 > C. \end{aligned}$$

(a) Encuentre el valor de C tal que ψ_2 tiene el mismo tamaño que ψ_1.

(b) Calcule la función de potencia de cada test. Esboce el gráfico de cada una de estas funciones.

(c) ¿Es ψ_2 un test más potente que ψ_1? (Justifique).

(d) Indique cómo haría para encontrar un test que tenga el mismo tamaño que ψ_2, pero con mayor potencia.

4. Analice la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones justificando o dando contraejemplo.

(a) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Entonces $Z_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

(b) Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = \frac{8}{7}(1 - x^{-3})$ si $1 \le x \le 2$, 0 si $x \le 1$ y 1 si $x \ge 2$. Sea

$$Z = g(X) = \begin{cases} X & \text{si } X < 1.5, \\ 1.5 & \text{si } X \ge 1.5. \end{cases}$$

Entonces la función densidad de Z es de la forma

$$f_Z(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \le 1.5) & \text{si } x \le 1.5, \\ 0 & \text{si } x > 1.5. \end{cases}$$

(c) Sea $\{r_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)\}$ una sucesión de estimadores de $q(\theta)$ tal que:

$$\begin{aligned} Var_\theta(r(X_1, X_2, \ldots, X_n)) &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ E_\theta(r(X_1, X_2, \ldots, X_n)) &\xrightarrow[n\to\infty]{} q(\theta). \end{aligned}$$

Entonces la sucesión $\{r_n(X_1, X_, \ldots, X_n)\}$ es débilmente consistente para $q(\theta)$.

5. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.i.i.d. con distribución exponencial con parámetro θ desconocido ($\theta > 0$). Sea $\alpha \in (0,1)$.

(a) Encuentre la distribución de $Y = \frac{X_1}{\theta}$.

(b) Basándose sólo en X_1, encuentre:

(i) Una cota de confianza superior de nivel $(1-\alpha)$ para θ.

(ii) Una cota de confianza inferior de nivel $(1-\alpha)$ para θ.

Diciembre 2015

1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d., con densidad dada por:

$$f(x, \sigma) = Kx^2 e^{-x^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad \sigma > 0.$$

(a) Determine el valor de K. (*Ayuda:* $\forall \alpha > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.)

(b) Pruebe que el estadístico $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ es suficiente y completo para σ^2.

(c) Encuentre el valor de la constante c, tal que el estadístico

$$T_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = cT(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

resulte insesgado para estimar σ^2.

(d) ¿Es $T_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ IMVU (insesgado de mínima varianza uniformemente) para estimar σ^2? En tal caso, ¿es el único? Justifique sus respuestas.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d., tal que $X_n \sim \mathcal{B}(\theta)$, con $\theta \in (0,1)$, parámetro a estimar. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea el estadístico

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

(a) Pruebe que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \theta$.

(b) Sea g una función definida sobre el espacio paramétrico, a valores en $\mathbb{R}$, derivable, con derivada continua y no nula. Pruebe que

$$\sqrt{n}[g(Y_n) - g(\theta)] \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, [g'(\theta)]^2 \theta(1-\theta)).$$

(c) Determine g del ítem anterior, tal que satisfaga las siguientes dos condiciones:

(i) $\sqrt{n}\,\mathrm{Var}(g(Y_n)) = 1$.

(ii) $g(1/2) = 0$.

Ayuda: $\int \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \mathrm{d}\theta = \arcsin(2\theta - 1) + k$, con k constante.

(d) A partir de (c), derive un pivote para estimar θ. Construya un intervalo de confianza asintótico de nivel $1 - \alpha$ para θ.

3. Suponga que $X_1, X_2, \ldots . X_n$ son v.a.i.i.d. con distribución uniforme en $(0, \theta)$. Sea $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots . X_n)$, y sea

$$\delta_c = \begin{cases} 1, & \text{si } X_{(n)} \geq c, \\ 0, & \text{si } X_{(n)} < c. \end{cases}$$

(a) Calcule la función de potencia de δ_c y muestre que es una función monótona creciente de θ.

(b) En la prueba de hipótesis $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$ contra $H_a : \theta > \frac{1}{2}$, ¿qué elección de c haría para que δ_c tenga exactamente tamaño 0.05?

(c) Para la prueba de hipótesis de (b), esboce el gráfico de la función de potencia de δ_c, cuando $n = 20$.

(d) Cuánto debería valer n para que en la prueba de hipótesis de (b), δ_c tenga potencia 0.98, para $\theta = \frac{3}{4}$.

(e) Si en una muestra de tamaño $n = 20$, $X_{(n)} = 0.48$, ¿cuánto vale el p-valor de la prueba?

4. Indique Verdadero ó Falso (Justifique).

(a) Sean $\{U_n\}$ sucesión de variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que $U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} U$, siendo U variable aleatoria definidas sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tal que $P(U = K) = 1$, para alguna constante K. Entonces $U_n \xrightarrow{\mathcal{P}} U$.

(b) Si $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $E(X_n) = \mu_n < \infty$, tal que $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} b$, con b constante. Entonces $\lim_{n \leftrightarrow \infty} E(X_n) = b$.

(c) Se diseñó un sistema de iluminación de manera tal que el tiempo promedio de activación sea de 20 segundos. Se lo probó 16 veces, obteniéndose los siguientes tiempos de activación:

27 41 22 27 23 35 30 24 27 28 22 18 20 28 17 25

Se supone que el tiempo de activación es una variable aleatoria con distribución normal. Entonces a nivel 0.05, los datos contradicen las especificaciones del sistema.

5. Enuncie y demuestre el Teorema de Lehmann-Scheffé.

Febrero 2014

1. Considera una sucesión de variables aleatorias X_j independientes. Las X_j de índice par (esto es, $X_2, X_4, \dots$) son uniformes en $[0, 1]$. Las de índice impar, sin embargo, son variables que toman valores 0 y 1 con probabilidad 1/2 cada uno. Llamemos $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Comprueba que

$$S_{2n} \to \frac{1}{2} \quad \text{casi seguramente.}$$

2. Considera una sucesión de variables aleatorias X_j independientes. Cada X_j toma los valores 2^j, 0 y -2^j con probabilidad 1/3 cada uno. Llamemos $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Comprueba que

$$\frac{S_n}{4^n} \to 0 \quad \text{en probabilidad.}$$

3. Sea (X_1, X_2, X_3, X_4) un vector aleatorio con distribución $\mathcal{M}(n, \theta, \theta, 2\theta, (1 - 4\theta))$, $0 < \theta < 1/4$.

(a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(b) Calcular $E\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)$, $Var\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)$, $ECM\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)$.

(c) Si $n = 63$, $X_1 = 10$, $X_2 = 11$, $X_3 = 21$, $X_4 = 21$, verificar que $\widehat{\theta}_{MV} = 1/6$ y testear al nivel $\alpha = 0.05$ si el modelo es cierto.

4. (a) Verificar que si X tiene densidad

$$f_X(x) = 2xI_{(0,1)}(x),$$

entonces $Y = -4\ln(X)$ tiene distribución $\varepsilon(1/2)$.

(b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con densidad f. Hallar el test más potente de nivel $\alpha = 0.05$ para

$$H_0 : f(x) = 2xI_{(0,1)}(x) \quad \text{vs} \quad H_A : f(x) = I_{(0,1)}(x)$$

(c) Si $n = 20$ y $\sum_{i=1}^{20} \ln(x_i) = -6.25$ ¿Cuál es la conclusión del test?

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,+\infty)}(x).$$

(a) Verificar el EMV de θ es $T = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Mostrar que

$$f_T(t) = n\ e^{-n(t-\theta)} I_{(\theta,+\infty)}(x).$$

(c) Verificar que $U = 2n(T-\theta)$ tiene distribución χ^2_2.

(d) Hallar un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para θ basado en U.

Agosto 2010

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d tales que $X_1 \sim N(\theta, 1)$. Mostrar que

$$\delta_n(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \overline{X_n} & \text{si } |\overline{X_n}| \geq n^{-1/4}, \\ a\overline{X_n} & \text{si } |\overline{X_n}| < n^{-1/4}. \end{cases}$$

(a) Mostrar que $\sqrt{n}(\delta_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0, v(\theta))$, donde $v(\theta) = 1$ cuando $\theta \neq 0$ y $v(\theta) = a^2$ cuando $\theta = 0$.

(b) Si $0 < a < 1$ y $\theta = 0$ la varianza asintótica es menor que 1. ¿Contradice esto la desigualdad de Rao-Cramer asintótica?

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ subσ-álgebra.

(a) Si $P(A|\mathcal{G}) = P(A)$ salvo conjunto de probabilidad 0, para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces $P(G) = 0$ o 1 para todo $G \in \mathcal{G}$.

(b) Probar que $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(c) (i) Defina $E(X|\mathcal{G})$, la esperanza condicional de la v.a. X dada la subσ-álgebra $\mathcal{G}$.
(ii) Probar que, si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces

$$E(X - E(X|\mathcal{G}))^2 \leq E(X - Z)^2$$

para todo $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

3. Sea

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } 0 < x \leq \theta, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido. Vale que $E(X_i) = 3\theta/4$ y $\mathrm{Var}(X_i) = 3\theta^2/80$ (ud. no debe probar esto).

(a) Calcule $\widehat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud para θ basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

(b) Probar que $n\left(\theta - \widehat{\theta}_n\right) \longrightarrow^{\mathcal{L}}_{n\to\infty} Y$ donde Y es una variable aleatoria con función de distribución acumulativa $P(Y \leq y) = (1 - \exp(-3y/\theta))I_(0,\infty)(y)$. Usando este resultado encuentre un intervalo de confianza aproximado de nivel $1-\alpha$ para θ.

(c) Considere ahora el estimador $\widetilde{\theta}_n = 4\overline{X_n}/3$. ¿Ese $\widetilde{\theta}$ insesgado?

(d) Demuestre que

$$\sqrt{n}\left(\widetilde{\theta} - \theta\right) \longrightarrow^{\mathcal{L}} N(0, V(\theta)).$$

y calcule $V(\theta)$.

(e) Usando este resultado encuentre un intervalo de confianza aproximado de nivel $1 - \alpha$ para θ.

(f) ¿Cuál de los dos intervalos de confianza presenta menor longitud cuando $n \to \infty$?

4. Suponga que X es una variable aleatoria discreta que puede tomar solo cinco valores $x_1, \ldots, x_5$ con probabilidad $p(X = x_j) \in \mathcal{F} = \{p_\theta(X = x_j) : \theta = \theta_0 o \theta = \theta_1\}$ donde $p_{\theta_k}(X = x_j)$, $k = 0, 1$, está dada por

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$p_{\theta_1}(X = x_j)$	.05	.05	.10	.20	.60
$p_{\theta_0}(X = x_j)$	.96	.01	.01	.01	.01

Se desea contrastar las hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$

(a) Encuentre el test UMP de nivel $\alpha = 0.02$ de H_0 vs. H_1 basado en X. Calcule la potencia de este test en θ_1.

(b) Suponga ahora que se observa una variable Y definida como

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X = x_1, \\ 2 & \text{si } X = x_2 \text{ o } X = x_4, \\ 3 & \text{si } X = x_3 \text{ o } X = x_5. \end{cases}$$

Encuentre test UMP de nivel $\alpha = 0.02$ de H_0 vs. H_1 basado en Y. Calcule la potencia de este test en θ_1.

(c) ¿Por qué es de esperar el resultado obtenido al comparar las potencias de los tests de (a) y (b) en θ_1?:

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{E}(\theta)$ y $\mathcal{E}(\mu)$ (exponencial de parámetro θ y μ respectivamente).

(a) Encontrar el test basado en razón de la verosimilitud para testear $H_0 : \theta = \mu$ vs. $H_a : \theta \neq \mu$.

(b) Mostrar que el test está basado en el estadístico

$$T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}.$$

(c) Encontrar la distribución de T cuando H_0 es verdadera y dar el test de tamaño a correspondiente.

6. Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de la distribución $U(0, \theta)$, $\theta > 0$ desconocido.

(a) Mostrar que $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico suficiente y completo para θ.

(b) Mostrar que $2E[X_1|T]$ es estimador IMVU de θ.

(c) Mostrar que la distribución condicional de X_1 dado $T = t$ es la misma que la de la v.a. $Zt + (1 - Z)U_0$, con $U_0 \sim U(0, t)$ y $Z \sim \text{Ber}(1/n)$ independiente de U_0.

(d) Deducir que $[(n + 1)/n] \cdot T$ es IMVU para θ.

Diciembre 2009

1. (a) Sean X e Y variables aleatorias tales que la esperanza condicional

$$E(Y|X = x) = \int y \, dF_{Y|X=x}$$

existe para todo x en el rango de X. Defina la variable aleatoria $E(Y|X)$ y diga cuál es su esperanza.

(b) Un ladrón está encerrado en una celda con tres puertas, A, B y C. Después que sale de la celda tiene que encontrar la salida de la cárcel y una vez que encuentra la salida de la cárcel está en libertad. Elige la puerta para escapar al azar con igual probabilidad para cada puerta. Si elige la puerta A tarda 2 hs. en encontrar la salida de la cárcel, si elige la puerta B tarda 3 hs. y si elige la puerta C camina 2 hs. en círculo y vuelve al lugar de partida (pero no se da cuenta, es decir cuando elige la puerta de la celda lo hace nuevamente con igual probabilidad). Si $T =$"Tiempo que tarda en encontrar su libertad", hallar $E(T)$.

2. Se tira un dado honesto y luego tantas monedas honestas como el número que mostró el dado.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente k caras?

(b) Si se obtienen 3 caras ¿cuál es la probabilidad de que el dado haya mostrado el número 5?

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. tales que $X_i \sim U(0,\theta)$, $\theta > 0$, es decir, la función densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Si $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ denota la media muestral, explicar qué distribución aproximada tiene

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/12}}$$

cuando el tamaño muestral n es suficientemente grande. Justificar.

(b) Encontrar la distribución de $Z_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ y Z_n/θ. ¿Depende de θ la distribución de Z_n/θ?

(c) Usando el límite notable $\lim_{n\to\infty}(1 + t/n)^n = \exp(t)$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(n\left(\frac{Z_n}{\theta} - 1\right) \leq t\right) = \begin{cases} \exp(t) & t \leq 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

(d) Calcular $E(Z_n)$ y V Var(Z_n).

(e) Calcular el estimador de máxima verosimilud para θ y dé un intervalo de confianza para θ usando este estimador como pivot.

4. Sean $X_1, \ldots,$ v.a.i.i.d con segundo momento finito. Pruebe que

(a) $\forall \epsilon > 0$, $nP(|X_1| \geq \epsilon\sqrt{n}) \to 0$, $n \to \infty$.

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \max\limits_{1\leq k\leq n} |X_k| \to 0$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$.

5. Encuentre el test del cociente generalizado y su distribución asintótica para las siguientes hipótesis:

(a) Las observaciones $X = (X_1, \ldots, X_k)$ tienen una densidad conjunta multinomial de parámetros $p_1, \ldots, p_k$, esto es, X_i es la cantidad de veces que observé el evento E_i que tiene probabilidad p_i, $X_1 + \cdots + X_k = n$.

(b) $H_0 : p = p(\theta) = (p_1(\theta), \ldots, p_k(\theta))$, $\quad H_A : p = (p_1, \ldots, p_n)$, $\ p_i > 0$, $\sum p_i = 1$.

Hint: El estimador de máxima verosimilitud de p_i es X_i/n. Suponga que la dimensión de θ es 1.

CAPÍTULO 9

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Diciembre 2015

1. (a) Enuncie y demuestre el Principio del Máximo Fuerte para funciones armónicas.

(b) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $0 \leq c \in \mathcal{C}(U)$ y $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}\left(\overline{U}\right)$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)\, u \leq -\Delta v + c(x)\, v & \text{en } U, \\ u \leq v & \text{sobre } \partial U. \end{cases}$$

Probar que $u \leq v$ en U. Mostrar que esto es falso si U no es acotado o si $c(x) \ngeq 0$.

2. Considere una barra unidimensional de longitud L, con propiedades térmicas constantes, sin fuentes internas y tal que su extremo izquierdo (derecho) está expuesto a una fuente de temperatura constante U_1 (U_2). Las ecuaciones que modelan la distribución de calor en la barra para el caso *estacionario* y para el caso de *evolución temporal* son las siguientes:

$$(E)\begin{cases} u_{xx} \ = 0 \quad \text{en } (0, L), \\ u(0) = U_1, \\ u(L) = U_2, \end{cases} \qquad (T)\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = U_1 & \text{para } t \in (0, \infty), \\ u(L, t) = U_2 & \text{para } t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x) & \text{para } x \in (0, L), \end{cases}$$

donde $g \in C^2([0, L])$, $g(0) = U_1$ y $g(L) = U_2$ representa la temperatura inicial. Sean u_E y u_T las soluciones del problema estacionario y de evolución temporal respectivamente. Mediante el método de separación de variables encuentre u_T de manera explícita y muestre que cuando $t \to \infty$, $u_T(x, t) \to u_E(x)$ independientemente de cual sea la condición inicial g.

3. Sea $\Omega = (0, 1)$ y sean a, b y c funciones suaves en $\mathbb{R}$.

(a) Dada $f \in L^2(\Omega)$, dé la formulación débil y defina la solución débil correspondiente al siguiente problema de borde homogéneo

$$(*)\begin{cases} -(a u_x)_x + b u_x + c u = f & \text{en } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(b) Suponiendo que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{y} \quad c(x) - b_x(x)/2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

pruebe que existe una única solución débil del problema $(*)$.

(c) Demuestre que existe una constante C tal que la solución hallada en *(ii)* satisface

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

4. Una *onda esférica* es una solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ y tal que $u(x,t) = U(r,t)$ con $r = |x|$, o sea sólo depende de la distancia al origen y de t. Hallar una ecuación para $U(r,t)$ y concluir que

$$u(x,t) = \frac{w_1(|x| + t) + w_2(|x| - t)}{|x|}$$

para ciertas funciones w_1,w_2.
Ayuda: utilice el hecho que en coordenadas esféricas

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

5. ¿Verdadero o falso? Justificar cada una de sus respuestas.

(a) Toda solución del problema $-u_{xx} - u^2 = e^u$ en $\Omega = (0,1)$ y $u(0) = u(1) = 0$ es no negativa.

(b) Sea $f(x) = |x|$ para $x \in \mathbb{R}$. La derivada en sentido débil de la función f es $v(x) = -sgn(x)$.

(c) Sea $U = \mathbb{R}^2 - \overline{B}(0,1)$. El problema $\Delta u = 0$ en U y $u = 1$ sobre ∂U, tiene solución única.

(d) Sean $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $0 < \gamma \in \mathbb{R}$. El problema de transporte *amortiguado*

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u = -\gamma u & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

admite una única solución.

Agosto 2015

1. Sean $\widetilde{\phi}(x)$ y $\phi(x,t)$ la solución fundamental de la ecuación de Laplace y del calor en $\mathbb{R}^n$ respectivamente, para $n \geq 3$.

(a) Probar que $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \phi(x,r)\, dr = \widetilde{\phi}(x)$.

(b) Dada $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, sea u la única solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Probar que $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = w(x)$, donde w satisface $-\Delta w = f$ en $\mathbb{R}^n$.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y de frontera regular y $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f' \leq 0$. Probar que existe a lo sumo una solución $u \in \mathcal{C}^{2,1}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ del problema no lineal

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = g(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera regular.

(a) Dada $f \in L^2(\Omega)$, definir solución débil del problema

$$(*) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

(b) Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de $(*)$, y que el operador solución es continuo. Verificar que si $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ es solución débil, entonces u es solución clásica.

(c) Mostrar que a diferencia de $(*)$, el problema

$$(**) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

puede tener más de una solución o ninguna solución.

4. Encuentre la solución de la siguiente ecuación de onda

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times (0,\infty), \\ u(x,0) = x^2 & \text{en } \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = \operatorname{sen}(x) & \text{en } \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = 0 & \text{en } (0,\infty). \end{cases}$$

donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

5. ¿Verdadero o falso? Justificar cada una de sus respuestas.

(a) Si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 < \infty$, entonces $u \equiv 0$.

(b) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $u(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2}$. Entonces, $u \in H^1(D)$ si y solo si $\alpha \geq 0$.

(c) Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^n$. Si u está acotada por arriba o por abajo, entonces u es constante.

(d) La solución $u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = \cos(t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x) & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

satisface que $u(1,1) > 0$.

Julio 2014

1. Sea $L = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, donde $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq N$. Probar que el operador L es invariante por traslaciones y rotaciones sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $L = c_0 I + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \cdots + c_m\Delta^m$, donde c_k son constantes y Δ es el operador de Laplace.

2. (a) Sea u una función subarmónica definida en un abierto conexo U tal que $\sup_{x\in U} u(x) = A < \infty$. Mostrar que $u(x) < A$ para todo $x \in U$, siempre que u no sea constante.

(b) Sea $U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,1)}$, y sea $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}\left(\overline{U}\right)$ una función armónica en U tal que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Probar que $\max_{\overline{U}} |u| = \max_{\partial B(0,1)} |u|$. Dar un ejemplo de una función u que cumpla con las hipótesis del enunciado.

3. (a) Dar la definición de solución fundamental para un operador diferencial sobre $\mathbb{R}^n$.

(b) Muestre que la función $\Theta(x) = \dfrac{|x|^2 ln(|x|)}{8\pi}$ es una solución fundamental de Δ^2 sobre $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Resolver la siguiente EDP:

$$\triangle u(x,y) = 0, \quad \text{si} \quad (x,y) \in D_0,$$

sujeta a las siguientes condiciones de borde

$$u(x,y) = x^2, \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = 1$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |u(x,y)| = \infty.$$

¿La solución es única?.

5. Encontrar la solución de $u_{tt} = u_{xx} + e^{-2x}\cos(2t) + x^2 \operatorname{sen}(t)$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$ dadas las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$, para $-\infty < x < \infty$.

6. Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} |x|^2 \left(u_t(x,t) - \Delta u(x,t)\right) - 2u(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = |x|^{-2} \operatorname{sen}(|x|) & x \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

7. (a) Probar que si $n = 1$ y $u \in W^{1,p}(0,1)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces u es igual p.p.x a una función absolutamente continua.

(b) Supóngase U un conjunto abierto conexo y $u \in W^{1,p}(U)$ con $\partial_{x_i} u = 0$ sobre U para $i = 1, \ldots, n$. Probar que u es constante p.p.x en U.

(c) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado en una dirección. Probar que existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \||\nabla u|\|_{L^2(U)} \leq \|u\|_{H_0^1(U)} \leq c_2 \||\nabla u|\|_{L^2(U)}, \qquad \forall\, u \in H_0^1(U).$$

8. Una función $u \in H_0^2(U)$ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & U, \\ u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial U. \end{cases}$$

si

$$\int_U \Delta u \Delta v = \int_U fv$$

para toda $v \in H_0^2(U)$. Dada $f \in L^2(U)$, probar que existe una única solución débil a dicho problema.

Mazo 2013

1. Sea U un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$. Sea $v \in C^2(U)$ tal que $\Delta v = 0$ en U. Probar que:

(a) $v(x) = \dfrac{1}{|B(x,r)|}\displaystyle\int_{B(x,r)} v(y)dy$ para todo $B(x,r) \subset U$, donde $B(x,r)$ denota la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ centrada en x de radio r, y que $v(x) = \dfrac{1}{|S(x,r)|}\displaystyle\int_{S(x,r)} v(y)d\sigma(y)$, donde $S(x,r)$ es la frontera de $B(x,r)$ y $d\sigma(y)$ es el elemento de área usual en $S(x,r)$.

(b) $\max\limits_{\bar{U}} v = \max\limits_{\partial U} v$.

2. Determinar fórmulas para las soluciones acotadas de los siguientes problemas:

(a) $u_t - k\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty) u = g$ en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

(b) $u_t - k\Delta u + cu = f$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty) u = g$ en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ con f y g continuas, de soporte compacto y k y $c \in (0,\infty)$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = 1$ si $x \geq 1$ y f lineal para $x \in [0,1]$.

(a) Calcular las derivadas débiles primera y segunda de f.

(b) ¿$f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$?

(c) ¿$f \in W^{2,2}(\mathbb{R})$?

4. Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ solución del problema de valores iniciales de la ecuación de ondas de una dimensión espacial:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{con } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{con } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

g y h de soporte compacto. Sean $K(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,y)\mathrm{d}x$ y $P(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\mathrm{d}x$ la energía cinética y potencial respectivamente. Probar que

(a) $K(t) + P(t)$ es constante en t.

(b) $K(t) = P(t)$ para t suficientemente grande.

5. Enunciar y demostrar el Teorema de Lax-Milgram.

Agosto 2011

1. (1.5 puntos) Sea p un polinomio armónico en $\mathbb{R}^3$ y sea $x \in \mathbb{R}^3$. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} p(x+y)e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\,p(x).$$

2. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, y consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 - u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que toda solución satisface $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Deducir que si u es una solución no negativa, se tiene $u \equiv 0$ ó $u > 0$ en Ω.

3. (a) (1.5 puntos) Dadas $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$ probar que el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

tiene solución y es única.

(b) (1 punto) Si f y g tienen soporte compacto, probar que la solución $u(x,t)$ tiene soporte compacto en x para cada t fijo. Si escribimos u como $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, mostrar que F y G pueden tener ambas soporte compacto sólo si $\int_{\mathbb{R}} g = 0$.

4. (2 puntos) Consideramos el siguiente problema para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = 4x(1-x) & \text{en } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{en } t \geq 0. \end{cases}$$

(a) Probar que $0 < u(x,t) < 1$ para todo $t > 0$ y $0 < x < 1$, y que $u(x,t) = u(1-x,t)$ para todo $t \geq 0$ y $0 \leq x \leq 1$.

(b) Probar que $\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}x$ es estrictamente decreciente como función de t.

5. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular. Para $f \in L^2(\Omega)$, definir solución débil del problema

$$(*)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial u/\partial v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de $(*)$, y que el operador solución es continuo. Verificar que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es solución débil, entonces u es solución clásica. Mostrar que a diferencia de $(*)$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial u/\partial v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

puede tener más de una solución o ninguna solución.

6. (2 puntos) Enunciar y demostrar la desigualdad de Harnack para funciones armónicas. Deducir que si u_k es una sucesión monótona de funciones armónicas en un dominio en $\mathbb{R}^N$, entonces u_k converge en todo punto o diverge en todo punto; y que en el primer caso la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

Marzo 2011

1. Dada $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, sea u la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) (1.25 puntos) Si $g \in L^(\mathbb{R})$, probar que existe $C > 0$ tal que

$$|u(x,t)| \leq Ct^{-1/4} \qquad \text{para todo } t > 0.$$

(b) (1.25 puntos) Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, probar que $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{para todo } t > 0.$$

2. (a) (1.5 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, sea $x_0 \in \Omega$ y sea u armónica y acotada en $\Omega \setminus \{x_0\}$. Probar que se puede definir $u(x_0)$ de manera que u sea armónica en Ω.

(b) (0.75 puntos) Decidir si el siguiente problema tiene solución $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega := B(0,1) \setminus \{0\}, \\ u = 0 & \text{en } \delta B(0,1), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

3. (a) (1.5 puntos) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $p \in (1, \infty)$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Definimos $\overline{u}$ como $\overline{u} = u$ en Ω y $\overline{u} = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Probar que $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

(b) (0.75 puntos) Mostrar que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, en general no es cierto que $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

4. (a) (2 puntos) Dada $f \in L^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, definir solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \delta\Omega. \end{cases}$$

Probar que si es acotado, entonces para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil. Probar además que el operador solución es continuo y que si f es acotada, u también lo es.

(b) (2 puntos) Enunciar y demostrar el Teorema de Lax-Milgram.

5. ¿Verdadero o falso? Justificar. (1 punto cada item)

(a) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio. Si u alcanza su máximo en Ω y $\Delta u = u^2$ en Ω, entonces $u \equiv 0$.

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio suave y acotado. Existe $u \not\equiv 0$ solución de

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \delta\Omega. \end{cases}$$

(c) Los ceros de una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ nunca son aislados.

(d) Las normas $\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

Diciembre 2010

1. (1.5 puntos) Sea g continua y acotada. Probar que existe exactamente una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N_+ := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}, \\ u = g & \text{en } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases}$$

2. (a) (1.5 puntos) Probar que la solución general de la ecuación $u_{xy} = 0$ es $u(x, y) = F(x) + G(y)$. Usando el cambio de variables $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, probar que $u_{tt} - u_{xx} = 0$ si y sólo si $u_{\xi\eta} = 0$. Utilizar lo anterior para para deducir la Fórmula de D'Alembert.

(b) (1.5 puntos) Sean $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y de soporte compacto, sea u solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

y sean $k(t) := \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x, t)\mathrm{d}x$ y $p(t) := \int_R u_x^2(x, t)\mathrm{d}x$. Probar que $k(t) + p(t)$ es constante para todo t.

(c) (1 punto) Deducir de (b) algún resultado de unicidad.

3. (1.5 puntos) Sea $\Omega := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$ la bola unidad. Para $0 \neq x \in \Omega$ y $\alpha > 0$, sea $u(x) := |x|^{-\alpha}$. Probar que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si $\alpha < (N - p)/p$.

4. (a) (2 puntos) Dada $f \in L^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, definir solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si Ω es acotado, entonces para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil. Probar además que el operador solución es continuo y que si f es acotada, u también lo es.

(b) (2 puntos) Enunciar y demostrar el Teorema de Lax-Milgram.

5. ¿Verdadero o falso? Justificar. (1 punto cada item)

(a) Si u y Δu son acotadas en $\mathbb{R}^N$, entonces u es constante.

(b) Los ceros de una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ nunca son aislados.

(c) Si u es subarmónica en $\mathbb{R}^N$ y $\int_{\mathbb{R}} u^2 < \infty$, entonces $u \equiv 0$.

(d) Las normas

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

CAPÍTULO 10

Álgebra universal y teoría de reticulados

Diciembre 2016

Nota: Dado un reticulado completo $\mathbf{L}$, diremos que $x \in L$ es *completamente meet irreducible* si $x \neq 1$ y para cada $S \subseteq L$, tenemos que

$$x = \bigwedge S \text{ implica } x \in S.$$

1. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra. Pruebe que para $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ son equivalentes:

(a) $\mathbf{A}/\theta$ es subdirectamente irreducible.

(b) θ es un elemento completamente meet irreducible de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$.

(c) hay una congruencia $\delta > \theta$ tal que $[\theta, \nabla] = \{\theta\} \cup [\delta, \nabla]$.

(d) hay $(a, b) \in A^2$ tal que θ es maximal en no contener al par (a, b).

2. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra. Pruebe que cada $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ es intersección de un conjunto de congruencias completamente meet irreducibles.

3. Sea $\tau = (\{c\}, \{f\}, \emptyset, a)$ donde $a(f) = 1$.

(a) Sea $\mathbf{A} = (\mathbf{N}, f^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{A}})$, donde $f^{\mathbf{A}}(n) = 1$, para cada $n \in \mathbf{N}$ y $c^{\mathbf{A}} = 2$. Es $\mathbf{A}$ subdirectamente irreducible?

(b) Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{Z}, f^{\mathbf{B}}, c^{\mathbf{B}})$, donde $f^{\mathbf{B}}(n) = n + 1$, para cada $n \in \mathbf{Z}$ y $c^{\mathbf{B}} = 0$. Es $\mathbf{A}$ subdirectamente irreducible?

(c) Estudie la variedad dada por la identidad $f(f(x)) \approx x$. Encuentre los subdirectamente irreducibles y las subvariedades.

4. Sea τ el tipo de los reticulados. Encuentre la variedad generada por $\{\mathbf{4}\}$, donde $\mathbf{4}$ es la cadena de 4 elementos.

5. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, los cuales generan a $\mathbf{A}$. Pruebe que hay un conjunto Δ de fórmulas atómicas el cual cumple

(a) para cada $\alpha \in \Delta$, $Li(\alpha) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$,

(b) $\mathbf{A} \vDash \alpha[a_1, \ldots, a_n]$, para cada $\alpha \in \Delta$,

(c) si $\mathbf{B}$ es una estructura de tipo τ y $b_1, \ldots, b_n \in B$ son tales que $\mathbf{B} \vDash \alpha[b_1, \ldots, b_n]$, para cada $\alpha \in \Delta$, entonces hay un homomorfismo $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ el cual cumple $F(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Marzo 2010

1. [2 pto] Enunciar y demostrar el Teorema de representación subdirecta de Birkhoff.

2. [2 pto] Sea $\mathbf{A}$ un álgebra e $I \subseteq \operatorname{Con} \mathbf{A}$. Dé condiciones necesarias y suficientes para que el mapeo

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \prod_{\theta \in I} A/\theta \\ a & \longmapsto & (a/\theta)_{\theta \in I} \end{array}$$

sea un homomorfismo, una incrustación, y un isomorfismo. Justifique en los tres casos.

3. (a) [0.75 pto] Encuentre un término de Mal'cev y un término mayoritario para las álgebras de Boole (este último satisface $m(x,x,y) \approx m(x,y,x) \approx m(y,x,x) \approx x$).

(b) [0.75 pto] ¿Existen términos así para los reticulados distributivos?

4. [1.5 pto] Decimos que $X \subseteq \mathbb{R}^2$ es *convexo* si dados $x, y \in X$ distintos, X contiene al segmento de recta que une a x con y. Sea $H(Y) := \bigcap\{X \subseteq \mathbb{R}^2 : Y \subseteq X, X \text{convexo}\}$. Probar que $H(\cdot)$ es un operador de clausura algebraico.

5. [1.5 pto] Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole, sean $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ ultrafiltros de $\mathbf{B}$ y sea $A \subseteq B$. Probar que si $\mathcal{U} \cap A = \mathcal{U}' \cap A$, entonces para todo t en la subálgebra generada por A, se da $t \in \mathcal{U} \iff t \in \mathcal{U}'$ *("lema de coincidencia")*.

6. [1.5 pto] Sea $\mathcal{V}$ una variedad con una constante 0 en su lenguaje y supongamos que hay un término de Mal'cev p para $\mathcal{V}$ tal que para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $p^{\mathbf{A}} : A^3 \to A$ es un $\mathcal{V}$-homomorfismo. Defina $x + y := p(x, 0, y)$, $-x := p(0, x, 0)$. Pruebe:

(a) $\langle A, +^{\mathbf{A}}, 0, -^{A} \rangle$ es un grupo abeliano para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$.
(*Ayuda:* usar que p preserva p y que $0 = p(0,0,0)$ y $p(x,0,0) = x$, etcétera).

(b) Si $\{0^{\mathbf{A}}\}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$, entonces las operaciones básicas de $\mathbf{A}$ preservan la estructura de grupo (i.e., preservan las operaciones $+^{A}$ y $-^{A}$).

Diciembre 2009

1. Sea A un conjunto y sea $R(A)$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre A. Probar:

(a) $\mathbf{R}(A) = \langle R(A), \subseteq \rangle$ es un reticulado completo. Identifique las operaciones de ínfimo y supremo.

(b) Si $\mathbf{L}$ es un subreticulado de $\mathbf{R}(A)$ de relaciones que permutan, entonces $\mathbf{L}$ es modular. En particular, toda variedad de congruencias permutables es de congruencias modulares.

2. Probar que para cualquier clase de álgebras $\mathcal{K}$, $\mathsf{SH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathsf{HS}(\mathcal{K})$.

3. Pruebe el *Segundo Teorema de Isomorfismo:* Si $\mathbf{A}$ es un álgebra, $\theta, \phi \in \operatorname{Com}(\mathbf{A})$ tales que $\theta \subseteq \phi$ entonces

$$\mathbf{A}/\phi \cong (\mathbf{A}/\theta)/(\phi/\theta).$$

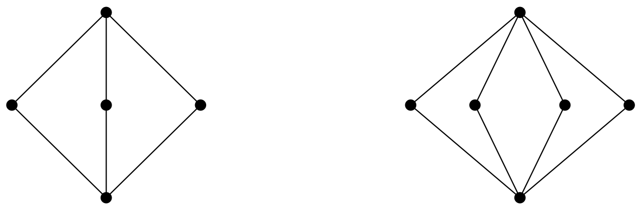


Figure 10.1: $\mathbf{M}_3$ y $\mathbf{M}_4$.

4. (a) Demostrar que los reticulados $\mathbf{M}_3$ y $\mathbf{M}_4$ son simples (ver Figura 10.1).

(b) Demostrar que la variedad de los reticulados es residualmente grande (es decir, hay reticulados subdirectamente irreducibles de cardinal arbitrariamente grande).

5. (a) Sea $\mathbf{A}$ un álgebra finita. Probar que el cardinal de $\mathbf{F}_{\mathcal{V}(\mathbf{A})}(n)$, el álgebra libremente generada por n elementos en $\mathcal{V}(\mathbf{A})$, es a lo sumo $|A|^{|A|^n}$.

(b) Encuentre $\mathbf{A}$ no trivial que muestre que la cota es justa para cada n.

6. Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Probar que son equivalentes:

(a) $\mathcal{V}$ es de congruencias permutables.

(b) $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(3)$ tiene congruencias permutables.

7. Sean θ, θ^* y ϕ, ϕ^* dos pares de congruencias factor complementarias tales que $\phi \subseteq \theta$ y $\phi^* \subseteq \theta^*$. Probar que $\phi = \theta$ y $\phi^* = \theta^*$.

CAPÍTULO 11

Teoría elemental de Lie

Julio 2012

Elegir cinco de los siguientes seis ejercicios.

1. Teorema de Peter y Weyl.

(a) Enunciar el Teorema de Peter y Weyl.

(b) Sea $G = \mathrm{SU}(2)$ y sea $g \in G$ de la forma

$$g = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \quad z_{ij} = x_{ij} + \sqrt{-1}y_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Dar dos ejemplos de coeficientes matriciales (de los mencionados en el Teorema de Peter y Weyl) $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ tales que f_k es un polinomio de grado k ($k = 1, 2$) en las variables x_{ij}, y_{ij}.

2. Enunciar algunos resultados básicos muy importantes sobre los toros maximales de los grupos de Lie compactos y describir cómo estos resultados pueden ser combinados para demostrar que la función exponencial es suryectiva en los grupos de Lie compactos conexos. Dar un ejemplo de un grupo de Lie conexo tal que la función exponencial no sea suryectiva.

3. Sea (π, V) una representación irreducible de dimensión finita de un grupo de Lie compacto G. Demostrar que (π^*, V^*) es también una representación irreducible de G. Dar algún ejemplo en el que $\pi \simeq \pi^*$ y otro en el que $\pi \not\simeq \pi^*$.

4. Sea $G = \mathrm{SO}(5)$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

(a) Dar explícitamente un toro maximal T de G y describir su álgebra de Lie $\mathfrak{t}$ dentro de $\mathfrak{g}$.

(b) Describir los espacios raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$.

(c) Determinar si $-\mathrm{Id} : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}$ pertenece al grupo de Weyl W y en ese caso expresar a $-\mathrm{Id}$ como producto de reflexiones simples.

5. Medida de Haar e integración.

(a) Enunciar la fórmula de integración de Weyl para grupos de Lie compactos.

(b) Sea $G = \mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{d}g$ la medida de Haar, y $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(g) = \mathrm{traza}(g)$. Calcular

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g \quad \text{y} \quad \int_G |f(g)|\,\mathrm{d}g.$$

6. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo y sea $\mathfrak{g}_o$ su álgebra de Lie. Demostrar que si $\mathfrak{g}_o$ es semisimple, entonces el centro de G es finito.

Marzo 2012

1. Sea $SO(2n)$, $n \geq 2$ el grupo de Lie matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$.
Dar un ejemplo de un toro maximal T_0 en $SO(2n)$.

(a) Demostrar que todo toro maximal de $SO(2n)$ es conjugado en $SO(2n)$ al toro maximal T_0.

(b) Demostrar que la unión de todos los conjugados de un toro maximal de $SO(2n)$ es igual al grupo $SO(2n)$.

(c) Determinar el conjunto de raíces Φ y ejemplos de vectores raíces no nulos correspondientes para $(\mathfrak{so}(2n), \mathrm{Lie}(T_0))$.

(d) Calcular $\Gamma_T := \ker(\exp : \mathrm{Lie}(T_0) \to T_0)$.

(e) Sea Γ el $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathrm{Lie}(T_0)$ generado por $2\pi i \frac{2H_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$. Mostrar que $\exp(\Gamma) \subset \ker(\mathrm{Ad} : SO(2n) \to GL(\mathfrak{so}(2n))$.

(f) (más difícil) Mostrar que $\Gamma \subseteq \Gamma_T$ y calcular el orden del grupo cociente.

2. Sea G un grupo de Lie compacto conexo, y sea Z_G la componente conexa del centro de G que contiene la identidad. Mostrar

(a) $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(Z_G) \oplus [\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)]$.

(b) Si G no es un grupo abeliano, entonces $[\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)]$ es un álgebra de Lie semisimple.

3. Sea G un grupo topológico compacto y (π, V) una representación de G en un espacio de Hilbert complejo V.

(a) Mostrar que existe un producto scalar h (forma hermitiana definida positiva) en V de manera que $\pi(G) \subset U(V, h)$.

(b) Mostrar que los coeficientes matriciales de π son funciones acotadas en G y que son funciones de cuadrado integrable con respecto a cualquier medida de Haar en G.

(c) Enuncie el Teorema de Peter y Weyl para G.

4. Sea $\mathfrak{g}$ un algebra de Lie sobre los números complejos de dimensión finita. Mostrar que si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces cualquier representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ es completamente reducible.

Diciembre 2011

Elegir cinco de los siguientes seis ejercicios.

1. Teorema de Peter y Weyl.

(a) Enunciar el Teorema de Peter y Weyl.

(b) Traducir y explicar los resultados del teorema en el caso particular en que $G = S^1$, S^1 es la circunferencia de radio 1. En particular, analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $L^2(S^1)$ (con norma $||\cdot||_2$).

(ii) $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ (con norma $||\cdot||_\infty$).

(iii) Si $f \in L^2([0, 2\pi])$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

entonces $\{g_N\}_N$ converge a f en norma $||\cdot||_2$.

(iv) Si $f \in C([0, 2\pi])$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ son como antes, entonces $\{g_N\}$ converge a f en norma $||\cdot||_\infty$.

2. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

(a) Dar una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, las raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ y la descomposición en espacios raíces de $\mathfrak{g}$.

(b) Dar un sistema positivo de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$, las correspondientes raíces simples y los correspondientes pesos fundamentales.

(c) Sea $G = \mathrm{SU}(n)$. Describir el toro T de G correspondiente a $\mathfrak{h}$ y, para cada raíz α, dar un elemento n_α en el normalizador de T en G que realice la reflexión (perteneceinte grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$) correspondiente a α.

3. Sea $G = \mathrm{SO}(3)$.

(a) Dar explícitamente dos representaciones irreducibles no triviales de G, que no sean equivalentes entre sí.

(b) Demostrar que G no tiene ninguna representación irreducible de dimensión par. (En caso de ser útil, se puede utilizar la clasificación de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$).

4. Medida de Haar e integración.

(a) Enunciar la fórmula de integración de Weyl para grupos de Lie compactos.

(b) Sea $G = \mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{d}g$ la medida de Haar, y $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(g) = \mathrm{traza}(g)$. Calcular

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g \quad \text{y} \quad \int_G |f(g)|\,\mathrm{d}g.$$

5. Sea $V_n = \mathbb{C}[z_1, z_2]_n$ el espacio vectorial de polinomios homogeneos de grado n con coeficientes complejos. Sea $\pi_n : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{Aut}(V_n)$ la representación definida por

$$(\pi_n(g)P)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P\left(g^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right), \quad g \in \mathrm{SU}(2),\ P \in V_n.$$

Demostrar que (π_n, V_n) es irreducible y calcular el carácter de π_n evaluado en $g_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

6. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo, y sea $\mathfrak{g}_o$ su álgebra de Lie. Demostrar uno de los siguientes dos teoremas.

Teorema. Los toros maximales de G son exactamente los subgrupos analíticos correspondientes a las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{g}_o$.

Teorema. Si $\mathfrak{g}_o$ es semisimple, entonces el centro de G es finito.

Agosto 2011

1. Sea $\mathrm{U}(n)$ el grupo de Lie matrices unitarias a coeficientes complejos. Dar un ejemplo de un toro maximal T_0 en $\mathrm{U}(n)$. Demostrar que todo toro maximal de $\mathrm{U}(n)$ es conjugado en $\mathrm{U}(n)$ al toro maximal T_0. Demostrar que la unión de todos los conjugados de un toro maximal de $\mathrm{U}(n)$ es igual al grupo $\mathrm{U}(n)$. Explicitar una clase de grupos donde las afirmaciones anteriores son válidas (Sin demostración).

2. Demostrar que un grupo topológico compacto conexo G admite una representación de dimensión finita fiel si y sólo si es isomorfo a un subgrupo de un grupo unitario $\mathrm{U}(n)$.

3. Sea G un grupo de Lie compacto conexo cuya álgebra de Lie es de tipo G_2. Sea T un toro maximal de G. Se sabe un sistema de raíces para $\mathrm{Lie}(T)_\mathbb{C}$ tiene una base de raíces simples $\{\alpha, \beta\}$ y que su sistema de raíces es

$$\{\pm(j\alpha + k\beta) : j = 0, 1,\ k = 0, 1, 2, 3\},$$

de manera que

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = -3, \quad 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = -1 \quad \text{y} \quad (\alpha,\alpha) = 3(\beta,\beta).$$

Calcular en la base $\{\alpha, \beta\}$ los pesos fundamentales para las raíces simples dadas. Demostrar que el grupo de Weyl de G tiene orden 12. Calcular el centro del grupo simplemente conexo que cubre G.

4. Sea G un grupo de Lie topológico compacto. Enunciar (sin demostrar) el Teorema de Peter y Weyl para G. Explicitar el Teorema de Peter y Weyl para el grupo $\mathrm{U}(1)$. Justificar porque no vale el Teorema de Peter y Weyl para el grupo aditivo de los números reales.

5. Sea G un grupo de Lie compacto que es subgrupo de $\mathrm{U}(n)$ para algún n. Sea $C(G)$ el álgebra de funciones continuas en G a valores complejos. Demostrar que la subalgebra $R(G)$ de $C(G)$ generada por la totalidad de los coeficientes matriciales del conjunto de las representaciones de dimensión finita de G es cerrada por conjugación y separa puntos. Demostrar que $R(G)$ es denso en $C(G)$ para la topología de convergencia uniforme en G.

Marzo 2010

1. Para el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de la totalidad de matrices 2×2 a coeficientes complejos de traza nula formular y demostrar el Teorema de Poincare-Birkoff-Witt.

2. Enunciar el Teorema de Harish-Chandra que describe la estructura del centro del álgebra universal de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

3. Para el álgebra de matrices ortogonales $2k \times 2k$, $k \geq 3$ a coeficientes complejos, explicitar una subálgebra de Cartan, calcular su sistema de raíces. Construir UN sistema de raíces positivas, calcular sus raíces simples, calcular el diagrama de Dynkin asociado, calcular los pesos fundamentales asociados a este sistema de raíces simples. Verificar que la suma de los pesos fundamentales para este sistema de raíces simples es igual a al semisuma de las raíces positivas en el sistema que usted construyó.

4. Demostrar a partir del Teorema del peso máximo que el grupo SU(2) tiene una única representación irreducible para cada dimensión $n = 1, 2, 3, \ldots$. Redactar el enunciado del Teorema de Peter y Weyl para el grupo SU(2).

CAPÍTULO 12

Algunas estadísticas

En paralelo a la recopilación de los exámenes, también reunimos en una base de datos información sobre los mismos. De cada examen, registramos la fecha en que fue tomado, la materia a la que corresponde, el profesor que estuvo a cargo y los estudiantes que lo rindieron. A partir de esta información, presentamos algunas estadísticas que nos resultaron interesantes.

Figure 12.1: Distribución de exámenes por materia.

Materia	Cant.
Funciones Complejas	62
Estructuras Algebraicas	61
Funciones Reales	53
Variedades Diferenciables	36
Álgebra Lineal Numérica	20
Topología Algebraica	17
Estadística	11
Ecuaciones Diferenciales	10
Análisis Funcional	8
Álgebra Universal	8
Teoría de Lie	8
Total	294

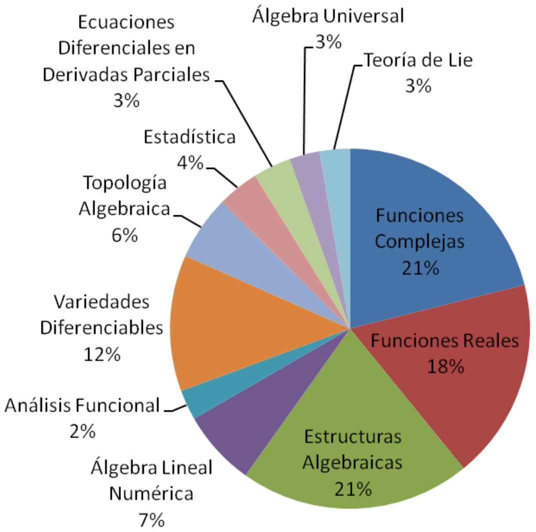


Figure 12.2: Profesores que más exámenes tomaron.

Profesor	Cant.
Jorge Vargas	23
Roberto Miatello	16
Marcos Salvai	13
Tomás Godoy	12
Marta Urciuolo	12
Carlos Olmos	11
Linda Saal	11
María Druetta	10
Sonia Natale	10

Figure 12.3: Porcentajes de exámenes por turnos.

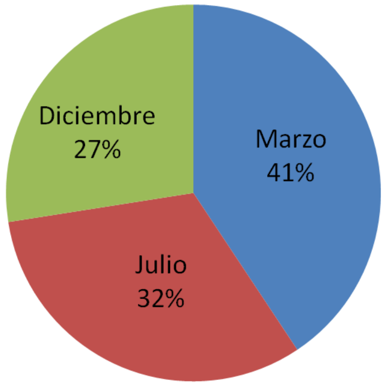


Figure 12.4: Cantidad de personas que rindieron por año.

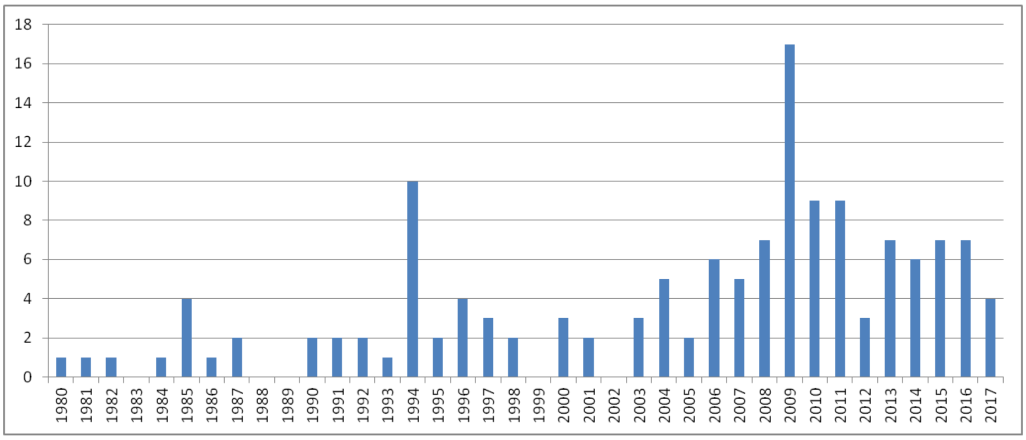


Figure 12.5: Cantidad de exámenes tomados por año.

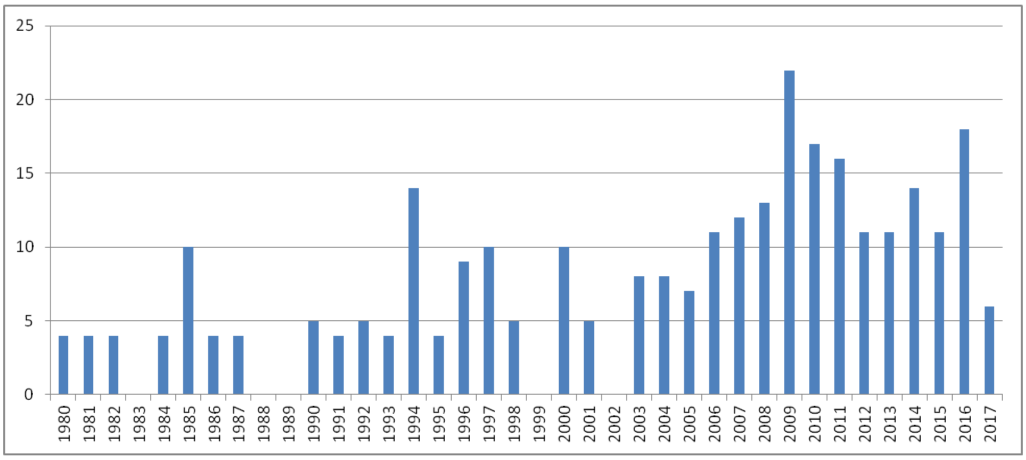


Figure 12.6: Cantidad de exámenes tomados por año de Funciones complejas.

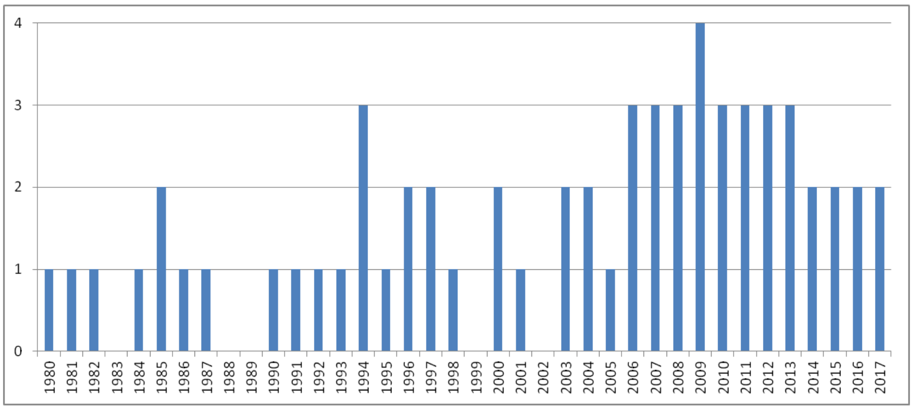


Figure 12.7: Cantidad de exámenes tomados por año de Estructuras algebraicas.

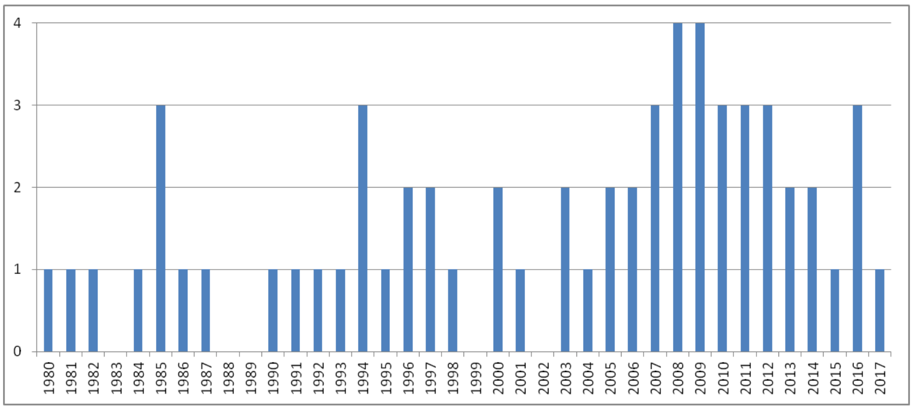


Figure 12.8: Cantidad de exámenes tomados por año de Funciones reales.

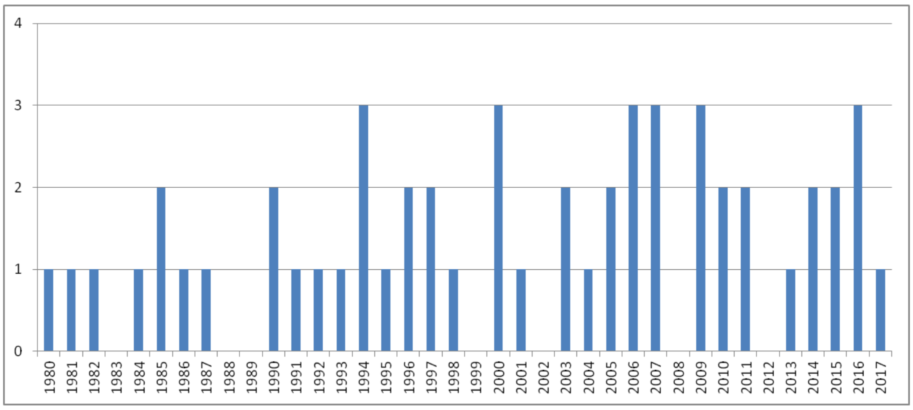


Figure 12.9: Cantidad de exámenes tomados por año de Variedades diferenciales.

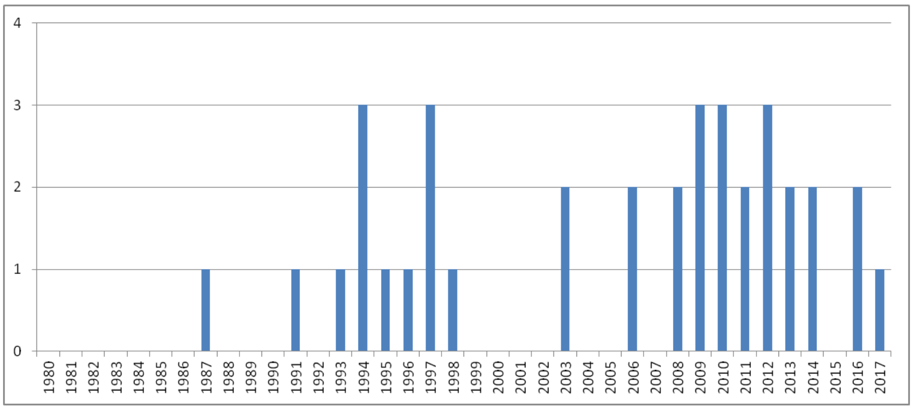


Figure 12.10: Cantidad de exámenes tomados por año de Álgebra lineal numérica.

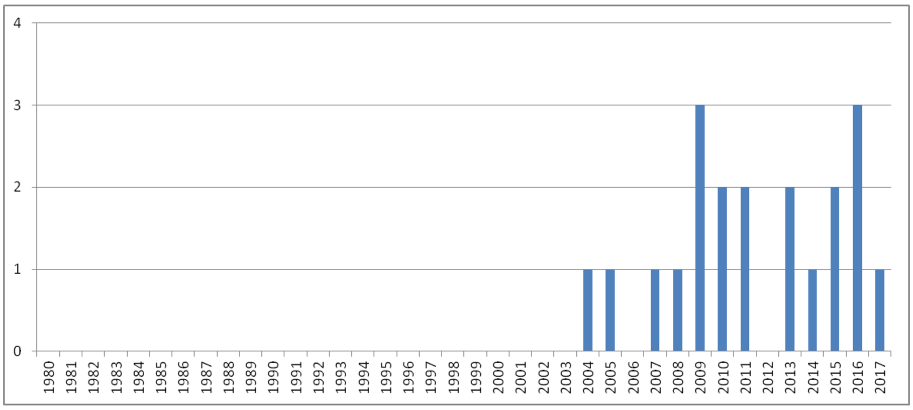


Figure 12.11: Cantidad de exámenes tomados por año de Topología algebraica.

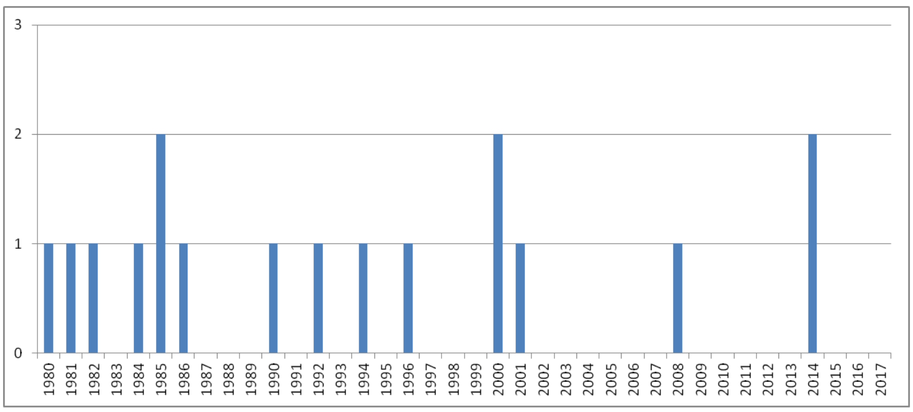


Figure 12.12: Cantidad de exámenes tomados por año de Estadística.

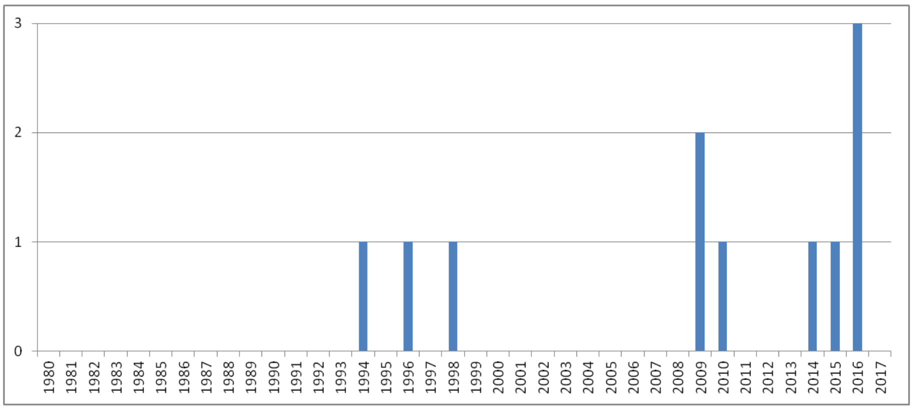


Figure 12.13: Cantidad de exámenes tomados por año de Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

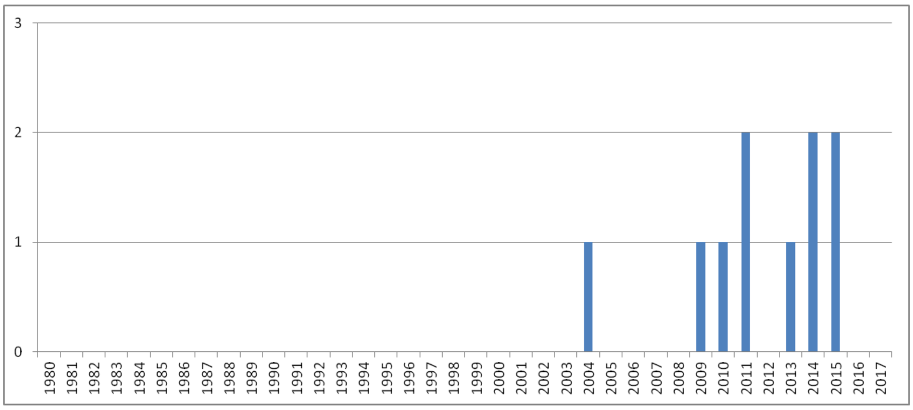


Figure 12.14: Cantidad de exámenes tomados por año de Análisis funcional.

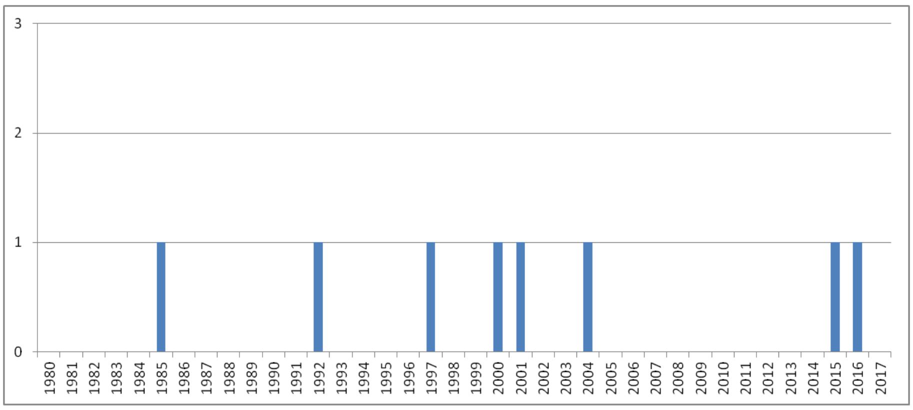


Figure 12.15: Cantidad de exámenes tomados por año de Álgebra universal.

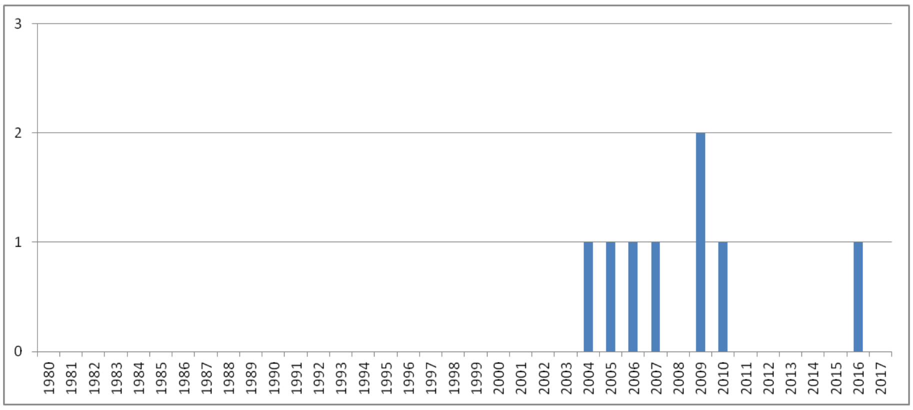


Figure 12.16: Cantidad de exámenes tomados por año de Teoría de Lie.

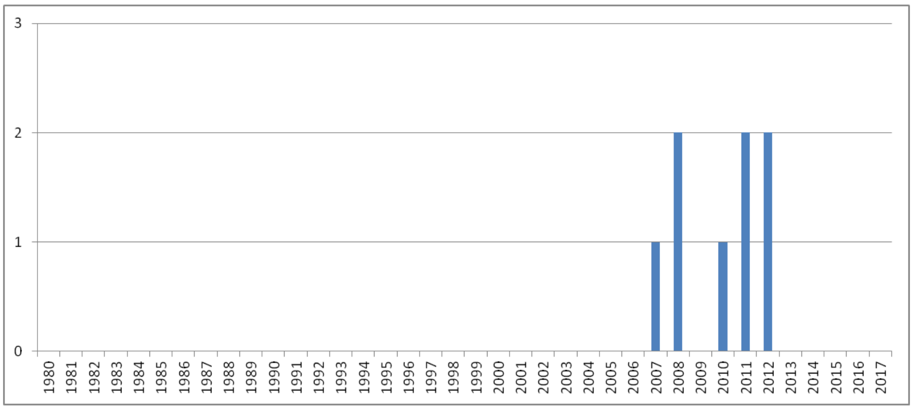


Figure 12.17: Cantidad de exámenes recopilados históricos.

Figure 12.19: Cantidad de exámenes recopilados entre 1996–2009.

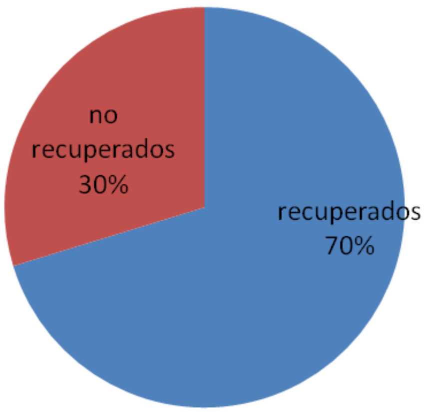


Figure 12.18: Cantidad de exámenes recopilados entre 1980–1996.

Figure 12.20: Cantidad de exámenes recopilados entre 2009–2017.