UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 65/2017

Distribuciones de Gibbs: Volumen 1

Oscar H. Bustos, Valeria Rulloni, Jorge Martinez

Editor: Jorge G. Adrover

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Distribuciones de Gibbs: Volumen 1

de Oscar H. Bustos, Valeria Rulloni y Jorge Martinez

Prólogo

Este texto se originó en el profundo respeto y admiración por el trabajo del profesor Dr. Oscar H. Bustos y de manera especial por su calidad humana. Se trata de una forma de homenajearlo y de acercar a los interesados parte del tema cuyo contenido aquí se desarrolla. El mismo es prácticamente una transcripción de las notas manuscritas de sus clases utilizadas por él como parte fundamental del curso de posgrado que lleva el mismo nombre, con algún aporte novedoso. La redacción del presente texto contó con la participación activa y la supervisión del profesor Bustos.

Jorge Martinez y Valeria Rulloni.

Estas notas fueron escritas basándose en el libro de Otto Georgii [Geo88] pero con un enfoque más matemático y detallado, desarrollando además demostraciones de resultados presentados en dicho libro y explorando algunos ejemplos. Aquí se presentan formalmente las bases en la que se sustenta la teoría de campos aleatorios, definiendo de manera constructiva a las distribuciones de Gibbs. Para la lectura de este texto es recomendable tener un manejo de matemática teórica a nivel de años avanzados de una carrera de grado como licenciatura en matemática, estadística o afín. El lector que busque ahondar en aplicaciones de esta teoría puede acercarse al de Xavier Guyon [Guy95] y al de Gerhard Winkler [Win95] entre otros...

Los campos aleatorios son utilizados para modelar el comportamiento de datos o valores ordenados espacialmente donde el supuesto de independencia entre los datos no es sustentable. Tal es el caso de las imágenes digitales, pues son arreglos de datos (llamados pixeles) ordenados espacialmente según su procedencia. En una imagen digital es intuitivo pensar que pixeles cercanos sean parecidos o cuanto menos relacionados y que esta relación se va perdiendo a medida que se incrementa la distancia entre ellos. En la teoría de campos aleatorios, este último concepto se conoce como la propiedad de Markov. De aquí se definen a los campos markovianos como aquellos en donde la dependencia de cada dato (pixel en imágenes) con el resto, se puede circunscribir sólo a un entorno o conjunto de datos vecinos. Las distribuciones de Gibbs modelan esta dependencia fijando, bajo ciertas reestricciones, el tipo de relación y el entorno de influencia por medio de los potenciales que las definen.

Este texto está organizado en cuatro capítulos y un Apéndice. En este último recordamos los principales conceptos y resultados de Teoría de la Medida, poniendo énfasis en «Esperanza condicional» y «Distribuciones condicionales regulares». El Capítulo 1, está dividido en tres secciones. A lo largo de ellas, definimos «núcleo de medida» y «núcleo de probabilidad» entre dos espacios medibles. Este es un concepto que extiende el concepto de probabilidad condicional definida sobre un espacio medible dada una sub-σ-álgebra de la σ-algebra de dicho espacio medible. Luego, estudiamos sus principales propiedades y damos ejemplos de uso frecuente. El Capítulo 2, titulado «Especificaciones de Gibbs», está desarrollado a lo largo de cuatro secciones. En la primera, definimos los principales conceptos cuyas relaciones y propiedades son el objeto de este trabajo: «potenciales», «especificaciones de Gibbs», «medidas de Gibbs» y «distribuciones de Gibbs». La Sección 3 la dedicamos al Teorema de Representación de Gibbs. Por último, estudiamos equivalencia entre potenciales. El Capítulo 3 lo dedicamos al problema de la existencia de medida de Gibbs asociada a una familia de especificaciones. Para ello, estudiamos las propiedades de una adecuada topología sobre el conjunto de las probabilidades de procesos estocásticos generales: la topología de la convergencia local. Finalmente, el Capítulo 4, lo reservamos para estudiar las condiciones de unicidad de distribuciones de Gibbs. Sin duda, este estudio es imprescindible para el problema de inferencia estadística en distribuciones de Gibbs. Este concepto es la contraparte formal de lo que en Física se entiende por «transición de fase». Estamos dedicados actualmente al tema de estimación, test de hipótesis, teoría asintótica, etc. en distribuciones de Gibbs. Esperamos así dar continuidad a este texto en un próximo volumen.

Dedicatoria

A mis conejos de Oscar

A Silvina de Jorge

A Lucio y a Oscar de Valeria

Índice general

Lista de símbolos

Símbolos en Apéndice

Capítulo 1

Especificaciones de Campos Aleatorios

1.1. Preliminares

Sean:

$(X, \mathscr{X})$ un espacio medible (X el conjunto, $\mathscr{X}$ una σ-álgebra sobre X);

$\mathscr{M}(X, \mathscr{X})$ el conjunto de todas las medidas σ-finitas μ sobre $(X, \mathscr{X})$ con $\mu(X) > 0$.

$\mathscr{P}(X, \mathscr{X}) \subset \{\mu \in \mathscr{M}(X, \mathscr{X}) / \mu \text{ es una probabilidad}\}$.

Si $f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathscr{X}$- medible, siempre que tenga sentido pondremos

$$\mu(f) := \int f d\mu, \ \mu \in \mathscr{M}(X, \mathscr{X}).$$

Si $\mu \in \mathscr{P}(X, \mathscr{X})$ y $\mathscr{B} \subset \mathscr{X}$ es σ- álgebra, pondremos:

$$\mu(f|\mathscr{B}) := E_\mu(f|\mathscr{B}) := \left\{ g : X \to \mathbb{R} / \ g \text{ es } \mathscr{B}\text{-medible y } \int_B g d\mu = \int_B f d\mu, \forall B \in \mathscr{B} \right\}.$$

Si g es un elemento de $E_\mu(f|\mathscr{B})$, se dice que g es una versión de la esperanza condicional de f dada $\mathscr{B}$ con respecto a μ.

Si $A \in \mathscr{X}$ pondremos $\mu(A|\mathscr{B}) := E_\mu(1_A|\mathscr{B})$.

Recordemos que: $g_1 \in E_\mu(f|\mathscr{B}), g_2 \in E_\mu(f|\mathscr{B}) \Rightarrow \mu(g_1 \neq g_2) = 0$

Si $f : X \to [0, +\infty)$ es medible, con $f\mu$ denotaremos la medida sobre $(X, \mathscr{X})$ dada por

$$f\mu(A) := \int_A f d\mu, \forall A \in \mathscr{X}$$

Sea $(Y, \mathscr{Y})$ otro espacio medible.

Definición 1.1.1 *Se dice que* $\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty)$ *es un núcleo de medida de* $(Y, \mathscr{Y})$ *a* $(X, \mathscr{X})$ *si:*

(i) *Para cada* $y \in Y, A \mapsto \pi(A, y)$ *es una medida sobre* $(X, \mathscr{X})$

(ii) *Para cada* $A \in \mathscr{X}, y \mapsto \pi(A, y)$ *es* $\mathscr{Y}$*-medible.*

De ahora en adelante pondremos

$$\pi(A|y) := \pi(A, y), \forall A \in \mathscr{X}, \forall y \in Y. \tag{1.1}$$

Si $\pi(X|\cdot) \equiv 1$, diremos que π es un *núcleo de probabilidad.*

Ejemplo 1.1.1 *Sea* $\phi : Y \to X$ *medible entonces* $\pi_\phi(A|y) = 1_A(\phi(y))$ *es un* núcleo de probabilidad .

Definición 1.1.2 *Sea* $\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty)$ *es un núcleo de medida,* $\mu \in \mathscr{M}(Y, \mathscr{Y})$*.*

Con $\mu\pi$ *definimos la medida sobre* $(X, \mathscr{X})$ *dada* μ*:*

$$\mu\pi(A) = \int_Y \pi(A|y)\,\mu(dy). \left(\Leftrightarrow \int_X 1_A(x)(\mu\pi)(dx) = \int_Y \int_X 1_A(x)\,\pi(dx|y)\,\mu(dy)\right)$$

Ejemplo 1.1.2 *Sea* $\phi : Y \to X$ *medible entonces* π_ϕ *dada como en el ejemplo 1.1.1;* $\mu \in \mathscr{M}(Y, \mathscr{Y})$ *entonces:*

$$\mu\pi_\phi(A) = \int \pi_\phi(A|y)\,\mu(dy) = \int 1_A(\phi(y))\,\mu(dy) = \int_{\phi^{-1}(A)} \mu(dy) = \mu\left(\phi^{-1}(A)\right).$$

En este caso ponemos $\phi(\mu)$ en lugar de $\mu\pi_\phi$, es decir: $\phi(\mu)$ es la medida sobre $(X, \mathscr{X})$ dada por $\phi(\mu)(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$

Nota 1.1.1 *Si* $\mu \in \mathscr{P}(Y, \mathscr{Y})$ *y* $\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty)$ *es un núcleo de probabilidad, entonces* $\mu\pi \in \mathscr{P}(X, \mathscr{X})$

Definición 1.1.3 *Sea* $\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty)$ *un núcleo (de medida);* $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{X}$*-medible. Para cada* $y \in Y$ *siempre que tenga sentido ponemos:*

$$\pi(f|y) := \pi(f)(y) := \int f(x)\,\pi(dx|y)$$

Proposición 1.1.1 *Sea* $\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty)$ *un núcleo de medida;* $f : X \to \mathbb{R}$ *medible no negativa (a menos que se quiera trabajar con medidas con signo). Sea* $f\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty)$ *definida por*

$$f\pi\,(A|y) := \int_A f\,(x)\,\pi\,(dx|y)$$

entonces $f\pi$ *es un núcleo de medida de* $(Y, \mathscr{Y})$ *sobre* $(X, \mathscr{X})$

Demostración: Ejercicio.
Sea $(Z, \mathscr{Z})$ otro espacio medible.

Proposición 1.1.2 *Sean* $\pi_1 : \mathscr{Y} \times Z \to [0, +\infty]$ *y* $\pi_2 : \mathscr{X} \times Y \to [0, +\infty]$ *núcleos de medida de* $(Z, \mathscr{Z})$ *a* $(Y, \mathscr{Y})$ *y de* $(Y, \mathscr{Y})$ *a* $(X, \mathscr{X})$ *respectivamente. Sea* $\pi_1\pi_2 : \mathscr{X} \times Z \to [0, +\infty)$ *dada por*

$$\pi_1\pi_2\,(A|z) = \int \pi_2\,(A|z)\,\pi_1\,(dy|z)\,, A \in \mathscr{X}, z \in Z.$$

Entonces $\pi_1\pi_2$ *es un núcleo de medida de* $(Z, \mathscr{Z})$ *a* $(X, \mathscr{X})$

Demostración: Ejercicio.

Definición 1.1.4 *Sea* $\mathscr{B}$ *una sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{X}$, $\pi : \mathscr{X} \times X \to [0, +\infty]$ *un núcleo de medida de* $(X, \mathscr{B})$ *a* $(X, \mathscr{X})$*. Se dice que* π *es propio (o* $\mathscr{B}$*-propio) si*

$$\pi\,(A \cap B|x) = \pi\,(A|x)\,1_B\,(x)\,, A \in \mathscr{X}, B \in \mathscr{B}, x \in X.$$

Proposición 1.1.3 *Sea* $\mathscr{B} \subset \mathscr{X}$ *una* σ*-álgebra sobre* X, $\pi : \mathscr{X} \times X \to [0, 1]$ *un núcleo de probabilidad de* $(X, \mathscr{B})$ *a* $(X, \mathscr{X})$*. Entonces:*

$$\pi\,\text{es } \mathscr{B}\text{-propio} \Leftrightarrow \pi\,(B|x) = 1_B\,(x)\,, B \in \mathscr{B}, x \in X.$$

Demostración:
$(\Rightarrow)$

$$\pi\,(B|x) = \pi\,(X \cap B|x) = \pi\,(X|x)\,1_B\,(x) = 1_B\,(x)\,.$$

$(\Leftarrow)$

Afirmación 1.1.1 $\pi\,(A \cap B|x) \leq \pi\,(A|x)\,1_B\,(x)\,, A \in \mathscr{X}, B \in \mathscr{B}, x \in X.$

Supongamos probada esta Afirmación 1.1.1. Entonces:

$$\pi\left(A \setminus B|x\right) = \pi\left(A \cap \left(X \setminus B\right)|x\right) \leq \pi\left(A|x\right) 1_{X\setminus B}\left(x\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\pi\left(A \cap B|x\right) &= \pi\left(A|x\right) - \pi\left(A \setminus B|x\right) \\
&\geq \pi\left(A|x\right) - \pi\left(A|x\right) 1_{X\setminus B}\left(x\right) \\
&= \pi\left(A|x\right)\left[1 - 1_{X\setminus B}\left(x\right)\right] \\
&= \pi\left(A|x\right) 1_{B}\left(x\right).
\end{aligned}$$

Nuevamente, por la Afirmación 1.1.1 se tiene:

$$\pi\left(A \cap B|x\right) = \pi\left(A|x\right) 1_{B}\left(x\right), \forall A \in \mathscr{X}, \forall B \in \mathscr{B}, \forall x.$$

Demostración de la Afirmación 1.1.1 :
Si $x \in B$, nada hay que demostrar.
Supongamos $x \notin B$. Por hipótesis $\pi\left(B|x\right) = 0$, entonces

$$\pi\left(A \cap B|x\right) \leq \pi\left(B|x\right) = 0.$$

De donde:

$$\pi\left(A \cap B|x\right) \leq \pi\left(A|x\right) 1_{B}\left(x\right)$$

∎

Proposición 1.1.4 *Sea $\mathscr{B} \subset \mathscr{X}$ una σ-álgebra sobre X. $\pi : \mathscr{X} \times X \to [0,1]$ un núcleo de probabilidad $\mathscr{B}$-propio de $(X, \mathscr{B})$ a $(X, \mathscr{X})$. Entonces: si $\mu \in \mathscr{P}\left(X, \mathscr{X}\right)$*

$$\pi\left(A|.\right) \in \mu\left(A|\mathscr{B}\right), A \in \mathscr{X} \Leftrightarrow \mu\pi = \mu.$$

Demostración:
$(\Rightarrow)$

$$\mu\pi\left(A\right) = \int \pi\left(A|x\right)\mu\left(dx\right) = \mu\left(A\right).$$

$(\Leftarrow)$
Sea $B \in \mathscr{B}$. Entonces:

$$\int_{B} \pi\left(A|x\right)\mu\left(dx\right) = \int \pi\left(A|x\right) 1_{B}\left(x\right)\mu\left(dx\right) = \mu\pi\left(A \cap B\right) = \mu\left(A \cap B\right).$$

■

Proposición 1.1.5 *Sea* $\mathscr{B} \subset \mathscr{X}$ *una* σ*-álgebra sobre* X. $\pi : \mathscr{X} \times X \to [0,1]$ *un núcleo de medida* $\mathscr{B}$*-propio de* $(X, \mathscr{B})$ *a* $(X, \mathscr{X})$, $f : X \to [0, +\infty)$, $\mathscr{X}$*-medible. Entonces* $f\pi$ *es un núcleo de medida* $\mathscr{B}$*-propio de* $(X, \mathscr{B})$ *a* $(X, \mathscr{X})$

Demostración:
Supongamos probada la siguiente:

Afirmación 1.1.2 *Sea* $g : X \to [0, +\infty)$, $\mathscr{X}$*-medible,* $B \in \mathscr{B}$. *Entonces:*

$$\int_B g(x)\,\pi(dx|w) = \int g(x)\,\pi(dx|w)\,1_B(w), \forall x, w \in X$$

Luego, para $A \in \mathscr{X}$ y $B \in \mathscr{B}$ tenemos:

$$\begin{aligned} f\pi(A \cap B|w) &= \int_{A\cap B} f(x)\,\pi(dx|w) \\ &= \int_B 1_A(x)\,f(x)\,\pi(dx|w) \\ &= \int 1_A(x)\,f(x)\,\pi(dx|w)\,1_B(w) \\ &= f\pi(A|w)\,1_B(w). \end{aligned}$$

■

Demostración de la Afirmación 1.1.2.
Supongamos que $g = 1_A$ con $A \in \mathscr{X}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_B g(x)\,\pi(dx|w) &= \int_B 1_A(x)\,\pi(dx|w) \\ &= \int 1_{A\cap B}(x)\,\pi(dx|w) \\ &= \pi(A \cap B|w) \\ &= \pi(A|w)\,1_B(w) \\ &= \int 1_A(x)\,\pi(dx|w)\,1_B(w) \end{aligned}$$

El caso general sigue entonces de aquí, aplicando los teoremas B. pág. 85 y B pág. 112 de [Hal50].

■

1.2. Especificaciones

Sean: $S \subset \mathbb{Z}^2$ infinito; $(E, \mathscr{E})$ un espacio medible.
Para cada $\emptyset \neq V \subset S$ sea $E^V = \{x/x \text{ es función de} V \text{ en } E\}$
Sean: $\emptyset \neq V_1 \subset V_2 \subset S$; definimos $\sigma_{V_2,V_1} : E^{V_2} \to E^{V_1}$ por:

$$\sigma_{V_2,V_1}(x)(t) = x(t), \forall t \in V_1, x \in E^{V_2}$$

Si $V_2 = S$ ponemos σ_{V_1} en vez de σ_{S,V_1}. Si $V_1 = \{s\}$ con $s \in S$ ponemos $\sigma_{V_2,s}$ en vez de $\sigma_{V_2,\{s\}}$.

Sea $x \in E^{V_2}$ denotamos: $x_{V_1} \doteq \sigma_{V_2,V_1}(x)$ y $x_s \doteq x(s)$ con $s \in S$.

Sea $\emptyset \neq V \subset S$.

Definimos $\mathscr{G}_V \subset \mathscr{P}\left(E^V\right)$ por:

$$\mathscr{G}_V = \left\{\sigma_{V,s}^{-1}(B)/B \in \mathscr{E}, s \in V\right\}$$

Sea $\mathscr{E}^V$ la σ-álgebra sobre E^V generada por $\mathscr{G}_V$. Se dice que $\mathscr{E}^V$ es la σ-álgebra producto sobre E^V.

Sea $\mathscr{F}_V$ la σ-álgebra sobre E^S dada por

$$\mathscr{F}_V = \left\{\sigma_V^{-1}(B)/B \in \mathscr{E}^V\right\}$$

A veces pondremos:

$$\mathscr{T}_V = \mathscr{F}_{S \setminus V} \text{ y } \mathscr{F} = \mathscr{E}^S$$

Sea $\mathscr{S}(S)$ o simplemente $\mathscr{S}$ si no hay lugar a confusión, la familia de subconjuntos finitos de S dada por: $\mathscr{S}(S) := \mathscr{S} := \{\Lambda \subset S/1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\gamma_\Lambda : \mathscr{F} \times E^S \to [0,1]$ un núcleo de probabilidad de $\left(E^S, \mathscr{T}_\Lambda\right)$ a $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ y $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$.

Definición 1.2.1 *Sea $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Diremos que μ tiene estructura de γ-dependencia si $\gamma_\Lambda(A|\cdot) \in \mu(A|\mathscr{T}_\Lambda)$ para todo $A \in \mathscr{F}$ y $\Lambda \in \mathscr{S}$.*

Proposición 1.2.1 *Sea $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que tiene estructura de γ-dependencia. Entonces:*

(a) $A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{T}_\Lambda \Rightarrow \gamma_\Lambda(A \cap B|\cdot) = \gamma_\Lambda(A|\cdot)\, 1_B(\cdot)$ *μ c.s. con* $\Lambda \in \mathscr{S}$.

(b) Λ, Δ *en* $\mathscr{S}$ *con* $\Lambda \subset \Delta, A \in \mathscr{F} \Rightarrow \gamma_\Delta\gamma_\Lambda(A|\cdot) = \gamma_\Lambda(A|\cdot)$ *μc.s donde* $\gamma_\Delta\gamma_\Lambda : \mathscr{F} \times E^S \to \mathbb{R}$ *está dada por:*

$$\gamma_\Delta\gamma_\Lambda(A|w) = \gamma_\Delta(\gamma_\Lambda(A|\cdot))(w) = \int \gamma_\Lambda(A|w')\,\gamma_\Delta(dw'|w)$$

Demostración:
(a)
Sea $B_1 \in \mathscr{T}_\Lambda$ entonces,

$$\begin{aligned} \mu\left(A \cap B \cap B_1\right) &= \int_{B_1} \gamma_\Lambda\left(A \cap B|w\right) \mu\left(dw\right) = \int_{B_1 \cap B} \gamma_\Lambda\left(A|w\right) \mu\left(dw\right) \\ &= \int_{B_1} \gamma_\Lambda\left(A|w\right) 1_B\left(w\right) \mu\left(dw\right) \end{aligned}$$

Entonces $\gamma_\Lambda\left(A|\cdot\right) 1_B \in \mu\left(A \cap B|\mathscr{T}_\Lambda\right)$.
Luego $\gamma_\Lambda\left(A \cap B|\cdot\right) = \gamma_\Lambda\left(A|\cdot\right) 1_B$ μ c. s.
(b) Como $\gamma_\Delta\left(f|\cdot\right) \in \mu\left(f|\mathscr{T}_\Delta\right)$ tenemos que:

$$\gamma_\Delta\left(\gamma_\Lambda\left(A|\cdot\right)|\cdot\right) \in \mu\left(\mu\left(1_A|\mathscr{T}_\Lambda\right)|\mathscr{T}_\Delta\right) = \mu\left(1_A|\mathscr{T}_\Delta\right).$$

Luego, como

$$\gamma_\Delta\left(A|\cdot\right) \in \mu\left(1_A|\mathscr{T}_\Delta\right)$$

tenemos que:

$$\gamma_\Delta\left(\gamma_\Lambda\left(A|\cdot\right)|\cdot\right) = \gamma_\Delta\left(A|\cdot\right) \ \mu \text{ c. s..}$$

Definición 1.2.2 *Se llama* ***especificación con soporte S y espacio de estados*** $(E, \mathscr{E})$ *o especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *a una familia*

$$\gamma = \left(\gamma_\Lambda\right)_{\Lambda \in \mathscr{S}} \left(\mathscr{S} = \left\{\Lambda \subset S/0 < \#\left(\Lambda\right) < \infty\right\}\right)$$

tal que:

(i) γ_Λ *es un núcleo de probabilidad* $\mathscr{T}_\Lambda$*-propio.*

(ii) *Si* $\Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$, *entonces* $\gamma_\Delta \gamma_\Lambda\left(A|\cdot\right) = \gamma_\Delta\left(A|\cdot\right), \forall A \in \mathscr{F}$.

En tal caso a la familia

$$\mathscr{G}\left(\gamma\right) := \left\{\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) / \gamma_\Lambda\left(A|\cdot\right) \in \mu\left(A|\mathscr{T}_\Lambda\right), \forall A \in \mathscr{F}, \Lambda \in \mathscr{S}\right\}$$

se la llama ***familia de campos (probabilidades) especificada (o admitida) por*** γ.

Lema 1.2.1 *Sea* $(X, \mathscr{X})$ *un espacio medible,* $\mathscr{B} \subset \mathscr{X}$ *una* σ*-álgebra sobre* $X, \pi : \mathscr{X} \times X \to [0, +\infty)$ *un núcleo de probabilidad de* $\mathscr{B}$ *a* $\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$*-propio. Si* $f : X \to [0, +\infty)$ *es* $\mathscr{B}$*-medible entonces* $\pi\left(f\right) = f$.

Demostración: Ejercicio.

Lema 1.2.2 *$f : E^S \to \mathbb{R}, f$ es$\mathscr{F}_V$-medible $\Longleftrightarrow$ es cierta:*

$$\left(x \in E^S, y \in E^S, \sigma_V(x) = \sigma_V(y)\right) \Rightarrow f(x) = f(y) \tag{1.2}$$

Demostración del Lema 1.2.2

Observación: Sea $x \in E^S$ cualquiera. Sea $I_x : E^V \to E^S$ dada por $I_x(z) = x_{S\setminus V}z, \forall z \in E^V$, donde:

$$x_{S\setminus V}z(t) = \begin{cases} x(t) & t \in S \setminus V \\ z(t) & t \in V \end{cases}.$$

Si f es $\mathscr{F}$- medible, entonces $f \circ I_x$ es $\mathscr{E}^V$-medible, por teorema B pág. 142 de [Hal50].

$(\Leftarrow)$

Sea $B \in \mathscr{B}_1 \Rightarrow (f \circ I_x)^{-1}(B) \in \mathscr{E}^V$.

Como la expresión 1.2 es cierta es directo ver que:

$$f^{-1}(B) = \sigma_V^{-1}\left((f \circ I_x)^{-1}(B)\right)$$

entonces $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_V$

$(\Rightarrow)$

Sean $x \in E^S, y \in E^S$ con $x_V = y_V$.

Sea $\epsilon > 0$.

Sea $B = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$.

Como f es $\mathscr{F}_V$- medible, $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_V \Rightarrow \exists C \in \mathscr{E}^V$ tal que

$$f^{-1}(B) = \sigma_V^{-1}(C)$$

Como $x \in f^{-1}(B), \sigma_V(x) \in C$, como $\sigma_V(y) = y_V = x_V = \sigma_V(x), y \in \sigma_V^{-1}(C) \Rightarrow y \in f^{-1}(B) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$.

Por la arbitrariedad de ϵ se sigue que $f(x) = f(y)$.

$\blacksquare$

Proposición 1.2.2 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Entonces:*

$$\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S} \Rightarrow \gamma_\Lambda \gamma_\Delta(A|\cdot) = \gamma_\Delta(A|\cdot), \forall A \in \mathscr{F}.$$

Demostración:

Por definición.

$$\gamma_\Lambda \gamma_\Delta(A|z) = \int \gamma_\Delta(A|y)\, \gamma_\Lambda(dy, z) \tag{1.3}$$

Ahora, $y \mapsto \gamma_\Delta(A|y)$ es $\mathscr{T}_\Delta$-medible.

Como $\Lambda \subset \Delta, \mathscr{T}_\Delta \subset \mathscr{T}_\Lambda \Rightarrow y \mapsto \gamma_\Lambda(A|y)$ es $\mathscr{T}_\Delta$-medible.

Como γ_Λ es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio, por el Lema 1.2.1 se tiene que la ecuación 1.3 $= \gamma_\Delta(A|z)$.

■

Definición 1.2.3 *Diremos que* $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ *es* ***cofinal*** *si en cada* $\Lambda \in \mathscr{S}, \exists \Delta \in \mathscr{S}_0$ *tal que* $\Lambda \subset \Delta$.

Ejemplo 1.2.1 *Sea* $S = \mathbb{Z}^d$ $(d \geq 1)$.

$$\mathscr{S}_0 = \left\{[-n,n]^d \cap S : n \geq 1\right\}$$

Entonces $\mathscr{S}_0$ *es cofinal.*

Proposición 1.2.3 *Sean:* γ *una especificación y* $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *son equivalentes:*

(a) $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$.

(b) $\mu\gamma_\Lambda = \mu, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$

(c) $\exists \mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ *cofinal tal que* $\mu\gamma_\Lambda = \mu, \forall \Lambda \in \mathscr{S}_0$.

Demostración:

(a)⇒ (b)

$$\mu\gamma_\Lambda(A) = \int \gamma_\Lambda(A|y)\,\mu(dy) = \mu\left(A \cap E^S\right) = \mu(A).$$

(b)⇒ (a)

Sea $B \in \mathscr{T}_\Lambda$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_B \gamma_\Lambda(A|y)\,\mu(dy) &= \int \gamma_\Lambda(A|y)\,1_B(y)\,\mu(dy) \\ &= \int \gamma_\Lambda(A \cap B|y)\,\mu(dy) \\ &= \mu(A \cap B). & \text{[Hipótesis (b)]} \end{aligned}$$

$\therefore \gamma_\Lambda(A|\cdot) \in \mu(A|\mathscr{T}_\Lambda)$.

(b)⇒ (c)

Es trivial.

(c)⇒ (b)

Sea $\Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \exists \Delta \in \mathscr{S}_0 : \Lambda \subset \Delta$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mu\gamma_\Lambda &= \mu\gamma_\Delta\gamma_\Lambda \\ &= \mu\gamma_\Delta & \text{[Definición 1.2.1 (ii)]} \\ &= \mu. & \text{[Hipótesis (c)]} \end{aligned}$$

1.3. λ-especificaciones

Notación 1.3.1 *Sean:* $(X, \mathscr{X})$ *e* $(Y, \mathscr{Y})$ *dos espacios medibles. Si* $A \in \mathscr{X}$ *y* $B \in \mathscr{Y}$ *pondremos*

$$A \times B = \{(x, y) \in X \times Y / x \in A, y \in B\}.$$

Sean: $\mu \in \mathscr{M}(X, \mathscr{X}), \nu \in \mathscr{M}(Y, \mathscr{Y})$. *Con* $\mu\nu$ *denotaremos también la medida producto* $\mu \otimes \nu$ *sobre* $(X \times Y, \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$.

En este punto y de ahora en más usaremos como conocidos todos los resultados que sobre espacios productos pueden verse, por ejemplo en el apéndice y en [Hal50] págs. 137 a 150. Continuando con la notación ya habitual de las secciones anteriores, sea $(E, \mathscr{E})$ *medible y* $S \subset \mathbb{Z}^2$ *infinito*

Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ *y la medida producto* $\lambda^V := \bigotimes_{s \in V} \lambda$, *con* $\emptyset \neq V \subset S$. *Para cada* $\emptyset \neq \Lambda \subset S$ *definimos* $\lambda_\Lambda : \mathscr{F} \times E^S \to \mathbb{R}$ *por:*

$$\lambda_\Lambda(A|x) = \left(\lambda^\Lambda \delta_{x_{S\setminus\Lambda}}\right)(A),$$

donde $\delta_{x_{S\setminus\Lambda}}$ *es la medida sobre* $\left(E^{S\setminus\Lambda}, \mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}\right)$ *dada por*

$$\delta_{x_{S\setminus\Lambda}}(B) = 1_B\left(x_{S\setminus\Lambda}\right).$$

Nota 1.3.1 *Si* $f : E^S \to \mathbb{R}$ *es medible y acotada o no negativa, entonces:*

$$\lambda_\Lambda(f|w) := \int_{E^S} f(w') \lambda_\Lambda(dw'|w) = \int_{E^\Lambda} f\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) \lambda^\Lambda(d\xi), \forall w \in E^S$$

Proposición 1.3.1 *Sean* $\lambda \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$ *y* $\lambda_{.} := (\lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$. *Entonces:*

(a) $\lambda_{.}$ *es una especificación sobre* $(E, \mathscr{E})^S$.

(b) *Cualquiera sean* Λ *y* Δ *en* $\mathscr{S}$ *se cumple que:* $\lambda_\Delta \lambda_\Lambda = \lambda_{\Delta \cup \Lambda}$.

(c) $\mathscr{G}(\lambda_{.}) = \left\{\lambda^S\right\}$.

Demostración:

Parte (a)

Que λ_Λ es un núcleo de probabilidad sobre $(E, \mathscr{E})^S, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$, queda como ejercicio. Veamos que es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio. Para ello, aplicamos la Proposición 1.1.3.

Sea $B \in \mathscr{T}_\Lambda$, entonces:

$$\lambda_\Lambda(B|x) = \int_{E^\Lambda} 1_B\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right) \lambda^\Lambda(d\xi). \tag{1.4}$$

Como $B \in \mathscr{T}_\Lambda : \xi x_{S\setminus\Lambda} \in B \Leftrightarrow x \in B$ cualquiera sea $x \in E^S$.
Entonces la ecuación 1.4 $= 1_B(x)$.
Parte (b)

$$\lambda_\Delta\lambda_\Lambda(A|w) = \int \lambda_\Lambda(A|w')\,\lambda_\Delta(dw'|w) = \int_{E^\Delta} \lambda_\Lambda\left(A|\xi w_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^\Delta(d\xi) \quad (1.5)$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\lambda_\Lambda\left(A|\xi w_{S\setminus\Delta}\right) &= \int_{E^\Lambda} 1_A\left(\zeta\left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right)_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\zeta)\\ &= \int_{E^\Lambda} 1_A\left(\zeta\xi_{\Delta\setminus\Lambda}w_{S\setminus(\Delta\cup\Lambda)}\right)\lambda^\Lambda(d\zeta)\end{aligned}$$

Luego, la ecuación 1.5

$$\begin{aligned} &= \int_{E^\Delta}\int_{E^\Lambda} 1_A\left(\zeta\xi_{\Delta\setminus\Lambda}w_{S\setminus(\Delta\cup\Lambda)}\right)\lambda^\Lambda(d\zeta)\,\lambda^\Delta(d\xi)\\ &= \int_{E^{\Delta\setminus\Lambda}}\int_{E^\Lambda} 1_A\left(\zeta\eta w_{S\setminus(\Delta\cup\Lambda)}\right)\lambda^\Lambda(d\zeta)\,\lambda^{\Delta\setminus\Lambda}(d\eta)\\ &= \int_{E^{\Delta\cup\Lambda}} 1_A\left(\vartheta w_{S\setminus(\Delta\cup\Lambda)}\right)\lambda^{\Delta\cup\Lambda}(d\vartheta)\\ &= \lambda_{\Delta\cup\Lambda}(A|w).\end{aligned}$$

Parte (c)
Veamos que $\lambda_\Lambda(A|\cdot) \in \lambda^S(A|\mathscr{T}_\Lambda)$.
En otras palabras que:

$$\int_B \lambda_\Lambda(A|w)\,\lambda^S(dw) = \lambda^S(A\cap B)\,\text{cualquiera sea } B \in \mathscr{T}_\Lambda. \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\int_B \lambda_\Lambda(A|w)\,\lambda^S(dw) &= \int \lambda_\Lambda(A|w)\,1_B(w)\,\lambda^S(dw)\\ &= \int \lambda_\Lambda(A\cap B|w)\,\lambda^S(dw)\\ &= \int_{E^S}\int_{E^\Lambda} 1_{A\cap B}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\xi)\,\lambda^S(dw)\\ &= \int 1_{A\cap B}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\xi)\,\lambda^{S\setminus\Lambda}\left(dw_{S\setminus\Lambda}\right)\\ &= \int 1_{A\cap B}(w)\,\lambda^S(dw)\\ &= \lambda^S(A\cap B).\end{aligned}$$

Finalmente, sea $\mu \in \mathscr{G}(\lambda.)$, veamos que $\mu = \lambda^S$.
Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$.
Sea $A \in \mathscr{F}_\Lambda := \left\{\sigma_\Lambda^{-1}(C) / C \in \mathscr{E}^\Lambda\right\}$.
Pongamos $A = \sigma_\Lambda^{-1}(C)$.
Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu\lambda_\Lambda(A) &= \int_{E^S} \lambda_\Lambda(A|w)\,\mu(dw) \\
&= \int_{E^S}\int_{E^\Lambda} 1_C(\xi)\,\lambda^\Lambda(d\xi)\,\mu(dw) \\
&= \lambda^\Lambda(C) \\
&= \lambda^S(A)
\end{aligned}$$

Como $\mu \in \mathscr{G}(\lambda.)$, por la Proposición 1.2.3 tenemos que $\mu\lambda_\Lambda = \mu$, luego $\mu(A) = \lambda^S(A)\forall A \in \mathscr{F}_\Lambda$ para $\Lambda \in \S$. Como $\mathscr{F}$ es la σ-álgebra sobre E^S generada por el álgebra $\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}} \mathscr{F}_\Lambda, \mu = \lambda^S$, por el Teorema de Extensión (Theorem A, pág. 54 de [Hal66] Measure Theory).

Proposición 1.3.2 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$. Entonces:*

(a) *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}, \lambda_\Lambda$ es un núcleo de medida de $\mathscr{T}_\Lambda$ a $\mathscr{F}$ que es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio.*

(b) *Sean Λ y Δ en $\mathscr{S}$ con $\Lambda \cap \Delta = \emptyset$. Entonces: $\lambda_\Delta\lambda_\Lambda = \lambda_{\Lambda\cup\Delta}$.*

Demostración: Ejercicio.

Definición 1.3.1 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$.*

(a) *Se dice que una familia $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ de funciones $\rho_\Lambda : E^S \to [0, +\infty)$, $\mathscr{F}$-medibles, es una **λ-modificación** si $\rho\lambda. := (\rho_\Lambda\lambda_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una **especificación sobre** $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$*

(b) *Se dice que una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right), \gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-especificación si existe una familia $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ de funciones $\rho_\Lambda : E^S \to [0, +\infty)$, $\mathscr{F}$-medibles tal que $\gamma = \rho\lambda.$.*

Definición 1.3.2 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}), \rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{M}}$ una λ-modificación, $\gamma = \rho\lambda.$ la λ-especificación asociada. Se dice que $\rho\,(o\ \gamma)$ es positiva si $\rho_\Lambda(x) > 0, \forall x \in E^S, \forall\Lambda \in \mathscr{S}$.*

Proposición 1.3.3 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}), \rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una familia de funciones, $\rho_\Lambda : E^S \to [0, +\infty)$, $\mathscr{F}$-medibles. Entonces ρ es una λ-modificación si y sólo si*

(a) *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$:
$$\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)(x) = 1, \forall x \in E^S;$$
si pasa esto se dice que $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ *está normalizada .*

(b) $(\rho_\Lambda \lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es consistente (esto es:* $\Lambda \in \mathscr{S}, \Delta \in \mathscr{S}, \Lambda \subset \Delta \Rightarrow \lambda_\Delta(\rho_\Delta \cdot \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda 1_A)) = \lambda_\Delta(\rho_\Delta \cdot 1_A))$*, para todo* $A \in \mathscr{F}$*. Eso es* $(\rho_\Delta \lambda_\Delta)(\rho_\Lambda \lambda_\Lambda) = \rho_\Lambda \lambda_\Delta$*.*

Demostración:
$(\Rightarrow)$
Parte (a)
Sigue del hecho de que para cada $x \in E^S, A \mapsto \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(A|x)$ es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$
Parte (b)
Sea $A \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned}
\lambda_\Delta(\rho_\Delta \cdot \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda 1_A))(w) &= \int \rho_\Delta(w') \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda 1_A)(w') \lambda_\Delta(dw'|w) \\
&= \int \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda 1_A)(w') \gamma_\Delta(dw'|w) \\
&= \int \int (\rho_\Lambda 1_A)(w'') \lambda_\Lambda(dw''|w') \gamma_\Delta(dw'|w) \\
&= \int \int 1_A(w'') \gamma_\Lambda(dw''|w') \gamma_\Delta(dw'|w) \\
&= \int \gamma_\Lambda(A|w') \gamma_\Delta(dw'|w) \\
&= \gamma_\Delta \gamma_\Lambda(A|w) \\
&= \gamma_\Delta(A|w) \\
&= \lambda_\Delta(\rho_\Delta 1_A)(w).
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$
Que $A \mapsto \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(A|w)$ es una probabilidad se sigue por la parte **(a)** inmediatamente.

Además, sabemos que para cada $A \in \mathscr{F}, w \mapsto \lambda_\Lambda(A|w)$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible, esto es: $w \mapsto \int 1_A(w') d\lambda_\Lambda(w'|w)$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible $\forall A \in \mathscr{F} \Rightarrow \forall f : E^S \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$-medible no negativa o acotada se tiene: $w \mapsto \int f(w') d\lambda_\Lambda(w'|w)$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible.

En particular: $w \mapsto \int \rho_\Lambda(w') 1_A(w') \lambda_\Lambda(dw'|w) = (\rho_\Lambda \lambda_\Lambda)(A|w)$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible $\forall A \in \mathscr{F}$. Que $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio se sigue porque λ_Λ es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio.

Finalmente, que $\gamma_\Delta \gamma_\Lambda = \gamma_\Delta$ si $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$ sigue por la parte **(b)**.

■

Lema 1.3.1 *Sean:* $(X, \mathscr{X})$ *e* $(Y, \mathscr{Y})$ *dos espacios medibles,* $\pi : \mathscr{X} \times Y \to [0,1]$ *un núcleo de probabilidad de* $(Y, \mathscr{Y})$ *a* $(X, \mathscr{X})$, $\mu \in \mathscr{P}(Y, \mathscr{Y})$, $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{X}$*-medible y acotada. Entonces:* $f(\mu\pi) = \mu(f\pi)$

Demostración:
Sea $A \in \mathscr{X}$ cualquiera

$$\begin{aligned}
f(\mu\pi)(A) &= \int_A f(x)(\mu\pi)(dx) \\
&= \int_X 1_A(x) f(x)(\mu\pi)(dx) \\
&= \int_Y \int_X 1_A(x) f(x)\pi(dx|y)\mu(dy) \\
&= \int_Y \int_A f(x)\pi(dx|y)\mu(dy) \\
&= \int_Y (f\pi)(A|y)\mu(dy) \\
&= \mu(f\pi)(A).
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.3.4 *Sean:* $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$, $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una* λ*-modificación,* $\gamma = \rho\lambda_.$ *la* λ*-especificación asociada a* ρ*. Entonces:*

$$\mathscr{G}(\gamma) = \left\{\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) / \mu = \rho_\Lambda(\mu\lambda_\Lambda), \forall \Lambda \in \mathscr{S}\right\}$$

Demostración:
Ejercicio (Ayuda: Usar **(b)** de la Proposición 1.2.3 y el Lema 1.3.1).

Corolario 1.3.1 *Sean:* $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$, $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una* λ*-modificación positiva. Sean* μ *y* ν *en* $\mathscr{G}(\rho\lambda_.)$*. Entonces para todo* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *y* $B \in F_\Lambda$

$$\mu(B) = 0 \Leftrightarrow \nu(B) = 0$$

Demostración:
Por la Proposición anterior:

$$0 = \rho_\Lambda(\mu\lambda_\Lambda)(B) = \int_B \rho_\Lambda(w)(\mu\lambda_\Lambda)(dw)$$

Como ρ_Λ es positiva, debe ser:

$$(\mu\lambda_\Lambda)(B) = 0$$

lo que es lo mismo:

$$\int \lambda_\Lambda (B|w) \, \mu (dw) = 0 \tag{1.7}$$

Ahora, $\forall w \in E^S$ tenemos que:

$$\lambda_\Lambda (B|w) = \lambda_\Lambda \left(\sigma_\Lambda^{-1} (C) \, |w \right) \text{ para algún } C \in \mathscr{E}^\Lambda,$$

entonces

$$\lambda_\Lambda \left(\sigma_\Lambda^{-1} (C) \, |w \right) = \left(\lambda^\Lambda \times \delta_{w_{S \setminus \Lambda}} \right) \left(\sigma_\Lambda^{-1} (C) \right) = \lambda^\Lambda (C) \, , \forall w \in E^S$$

Luego, la ecuación 1.7 implica que:

$$0 = \lambda^\Lambda (C)$$

de donde: $\lambda_\Lambda (B|w) = 0 \; \forall w \in E^S$
$\therefore$ debe ser

$$\int \lambda_\Lambda (B|w) \, \nu (dw) = 0$$

y de aquí se deduce que $\nu (B) = 0$, pues $\nu = \rho_\Lambda (\nu \lambda_\Lambda) \, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$, ya que $\nu \in \mathscr{G} (\rho \lambda_.)$.

■

Notación 1.3.2 *Sean:* $\lambda \in \mathscr{M} (E, \mathscr{E}) \, , r : E \to (0, +\infty)$ *medible,* $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una familia de funciones* $\mathscr{F}$*-medibles, definibles sobre* E^S *con valores en* $[0, +\infty)$.

Sea $r\lambda \in \mathscr{M} (E, \mathscr{E})$ *dada por:*

$$(r\lambda) (B) = \int_B r (t) \, \lambda (dt) \, \forall B \in \mathscr{E}.$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$*, sea* $\rho_{\Lambda,r} : E^S \to [0, +\infty)$ *dada por:*

$$\rho_{\Lambda,r} (w) = \frac{\rho_\Lambda (w)}{\prod_{i \in \Lambda} r (w_i)}, w \in E^S$$

Proposición 1.3.5 *Si* $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es una* λ*-modificación, entonces:*

(i) $\rho_{\Lambda,r} (r\lambda)_\Lambda = \rho_\Lambda \lambda_\Lambda \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

(ii) $\rho_r = (\rho_{\Lambda,r})_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es una* $(r\lambda)$*-modificación.*

Demostración:
Basta probar **(i)**.

$$\left(\rho_{\Lambda,r}\right)(r\lambda)_{\Lambda}(A|w)=\int 1_A(w')\,\rho_{\Lambda,r}(w')\,(r\lambda)_{\Lambda}(dw'|w) \tag{1.8}$$

Ahora,

$$(r\lambda)_{\Lambda}(B|w)=\left((r\lambda)^{\Lambda}\times\delta_{w_{S\setminus\Lambda}}\right)(B)\,,\forall B\in\mathscr{F}$$

Luego, $\forall f:\mathscr{F}\to[0,+\infty)$ medible:

$$\int f(w')\,(r\lambda)_{\Lambda}(dw'|w)=\int f(w')\left((r\lambda)^{\Lambda}\times\delta_{w_{S\setminus\Lambda}}\right)(dw') \tag{1.9}$$

Ahora, $\forall C\in\mathscr{E}^{\Lambda}$ y todo $D\in\mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int 1_{C\times D}(w')\left((r\lambda)^{\Lambda}\times\delta_{w_{S\setminus\Lambda}}\right)(dw') &= (r\lambda)^{\Lambda}(C)\,\delta_{w_{S\setminus\Lambda}}(D)\\ &= \int 1_{C\times D}(w')\prod_{i\in\Lambda}r(w'_i)\left(\lambda^{\Lambda}\delta_{w_{S\setminus\Lambda}}\right)(dw')\\ &= \int 1_{C\times D}(w')\prod_{i\in\Lambda}r(w'_i)\,\lambda_{\Lambda}(dw'|w)\,.\end{aligned}$$

De aquí, por la ecuación 1.9, para toda $f:\mathscr{E}^S\to[0,+\infty)$ medible tenemos:

$$\int f(w')\,(r\lambda)_{\Lambda}(dw'|w)=\int f(w')\prod_{i\in\Lambda}r(w'_i)\,\lambda_{\Lambda}(dw'|w)$$

Luego: la ecuación 1.8

$$\begin{aligned}&= \int 1_A(w')\,\rho_{\Lambda,r}(w')\prod_{i\in\Lambda}r(w'_i)\,\lambda_{\Lambda}(dw'|w)\\ &= \int 1_A(w')\,\rho_{\Lambda}(w')\,\lambda_{\Lambda}(dw'|w)\\ &= (\rho_{\Lambda}\lambda_{\Lambda})(A)\,.\end{aligned}$$

■

Corolario 1.3.2 *Sea $\lambda\in\mathscr{M}(E,\mathscr{E})$ entonces existe $r:E\to(0,+\infty)$ medible tal que $(r\lambda)\in\mathscr{P}(E,\mathscr{E})$ y tal que $\rho\lambda_{.}=(\rho_{\Lambda}\lambda_{\Lambda})_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-especificación $\Rightarrow\rho_r=(\rho_{\Lambda,r})_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una $(r\lambda)$-modificación, es decir $\rho_r(r\lambda)_{.}=(\rho_{\Lambda,r}(r\lambda)_{\Lambda})_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una $r\lambda$-especificación.*

Demostración: Ejercicio (tener en cuenta que λ es σ-finita).

Proposición 1.3.6 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$. Si $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es una λ-especificación, entonces:*

$$\gamma_\Lambda(\cdot|w) \ll \lambda_\Lambda(\cdot|w) \, \forall \Lambda \in \mathscr{S}, \forall w \in E^S$$

Demostración: Ejercicio.

Proposición 1.3.7 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$; γ una λ-especificación. Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $w \in E^S$ sea $\nu_{\Lambda,w} : \mathscr{E}^\Lambda \to [0, 1]$ definida por:*

$$\nu_{\Lambda,w}(C) = \lambda_\Lambda\left(\sigma_\Lambda^{-1}(C)|w\right)$$

Entonces:

(a) $\nu_{\Lambda,w} \ll \lambda^\Lambda, \forall \Lambda, \forall w$

(b) *Si $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es una λ-modificación tal que $\gamma = \rho\lambda_{\cdot}$, entonces, para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $w \in E^S$ la función $f_{\Lambda,w} : E^\Lambda \to [0, +\infty)$ dada por:*

$$f_{\Lambda,w}(\xi) = \rho_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)$$

es una λ^Λ-densidad de $\nu_{\Lambda,w}$

Demostración:
Parte (a) Queda como ejercicio.
Parte (b)
Sea $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una λ-modificación tal que $\gamma = \rho\lambda_{\cdot}$.
Por lo visto en la demostración del Corolario 1.3.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\nu_{\Lambda,w}(C) &= \gamma_\Lambda\left(\sigma_\Lambda^{-1}(C)|w\right) \\
&= \int_{\sigma_\Lambda^{-1}(C)} \rho_\Lambda(w')\,\lambda_\Lambda(dw'|w) \\
&= \int \rho_\Lambda(w')\,1_C(\sigma_\Lambda(w'))\,\lambda_\Lambda(dw'|w) \\
&= \int \rho_\Lambda(w')\,1_C(\sigma_\Lambda(w'))\left(\lambda^\Lambda \times \delta_{w_{S\setminus\Lambda}}\right)(dw') \\
&= \int_{E^\Lambda} \rho_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) 1_C(\xi)\,\lambda^\Lambda(d\xi) \\
&= \int_{E^\Lambda} f_{\Lambda,w}(\xi)\,1_C(\xi)\,\lambda^\Lambda(d\xi) \\
&= \int_C f_{\Lambda,w}(\xi)\,\lambda^\Lambda(d\xi)
\end{aligned}$$

Que $f_{\Lambda,w}$ es $\mathscr{E}^\Lambda$-medible es inmediato (Teorema A.8.1)

■

Proposición 1.3.8 *Supongamos que: E es a lo sumo numerable, $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E), \lambda : \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ la medida de conteo, y γ una λ-especificación.*

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea $\rho_\Lambda : E^S \to [0, +\infty)$ definida por:

$$\rho_\Lambda(w) = \gamma_\Lambda\left(\sigma_\Lambda^{-1}(\{w_\Lambda\})|w\right).$$

Entonces:

(a) *$\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-modificación tal que $\gamma = \rho\lambda$.*

(b) *Sea $\rho^* = (\rho^*_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ otra λ-modificación tal que $\gamma = \rho^*\lambda$., entonces: $\rho^*_\Lambda = \rho_\Lambda$, $\forall\Lambda \in \mathscr{S}$.*

Demostración:
Parte (a) Queda como ejercicio.
Parte (b)
Usando la notación de la Proposición anterior se tiene que una densidad de $\nu_{\Lambda,w}$ con respecto a λ^Λ está dada por:

$$\nu_{\Lambda,w}(\{\xi\}) = \gamma_\Lambda\left(\sigma_\Lambda^{-1}\{\xi\}|w\right)$$

de donde:

$$\nu_{\Lambda,w}(\{\xi\}) = \rho_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)$$

Luego, si $\rho^* = (\rho^*_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-modificación tal que $\gamma = \rho^*\lambda$. se tiene que:

$$\begin{aligned}
\rho^*_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) &= \lambda^\Lambda(\{\xi\})\,\rho^*_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) \\
&= \int_{\{\xi\}} \rho^*_\Lambda\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\zeta) \\
&= \gamma_\Lambda\left(\sigma_\Lambda^{-1}\{\xi\}|w\right) \\
&= \nu_{\Lambda,w}(\{\xi\}) \\
&= \rho_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)
\end{aligned}$$

■

Lema 1.3.2 *Sean: $(X, \mathscr{X})$ un espacio medible; $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ una σ-álgebra de $X; \pi : \mathscr{X} \times X \to [0, +\infty]$ un núcleo de medida de $(X, \mathscr{Y})$ a $(X, \mathscr{X})$; $f : X \to [0, +\infty); g : X \to [0, +\infty)$ $\mathscr{X}$-medible. Entonces:*

$$\pi(fg)(y) = (f\pi)(g)(y) = (g\pi)(f)(y)\,\forall y \in X.$$

Demostración: Ejercicio.

Lema 1.3.3 *Sean:* $(X,\mathscr{X})$ *un espacio medible,* $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ *una* σ*-álgebra de* $X;\pi:\mathscr{X}\times X\to[0,+\infty]$ *un núcleo de medida de* $(X,\mathscr{Y})$ *a* $(X,\mathscr{X})$ *que es* $\mathscr{Y}$*-propio,* $f:X\to[0,+\infty)$ $\mathscr{X}$*-medible,* $g:X\to[0,+\infty)$ $\mathscr{Y}$*-medible. Entonces:*

$$\pi(fg)=\pi(f)\,g$$

Demostración:
$\pi(fg)(y)=\int f(x)\,g(x)\,\pi(dx|y)$
Sea $g=1_B$ con $B\in\mathscr{Y}$.
Sea $f=1_A$ con $A\in\mathscr{X}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}\pi(1_A1_B)(y) &= \int 1_A(x)\,1_B(x)\,\pi(dx|y)\\ &= \pi(A\cap B|y)\\ &= \pi(A|y)\,1_B(y)\\ &= \int 1_A(x)\,\pi(dx|y)\,1_B(y)\,.\end{aligned}$$

Luego, para toda $f:X\to[0,+\infty]$ medible:

$$\pi(f1_B)(y)=\int f(x)\,\pi(dx|y)\,1_B(y)=\pi(f)(y)\,1_B(y)\,.$$

De aquí se deduce el lema.

■

Proposición 1.3.9 *Sean:* $\lambda\in\mathscr{M}(E,\mathscr{E})$*; para cada* $\Lambda\in\mathscr{S}$*,* $\rho_\Lambda:E^S\to[0,+\infty)$ *medible tal que* $\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)\equiv1$*. Sea* $\rho=(\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$*. Son equivalentes:*

(a) ρ *es una* λ*-modificación.*

(b) *Sean* $\emptyset\neq\Lambda\subset\Delta\in\mathscr{S}$*. Para cada* $\alpha\in E^S$ *se cumple:*

$$\int_{E^S}\left|\rho_\Delta(w)-\rho_\Lambda(w)\cdot\lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w)\right|\lambda_\Delta(dw|\alpha)=0$$

(c) *Sean* $\emptyset\neq\Lambda\subset\Delta\in\mathscr{S}$*. Para cada* $\alpha\in E^S$ *se cumple:*

$$\int_{E^S}\left[\int_{E^S}\int_{E^S}\left|\rho_\Delta(\xi)\,\rho_\Lambda(\eta)-\rho_\Delta(\eta)\,\rho_\Lambda(\xi)\right|\lambda_\Lambda(d\xi|w)\,\lambda_\Lambda(d\eta|w)\right]\lambda_{\Delta\setminus\Lambda}(dw|\alpha)=0$$

Demostración:

Sea $\gamma = \rho\lambda$. ($\gamma_\Lambda = \rho_\Lambda \lambda_\Lambda \forall \Lambda \in \mathscr{S}$). Es inmediato que (a)⇔(b) si probamos que:

Afirmación 1.3.1 *Sean $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$. Entonces:*

$$\gamma_\Delta \gamma_\Lambda = \gamma_\Delta \Leftrightarrow \int \left|\rho_\Delta (w) - \rho_\Lambda (w) \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta) (w)\right| \lambda_\Delta (dw|\alpha) = 0, \forall \alpha \in E^S.$$

Demostración:

Sea $\alpha \in E^S$.
$0 = \int \left|\rho_\Delta (w) - \rho_\Lambda (w) \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta) (w)\right| \lambda_\Delta (dw|\alpha) \Leftrightarrow$
$\rho_\Delta = \rho_\Lambda \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)\ \ \lambda_\Delta (\cdot|\alpha)$ c.s. $\Leftrightarrow$
Para todo $A \in \mathscr{F}$:

$$\int_A \rho_\Delta (w) \lambda_\Delta (dw|\alpha) = \int_A \rho_\Lambda (w) \lambda_\Lambda (\rho_\Delta) (w) \lambda_\Delta (dw|\alpha)$$

Equivalentemente:

$$\gamma_\Delta (A|\alpha) = \lambda_\Delta (1_A \cdot \rho_\Lambda \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)) (\alpha) = (\rho_\Lambda \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)) (\alpha) \lambda_\Delta (A|\alpha)$$

De donde, para probar la Afirmación 1.3.1, bastará ver que:

$$\gamma_\Delta (\gamma_\Lambda (f)) (\alpha) = \lambda_\Delta (f \cdot \rho_\Lambda \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)) (\alpha) \forall \alpha \in E^S \tag{1.10}$$

cualquiera sea $f : E^S \to [0, +\infty)$ $\mathscr{F}$-medible.

Nota 1.3.2 *Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$ cualquiera, $g : E^S \to [0, +\infty)$ y $h : E^S \to [0, +\infty)$ $\mathscr{F}$-medibles. Por el Lema 1.3.3: $\lambda_\Lambda (g \cdot \lambda_\Lambda (h)) (w) = \lambda_\Lambda (g) (w) \cdot \lambda_\Lambda (h) (w) = \lambda_\Lambda (h \cdot \lambda_\Lambda (g)) (w) \forall w$.*

Por la Nota 1.3.2, tomando $g = f \cdot \rho_\Lambda$ y $h = \rho_\Delta$ tenemos: $\forall w \in E^S$

$$\lambda_\Lambda (f \cdot \rho_\Lambda \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)) (w) = \lambda_\Lambda (\rho_\Delta \cdot \gamma_\Lambda (f)) (w) \tag{1.11}$$

Ahora:

$$\lambda_\Delta = \lambda_{\Delta\setminus\Lambda} \lambda_\Lambda$$

Luego, por la ecuación 1.11: $\forall \alpha \in E^S$ tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta (f \cdot \rho_\Lambda \cdot \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)) (\alpha) &= \lambda_{\Delta\setminus\Lambda} (\lambda_\Lambda (\rho_\Delta \cdot \gamma_\Lambda (f))) (\alpha) \\ &= \lambda_{\Delta\setminus\Lambda} \lambda_\Lambda (\rho_\Delta \cdot \gamma_\Lambda (f)) (\alpha) \\ &= \lambda_\Delta (\rho_\Delta \cdot \gamma_\Lambda (f)) (\alpha) \\ &= \gamma_\Delta (\gamma_\Lambda (f) |\alpha) \end{aligned}$$

la ecuación 1.10 está probada.

■

Antes de probar que **(b)⇔(c)** probaremos:

Afirmación 1.3.2 *Sean* $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$*. Para cada* $w \in E^S$*:*

$$\int \left|\rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)\left(w'\right)-\rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)(w)\right|\lambda_\Lambda\left(dw'|w\right)=0$$

Demostración:

Sea $A \in \mathscr{F}$ cualquiera.

Teniendo en cuenta que $\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)$es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible y que $\lambda_\Lambda$es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio tenemos:

$\int_A \rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(dw'|w\right)=\int_A \rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)(w)\lambda_\Lambda\left(dw'|w\right)$

■

Veamos que **(b)⇒(c)**

Como $\lambda_\Delta=\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}\lambda_\Lambda$ (según la Proposición 1.3.2), se tiene que, para cualquier $f: E^S \rightarrow [0,+\infty)$, $\mathscr{F}$-medible, vale:

$$\int f(w)\lambda_\Delta(dw|\alpha)=\int \lambda_\Lambda(f)(w)\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}(dw|\alpha)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
0 &= \int \left|\rho_\Delta(w)-\rho_\Lambda(w)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)(w)\right|\lambda_\Delta(dw|\alpha)\\
&= \int\left[\int \left|\rho_\Delta\left(w'\right)-\rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)\left(w'\right)\right|\lambda_\Lambda\left(dw'|w\right)\right]\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}(dw|\alpha)\\
&= \int\left[\int \left|\rho_\Delta\left(w'\right)-\rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)(w)\right|\lambda_\Lambda\left(dw'|w\right)\right]\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}(dw|\alpha) \quad \text{[Afirm. 1.3.2]}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}\left(A^c|\alpha\right)=0 \tag{1.12}$$

donde

$$A=\left\{w/\int \left|\rho_\Delta\left(w'\right)-\rho_\Lambda\left(w'\right)\lambda_\Lambda\left(\rho_\Delta\right)(w)\right|\lambda_\Lambda\left(dw'|w\right)=0\right\}$$

De allí tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int\left[\int\int \left|\rho_\Delta(\zeta)\rho_\Lambda(\eta)-\rho_\Delta(\eta)\rho_\Lambda(\zeta)\right|\lambda_\Lambda(d\zeta|w)\lambda_\Lambda(d\eta|w)\right]\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}(dw|\alpha)\\
=&\int_A\left[\int\int \left|\rho_\Delta(\zeta)\rho_\Lambda(\eta)-\rho_\Delta(\eta)\rho_\Lambda(\zeta)\right|\lambda_\Lambda(d\zeta|w)\lambda_\Lambda(d\eta|w)\right]\lambda_{\Delta\backslash\Lambda}(dw|\alpha)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Sea $w \in A$. Por la ecuación 1.12 tenemos que:

$$\rho_\Delta = \rho_\Lambda \lambda_\Lambda (\rho_\Delta)(w) \ \ \lambda_\Lambda (\cdot|w) \, \text{c. s.}$$

Luego:

$$\int \int |\rho_\Delta(\zeta)\rho_\Lambda(\eta) - \rho_\Delta(\eta)\rho_\Lambda(\zeta)| \lambda_\Lambda(d\zeta|w)\lambda_\Lambda(d\eta|w)$$

$$= \int_B \int_B |\rho_\Delta(\zeta)\rho_\Lambda(\eta) - \rho_\Delta(\eta)\rho_\Lambda(\zeta)| \lambda_\Lambda(d\zeta|w)\lambda_\Lambda(d\eta|w) \tag{1.14}$$

donde $B = \left\{\xi \in E^S / \rho_\Delta(\xi) = \rho_\Lambda(\xi)\lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w)\right\}$
Ahora, sea $(\zeta, \eta) \in B \times B$, entonces:

$$\rho_\Delta(\zeta)\rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\zeta)\lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w)\rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Lambda(\zeta)\rho_\Delta(\eta)$$

de donde la ecuación 1.14$= 0$ y por ello la ecuación 1.13$= 0$
Veamos que **(c)$\Rightarrow$(b)**
Por (c) tenemos que

$$\lambda_{\Delta\setminus\Lambda}(A_1^c|\alpha) = 0$$

donde:

$$A_1 = \left\{w / \int\int |\rho_\Delta(\zeta)\rho_\Lambda(\eta) - \rho_\Delta(\eta)\rho_\Lambda(\zeta)| \lambda_\Lambda(d\zeta|w)\lambda_\Lambda(d\eta|w) = 0\right\}$$

por esto y por la Afirmación 1.3.2 tenemos:

$$\int |\rho_\Delta(w) - \rho_\Lambda(w)\lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w)| \lambda_\Delta(dw|\alpha)$$

$$= \int_{A_1}\left[\int |\rho_\Delta(w') - \rho_\Lambda(w')\lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w)| \lambda_\Delta(dw'|\alpha)\right] \lambda_{\Delta\setminus\Lambda}(dw|\alpha)$$

Bastará, entonces probar que si $w \in A_1$, entonces

$$\rho_\Delta = \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w) \ \ \lambda_\Lambda(\cdot|w) \, \text{c.s.} \tag{1.15}$$

Sean

$$F : E^S \times E^S \to [0, +\infty) \quad , \quad G : E^S \times E^S \to [0, +\infty)$$
$$F_1 : E^S \to [0, +\infty) \quad , \quad G_1 : E^S \to [0, +\infty)$$

definidas por:

$$F(\zeta,\eta) = \rho_\Delta(\zeta)\,\rho_\Lambda(\eta) \quad , \quad G(\zeta,\eta) = \rho_\Delta(\eta)\,\rho_\Lambda(\zeta)$$
$$F_1(\zeta) = \int F(\zeta,\eta)\,\lambda_\Lambda(d\eta|w) \quad , \quad G_1(\zeta) = \int G(\zeta,\eta)\,\lambda_\Lambda(\eta|w)$$

Como $w \in A_1$, tenemos

$$F(\cdot,\cdot) = G(\cdot,\cdot) \;\; \lambda_\Lambda(\cdot|w) \otimes \lambda_\Lambda(\cdot|w)\,\text{c.s.}$$

Luego:

$$F_1(\cdot) = G_1(\cdot) \;\; \lambda_\Lambda(\cdot|w)\,\text{c.s.} \tag{1.16}$$

Ahora, teniendo en cuenta que: $\lambda_\Lambda\rho_\Lambda(w) = 1$, obtenemos:

$$F_1(\zeta) = \int \rho_\Delta(\zeta)\,\rho_\Lambda(\eta)\,\lambda_\Lambda(d\eta|w) = \rho_\Delta(\zeta)\cdot\lambda_\Lambda\rho_\Lambda(w) = \rho_\Delta(\zeta)$$

y

$$\begin{aligned} G_1(\zeta) = \int \rho_\Delta(\eta)\,\rho_\Lambda(\zeta)\,\lambda_\Lambda(d\eta|w) & \\ &= \rho_\Lambda(\zeta)\int \rho_\Delta(\eta)\,\lambda_\Lambda(d\eta|w) \\ &= \rho_\Lambda(\zeta)\,\lambda_\Lambda(\rho_\Delta)(w) \end{aligned}$$

Y así, por la ecuación 1.16, la ecuación 1.15 queda demostrada.

■

Nota 1.3.3 *Observar que (b) y (c) de la Proposición 1.3.9 pueden escribirse respectivamente como (b'), (c') donde:*

(b') *Sean $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$. Para cada $\alpha \in E^S$ se cumple:*

$$\int_{E^\Delta} \left|\rho_\Delta(\xi\alpha_{\Delta^c}) - \rho_\Lambda(\xi\alpha_{\Delta^c})\cdot(\lambda_\Lambda\rho_\Delta)(\xi\alpha_{\Delta^c})\right|\lambda^\Delta(d\xi) = 0$$

(c') *Sean $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$. Para cada $\alpha \in E^S$:*

$$\int_{E^{\Delta\setminus\Lambda}}\int_{E^\Lambda}\int_{E^\Lambda} \left|\rho_\Delta(\xi_1\xi_3\alpha_{\Delta^c})\,\rho_\Lambda(\xi_2\xi_3\alpha_{\Delta^c}) - \rho_\Delta(\xi_2\xi_3\alpha_{\Delta^c})\,\rho_\Lambda(\xi_1\xi_3\alpha_{\Delta^c})\right|$$
$$\lambda^\Lambda(d\xi_1)\,\lambda^\Lambda(d\xi_2)\,\lambda^{\Delta\setminus\Lambda}(d\xi_3) = 0$$

Notación 1.3.3 *Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$. Ponemos:*

$$T(\Lambda^c) = \left\{(\xi,\eta) \in E^S \times E^S / \sigma_{S\setminus\Lambda}(\xi) = \sigma_{S\setminus\Lambda}(\eta)\right\}$$

Definición 1.3.3 *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $h_\Lambda : E^S \to [0,+\infty)$ medible. Se dice que $h = (h_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una **pre-modificación** si se cumple:*

$$\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S} \Rightarrow h_\Delta(\xi)\, h_\Lambda(\eta) = h_\Delta(\eta)\, h_\Lambda(\xi)\, \forall (\xi,\eta) \in T(\Lambda^c).$$

Proposición 1.3.10 *Sea E a lo sumo numerable, $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$, $\lambda : \mathscr{E} \to [0,+\infty]$ la medida "cardinal de"(esto es, $\lambda(E_1) = \#(E_1), \forall E_1 \subset E$).*

Si $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-modificación, entonces ρ es una pre-modificación.

Demostración: (Ejercicio).

Proposición 1.3.11 *La Proposición 1.3.10 se extiende a la siguiente situación:*

(i) *E es un espacio topológico que satisface 2° axioma de numerabilidad y $\mathscr{E}$ es su σ-álgebra de Borel.*

(ii) *$\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$ es densa en todas partes , es decir: $U \subset E$ abierto no vacio $\Rightarrow \lambda(U) > 0$.*

(iii) *Se cumple: $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$ y $w \in E^S \Rightarrow \xi \mapsto \rho_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)$ es continua sobre E^Δ.*

Demostración: (Ejercicio).

Proposición 1.3.12 *Sea $h = (h_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una pre-modificación, $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$ tal que $0 < \lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w) < \infty$, $\forall w \in E^S$, $\Lambda \in \mathscr{S}$.*

Entonces, $\rho = \left(\frac{h_\Lambda}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)}\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-modificación.

Demostración:
Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, pongamos $\rho_\Lambda = \frac{h_\Lambda}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)}$.

Afirmación 1.3.3 *Para cada $w \in E^S, A \mapsto \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(A|w)$ es una probabilidad sobre $\mathscr{E}^S$.*

Demostración:
Como λ_Λ es $\mathscr{T}_\Lambda$-propia y $\lambda_\Lambda(h_\Lambda)$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible, tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho_\Lambda\lambda_\Lambda(A|w) &= \int 1_A(w')\,\rho_\Lambda(w')\,\lambda_\Lambda(dw'|w)\\
&= \int 1_A(w')\,\tfrac{h_\Lambda(w')}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w')}\lambda_\Lambda(dw'|w)\\
&= \tfrac{1}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w)}\int 1_A(w')\,h_\Lambda(w')\,\lambda_\Lambda(dw'|w)\\
&= \tfrac{1}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w)}h_\Lambda\lambda_\Lambda(A|w)
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\rho_\Lambda\lambda_\Lambda\left(E^S|w\right) &= \frac{1}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w)}h_\Lambda(\lambda_\Lambda)\left(E^S|w\right)\\
&= \frac{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w)}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(w)} = 1\ \forall w.
\end{aligned}$$

■

Afirmación 1.3.4 *ρ es una pre-modificación.*

Demostración:
Sea $(\xi',\eta')\in T(\Lambda^c)$ con $\Lambda\in\mathscr{S}$ cualquiera y sea $\emptyset\neq\Lambda\subset\Delta\in\mathscr{S}$
Pongamos $\xi=\xi'_\Lambda,\eta=\eta'_\Lambda$ y $\zeta=\xi'_{S\setminus\Lambda}=\eta'_{S\setminus\Lambda}$
Por la Nota 1.3.3 tenemos:

$$\lambda_\Delta(h_\Delta)(\xi\zeta)=\lambda_\Delta(h_\Delta)(\eta\zeta)$$
$$\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(\eta\zeta)=\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(\xi\zeta)$$

Luego, como h es una pre-modificación tenemos:

$$\begin{aligned}
\rho_\Delta(\xi\zeta)\,\rho_\Lambda(\eta\zeta) &= \frac{h_\Delta(\xi\zeta)\,h_\Lambda(\eta\zeta)}{\lambda_\Delta(h_\Delta(\xi\zeta)\cdot\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(\eta\zeta))}\\
&= \frac{h_\Delta(\eta\zeta)\,h_\Lambda(\xi\zeta)}{\lambda_\Delta(h_\Delta(\eta\zeta)\cdot\lambda_\Lambda(h_\Lambda)(\xi\zeta))}\\
&= \rho_\Delta(\eta\zeta)\cdot\rho_\Lambda(\xi\zeta)
\end{aligned}$$

■

Sea ahora:

$$\Omega^2(\Lambda,\Delta)=\left\{(\xi,\eta)\in E^S\times E^S/\rho_\Delta(\xi)\,\rho_\Lambda(\eta)\neq\rho_\Delta(\eta)\,\rho_\Lambda(\xi)\right\}$$

Por la Nota 1.3.3 tenemos que para todo $w\in E^S$:
$(\lambda_\Lambda(\cdot|w)\,\lambda_\Lambda(\cdot|w))\left(E^S\times E^S\right)=$

$$(\lambda_\Lambda(\cdot|w)\,\lambda_\Lambda(\cdot|w))\left(\left\{(\xi,\eta)\in E^S\times E^S/\xi_{S\setminus\Lambda}=\eta_{S\setminus\Lambda}=w_{S\setminus\Lambda}\right\}\right)$$

Como ρ es una pre-modificación:

$$\Omega^2(\Lambda,\Delta)\cap\left\{(\xi,\eta)\in E^S\times E^S/\xi_{S\setminus\Lambda}=\eta_{S\setminus\Lambda}=w_{S\setminus\Lambda}\right\}=\emptyset$$

De donde:

$$(\lambda_\Lambda(\cdot|w)\,\lambda_\Lambda(\cdot|w))\left(\Omega^2(\Lambda,\Delta)\right)=0$$

De aquí que se cumple (c) de la Proposición 1.3.9 y por esta misma Proposición tenemos que ρ es una λ-modificación.

■

Capítulo 2

Especificaciones de Gibbs

2.1. Potenciales

Notación 2.1.1 *Sean:* $S \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *(* *o* $S \subset \mathbb{Z}$*) infinito;* $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$, $\mathscr{S}_0$ *infinito, donde* $\mathscr{S} = \{\Lambda \subset S / 1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}$

Para cada $\Delta \in \mathscr{S}$, $V \subset S$ $s \in S$ *se denota:*

- $\mathscr{S}_0(\Delta) = \{\Lambda \in \mathscr{S}_0 / \Lambda \subset \Delta\}$
- $\mathscr{S} \cap \Delta = \{\Lambda \in \mathscr{S} / \Lambda \cap \Delta \neq \emptyset\}$.
- $\mathscr{S} \cap s = \mathscr{S} \cap \{s\}$
- $V + s = \{t + s / t \in V\}$
- $S \setminus s = S \setminus \{s\}$

Definición 2.1.1 *Sea* $\alpha : \mathscr{S}_0 \to \mathbb{R}$. *Diremos que* $\sum_{\Lambda \in \mathscr{S}_0} \alpha(\Lambda)$ *existe y es igual a "a"*$\in \mathbb{R}$ *si*

Dado $\epsilon > 0, \exists \Delta_0 \in \mathscr{S}$ *tal que*

$$\Delta_0 \subset \Delta, \Delta \in \mathscr{S} \Rightarrow \left| a - \sum_{\Lambda \in \mathscr{S}_0(\Delta)} \alpha(\Lambda) \right| < \epsilon$$

Pongamos $\left(\sum \alpha\right)(\Delta) = \sum_{\Lambda \in \mathscr{S}_0(\Delta)} \alpha(\Lambda)$.

Ejemplo 2.1.1 *Sea* $S = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ $.\mathscr{S}_0 = \{\{n\} / n \in \mathbb{N}\}$. *Sean* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números reales positivos;* $\alpha : \mathscr{S}_0 \to \mathbb{R}$ *dada por* $\alpha(\{n\}) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\left(\sum \alpha\right)(\Delta) = \sum_{n \in \Delta} a_n$$

Luego $\left(\left(\sum \alpha\right)(\Delta)\right)_{\Delta \in \mathscr{S}}$ *converge si y sólo si converge* $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\geq 1}$

Definición 2.1.2 *Sea* $(E, \mathscr{E})$ *un espacio medible. Sea* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una familia de funciones medibles* $\Phi_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$.

Se dice que Φ *es un potencial (sobre* $\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$*) si:*

(a) *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}, \Phi_\Lambda$ *es* $\mathscr{F}_\Lambda$*-medible.*

(b) *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *y* $x \in E^S$*, existe*

$$H_\Lambda^\Phi(x) := \sum_{\Delta \in \mathscr{S} \cap \Lambda} \Phi_\Delta(x).$$

Proposición 2.1.1 $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *un potencial sobre* $(E, \mathscr{E})^S$*. Sea para cada* $\Lambda \in$ *y para cada* $x \in E^S$*:*

$$h_\Lambda^\Phi(x) := \exp\left(-H_\Lambda^\Phi(x)\right).$$

Entonces $\left(h_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es una pre-modificación (positiva).*

Demostración:

Sean $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$.

Sea $(\xi, \eta) \in T(\Lambda^c)$, entonces:

$$\begin{aligned} h_\Delta^\Phi(\xi)\, h_\Lambda^\Phi(\eta) &= \exp\left(-H_\Delta^\Phi(\xi) - H_\Lambda^\Phi(\eta)\right) \text{ y} \\ h_\Delta^\Phi(\eta)\, h_\Lambda^\Phi(\xi) &= \exp\left(-H_\Delta^\Phi(\eta) - H_\Lambda^\Phi(\xi)\right) \end{aligned}$$

Debemos ver entonces que:

$$H_\Delta^\Phi(\xi) + H_\Lambda^\Phi(\eta) = H_\Delta^\Phi(\eta) + H_\Lambda^\Phi(\xi) \;\; \forall (\xi, \eta) \in T(\Lambda^c)$$

equivalentemente

$$H_\Delta^\Phi(\xi) - H_\Lambda^\Phi(\xi) = H_\Delta^\Phi(\eta) - H_\Lambda^\Phi(\eta) \;\; \forall (\xi, \eta) \in T(\Lambda^c) \tag{2.1}$$

Ahora bien, para todo $x \in E^S$ tenemos que:

$$H_\Delta^\Phi(x) - H_\Lambda^\Phi(x) = \sum_{\Delta' \in \mathscr{A}} \Phi_{\Delta'}(x) \tag{2.2}$$

donde

$$\mathscr{A} = \{\Delta' \in \mathscr{S} / \Delta' \cap \Delta \neq \emptyset \text{ y } \Delta' \cap \Lambda = \emptyset\} \text{ pues } \mathscr{S} \cap \Lambda \subset \mathscr{S} \cap \Delta$$

Como para cada $\Delta' \in \mathscr{S}, \Phi_{\Delta'}$ es $\mathscr{F}_\Delta$- medible, $\exists \phi_{\Delta'} : E^{\Delta'} \to \mathbb{R}$ medible tal que

$$\Phi_{\Delta'}(x) = \phi_{\Delta'}(\sigma_{\Delta'}(x)) \tag{2.3}$$

Sea ahora $(\xi,\eta) \in T(\Lambda^c) \Rightarrow \sigma_{\Delta'}(\xi) = \sigma_{\Delta'}(\eta)$ pues $\Delta' \subset \Lambda^c$, luego por la ecuación 2.3:

$$\Phi_{\Delta'}(\xi) = \Phi_{\Delta'}(\eta).$$

De aquí, por la ecuación 2.2 tenemos

$$H_\Delta^\Phi(\xi) - H_\Lambda^\Phi(\xi) = H_\Delta^\Phi(\eta) - H_\Lambda^\Phi(\eta)$$

y la ecuación 2.1 está probada.

■

Definición 2.1.3 *Sea* $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial sobre* $(E,\mathscr{E})^S$. *Se dice que* Φ *es* λ*-admisible si para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *y cada* $x \in E^S$ *se cumple que*

$$0 < \left(\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)\right)(x) = \int_{E^S} h_\Lambda^\Phi(w)\,\lambda_\Lambda(dw|x) = \int_{E^S} h_\Lambda^\Phi\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\xi) < \infty.$$

Corolario 2.1.1 *Sea* $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial sobre* $(E,\mathscr{E})^S$ *que es* λ*-admisible. Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *sea*

$$\rho_\Lambda^\Phi(x) := \frac{h_\Lambda^\Phi(x)}{\left(\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)\right)(x)}$$

Entonces $\rho^\Phi = \left(\rho_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *es una* λ*-modificación (esto es,* $\left(\rho_\Lambda^\Phi\lambda_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *es una especificación) Para abreviar (y por razones "históricas") pondremos:*

$$\gamma_\Lambda^\Phi = \rho_\Lambda^\Phi\lambda_\Lambda \forall\Lambda \in \mathscr{S} \text{ y } Z_\Lambda^\Phi(x) = \left(\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)\right)(x)\,\forall\Lambda \in \mathscr{S}, \forall x \in E^S$$

Demostración:

Por la Proposición 2.1.1,

$\rho^\Phi = \left(\rho_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una pre-modificación positiva. El resultado sigue entonces por la Proposición 1.3.12

■

A Z_Λ^Φ se la suele llamar "función de partición de Φ sobre Λ". A $\gamma^\Phi = \left(\gamma_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ se la llama "especificación de Gibbs para Φ".

Definición 2.1.4 *Si* $\mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)$, *se dice que* μ *es una* ***medida de Gibbs para*** Φ. *También:* $A \mapsto \gamma_\Lambda^\Phi(A|x)$ *se llama* ***distribución de Gibbs sobre*** Λ ***con respecto al potencial*** Φ***, dado*** $x \in E^S$. *Si* $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)\right) \geq 2$, *se dice que* Φ ***tiene transición de fase****.*

De ahora en adelante, sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial sobre $\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$, y λ una medida sobre $(E, \mathscr{E})$.

Definición 2.1.5 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial*

(a) *Se dice que Φ es acotado si $\Phi_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right) \forall\Lambda \in \mathscr{S}$.*

(b) *Se dice que Φ es sumable si es acotado y para todo $s \in S$ se cumple:*

$$\|\Phi\|_s := \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s} \|\Phi_\Lambda\|_\infty < \infty$$

Proposición 2.1.2 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial sumable; $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$. Entonces: Φ es λ-admisible $\Leftrightarrow \lambda(E) < \infty$.*

Demostración:
$(\Leftarrow)$
Debemos probar que si $\Lambda \in \mathscr{S}$ entonces:

$$\int_{E^\Lambda} \exp\left(-\sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_\Delta\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\lambda^\Lambda(d\xi) < \infty \tag{2.4}$$

Es fácil ver que:

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_\Delta\left(\xi_\Lambda x_{S\setminus\Lambda}\right)\right) &\le \exp\left(\left|\sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_\Delta\left(\xi_\Lambda x_{S\setminus\Lambda}\right)\right|\right) \\
&\le \exp\left(\sum_{s\in\Lambda} \|\Phi\|_s\right)
\end{aligned}$$

Luego: la ecuación 2.4

$$\begin{aligned}
&\le \int_{E^\Lambda} \exp\left(\sum_{s\in\Lambda} \|\Phi\|_s\right)\lambda^\Lambda(d\xi_\Lambda) \\
&= \exp\left(\sum_{s\in\Lambda} \|\Phi\|_s\right)(\lambda(E)) < \infty
\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$
Sean $s \in S$ y $x \in E^S$ cualquiera.
Luego:

$$\infty > \int_E \exp\left(-\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s} \Phi_\Lambda\left(\xi_s x_{S\setminus s}\right)\right)\lambda(d\xi_s) \ge \lambda(E)\exp\left(-\|\Phi\|_s\right),$$

pues:

$$-\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s}\Phi_\Lambda\left(\xi_s x_{S\setminus s}\right)\geq-\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s}\left|\Phi_\Lambda\left(\xi_s x_{S\setminus s}\right)\right|\geq-\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s}\|\Phi_\Lambda\|_\infty=-\|\Phi\|_s$$

■

Ejemplo 2.1.2 *Sea* $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial acotado. Sea* $\Lambda_0\in\mathscr{S}$ *tal que:*

$$(\Lambda\cap\Lambda_0^c\neq\emptyset)\Rightarrow\Phi_\Lambda\equiv0$$

Entonces Φ *es un potencial sumable.*

Ejemplo 2.1.3 *Sea* $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *con* $\Phi_\Lambda\in\mathscr{L}^\infty\left(E^S,\mathbb{R}\right)$. *Sea* d *la métrica euclídea sobre* S. *Para cada* $A\subset S$, *sea* $diam\,(A)$ *el diámetro de* A *con respecto a* d*; esto es:* $diam\,(A)=\sup\{d\,(a,a')\,/a,a'\in A\}$.

Sea $0<R<\infty$.

Si $\Phi_\Lambda\equiv0$ *cuando* $diam\,(\Lambda)>R$, *entonces* Φ *es sumable.*

Ejemplo 2.1.4 ***Potenciales de rango finito***. *Sea* $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial sobre* $(E,\mathscr{E})^S$. *Se dice que* Φ *es de rango finito si:*

para cada $s\in S,\exists\Lambda_s\in\mathscr{S}$ *tales que:* $A\in\mathscr{S},s\in A,A\cap\Lambda_s^c\neq\emptyset\Rightarrow\Phi_A\equiv0$

Proposición 2.1.3 *Sea* $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial acotado. Si* Φ *es de rango finito, entonces* Φ *es sumable.*

Demostración:

Por la Definición 2.1.5, bastará ver que para cada $s\in S$, se tiene que:

$$\#\left(\{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s/0<\|\Phi_\Lambda\|_\infty\}\right)<\infty \tag{2.5}$$

Sea $\Lambda\in\mathscr{S}\cap s$ tal que $\|\Phi_\Lambda\|_\infty>0\Rightarrow\Lambda\cap\Lambda_s^c=\emptyset\Rightarrow\Lambda\subset\Lambda_s$. Luego, $\{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s/0<\|\Phi_\Lambda\|_\infty\}\subset\{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s/\Lambda\subset\Lambda_s\}$. De aquí sigue la ecuación 2.5 fácilmente.

■

Ejemplo 2.1.5 ***Potenciales invariantes por traslaciones***. *Sea* $S=\mathbb{Z}^2$. *Para cada* $s\in S$ *sea* $\Theta_s:E^S\to E^S$ *dado por:* $\Theta_s\,(x)\,(t)=x\,(t-s)\,;x\in E^S,t\in S$. *Sea* $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial. Se dice que* Φ *es invariante por traslaciones si para todo* $\Lambda\in\mathscr{S}$*:*

$$\Phi_{\Lambda+s}\,(x)=\Phi_\Lambda\left(\Theta_{-s}\,(x)\right),s\in S,x\in E^S.$$

Sean:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_S &:= \{\Phi/\Phi \text{ es un potencial sumable}\} \\
\mathscr{P}_{SI} &:= \{\Phi \in \mathscr{P}_S/\Phi \text{ es invariante por traslaciones}\} \\
\mathscr{P}_{SI}^b &:= \{\Phi \in \mathscr{P}_{SI}/\Phi \text{ es de rango finito}\}
\end{aligned}$$

Proposición 2.1.4 *Sea* $\|\cdot\|_0 : \mathscr{P}_{SI} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\|\Phi\|_0 = \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap 0} \|\Phi_\Lambda\|_\infty \text{ si } \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$$

Entonces:

(a) $\|\cdot\|_0$ *es una norma sobre* $\mathscr{P}_{SI}$.

(b) $\mathscr{P}_{SI}^b$ *es denso en* $\mathscr{P}_{SI}$ *con respecto a la norma* $\|\cdot\|_0$.

Demostración: Ejercicio.

Proposición 2.1.5 *Sea* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}} \in \mathscr{P}_S$. *Para cada* $s \in S$ *existe*

$$\sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap s} \frac{1}{\#(\Lambda)} \Phi_\Lambda =: \bar{\Phi}_s$$

llamada "energía media en el sitio s*".*

Demostración: Ejercicio.

Proposición 2.1.6 *Sea* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}} \in \mathscr{P}_{SI}$. *Entonces*

(a) $\bar{\Phi}_s(x) = \bar{\Phi}_0(\Theta_{-s}(x)) \, \forall x \in E^S, \forall s \in S$

(b) $H_\Lambda^\Phi(x) = \sum_{s \in \Lambda} \bar{\Phi}_s(x) + \epsilon_\Lambda^\Phi(x), \forall x \in E^S, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$

donde

$$\epsilon_\Lambda^\Phi(x) := \sum_{\Delta \in \mathscr{S} \cap \Lambda} \left(1 - \frac{\#(\Delta \cap \Lambda)}{\#(\Delta)}\right) \Phi_\Delta(x)$$

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo 2.1.6 *Se dice que un potencial* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *sobre* $(E^S, \mathscr{E}^S)$ *(ó* $(E, \mathscr{E})^S$*) es un "potencial sobre pares" si* $\Phi_\Lambda \equiv 0, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$ *tal que* $\#(\Lambda) > 2$. *Casos habituales de tales potenciales son los de la forma:*

$$\Phi_A(x) = \begin{cases} J(s,t)\,\phi(x(s), x(t)) & \text{si } A = \{s,t\}, s \neq t, \\ J(s,s)\,\psi(x(s)) & \text{si } A = \{s\}, \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde : $J : S \times S \to \mathbb{R}$ *y* $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ *son simétricas y* $\psi : E \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.7 ***Modelo de Potts antiferromagnético.*** *Sea $\mathscr{V}$ una familia de subconjuntos de S tal que:*

(i) $\#(V) = 2$, *para todo* $V \in \mathscr{V}$.

(ii) $S = \cup\mathscr{V}$.

(iii) $\#\left(V_s^{\mathscr{V}}\right) < \infty, \forall s \in S$, *donde* $V_s^{\mathscr{V}} := \{t \in S / \{s,t\} \in \mathscr{V}\}$.

Sean: $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ con $N \geq 2$ entero y λ la medida de conteo sobre $(E, \mathscr{P}(E))$. Sea $J > 0$. Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$,sea $\Phi_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi_\Lambda(x) = \begin{cases} J\delta(x(i), x(j)) & si\ \Lambda = \{i,j\} \in \mathscr{V} \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ a = b \\ 0 & si\ a \neq b \end{cases}$$

Entonces $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es un potencial sumable.

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo 2.1.8 ***Auto-potencial.*** *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\Phi_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ tal que:*

(a) $\Phi_\Lambda \equiv 0$ *si* $\#(\Lambda) > 1$.

(b) *Si $\Lambda = \{s\}$ con $s \in S$, entonces $\exists \phi_s : E \to \mathbb{R}$ medible tal que: $\Phi_\Lambda(x) = \phi_s(x(s)), \forall x \in E^S$. Entonces $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es un potencial. Si $\phi_s \in \mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$ para todo $s \in S$, entonces Φ es un potencial sumable.*

Demostración: Ejercicio.

A los potenciales como el recién definido se los llama **auto-potenciales**.

Definición 2.1.6 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial. Sea $Ap\Phi = (\Phi_\Lambda^{ap})_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ con $\Phi_\Lambda^{ap} : E^S \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\begin{array}{lll} \Phi_\Lambda^{ap} \equiv \Phi_\Lambda & si & \#(\Lambda) = 1 \\ \Phi_\Lambda^{ap} \equiv 0 & si & \#(\Lambda) \geq 2. \end{array}$$

Al auto-potencial $(\Phi_\Lambda^{ap})_{\Lambda \in \mathscr{S}} = Ap\Phi$ se lo llama parte auto-potencial de Φ.

2.2. Funciones y especificaciones quasi-locales

Continuamos con las notaciones de la Sección anterior.

Definición 2.2.1 *Se dice que $f : E^S \to \mathbb{R}$ es local si $\exists \Lambda \in \mathscr{S}$ tal que f es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible (equivalentemente, $\exists f_\Lambda : E^\Lambda \to \mathbb{R}$ medible tal que $f = f_\Lambda \circ \sigma_\Lambda$).*

Notación 2.2.1 *Sea $\mathscr{L} = \left\{ f \in \mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R} \right) / f \, es \; local \right\}$.*

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea $\mathscr{L}_\Lambda = \left\{ f \in \mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R} \right) / f \, es \; \mathscr{F}_\Lambda\text{-medible} \right\}$.

Luego, $\mathscr{L} = \cup_{\Lambda \in \mathscr{S}} \mathscr{L}_\Lambda$.

Definición 2.2.2 *Se dice que $f : E^S \to \mathbb{R}$ medible es quasi-local si existe una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones locales tales que:*

(a) $f - f_n \in \mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R} \right), \forall n \geq 1$ *y*

(b) $\| f - f_n \|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Luego, $f \in \mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R} \right)$ es quasi-local, si y sólo si, $f \in \bar{\mathscr{L}}$ (clausura de $\mathscr{L}$ en $\mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R} \right)$).

Recordemos la notación ya usada en el Capítulo 1:

Sea $\Lambda \subset S$ no vacío; entonces ponemos

$$T(\Lambda) = \left\{ (x, x') \in E^S \times E^S / x(t) = x'(t), \forall t \in \Lambda \right\}$$

Notemos que

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Rightarrow T(\Lambda_2) \subset T(\Lambda_1) \tag{2.6}$$

Para cada $f : E^S \to \mathbb{R}$ pongamos

$$O_\Lambda(f) = \sup \left\{ |f(x) - f(x')| \, / \, (x, x') \in T(\Lambda) \right\}.$$

$$O(f) = \inf_{\Lambda \in \mathscr{S}} O_\Lambda(f)$$

Por la ecuación 2.6 tenemos:

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \in \mathscr{S} \Rightarrow O_{\Lambda_2}(f) \leq O_{\Lambda_1}(f). \tag{2.7}$$

Proposición 2.2.1 *$f : E^S \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$-medible. f es quasi-local si y sólo si $O(f) = 0$.*

Demostración:

($\Rightarrow$)

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario $\Rightarrow \exists \Lambda \in \mathscr{S}$ tal que $\|f - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda\|_\infty < \epsilon/2$ para un cierto $\phi_\Lambda : E^\Lambda \to \mathbb{R}$ medible.

Sea $(x, x') \in T(\Lambda) \Rightarrow \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(x) = \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(x') \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq |f(x) - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(x)| + |f(x') - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(x')| < \epsilon$

Luego: $O_\Lambda(f) \leq \epsilon$.

Entonces: $O(f) = 0$ por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$.

($\Leftarrow$)

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Sea $\Lambda_1 \in \mathscr{S}$ tal que $O_{\Lambda_1}(f) < \epsilon$. Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$ tal que $\Lambda_1 \subset \Lambda$. Por la ecuación 2.7 tenemos que

$$O_\Lambda(f) < \epsilon \tag{2.8}$$

Sea $x \in E^S$. Sea $\phi_\Lambda : E^\Lambda \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_\Lambda(y) = f\left(y x_{S \setminus \Lambda}\right)$$

Luego, $\forall z \in E^S$ tenemos por la ecuación 2.8

$$|f(z) - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(z)| = \left|f\left(z_\Lambda z_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(z_\Lambda x_{S\setminus\Lambda}\right)\right| \leq O_\Lambda(f) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\|f - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda\|_\infty \leq \epsilon$ entonces f es quasi-local.

∎

Proposición 2.2.2 *Sea E un espacio métrico separable, d su métrica, E^S con la topología habitual (producto). Si $f : E^S \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces f es quasi-local.*

Demostración:

Sin perdida de generalidad, pongamos $S = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Se puede ver fácilmente que la topología producto es equivalente a la topología inducida por la métrica $\underline{d} : E^S \times E^S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\underline{d}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x(n), y(n))}{1 + d(x(n), y(n))}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$|\underline{d}(x, y)| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{2.9}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} < \delta$

Sea $z \in E^S$. Sea $\Lambda = \{1, \ldots, n_0\}$. Definimos $\phi : E^\Lambda \to \mathbb{R}$ por:

$$\phi(\xi) = f\left(\xi z_{S \setminus \Lambda}\right)$$

Como f es continua y E es separable, se tiene que f es medible. (En efecto, la σ-álgebra de Borel de E^S coincide con la producto por ser E métrico separable (Ver Teorema 1.7 pág. 4 en [Par67])); luego ϕ es $\mathscr{E}^\Lambda$-medible $\Rightarrow$ $f^* = \phi \circ \sigma_\Lambda$ es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible $\Rightarrow f^*$ es local.

Por último, para todo $x \in E^S$ tenemos:

$$|f(x) - f^*(x)| = \left|f(x) - f\left(x_\Lambda z_{S \setminus \Lambda}\right)\right| \tag{2.10}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \underline{d}\left(x, x_\Lambda z_{S \setminus \Lambda}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d\left(x(m), x_\Lambda z_{S \setminus \Lambda}(m)\right)}{1 + d\left(x(m), x_\Lambda z_{S \setminus \Lambda}(m)\right)} \\ &= \sum_{m=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d(x(x(m), z(m)))}{1 + d(x(x(m), z(m)))} \\ &\leq \sum_{m=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \delta. \end{aligned}$$

Luego, por la ecuación 2.9, tenemos la ecuación 2.10$< \epsilon$.

Esto es:

$$\|f - f^*\|_\infty < \epsilon$$

De aquí se deduce que f es quasi-local.

■

Proposición 2.2.3 *Si E es finito, entonces:*

$$f : E^S \to \mathbb{R} \text{ continua } \Leftrightarrow f \text{ es quasi-local}$$

Demostración: Consideremos a E como un e. m. con la métrica discreta

$(\Rightarrow)$

Como E es finito $\Rightarrow$ E es compacto $\Rightarrow$ E^S es compacto (Teorema de Tijonov).

Luego, f es continua $\Rightarrow f$ es uniformemente continua $\Rightarrow f$ es quasi-local, por la Proposición 2.2.2

$(\Leftarrow)$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $S = \{1, 2, \ldots\}$.

Sea $\epsilon > 0$. Como f es quasi-local (q. l.), $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \phi : E^\Lambda \to \mathbb{R}$ con $\Lambda = \{1, \ldots, n_0\}$ tal que

$$\|f - \phi \circ \sigma_\Lambda\|_\infty < \epsilon/2. \tag{2.11}$$

Ahora: cualesquiera sean x e y en E^S, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - (\phi \circ \sigma_\Lambda)(x)| \\ &+ |f(y) - (\phi \circ \sigma_\Lambda)(y)| \\ &+ |(\phi \circ \sigma_\Lambda)(x) - (\phi \circ \sigma_\Lambda)(y)| \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como E es finito, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\delta < \frac{d(x', y')}{1 + d(x', y')} 2^{-n_0} \ \forall x', y' \text{ en } E \text{ con } x' \neq y' \tag{2.13}$$

Sean ahora x e y en E^S, tales que

$$\underline{d}(x, y) < \delta$$

Afirmación 2.2.1 *$x(n) = y(n)$ para todo $1 \leq n \leq n_0$.*

Supongamos que no. Entonces $\exists j$, con $1 \leq j \leq n_0$, tal que $x(j) \neq y(j) \Rightarrow$ por la ecuación 2.13 y por la definición de $\underline{d}$, tenemos:

$$\underline{d}(x, y) \geq 2^{-j} \frac{d(x(j), y(j))}{1 + d(x(j), y(j))} \geq 2^{-n_0} \frac{d(x(j), y(j))}{1 + d(x(j), y(j))} > \delta$$

por la ecuación 2.13, lo que contradice a $\underline{d}(x, y) < \delta$.

Por la Afirmación 2.2.1, tenemos entonces que

$$\sigma_\Lambda(x) = \sigma_\Lambda(y) \Rightarrow |(\phi \circ \sigma_\Lambda)(x) - (\phi \circ \sigma_\Lambda)(y)| = 0.$$

Luego, por las ecuaciones 2.11 y 2.12 tenemos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Luego, f es continua ($\Rightarrow f$ es uniformemente continua).

■

Definición 2.2.3 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación sobre $(E, \mathscr{E})^S$. Se dice que γ es quasi-local (q. l.) si $\Lambda \in \mathscr{S}$, $f \in \bar{\mathscr{L}} \Rightarrow \gamma_\Lambda(f) \in \bar{\mathscr{L}}$*

Proposición 2.2.4 *$\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es quasi-local si y sólo si $\Lambda \in \mathscr{S}, f \in \mathscr{L} \Rightarrow \gamma_\Lambda(f) \in \bar{\mathscr{L}}$.*

Demostración: Ejercicio.

Lema 2.2.1 *Sea* $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$. *Entonces:*

(a) $f \in \mathscr{L} \Rightarrow \lambda_\Lambda(f)$ *es local (si existe),* $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

(b) f *local y no negativa* $\Rightarrow \lambda_\Lambda(f)$ *local* $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

(c) $\lambda(E) < \infty$ *y* $f \in \mathscr{L} \Rightarrow \lambda_\Lambda(f) \in \mathscr{L}$.

Proposición 2.2.5 *Sea* $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$.

(a) *Sea* $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *con* $\rho_\Lambda : E^S \to [0, +\infty)$ *medible, una* λ*- modificación.*

(a.1) ρ_Λ *local,* $\forall \Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \rho\lambda_.$ *es una especificación q.l. .*
Más aún: $f \in \mathscr{L} \Rightarrow \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(f) \in \mathscr{L}$.

(a.2) ρ_Λ *q. l.* $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$ *y* $\lambda(E) < \infty \Rightarrow \rho\lambda_.$ *es una especificación q. l..*

(b) *Sea* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *un potencial* λ*-admisible tal que* H_Λ^Φ *es q. l.,* $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$. *Entonces* γ^Φ *es q. l..*

(c) *Sea* E *finito,* λ *la medida de conteo sobre* $(E, \mathscr{P}(E))$, γ *una especificación sobre* $(E, \mathscr{P}(E))^S$. *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$, *sea* $\rho_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\rho_\Lambda(x) = \gamma_\Lambda\left(1_{\sigma_\Lambda^{-1}(\{x_\Lambda\})}\right)(x)$$

Si γ *es q. l., entonces* $\rho_\Lambda \in \bar{\mathscr{L}}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Demostración:
Parte (a)
Veamos **(a.1)**. Sean $\Lambda \in \mathscr{S}$ y $f \in \mathscr{L}$.

$$(\rho\lambda_.)_\Lambda(f) = \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f) \tag{2.14}$$

Afirmación 1: $\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f)$ es local.
Demostración: Si $f \geq 0$, entonces $(\rho_\Lambda f) \geq 0$ y es local $\Rightarrow \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f)$ es local por (b) del Lema 2.2.1. Si f es cualquiera medible, consideramos f^+ y f^- que son locales no negativas $\Rightarrow \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f) = \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f^+) - \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f^-)$ es local.

Finalmente: para todo $x \in \mathscr{E}^S$ tenemos:

$$\rho_\Lambda \lambda_\Lambda(f)(x) = \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f)(x) \leq \|f\|_\infty |\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)(x)| \leq \|f\|_\infty$$

pues $\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)(x) = \rho_\Lambda\lambda_\Lambda\left(E^S|x\right) = 1 \; \forall x \in E^S$. Luego: $\rho_\Lambda\lambda_\Lambda(f) \in \mathscr{L}$. Entonces $\rho\lambda_{\cdot}$ es q. l..

Veamos **(a.2)**. Sean: $f \in \mathscr{L}$ y $\Lambda \in \mathscr{S}$. Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que $\exists h \in \mathscr{L}$ tal que

$$|\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f)(x) - h(x)| < \epsilon \; \forall x \in E^S$$

Sea $\epsilon' > 0$ que elegiremos más tarde dependiente sólo de ϵ, Λ y f.

Como ρ_Λ es q. l. $\exists g$ local tal que

$$\|\rho_\Lambda - g\|_\infty < \epsilon'$$

Sea

$$h = \lambda_\Lambda(fg)$$

como $f \in \mathscr{L}$ y g es local, h es local por el Lema 2.2.1. Ahora, para todo $x \in E^S$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f)(x) - h(x)| &= |\lambda_\Lambda(f(\rho_\Lambda - g))(x)| \\
&= \left|\int_{E^S} f(w)(\rho_\Lambda(w) - g(w))\lambda_\Lambda(dw|x)\right| \\
&\leq \int_{E^S} |f(w)|\,|(\rho_\Lambda(w) - g(w))|\,\lambda_\Lambda(dw|x) \\
&\leq \|f\|_\infty \epsilon' \int_{E^S} \lambda_\Lambda(dw|x) \\
&= \|f\|_\infty \epsilon' \lambda^\Lambda\left(E^\Lambda\right) \\
&= \|f\|_\infty (\lambda(E))^{\#(\Lambda)} \epsilon'
\end{aligned}$$

Sea $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\|f\|_\infty (\lambda(E))^{\#(\Lambda)}}$

Entonces $\|\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f) - h\|_\infty < \epsilon$.

Luego, $(\rho_\Lambda\lambda_\Lambda)(f) = \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda f)$ es q. l..

Parte (b)

Sean $f \in \mathscr{L}$ y $\Lambda \in \mathscr{S}$. Sea $\epsilon > 0$, debemos probar que $\exists g_0 \in \mathscr{L}$ tal que

$$\left\|\gamma_\Lambda^\Phi(f) - g_0\right\|_\infty = \left\|\lambda_\Lambda\left(\rho_\Lambda^\Phi f\right) - g_0\right\|_\infty \leq \epsilon \tag{2.15}$$

Sea ϵ' que elegiremos más tarde dependiente sólo de ϵ, Λ y f.

Como H_Λ^Φ es q. l., $\exists u$ local tal que

$$\left\|H_\Lambda^\Phi - u\right\|_\infty < \epsilon'$$

Sea $v = e^{-u}$ (local y no negativa).

Por el Lema 2.2.1 se tiene que $\lambda_\Lambda(v)$ es local. Además

$$\begin{aligned}
\lambda_\Lambda(v)(x) &= \int_{E^S} v(w)\,\lambda_\Lambda(dw|x)\\
&= \int_{E^S} e^{-u(w)} e^{-H_\Lambda^\Phi(w)} e^{H_\Lambda^\Phi(w)} \lambda_\Lambda(dw|x)\\
&= \int_{E^S} e^{-H_\Lambda^\Phi(w)} e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)} \lambda_\Lambda(dw|x)\\
&< e^{\epsilon'} \int_{E^S} e^{-H_\Lambda^\Phi(w)} \lambda_\Lambda(dw|x)\\
&= e^{\epsilon'} Z_\Lambda^\Phi(x) < \infty
\end{aligned}$$

y $\lambda_\Lambda(v)(x) > 0$, $\forall x \in E^S$.

Sea entonces

$$g(x) = \frac{v(x)}{\lambda_\Lambda(v)(x)}, \forall x \in E^S$$

$\Rightarrow g$ es local.

Sea $x \in E^S$ cualquiera. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda_\Lambda\left(\left|\rho_\Lambda^\Phi - g\right|\right)(x) &= \lambda_\Lambda\left(\left|\frac{h_\Lambda^\Phi}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)} - \frac{v}{\lambda_\Lambda(v)}\right|\right)(x)\\
&= \lambda_\Lambda\left(\left|\frac{h_\Lambda^\Phi - v}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)} + v\left(\frac{1}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)} - \frac{1}{\lambda_\Lambda(v)}\right)\right|\right)(x)\\
&\leq \lambda_\Lambda\left(\frac{\left|h_\Lambda^\Phi - v\right|}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)}\right)(x) + \lambda_\Lambda\left(v\left|\frac{1}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)} - \frac{1}{\lambda_\Lambda(v)}\right|\right)(x)\\
&= \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(x)}\lambda_\Lambda\left(\left|h_\Lambda^\Phi - v\right|\right)(x) + \lambda_\Lambda\left(v\frac{\left|\lambda_\Lambda(v) - \lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)\right|}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)\,\lambda_\Lambda(v)}\right)(x)\\
&= \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(x)}\lambda_\Lambda\left(\left|h_\Lambda^\Phi - v\right|\right)(x) + \frac{\left|\lambda_\Lambda\left(v - h_\Lambda^\Phi\right)\right|(x)\,\lambda_\Lambda(v)(x)}{\lambda_\Lambda(h_\Lambda^\Phi)(x)\,\lambda_\Lambda(v)(x)}\\
&\leq \frac{2}{Z_\Lambda^\Phi(x)}\lambda_\Lambda\left(\left|h_\Lambda^\Phi - v\right|\right)(x)\\
&= \frac{2}{Z_\Lambda^\Phi(x)}\lambda_\Lambda\left(\left|e^{-H_\Lambda^\Phi} - e^{-u}\right|\right)(x)\\
&= \frac{2}{Z_\Lambda^\Phi(x)}\lambda_\Lambda\left(e^{-H_\Lambda^\Phi}\left|1 - e^{H_\Lambda^\Phi - u}\right|\right)(x)\\
&= 2\gamma_\Lambda^\Phi\left(\left|1 - e^{H_\Lambda^\Phi - u}\right|\right)(x) \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Afirmación 2.2.2 $\left\|1-e^{H_\Lambda^\Phi - u}\right\|_\infty < e^{\epsilon'}-1.$

Demostración:
Sea $w \in E^S$ cualquiera. Como $\left\|H_\Lambda^\Phi - u\right\|_\infty < \epsilon'$, se tiene que

$$\left|H_\Lambda^\Phi(w) - u(w)\right| < \epsilon'$$

Supongamos $H_\Lambda^\Phi(w) - u(w) < 0$ (la demostración es más directa en el caso > 0) $\Rightarrow$

$$\left|1-e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)}\right| = 1-e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)}$$

Como $\left|H_\Lambda^\Phi(w) - u(w)\right| < \epsilon'$,

$$\begin{aligned}
H_\Lambda^\Phi(w) - u(w) > -\epsilon' \quad &\Rightarrow \quad e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)} > e^{-\epsilon'} && (2.17)\\
&\Rightarrow \quad 1-e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)} < 1-e^{-\epsilon'} && (2.18)\\
&\Rightarrow \quad 1-e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)} < e^{-\epsilon'}\left(e^{\epsilon'}-1\right) && (2.19)\\
&\Rightarrow \quad 1-e^{H_\Lambda^\Phi(w)-u(w)} < e^{\epsilon'}-1 && (2.20)
\end{aligned}$$

■

Por la ecuación 2.16 tenemos:

$$\lambda_\Lambda\left(\left|\rho_\Lambda^\Phi - g\right|\right)(x) < 2\left(e^{\epsilon'}-1\right)\forall x$$

Sea $f \in \mathscr{L}$. Como g es local, fg es local.
Además $\lambda_\Lambda(|fg|) \leq \|f\|_\infty$. Luego, $\lambda_\Lambda(fg)$ está definida y es local.
Para todo $x \in E^S$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\gamma_\Lambda^\Phi(f)(x) - \lambda_\Lambda(fg)(x)\right| &= \left|\lambda_\Lambda\left(\rho_\Lambda^\Phi f\right)(x) - \lambda(gf)(x)\right|\\
&= \left|\lambda_\Lambda\left(f\left(\rho_\Lambda^\Phi - g\right)\right)(x)\right|\\
&\leq \lambda_\Lambda\left(|f|\left|\rho_\Lambda^\Phi - g\right|\right)(x)\\
&\leq \|f\|_\infty \lambda_\Lambda\left(\left|\rho_\Lambda^\Phi - g\right|\right)(x)\\
&< \|f\|_\infty 2\left(e^{\epsilon'}-1\right).
\end{aligned}$$

Luego, si tomamos

$$0 < \epsilon' < \ln\left(1+\frac{1}{2}\|f\|_\infty^{-1}\epsilon\right),$$

tenemos que

$$\left\|\gamma_\Lambda^\Phi(f) - \lambda_\Lambda(fg)\right\|_\infty \leq \epsilon$$

Así la ecuación 2.15 está probada, con $g_0 = \lambda_\Lambda (fg)$.
Parte (c)
Es fácil de ver que:

$$\rho_\Lambda = \sum_{\zeta \in E^\Lambda} \left(1_{\{\zeta\}} \circ \sigma_\Lambda\right) \cdot \gamma_\Lambda \left(1_{\sigma_\Lambda^{-1}(\{\zeta\})}\right)$$

Como $1_{\sigma_\Lambda^{-1}(\{\zeta\})} \in \mathscr{L}$ y γ_Λ es q. l., entonces $\gamma_\Lambda \left(1_{\sigma_\Lambda^{-1}(\{\zeta\})}\right)$ es q. l..
Por otra parte, $1_{\{\zeta\}} \circ \sigma_\Lambda \in \mathscr{L}$ y E^Λ es finito; luego ρ_Λ es q. l..

$\blacksquare$

Definición 2.2.4 *Se dice que un potencial $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ es uniformemente convergente (u.c.) si:*
Para cada $\Lambda_0 \in \mathscr{S}$, dado $\epsilon > 0$, existe $\Delta_0 \in \mathscr{S}$ tal que

$$\Delta_0 \subset \Delta \in \mathscr{S} \Rightarrow \left| H_{\Lambda_0}^\Phi (x) - \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap \Lambda_0, \Lambda \subset \Delta} \Phi_\Lambda (x) \right| < \epsilon, \forall x \in E^S$$

Corolario 2.2.1 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial λ-admisible (con $\lambda \in \mathscr{M} (E, \mathscr{E})$) y u. c.. Entonces γ^Φ es q. l..*

Demostración: Ejercicio.

Proposición 2.2.6 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial λ-admisible de rango finito $\Rightarrow \rho_{\Lambda,\lambda}^\Phi$ es local, $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$. Donde $\rho_{\Lambda,\lambda}^\Phi$ es la función sobre E^S definida por:*

$$\rho_{\Lambda,\lambda}^\Phi = \frac{\exp\left(-H_\Lambda^\phi(x)\right)}{\lambda_\Lambda \left(\exp\left(-H_\Lambda^\phi\right)\right)(x)}$$

Demostración:
Por definición de potencial de rango finito, para cada $s \in S$, $\exists \Lambda_s \in \mathscr{S}$ tal que $\Delta \in \mathscr{S}, s \in \Delta, \Delta \cap \Lambda_s^c \neq \emptyset \Rightarrow \Phi_\Delta \equiv 0$.
Luego: $\Delta \in \mathscr{S} \cap \Lambda$, $\Phi_\Delta \not\equiv 0 \Rightarrow \Delta \subset \cup_{s \in \Lambda} \Lambda_s, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.
De aquí, se deduce que $H_\Lambda^\Phi = \sum_{\Delta \in \mathscr{S} \cap \Lambda} \Phi_\Delta$ es local, pues Φ_Δ es local, $\forall \Delta \in \mathscr{S}$.

$\blacksquare$

Nota 2.2.1 *En esta demostración, probamos también que: si Φ es de rango finito, entonces Φ es u. c..*

Proposición 2.2.7 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial λ- admisible (con $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$), u. c. y tal que $H_\Lambda^\Phi \in \mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R}\right) \forall \Lambda \in \mathscr{S}$. Entonces:*

(a) $\lambda(E) < \infty$.

(b) $\rho_\Lambda^\Phi \in \bar{\mathscr{L}}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Demostración: Ejercicio.

Notación 2.2.2 *Sea*

$$\mathscr{T} = \cap_{\Lambda \in \mathscr{S}} \mathscr{T}_\Lambda$$

que se llama la σ-álgebra en infinito.

Nota 2.2.2 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Si $f \in \mathscr{L}^\infty \left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R}\right)$ es $\mathscr{T}$-medible, entonces $\gamma_\Lambda(f) = f, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.*

En efecto:
$f \in \mathscr{T}_\Lambda$, $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$ y como γ_Λ es núcleo de probabilidad $\mathscr{T}_\Lambda$-propio, tenemos:

$$\gamma_\Lambda(f)(x) = \int_{E^S} f(w)\, \gamma_\Lambda(dw|x) = f(x)$$

para todo $x \in E^S$.

2.3. Representación de Gibbs de pre-modificaciones

Continuamos con las notaciones de las secciones anteriores.

Definición 2.3.1 *Sean: $\alpha \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E}), \alpha. = (\alpha_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ como fue definida en la Sección 1.3, $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial. Se dice que Φ es α-normalizado si*

$$\alpha_B(\Phi_A)(x) = \int_{E^B} \Phi_A(\zeta x_{B^c})\, \alpha^B(d\zeta) = 0$$

cuando $\emptyset \neq B \subset A \in \mathscr{S}$.

Definición 2.3.2 *Sea $a \in E$. Si Φ es un potencial δ_a-normalizado (donde δ_a es la medida de Dirac en a), entonces, se dice que Φ es un potencial de gas con estado vacío en a.*

Proposición 2.3.1 *Sean $\alpha \in \mathscr{P}(E,\mathscr{E})$ y $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial. Se cumple:*

$$\Phi \text{ es } \alpha\text{-normalizado} \Leftrightarrow \text{para cada } A \in \mathscr{S} \text{ se cumple:}$$

(a) $\emptyset \neq B \subset A \Rightarrow \exists\alpha_B(\Phi_A)$.

(b) $\alpha_{\{s\}}(\Phi_A) = 0, \forall s \in A$.

Demostración:
($\Rightarrow$)
Nada hay que probar.
($\Leftarrow$)
Sea $\emptyset \neq B \subset A \in \mathscr{S}$. Pongamos $B = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$
Entonces, por definición de $\alpha^B = \bigotimes_{j=1}^n \alpha^{\{s_j\}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_B(\Phi_A)(x) &= \int_{E^B} \Phi_A(\zeta x_{B^c})\,\alpha^B(d\zeta)\\
&= \int_E \cdots \int_E \Phi_A(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n x_{B^c})\,\alpha^{\{s_1\}}(d\xi_1)\,\alpha^{\{s_2\}}(d\xi_2)\ldots\alpha^{\{s_n\}}(d\xi_n) = 0
\end{aligned}$$

pues:
$\int_E \Phi_A(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n x_{B^c})\,\alpha^{\{s_1\}}(d\xi_1) = \alpha_{\{s_1\}}(\Phi_A)\left(x_{\{s_1\}}\xi_2\ldots\xi_n x_{B^c}\right) = 0$

■

Definición 2.3.3 *Sea $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una familia de funciones $\rho_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ que son $\mathscr{F}$-medibles. Se dice que ρ es quasi-local si ρ_Λ es quasi-local, $\forall\Lambda \in \mathscr{S}$.*

Notación 2.3.1 *Sean: $\alpha \in \mathscr{P}(E,\mathscr{E}), A \in \mathscr{S} \cup \{\emptyset\}$. Con $\mathscr{F}(\alpha, A)$ denotaremos la familia de todas las funciones $f : E^S \to \mathbb{R}$ tales que para cada $C \subset A$ se cumplen:*

(1) $\xi \mapsto f(\xi x_C), \xi \in E^{S\setminus C}$ *está en* $\mathscr{L}^1\left(E^{S\setminus C}, \alpha^{S\setminus C}, \mathbb{R}\right)$, *para todo* $x \in E^S$.

(2) $x \mapsto \alpha_{S\setminus C}(f)(x) = \int_{E^{S\setminus C}} f(\xi x_C)\,\alpha^{S\setminus C}(d\xi)$ *es* $\mathscr{F}_C$*-medible.*

Para cada $f \in \mathscr{F}(\alpha, A)$ sea $p_{(\alpha,A)}(f) : E^S \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p_{(\alpha,A)}(f)(x) = \sum_{C\subset A} (-1)^{\#(A\setminus C)}\,\alpha_{S\setminus C}(f)(x)$$

Lema 2.3.1 *Para cada $\alpha \in \mathscr{P}(E,\mathscr{E})$ y $\Lambda \in \mathscr{S} \cup \{\emptyset\}$ se tiene que:*

(i) $f \in \mathscr{F}(\alpha, \Lambda) \Rightarrow p_{(\alpha,\Lambda)}(f)$ *es* $\mathscr{F}_\Lambda$*-medible.*

(ii) $f \in \mathscr{F}(\alpha, \Lambda) \Rightarrow \alpha_{S \setminus \Lambda}(f) = \sum_{A \subset \Lambda} p_{(\alpha, A)}(f)$.

(iii) $\emptyset \neq B \subset \Lambda \Rightarrow \alpha_B \left(p_{(\alpha,\Lambda)}(f)\right) = 0$.

Demostración:
Parte (i)
Como $C \subset \Lambda$ se tiene que $\alpha_{S \setminus C}(f)$ es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible, luego $p_{(\alpha,\Lambda)}(f)$ es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible.
Parte (ii)
Sigue aplicando la siguiente:
Fórmula de Inversión de Möbius: Sean Φ y Ψ dos funciones definidas sobre $\mathscr{S} \cup \{\emptyset\} =: \mathscr{S}^*$ con valores en $\mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:

(a) $\Phi(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{\#(A \setminus B)} \Psi(B)$, para todo $A \in \mathscr{S} \cup \{\emptyset\}$.

(b) $\Psi(A) = \sum_{B \subset A} \Phi(B), \forall A \in \mathscr{S} \cup \{\emptyset\}$.

Demostración: Ejercicio.
Parte (iii)
Es suficiente, considerar el caso: $B = \{i\}$ con $i \in \Lambda$.
Ahora:

$$p_{(\alpha,\Lambda)}(f) = \sum_{i \notin C \subset \Lambda} (-1)^{\#(\Lambda \setminus C)} \left[\alpha_{S \setminus C}(f) - \alpha_{S \setminus (C \cup \{i\})}(f)\right]$$

Luego:

$$\alpha_{\{i\}}\left(p_{(\alpha,\Lambda)}(f)\right) = \sum_{i \notin C \subset \Lambda} (-1)^{\#(\Lambda \setminus C)} \alpha_{\{i\}}\left(\alpha_{S \setminus C}(f) - \alpha_{S \setminus (C \cup \{i\})}(f)\right) = 0,$$

pues:
si $i \notin C \subset \Lambda$, entonces:

$$\alpha_{S \setminus C}(f) = \alpha_{\{i\}}\left(\alpha_{S \setminus (C \cup \{i\})}(f)\right) \text{ y } \alpha_{\{i\}}\left(\alpha_{S \setminus C}(f)\right) = \alpha_{S \setminus C}(f)$$

■

Lema 2.3.2 *Sea* $\rho : E^S \to (0, +\infty), \mathscr{F}$*-medible;* $u = \log(\rho)$. *Sea* $\alpha \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$.

(i) $\exists a \in E$ *tal que* $\alpha = \delta_a$; *o*

(ii) u *es acotada;*

Entonces:

(a) $u \in \mathscr{F}(\alpha, A)$ *cualquiera sea* $A \in \mathscr{S}$.

(b) *Sea* $A \in \mathscr{S}; \Phi_A := p_{(\alpha,A)}(u) = \sum_{C\subset A} (-1)^{\#(A\setminus C)} \alpha_{S\setminus C}(u) \Rightarrow \Phi_A$ *es* $\mathscr{F}_A$*-medible y* $\alpha_B(\Phi_A) = 0$*, para todo* $\emptyset \neq B \subset A$.

Demostración: Ejercicio. (**Ayuda**: usar el Lema 2.3.1)

Lema 2.3.3 *Sea* $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *una pre-modificación positiva. Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *sea* $u_\Lambda = \log(\rho_\Lambda)$.

Sea $\alpha \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$. *Supongamos que:*

(i) $\exists\ a \in E$ *tal que* $\delta_a = \alpha$*; ó*

(ii) u_Λ *es acotada,* $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Si $\emptyset \neq \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$*, entonces:*

$$p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Lambda) = p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Delta).$$

Demostración:

$$p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Lambda) - p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Delta) = \sum_{B\subset\Lambda} (-1)^{\#(\Lambda\setminus B)} \alpha_{S\setminus B}(u_\Lambda - u_\Delta) \tag{2.21}$$

Afirmación 2.3.1 $\alpha_{S\setminus B}(u_\Lambda - u_\Delta) = \alpha^S(u_\Lambda - u_\Delta)$*, cualquiera sea* $B \subset \Lambda$.

Supongamos probada esta Afirmación 2.3.1.

Entonces, por la ecuación 2.21:

$$\begin{aligned} p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Lambda) - p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Delta) &= \sum_{B\subset\Lambda} (-1)^{\#(\Lambda\setminus B)} \alpha^S(u_\Lambda - u_\Delta) && (2.22)\\ &= \alpha^S(u_\Lambda - u_\Delta) \sum_{B\subset\Lambda} (-1)^{\#(\Lambda\setminus B)} && (2.23)\\ &= 0 && (2.24)\end{aligned}$$

pues $\sum_{B\subset\Lambda} (-1)^{\#(\Lambda\setminus B)} = 0.$ (si $\Lambda \neq \emptyset$).

Demostración: de la Afirmación 2.3.1

Supongamos probada la siguiente:

Afirmación 2.3.2 $u_\Lambda - u_\Delta = \alpha_\Lambda(u_\Lambda) - \alpha_\Lambda(u_\Delta)$.

Tenemos entonces, para $B \subset \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{S\setminus B}\left(u_\Lambda - u_\Delta\right)(x) &= \alpha_{S\setminus B}\left(\alpha_\Lambda\left(u_\Lambda - u_\Delta\right)\right)(x) \\
&= \int_{E^{S\setminus B}} \alpha_\Lambda\left(u_\Lambda - u_\Delta\right)(\xi x_B)\alpha^{S\setminus B}(d\xi) \\
&= \int_{E^{S\setminus B}} \int_{E^\Lambda} \left(u_\Lambda - u_\Delta\right)(\xi_{S\setminus\Lambda}\zeta)\alpha^\Lambda(d\zeta)\,\alpha^{S\setminus B}(d\xi) \\
&= \int_{E^{S\setminus\Lambda}} \int_{E^{\Lambda\setminus B}} \int_{E^\Lambda} \left(u_\Lambda - u_\Delta\right)(\xi_{S\setminus\Lambda}\zeta) \\
&\qquad\qquad \alpha^\Lambda(d\zeta)\,\alpha^{\Lambda\setminus B}\left(d\xi_{\Lambda\setminus B}\right)\alpha^{S\setminus\Lambda}\left(d\xi_{S\setminus\Lambda}\right) \\
&= \int_{E^{S\setminus\Lambda}} \int_{E^\Lambda} \left(u_\Lambda - u_\Delta\right)(\xi_{S\setminus\Lambda}\zeta)\alpha^\Lambda(d\zeta)\,\alpha^{S\setminus\Lambda}\left(d\xi_{S\setminus\Lambda}\right) \\
&= \int_{E^S} \int_{E^\Lambda} \left(u_\Lambda - u_\Delta\right)(w)\alpha^S(dw) \\
&= \alpha^S\left(u_\Lambda - u_\Delta\right)
\end{aligned}$$

Demostración: de la Afirmación 2.3.2
Una cuenta directa muestra que:

$$\alpha_\Lambda\left(u_\Lambda\right)(w) - u_\Lambda(w) = \int_{E^\Lambda} \log\left(\frac{\rho_\Lambda\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)}{\rho_\Lambda\left(w_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right)}\right)\alpha^\Lambda(d\zeta) \tag{2.25}$$

y

$$\alpha_\Lambda\left(u_\Delta\right)(w) - u_\Delta(w) = \int_{E^\Lambda} \log\left(\frac{\rho_\Delta\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)}{\rho_\Delta\left(w_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right)}\right)\alpha^\Lambda(d\zeta) \tag{2.26}$$

Ahora, para todo $\zeta \in E^\Lambda$ por ser ρ una pre-modificación:

$$\rho_\Lambda\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)\rho_\Delta\left(w_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right) = \rho_\Lambda\left(w_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right)\rho_\Delta\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)$$

de donde las ecuaciones 2.25 = 2.26.

Definición 2.3.4 *Sean: $f : E^S \to \mathbb{R}$ (no necesariamente $\mathscr{F}$- medibe); $\Delta \in \mathscr{S}, w \in E^S$. Definimos*

$$O_\Delta(f)(w) := \sup\left\{\left|f\left(\xi w_\Delta\right) - f(w)\right| / \xi \in E^{S\setminus\Delta}\right\}$$

Notemos que

$$\Delta_1 \in \mathscr{S}, \Delta_2 \in \mathscr{S}, \Delta_1 \subset \Delta_2 \Rightarrow O_{\Delta_2}(f)(w) \leq O_{\Delta_1}(f)(w)$$

Llamaremos ***oscilación*** *de f en $w \in E^S$ al infinito a*

$$O_\infty (f)(w) := \lim_{\Delta \uparrow S} O_\Delta (f)(w)$$

Lema 2.3.4 *Sea $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una pre-modificación positiva tal que $O_\infty (\rho_\Lambda)(w) = 0$ para todo $w \in E^S$ y todo $\Lambda \in \mathscr{S}$, que llamaremos condición S . Sea $\alpha \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$. Supongamos que se cumple una de las dos siguientes propiedades:*

(a) *$\alpha = \delta_a$ para algún $a \in E$.*

(b) *$u_\Lambda := \log(\rho_\Lambda)$ es acotada, $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$.*

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea:

$$\Phi_\Lambda := -p_{(\alpha,\Lambda)}(u_\Lambda) = -\sum_{A \subset \Lambda} (-1)^{\#(\Lambda \setminus A)} \alpha_{S \setminus A}(u_\Lambda)$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y $\Delta \in \mathscr{S}$ con $\Lambda \subset \Delta$ sea

$$H^\Phi_{\Lambda,\Delta}(w) = \sum_{A \subset \Delta, \Lambda \cap A \neq \emptyset} \Phi_A(w)$$

Entonces:

(i) Φ_Λ es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible, para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$.

(ii) Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ se tiene: para cada $w \in E^S$

$$\lim_{\Lambda \subset \Delta \uparrow S} H^\Phi_{\Lambda,\Delta}(w) = v_\Lambda(w)$$

donde $v_\Lambda(w) := \alpha_\Lambda(u_\Lambda)(w) - u_\Lambda(w) = \alpha_\Lambda(u_\Lambda)(w) - \log(\rho_\Lambda(w))$

Esto es: $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es un potencial cuyo Hamiltoniano satisface:

$$H^\Phi_\Lambda(w) = v_\Lambda(w) = \alpha_\Lambda(u_\Lambda)(w) - \log(\rho_\Lambda(w)).$$

Por el Lema 2.3.2, Φ es α-normalizado. Notemos que si $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es una pre-modificación positiva quasi-local, entonces $O(\rho_\Lambda)(w) = 0 \, \forall w \in E^S$ y $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

(iii) Si $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ y $\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)(x) < \infty, \forall \Lambda \in \mathscr{S}, \forall x \in E^S$, entonces Φ es λ-admisible.

Demostración:
Parte (i)
Se concluye a partir del Lema 2.3.2.
Parte (ii)
Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$.

Afirmación 2.3.3 $H^\Phi_{\Lambda,\Delta}(w) = \alpha_{S\setminus\Delta}(v_\Lambda)(w), \forall w \in E^S$.

Supongamos esto probado.
Supongamos estar en la hipótesis **(a)**.
Sea $\underline{a} \in E^S$ dado por $\underline{a}(s) = a, \forall s \in S$. Un cálculo directo prueba que:

$$\alpha_{S\setminus\Delta}(v_\Lambda)(w) = u_\Lambda\left(\underline{a}_\Lambda \underline{a}_{S\setminus\Delta} w_{\Delta\setminus\Lambda}\right) - u_\Lambda\left(\underline{a}_{S\setminus\Delta} w_\Delta\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\alpha_{S\setminus\Delta}(v_\Lambda)(w) - v_\Lambda(w) &= \log\left(\rho_\Lambda\left(\underline{a}_\Lambda w_{\Delta\setminus\Lambda}\underline{a}_{S\setminus\Delta}\right)\right) - \log\left(\rho_\Lambda\left(\underline{a}_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right)\right) + \\ &+ \log\left(\rho_\Lambda\left(w_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right)\right) - \log\left(\rho_\Lambda\left(w_\Lambda w_{\Delta\setminus\Lambda}\underline{a}_{S\setminus\Delta}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.27}$$

Pongamos $\xi = \underline{a}_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}$. Entonces, reemplazando en la ecuación 2.27 nos queda:

$$\log\left(\rho_\Lambda\left(\underline{a}_{S\setminus\Delta}\xi_\Delta\right)\right) - \log\left(\rho_\Lambda(\xi)\right) + \log\left(\rho_\Lambda(w)\right) - \log\left(\rho_\Lambda\left(\underline{a}_{S\setminus\Delta} w_\Delta\right)\right)$$

Por la continuidad de log y por la condición S tenemos que:

$$\lim_{\Lambda\subset\Delta\uparrow S} \alpha_{S\setminus\Delta}(v_\Lambda)(w) = v_\Lambda(w)$$

Supongamos ahora estar en la hipótesis **(b)**

$$\begin{aligned}\alpha_{S\setminus\Delta}(v_\Lambda)(w) - v_\Lambda(w) &= \int_{E^{S\setminus\Delta}} \left(v_\Lambda(w_\Delta\zeta) - v_\Lambda(w)\right)\alpha^{S\setminus\Delta}(d\zeta) \\ &= \int_{E^{S\setminus\Delta}}\int_{E^\Lambda} \left[\left(u_\Lambda\left(\xi w_{\Delta\setminus\Lambda}\zeta\right) - u_\Lambda(w_\Delta\zeta)\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(u_\Lambda(w) - u_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\right]\alpha^\Lambda(d\xi)\,\alpha^{S\setminus\Delta}(d\zeta)\end{aligned}$$

De aquí resulta:

$$\begin{aligned}\left|\alpha_{S\setminus\Delta}\left(v_\Lambda\right)(w)-v_\Lambda\left(w\right)\right| &\leq \int_{E^{S\setminus\Delta}}\int_{E^\Lambda}\left|u_\Lambda\left(\xi w_{\Delta\setminus\Lambda}\zeta\right)-u_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right)\right|\alpha^\Lambda\left(d\xi\right)\alpha^{S\setminus\Delta}\left(d\zeta\right)\\ &+ \int_{E^{S\setminus\Delta}}\int_{E^\Lambda}\left|u_\Lambda\left(w_\Delta\zeta\right)-u_\Lambda\left(w\right)\right|\alpha^\Lambda\left(d\xi\right)\alpha^{S\setminus\Delta}\left(d\zeta\right) \qquad (2.28)\end{aligned}$$

Ahora bien, el primer término del segundo miembro de esta igualdad es igual a

$$\int_{E^\Lambda}\int_{E^{S\setminus\Delta}}\left|u_\Lambda\left(\xi w_{\Delta\setminus\Lambda}\zeta\right)-u_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\right|\alpha^{S\setminus\Delta}\left(d\zeta\right)\alpha^\Lambda\left(d\xi\right)$$

Por la condición S, por ser $\alpha^{S\setminus\Delta}$ una probabilidad y la continuidad de la función logaritmo, tenemos que:

Para cada $\xi\in E^\Lambda$ (y en particular para $\xi=w_\Lambda$):

$$\lim_{\Lambda\subset\Delta\uparrow S}\int_{E^{S\setminus\Delta}}\left|u_\Lambda\left(\xi w_{\Delta\setminus\Lambda}\zeta\right)-u_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\right|\alpha^{S\setminus\Delta}\left(d\zeta\right)=0$$

Por el Teorema de Lebesgue, teniendo en cuenta u_Λ es acotada, tenemos que:

$$\lim_{\Lambda\subset\Delta\uparrow S}\int_{E^{S\setminus\Delta}}\int_{E^\Lambda}\left|u_\Lambda\left(\xi w_{\Delta\setminus\Lambda}\zeta\right)-u_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\right|\alpha^\Lambda\left(d\xi\right)\alpha^{S\setminus\Delta}\left(d\zeta\right)=0 \quad (2.29)$$

y

$$\lim_{\Lambda\subset\Delta\uparrow S}\int_{E^{S\setminus\Delta}}\int_{E^\Lambda}\left|u_\Lambda\left(w_\Delta\zeta\right)-u_\Lambda\left(w\right)\right|\alpha^\Lambda\left(d\xi\right)\alpha^{S\setminus\Delta}\left(d\zeta\right)=0 \qquad (2.30)$$

Luego, de la ecuación 2.28, por las ecuaciones 2.29 y 2.30 resulta:

$$\lim_{\Lambda\subset\Delta\uparrow S}\alpha_{S\setminus\Delta}\left(v_\Lambda\right)(w)=v_\Lambda\left(w\right).$$

Por lo tanto, en virtud de la Afirmación 2.3.3, **(ii)** queda probada.

■

Demostración de la Afirmación 2.3.3:

Los Lemas 2.3.3, 2.3.1 (ii) y la Afirmación 2.3.2 de la prueba del Lema 2.3.3 justifican las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
H^{\Phi}_{\Lambda,\Delta}(w) &= \sum_{\emptyset\neq A\subset\Delta} \Phi_A(w) - \sum_{\emptyset\neq A\subset\Delta\setminus\Lambda} \Phi_A(w) \\
&= -\sum_{A\subset\Delta} p_{(\alpha,A)}(u_A)(w) + \sum_{A\subset\Delta\setminus\Lambda} p_{(\alpha,A)}(u_A)(w) \\
&=_\star -\sum_{A\subset\Delta} p_{(\alpha,A)}(u_\Delta)(w) + \sum_{A\subset\Delta\setminus\Lambda} p_{(\alpha,A)}(u_\Delta)(w) \\
&= -\alpha_{S\setminus\Delta}(u_\Delta)(w) + \alpha_{S\setminus(\Delta\setminus\Lambda)}(u_\Delta)(w) \\
&= \alpha_{S\setminus\Delta}(\alpha_\Lambda(u_\Delta))(w) - \alpha_{S\setminus\Delta}(u_\Delta)(w) \\
&= \alpha_{S\setminus\Delta}(\alpha_\Lambda(u_\Delta) - u_\Delta)(w) \\
&= \alpha_{S\setminus\Delta}(\alpha_\Lambda(u_\Lambda) - u_\Lambda)(w) \\
&= \alpha_{S\setminus\Delta}(v_\Lambda)(w).
\end{aligned}
$$

Veamos ahora la parte **(iii)**

$$
h^{\Phi}_{\Lambda} := \exp\left(-H^{\Phi}_{\Lambda}\right) = \exp\left(-\alpha_\Lambda(u_\Lambda) + \log(\rho_\Lambda)\right) = \rho_\Lambda \exp\left(-\alpha_\Lambda(u_\Lambda)\right)
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\lambda_\Lambda\left(h^{\Phi}_{\Lambda}\right)(w) &= \int_{E^\Lambda} h^{\Phi}_{\Lambda}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\xi) \\
&= \int_{E^\Lambda} \exp\left(-\alpha_\Lambda(u_\Lambda)\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\rho_\Lambda\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\xi) \\
&= \exp\left(-\alpha_\Lambda(u_\Lambda)(w)\right)\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)(w) \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Por ser $\alpha_\Lambda(u_\Lambda)$ una función $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$-medible.

$\blacksquare$

Teorema 2.3.1 ***Teorema de representación.*** *Sea* $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$. *Sea* $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *una pre-modificación positiva, quasi-local con* $\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda) \equiv 1$, *para todo* $\Lambda \in \mathscr{S}$.

(a) *Sea* $a \in E$. *Entonces existe* Φ^a, *potencial* λ*-admisible,* δ_a*-normalizado tal que* $\rho = \rho^{\Phi^a}$.

(b) *Supongamos que* $\log(\rho_\Lambda) \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R}\right), \forall\Lambda \in \mathscr{S}$.

Entonces:

para cada $\alpha \in \mathscr{P}(E,\mathscr{E})$ *existe* Φ^α, *potencial u. c.,* α*-normalizado,* λ*-admisible con* $\rho = \rho^{\Phi^\alpha}$.

Demostración:

Como la quasi-localidad implica la condición S del Lema 2.3.4, sólo falta ver que

$$\rho_\Lambda^\Phi = \rho_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}. \tag{2.32}$$

y bajo la hipótesis **(b)**,

$$\Phi \text{ es u. c..} \tag{2.33}$$

Ahora la ecuación 2.32 sigue de la fórmula probada en la ecuación 2.31 en la demostración del Lema 2.3.4 teniendo en cuenta que $\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda) \equiv 1, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$, por hipótesis.

Finalmente, 2.33 sigue tomando "supremo sobre w ", en la demostración del Lema anterior desde donde dice "supongamos ahora estar en la hipótesis **(b)**"hasta donde dice "Demostración de la Afirmación 2.3.3".

■

Corolario 2.3.1 *Sea E finito, $\lambda : \mathscr{E} \to [0, +\infty)$ la medida sobre $(E, \mathscr{E})$ dada por $\lambda(E_1) = \#(E_1), \forall E_1 \in \mathscr{E}$ (que es la familia de todos los subconjuntos de E). Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación quasi-local y positiva sobre $(E^S, \mathscr{E}^S)$, esto último significa que:*

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda = \xi | w) > 0, \forall \xi \in E^\Lambda, \forall w \in E^S$$

Sea $\alpha \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$. Entonces existe un potencial Φ^α que es α-normalizado, λ-admisible y u.c. tal que:

(a) $\gamma = \gamma^{\Phi^\alpha}$

(b) $H_\Lambda^{\Phi^\alpha} \in \bar{\mathscr{L}}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Demostración:

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea $\rho_\Lambda : E^S \to [0, +\infty)$ dada por:

$$\rho_\Lambda(w) = \gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda = w_\Lambda | w)$$

Por la Proposición 1.3.8 se tiene que $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es una λ-modificación y $\gamma = \rho\lambda_\cdot$.

Como γ es positiva, ρ es positiva.

Además, para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$ y todo $w \in E^S$ tenemos:

$$\lambda_\Lambda(\rho_\Lambda)(w) = \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(E^S | w) = \gamma_\Lambda(E^S | w) = 1.$$

Por **(c)** de la Proposición 2.2.5 se tiene que $\rho_\Lambda \in \bar{\mathscr{L}}$ para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$; esto es: ρ es quasi-local.

Afirmación 2.3.4 $\Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \log(\rho_\Lambda)$ *es acotada.*

Supongamos esto probado.

Por el Teorema 2.3.1, existe un potencial Φ^α que es α-normalizado, λ-admisible, u.c. tal que $\rho = \rho^{\Phi^\alpha}$. Luego $\gamma = \gamma^{\Phi^\alpha}$. Que se cumple **(b)** sigue del enunciado del Lema 2.3.4, donde se probó que $H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w) = \alpha_\Lambda(\log\rho_\Lambda)(w) - \log\rho_\Lambda(w)$

$\therefore H_\Lambda^{\Phi^\alpha} \in \bar{\mathscr{L}}$ por la Afirmación 2.3.4.

Demostración de la Afirmación 2.3.4 :

Por la Proposición 2.2.3 se tiene que ρ_Λ es continua $\Rightarrow \log\rho_\Lambda$ es continua. Como E es finito, E es compacto $\Rightarrow E^S$ es compacto $\therefore \log\rho_\Lambda$ es acotada.

$\blacksquare$

2.4. Equivalencia de potenciales

Definición 2.4.1 *Sean $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ y $\Psi = (\Psi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ dos potenciales. Se dice que Φ **y** Ψ **son equivalentes** (en símbolos $\Phi \sim \Psi$) si para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$ se tiene que $H_\Lambda^{\Phi-\Psi} = H_\Lambda^\Phi - H_\Lambda^\Psi$ es $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$- medible.*

Sean $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ y $\Psi = (\Psi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ dos potenciales λ-admisibles donde $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$.

Sean:

(i) $\Phi \sim \Psi$.

(ii) $\rho^\Phi = \rho^\Psi$ (esto es: $\rho_\Lambda^\Phi = \rho_\Lambda^\Psi, \forall\Lambda \in \mathscr{S}$).

(iii) $\gamma^\Phi = \gamma^\Psi$(esto es: $\gamma_\Lambda^\Phi = \gamma_\Lambda^\Psi, \forall\Lambda \in \mathscr{S}$).

(iv) $\mathscr{G}_\lambda(\Phi) \cap \mathscr{G}_\lambda(\Psi) \neq \emptyset$, donde $\mathscr{G}_\lambda(\Phi) := \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)$

Proposición 2.4.1 **(a)** ***(i)*** $\Leftrightarrow$***(ii)***

(b) ***(ii)***$\Rightarrow$***(iii)***

Demostración:

Parte (b)

Es obvio.

Parte (a)

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**

$$h_\Lambda^\Phi = \exp\left(-H_\Lambda^\Phi\right) = \exp\left(-H_\Lambda^{\Phi-\Psi}\right)\exp\left(-H_\Lambda^\Psi\right) = h_\Lambda^{\Phi-\Psi}h_\Lambda^\Psi.$$

Como $H_\Lambda^{\Phi-\Psi}$ es $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$- medible, tenemos:

$$\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right) = h_\Lambda^{\Phi-\Psi}\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Psi\right)$$

Entonces:

$$\rho_\Lambda^\Phi = \frac{h_\Lambda^\Phi}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)} = \frac{h_\Lambda^{\Phi-\Psi}h_\Lambda^\Psi}{h_\Lambda^{\Phi-\Psi}\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Psi\right)} = \frac{h_\Lambda^\Psi}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Psi\right)} = \rho_\Lambda^\Psi.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$H_\Lambda^{\Phi-\Psi} = H_\Lambda^\Phi - H_\Lambda^\Psi = -\log\left(h_\Lambda^\Phi\right) + \log\left(h_\Lambda^\Psi\right) = \log\left(\frac{h_\Lambda^\Psi}{h_\Lambda^\Phi}\right) = \log\left(\frac{\rho_\Lambda^\Psi Z_\Lambda^\Psi}{\rho_\Lambda^\Phi Z_\Lambda^\Phi}\right) = \log\left(\frac{Z_\Lambda^\Psi}{Z_\Lambda^\Phi}\right),$$

Luego, $H_\Lambda^{\Phi-\Psi}$ es $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$- medible pues Z_Λ^Φ y Z_Λ^Ψ son $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$-medibles por su propia definición.

■

Proposición 2.4.2 *Supongamos que: E es un espacio topológico que satisface el 2º axioma de numerabilidad; $\mathscr{E}$ es la σ-álgebra de Borel de E; $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ es densa en todas partes (esto es, $\lambda(U) > 0$, para todo $U \subset E$ abierto no vacío).*

Si $\Phi - \Psi$ es u.c. y para cada $\Lambda \in \mathscr{S}, \Phi_\Lambda - \Psi_\Lambda$ es continua (con respecto a la topología producto sobre E^S), entonces: (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Demostración:
Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$.
Por **(iii)** se tiene que para todo $A \in \mathscr{E}^\Lambda$ y $w \in E^S$

$$\int_A \left(\rho_\Lambda^\Phi\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right) - \rho_\Lambda^\Psi\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\lambda^\Lambda(d\zeta) = 0$$

Luego, si

$$\mathscr{N} = \left\{\zeta \in E^\Lambda / \frac{\rho_\Lambda^\Phi\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)}{\rho_\Lambda^\Psi\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right)} \neq 1\right\}$$

entonces

$$\lambda^\Lambda(\mathscr{N}) = 0. \tag{2.34}$$

Afirmación 2.4.1 *$\mathscr{N}$ es abierto en E^Λ*

Supongamos esto probado.

Afirmación 2.4.2 λ^{Λ} *es densa en todas partes.*

Suponiendo también esto probado, $\mathscr{N} = \emptyset$, pues si no habría contradicción con la ecuación 2.34. Luego, $\rho_{\Lambda}^{\Phi}\left(w_{\Lambda}w_{S\setminus\Lambda}\right) = \rho_{\Lambda}^{\Psi}\left(w_{\Lambda}w_{S\setminus\Lambda}\right)$.

Demostración de la Afirmación 2.4.2 :

Sea $U \subset E^{\Lambda}$ abierto. Como E satisface el 2º axioma, existe $\mathbb{B} \subset \mathscr{E}$ tal que $\mathbb{B}$ es la base de la topología de $\mathscr{E}$ y es a lo sumo numerable.

Pongamos $\Lambda = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Sea $\mathbb{B}^{\Lambda} = \left\{\sigma_{\Lambda,\{s_1\}}^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \sigma_{\Lambda,\{s_n\}}^{-1}(B_n) / B_1, \ldots, B_n \text{ están en } \mathbb{B}\right\}$

Por lo que se sabe de Topología general, se tiene que:

$$U = \cup \mathbb{B}^{1^{\Lambda}} \text{ con } \mathbb{B}^{1^{\Lambda}} \subset \mathbb{B}^{\Lambda} \Rightarrow U \in \mathscr{E}^{\Lambda}.$$

Además, como $B \in \mathbb{B} \Rightarrow B$ es abierto $\therefore \lambda(B) > 0$, se tiene que $\lambda^{\Lambda}(V) > 0, \forall V \in \mathbb{B}^{\Lambda} \Rightarrow \lambda^{\Lambda}(U) > 0$.

$\blacksquare$

Demostración de la Afirmación 2.4.1 :

Se puede ver directamente que

$$\zeta \in \mathscr{N} \Leftrightarrow H_{\Lambda}^{\Phi}\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right) - H_{\Lambda}^{\Psi}\left(\zeta w_{S\setminus\Lambda}\right) \neq 0$$

Como $\Phi - \Psi$ converge uniformemente y $\Phi_{\Delta} - \Psi_{\Delta}$ es continua para todo $\Delta \in \mathscr{S}$, se tiene que $H_{\Lambda}^{\Phi} - H_{\Lambda}^{\Psi}$ es continua $\Rightarrow \mathscr{N}$ es abierto en E^{Λ}

$\blacksquare$

Proposición 2.4.3 *Supongamos que además de las hipótesis de la Proposición 2.4.2 se cumple que* $\mathscr{G}_{\lambda}(\Phi) \cup \mathscr{G}_{\lambda}(\Psi) \neq \emptyset$. *Entonces: (i)* $\Leftrightarrow$ *(iv).*

Demostración:

Por la Proposición 2.4.1, basta ver que:

Afirmación 2.4.3 *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv).*

Afirmación 2.4.4 *(iv)* $\Rightarrow$ *(i).*

Demostración de la Afirmación 2.4.3 :

Sea $\mu \in \mathscr{G}_{\lambda}(\Phi)$ (análogamente si $\mu \in \mathscr{G}_{\lambda}(\Psi)$) $\Rightarrow$ para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $A \in \mathscr{E}^{S}$ se tiene que $\gamma_{\Lambda}^{\Phi}(A|\cdot)$ es una $\mu\left(A|\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}\right)$. Como $\gamma_{\Lambda}^{\Psi}(A|\cdot) = \gamma_{\Lambda}^{\Phi}(A|\cdot)$ se sigue que $\gamma_{\Lambda}^{\Psi}(A|\cdot)$ es una $\mu\left(A|\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}\right)$.

Luego, $\mu \in \mathscr{G}_{\lambda}(\Psi)$.

Demostración de la Afirmación 2.4.4 :
Sea $\mu \in \mathscr{G}_\lambda(\Phi) \cap \mathscr{G}_\lambda(\Psi)$.
Por la Proposición 1.3.4 tenemos:

$$\rho_\Lambda^\Phi (\mu\lambda_\Lambda) = \mu = \rho_\Lambda^\Psi (\mu\lambda_\Lambda), \forall\Lambda \in \mathscr{S}. \tag{2.35}$$

De donde:

$$\int_A \rho_\lambda^\Phi (w) (\mu\lambda_\Lambda) (dw) = \int_A \rho_\lambda^\Psi (w) (\mu\lambda_\Lambda) (dw)$$

para todo $A \in \mathscr{E}^S, \forall\Lambda \in \mathscr{S}$.
Luego:

$$\mu\lambda_\Lambda \left(\rho_\Lambda^\Phi \neq \rho_\Lambda^\Psi\right) = 0, \forall\Lambda \in \mathscr{S}. \tag{2.36}$$

Sea w tal que $\rho_\Lambda^\Phi (w) = \rho_\Lambda^\Psi (w)$.
Por lo visto al demostrar que (ii) $\Rightarrow$ (i) en la demostración de la Proposición 2.4.1 tenemos:

$$H_\Lambda^{\Phi-\Psi} (w) = \log \left(\frac{Z_\Lambda^\Psi (w)}{Z_\Lambda^\Phi (w)}\right)$$

Pero Z_Λ^Ψ y Z_Λ^Φ son $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$- medibles. Entonces: $\exists\phi_\Lambda : E^{S\setminus\Lambda} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}$-medible tal que:

$$H_\Lambda^{\Phi-\Psi} (w) = \phi_\Lambda \left(w_{S\setminus\Lambda}\right)$$

para todo w tal que $\rho_\Lambda^\Phi (w) = \rho_\Lambda^\Psi (w)$.
Por la ecuación 2.36 se tiene entonces:

$$\left(\lambda^\Lambda \sigma_{S\setminus\Lambda} (\mu)\right) \left(\left\{(\xi, \eta) \in E^\Lambda \times E^{S\setminus\Lambda} / H_\Lambda^{\Phi-\Psi} (\xi\eta) = \phi_\Lambda (\eta)\right\}\right) = 1$$

De donde:

$$\left(\lambda^\Lambda \lambda^\Lambda \sigma_{S\setminus\Lambda} (\mu)\right) \left(\left\{(\xi, \zeta, \eta) \in E^\Lambda \times E^\Lambda \times E^{S\setminus\Lambda} / H_\Lambda^{\Phi-\Psi} (\xi\eta) = H_\Lambda^{\Phi-\Psi} (\zeta\eta)\right\}\right) = 1 \tag{2.37}$$

Afirmación 2.4.5 *μ es densa en todas partes.*

Supongamos esto probado.
Luego $\sigma_{S\setminus\Lambda} (\mu)$ es densa en todas partes y así lo es:

$$\lambda^\Lambda \lambda^\Lambda \sigma_{S\setminus\Lambda} (\mu) \tag{2.38}$$

(pues λ es densa en todas partes)

Como $H_\Lambda^{\Phi-\Psi}$ es continua se sigue que

$$\left\{(\xi,\zeta,\eta)\in E^\Lambda\times E^\Lambda\times E^{S\setminus\Lambda}/H_\Lambda^{\Phi-\Psi}(\xi\eta)\neq H_\Lambda^{\Phi-\Psi}(\zeta\eta)\right\} \tag{2.39}$$

es abierto.

Por las ecuaciones 2.37 y 2.38 debe ser que la ecuación 2.39 $=\emptyset$.

Luego, $H_\Lambda^{\Phi-\Psi}$ es $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$-medible, $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$ y así **(i)** está probada.

■

Demostración de la Afirmación 2.4.5 :

Sea $U\in\mathscr{F}$ abierto, no vacío $\Rightarrow \exists\Delta\in\mathscr{S}, V\subset E^\Delta$ abierto no vacio tal que $\sigma_\Delta^{-1}(V)\subset U$

Luego:

$$\mu(U)\geq\mu\left(\sigma_\Delta^{-1}(V)\right)=\sigma_\Delta(\mu)(V).$$

Probaremos ahora que

$$\sigma_\Delta(\mu)\equiv\lambda^\Delta \tag{2.40}$$

Sea $B\in\mathscr{E}^\Delta$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(\mu)(B) &= \mu\left(\sigma_\Delta^{-1}(B)\right)\\
&= \rho_\Delta^\Phi(\mu\lambda_\Delta)\left(\sigma_\Delta^{-1}(B)\right)\\
&= \int 1_{\sigma_\Delta^{-1}(B)}(w)\,\rho_\Delta^\Phi(w)\,(\mu\lambda_\Delta)(dw)\\
&= \int_{E^S}\int_{E^\Delta} 1_{\sigma_\Delta^{-1}(B)}\left(\xi y_{S\setminus\Delta}\right)\rho_\Delta^\Phi\left(\xi y_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^\Delta(d\xi)\,\mu(dy)\\
&= \int_{E^S}\int_B \rho_\Delta^\Phi\left(\xi y_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^\Delta(d\xi)\,\mu(dy).
\end{aligned}$$

De donde se sigue la equivalencia 2.40, teniendo en cuenta que $\rho_\Delta^\Phi(w)>0,\forall w\in E^S$.

Como λ es densa en todas partes, $\lambda^\Delta(V)>0$ por ser $V\subset E^\Delta$ abierto no vacío

$\therefore\ \sigma_\Delta(\mu)(V)>0$ por la equivalencia 2.40.

Luego, $\mu(U)>0$.

■

Teorema 2.4.1 *Sean $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ y $\Psi=(\Psi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ dos potenciales sobre $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$.*

Sea $\alpha\in\mathscr{P}(E,\mathscr{E})$ tal que $\Phi-\Psi$ es α-normalizado.

Supongamos que se cumple una de las dos siguientes condiciones:

(a) *$\exists a \in E$ tal que $\alpha = \delta_a$.*

(b) *$\Phi - \Psi$ es u. c..*

Entonces: $\Phi \sim \Psi \Rightarrow \Phi = \Psi$.

Demostración:
Supongamos: $\Phi \sim \Psi$.
Caso 1: $\Psi = 0$.
Luego, Φ es α-normalizado y uniformente convergente (u. c.).
Sea $x \in E^S$. Sean $\Phi_1 : \mathscr{S}^* \to \mathbb{R}$ y $\Phi_2 : \mathscr{S}^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\emptyset) &= \Phi_2(\emptyset) = 0. \\ \Phi_1(\Lambda) &= \Phi_\Lambda(x), \forall \Lambda \in \mathscr{S}. \\ \Phi_2(\Lambda) &= \alpha_{S\setminus\Lambda}\left(H_\Lambda^\Phi\right)(x). \end{aligned}$$

Afirmación 2.4.6 $\Phi_2(\Lambda) = \sum_{A\subset\Lambda} \Phi_1(A), \forall \Lambda \in \mathscr{S}^*$.

Supongamos probada esta Afirmación 2.4.6.
Por la fórmula de inversión de Möbius, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \Phi_1(A) \\ &= \sum_{\Lambda\subset A} (-1)^{\#(A\setminus\Lambda)} \Phi_2(\Lambda) \\ &= \sum_{\Lambda\subset A} (-1)^{\#(A\setminus\Lambda)} \alpha_{S\setminus\Lambda}\left(H_\Lambda^\Phi\right)(x) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Afirmación 2.4.7 $\alpha_{S\setminus\Lambda}\left(H_\Lambda^\Phi\right)(x) = \alpha^S\left(H_\Lambda^\Phi\right)\left(\forall x \in E^S\right)$

Supongamos probada esta Afirmación 2.4.7.
Por la ecuación 2.41 tenemos:

$$\Phi_A(x) = \sum_{\Lambda\subset A} (-1)^{\#(A\setminus\Lambda)} \alpha^S\left(H_\Lambda^\Phi\right) \tag{2.42}$$

Ahora, tanto bajo **(a)** como **(b)** se tiene:

$$\alpha^S\left(H_\Lambda^\Phi\right) = \alpha^S\left(\sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_\Delta\right) = \sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \alpha^S(\Phi_\Delta)$$

Ahora, cualquiera sea $\Delta \in \mathscr{S}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha^S(\Phi_\Delta) &= \int_{E^S} \Phi_\Delta(w)\,\alpha^S(dw) \\ &= \int_{E^{S\setminus\Delta}}\int_{E^\Delta} \Phi_\Delta\left(w_\Delta w_{S\setminus\Delta}\right)\alpha^\Delta(dw_\Delta)\,\alpha^{S\setminus\Delta}\left(dw_{S\setminus\Delta}\right) \\ &= \alpha_{S\setminus\Delta}(\alpha_\Delta(\Phi_\Delta)) = 0.\end{aligned}$$

pues Φ es α-normalizado. Luego, por la ecuación 2.42, tenemos: $\Phi_A(x) = 0$, para todo $x \in E^S, \forall A \in \mathscr{S}$.

Probamos así que $\Phi = 0 = \Psi$.

Caso 2: Ψ general.

De la misma Definición 2.4.1, se deduce que: $\Phi \sim \Psi \Rightarrow \Phi - \Psi \sim 0$. Por lo ya probado, tenemos entonces: $\Phi - \Psi = 0 \Leftrightarrow \Phi = \Psi$.

■

Demostración de la Afirmación 2.4.6 :

Ya sea bajo la hipótesis **(a)** o la hipótesis **(b)**, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi_2(\Lambda) &= \alpha_{S\setminus\Lambda}\left(H_\Lambda^\Phi\right)(x) \\ &= \alpha_{S\setminus\Lambda}\left(\sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda}\Phi_\Delta\right)(x) \\ &= \sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda}\alpha_{S\setminus\Lambda}(\Phi_\Delta)(x)\end{aligned} \tag{2.43}$$

Probemos ahora que

$$\sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda}\alpha_{S\setminus\Lambda}(\Phi_\Delta)(x) = \sum_{\Delta\subset\Lambda}\Phi_\Delta(x), \tag{2.44}$$

de donde, por la ecuación 2.43 y de la definición de Φ_1, seguirá la veracidad de la Afirmación 2.4.6.

Sea $\Delta \subset \Lambda$, entonces como Φ_Δ es $\mathscr{F}_\Delta$-medible, luego $\mathscr{F}_\Lambda$-medible por ser $\Delta \subset \Lambda$ tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_{S\setminus\Lambda}(\Phi_\Delta)(x) &= \textstyle\int_{E^{S\setminus\Lambda}}\Phi_\Delta(\xi x_\Lambda)\,\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi) \\ &= \textstyle\int_{E^{S\setminus\Lambda}}\Phi_\Delta\left(\xi x_{\Lambda\setminus\Delta}x_\Delta\right)\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi) \quad [\Phi_\Delta\mathscr{F}_\Delta\text{-medible}] \\ &= \Phi_\Delta(x)\textstyle\int_{E^{S\setminus\Lambda}}\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi) \\ &= \Phi_\Delta(x).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Sea ahora $\Delta \in \mathscr{S} \cap \Lambda$ con $\Delta \not\subset \Lambda \Rightarrow \exists s \in \Delta$ tal que $s \in S \setminus \Lambda$, entonces

$$\alpha_{S\setminus\Lambda}(\Phi_\Delta)(x) = \alpha_{S\setminus(\Lambda\cup\{s\})}\left(\alpha_{\{s\}}(\Phi_\Delta)\right)(x) = 0 \tag{2.46}$$

pues $\alpha_{\{s\}}(\Phi_\Delta) \equiv 0$ ya que $s \in \Delta$ y Φ es α-normalizado.
Así, por las ecuaciones 2.45 y 2.46, queda probada la ecuación 2.44.

■

Demostración de la Afirmación 2.4.7 :
Recordemos que estamos en el **Caso 1:** $\Psi = 0$..
Entonces, tanto bajo la hipótesis **(a)**, como en la hipótesis **(b)** se tiene que:

H_Λ^Φ es $\mathscr{F}_{S\setminus\Lambda}$-medible $\Rightarrow \exists c : E^{S\setminus\Lambda} \to \mathbb{R}, \mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}$-medible tal que $H_\Lambda^\Phi = c \circ \sigma_{S\setminus\Lambda}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha_{S\setminus\Lambda}\left(H_\Lambda^\Phi\right)(x) &= \int_{E^{S\setminus\Lambda}} H_\Lambda^\Phi(\xi x_\Lambda)\,\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi) \\
&= \int_{E^{S\setminus\Lambda}} c\left(\sigma_{S\setminus\Lambda}(\xi x_\Lambda)\right)\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi) \\
&= \int_{E^\Lambda} \alpha^\Lambda(d\zeta) \int_{E^{S\setminus\Lambda}} c\left(\sigma_{S\setminus\Lambda}(\xi x_\Lambda)\right)\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi) \\
&= \int_{E^\Lambda}\int_{E^{S\setminus\Lambda}} \left(c \circ \sigma_{S\setminus\Lambda}\right)(\xi\zeta)\,\alpha^{S\setminus\Lambda}(d\xi)\,\alpha^\Lambda(d\zeta) \\
&= \int_{E^S} \left(c \circ \sigma_{S\setminus\Lambda}\right)(w)\,\alpha^S(dw) \\
&= \int_{E^S} H_\Lambda^\Phi(w)\,\alpha^S(dw) \\
&= \alpha^S\left(H_\Lambda^\Phi\right).
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.4.1 *Sean: $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial tal que $\rho^\Phi = \left(\rho_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una λ-modificación quasi-local.*

Sea $a \in E$. Entonces: $\exists!$ potencial Ψ^a, δ_a-normalizado tal que $\Phi \sim \Psi^a$.

Demostración:

Por la Proposición 2.1.1, ρ^Φ es una pre-modificación positiva tal que $\lambda_\Lambda\left(\rho_\Lambda^\Phi\right) \equiv 1$. Como por hipótesis, ρ^Φ es quasi-local, la existencia de Ψ^a está asegurada por **(a)** del Teorema 2.3.1.

Finalmente, si Ψ_1^a, es otro potencial δ_a-normalizado tal que $\Phi \sim \Psi_1^a$, entonces $\Psi^a \sim \Psi_1^a$ y $\Psi^a - \Psi_1^a$ es δ_a-normalizado, entonces $\Psi^a = \Psi_1^a$ por el Teorema 2.4.1.

■

Corolario 2.4.2 *Sean:* $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial tal que* $\rho^\Phi = \left(\rho_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *es una* λ*-modificación quasi-local, u. c. y con* $H_\Lambda^\Phi \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S,\mathscr{E}^S,\mathbb{R}\right)$ $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$.

Sea $\alpha \in \mathscr{P}(E,\mathscr{E})$*. Entonces* $\exists!$ *potencial* Ψ^α, α*-normalizado,* λ*-admisible y u. c. tal que* $\Phi \sim \Psi^\alpha$.

Demostración:

Por la Proposición 2.1.1, ρ^Φ es una pre-modificación positiva tal que $\lambda_\Lambda\left(\rho_\Lambda^\Phi\right) \equiv 1, \forall\Lambda \in \mathscr{S}$. Como por hipótesis ρ^Φ es quasi-local y u. c., por **(b)** del Teorema 2.3.1, $\exists\Psi^\alpha$ potencial α-normalizado, λ-admisible y u. c. tal que $\Phi \sim \Psi^\alpha$.

Sea Ψ_1^α otro potencial α-normalizado, λ-admisible y u. c. tal que $\Phi \sim \Psi_1^\alpha \Rightarrow \Psi^\alpha \sim \Psi_1^\alpha, \Psi^\alpha - \Psi_1^\alpha$ es α-normalizado y u. c. $\Rightarrow \Psi^\alpha = \Psi_1^\alpha$ por el Teorema 2.4.1.

■

Proposición 2.4.4 *Sean:* $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial sobre* $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ *tal que* $\rho^\Phi = \left(\rho_\Lambda^\Phi\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *es una* λ*-modificación quasi-local.*

Para cada $\alpha \in \mathscr{P}(E,\mathscr{E}), A \in \mathscr{S}$ *y* $\Delta \in \mathscr{S}$ *con* $A \subset \Delta$ *sea* $\Psi_{A,\Delta}^\alpha : E^S \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\Psi_{A,\Delta}^\alpha(x) = \sum_{A\subset B\subset\Delta}\sum_{C\subset A}(-1)^{\#(A\setminus C)}\alpha_{S\setminus C}(\Phi_B)(x)$$

Supongamos que se cumple una de las dos siguientes condiciones:

(a) $\alpha = \delta_a$ *con* $a \in E$.

(b) Φ *es u. c. y* $H_\Lambda^\Phi \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S,\mathscr{E}^S,\mathbb{R}\right), \forall\Lambda\in\mathscr{S}$.

Entonces:

(1) *Para todo $x \in E^S$ y todo $A \in \mathscr{S}$, existe*

$$\Psi_A^\alpha(x) = \lim_{A \subset \Delta} \Psi_{A,\Delta}^\alpha(x)$$

y $\Psi^\alpha = (\Psi_A^\alpha)_{A \in \mathscr{S}}$ es un potencial α-normalizado tal que $\Phi \sim \Psi^\alpha$.

(2) *Además, bajo **(b)** Ψ^α es λ-admisible y uniformemente convergente (u. c.) .*

Demostración: Ejercicio.

Capítulo 3

El problema de la existencia de distribuciones de Gibbs adaptadas a especificaciones

3.1. Convergencia local de campos aleatorios

Notación 3.1.1 *Sea* $(E, \mathscr{E})$ *un espacio medible,* $S \subset \mathbb{Z}^2$ *(o* $S \subset \mathbb{Z}$*) infinito,* $\mathscr{S} = \{\Lambda \subset S / 1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}$.

Para cada $\Lambda \subset S$ *sean:*

$\sigma_\Lambda : E^S \to E^\Lambda$ *la proyección* $\sigma_\Lambda(w)(s) = w(s), \forall s \in \Lambda$.

$\mathscr{F}_\Lambda = \left\{\sigma_\Lambda^{-1}(B) / B \in \mathscr{E}^\Lambda\right\}$

Sea $\mathscr{F}_0 = \bigcup_{\Lambda \in \mathscr{S}} \mathscr{F}_\Lambda$

Entonces $\mathscr{F}_0$ *es una álgebra sobre* E^S *y la* σ*-álgebra* $\mathscr{E}^S = \mathscr{F}$ *está generada por* $\mathscr{F}_0$.

Para cada $\mu \in \mathscr{P} = \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$ *(conjunto de todas las probabilidades sobre* $\mathscr{E}^S$*),* $n \geq 1, A_1, \ldots, A_n$ *en* $\mathscr{F}_0$ *y* $\epsilon > 0$ *sea:*

$A(\mu; A_1, \ldots, A_n, \epsilon) = \left\{\nu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right) / \left|\mu(A_k) - \nu(A_k)\right| < \epsilon, 1 \leq k \leq n\right\}$.

Proposición 3.1.1 *Sea* $\mathscr{T}_\mathscr{L}$ *la familia de subconjuntos de* $\mathscr{P}$ *definida por:*

$$\mathscr{T}_\mathscr{L} := \{\mathbb{A} / \mu \in \mathbb{A} \Leftrightarrow \exists n \geq 1, A_1, \ldots, A_n \text{ en } \mathscr{F}_0, \epsilon > 0 \text{ tales que } A(\mu; A_1, \ldots, A_n, \epsilon) \subset \mathbb{A}\}$$

Entonces $\mathscr{T}_\mathscr{L}$ *es una topología sobre* $\mathscr{P}$*, llamada topología de la convergencia local o simplemente la* $\mathscr{L}$*-topología.*

Demostración: Ejercicio.

Notación 3.1.2 *Recordemos las notaciones del inicio de la Sección 2.2. Además, para cada* $\mu \in \mathscr{P}, n \geq 1, f_1, \ldots, f_n$ *en* $\mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R}\right)$ *y* $\epsilon > 0$ *sea*

$$A(\mu; f_1, \ldots, f_n, \epsilon) = \left\{\nu \in \mathscr{P} / \left|\int_{E^S} f_i(w)\,\mu(dw) - \int_{E^S} f_i(w)\,\nu(dw)\right| < \epsilon, \forall 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Proposición 3.1.2 *Sea* τ *la familia de subconjuntos de* $\mathscr{P} = \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$ *dada por:*

$$\tau = \left\{\mathbb{A} / \mu \in \mathbb{A} \Rightarrow \exists n \geq 1; f_1, \ldots, f_n \text{ en } \bar{\mathscr{L}}; \epsilon > 0 \text{ tales que } A(\mu; A_1, \ldots, A_n, \epsilon) \subset \mathbb{A}\right\}.$$

Entonces τ *es una topología sobre* $\mathscr{P} = \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$.

Demostración: Ejercicio.

Nota 3.1.1 *Para definir la función* $T_f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$, *sean* $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right), f \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{E}^S, \mathbb{R}\right)$

Ponemos $T_f(\mu) := \int f d\mu$.

Es fácil ver que: τ es la mínima topología sobre $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$ tal que para $f \in \bar{\mathscr{L}}$, T_f es continua.

Proposición 3.1.3 *Sean* $\mathscr{T}_{\mathscr{L}}$ *y* τ *las topologías sobre* $\mathscr{P}$ *definidas en las Proposiciónes 3.1.1 y 3.1.2 respectivamente. Entonces* $\mathscr{T}_{\mathscr{L}}$ *y* τ *son equivalentes* ($\mathscr{T}_{\mathscr{L}} \equiv \tau$).

Demostración:

Como $A(\mu; A_1, \ldots, A_n, \epsilon) = A(\mu; 1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}, \epsilon)$ para toda $\mu \in \mathscr{P}, A_1, \ldots, A_n$ en $\mathscr{F}_0$ y $\epsilon > 0$, se tiene que $\mathscr{T}_{\mathscr{L}} \prec \tau$ (Notemos que $A \in \mathscr{F}_0 \Rightarrow 1_A \in \mathscr{L}$).

Recíprocamente, sea $f \in \bar{\mathscr{L}}, \epsilon > 0$.

Entonces $\exists \Lambda \in \mathscr{S}; n \geq 1; A_1, \ldots, A_n$ en $\mathscr{F}_\Lambda$; $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathbb{R}$ tales que:

(1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$.

(2) Si $g = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$, entonces $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{4}$.

Sea

$$\delta = \frac{\epsilon}{2\sum_{k=1}^n |a_k|}.$$

Probaremos que: $v \in A(\mu; A_1, \ldots, A_n, \delta) \Rightarrow v \in A(\mu; f, \epsilon)$ con lo que quedará probado que $\tau \prec \mathscr{T}_{\mathscr{L}}$.

Sea $v \in A(\mu; A_1, \ldots, A_n, \delta)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int f d\mu - \int f dv\right| &= \left|\left(\int f d\mu - \int g d\mu\right) + \left(\int g dv - \int f dv\right) + \left(\int g d\mu - \int g dv\right)\right| \\
&\leq \left|\int f d\mu - \int g d\mu\right| + \left|\int g dv - \int f dv\right| + \sum_{k=1}^{n} |a_k| \left|\mu(A_k) - v(A_k)\right| \\
&\leq 2\|f-g\|_\infty + \sum_{k=1}^{n} |a_k| \frac{\epsilon}{2\sum_{k=1}^{n}|a_k|} \\
&< 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

■

Sea (E,d) un espacio métrico separable, $\mathscr{E}$ su σ-álgebra de Borel. Sea $\underline{d}$: $E^S \times E^S \to \mathbb{R}$ la métrica sobre E^S dada por (suponiendo $S = \{s_1, s_2, , \ldots\}$):

$$\underline{d}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x(s_n), y(s_n))}{1 + d(x(s_n), y(s_n))}$$

Como sabemos, demostración de la Proposición 2.2.2, se tiene que la topología producto sobre E^S coincide con la inducida por la métrica $\underline{d}$ y que por ser E separable, la σ-álgebra de Borel sobre E^S inducida por $\underline{d}$, coincide con la σ-álgebra producto $\mathscr{E}^S$.

Sea ahora $CB_{\underline{d}}(E^S, \mathbb{R}) := \{f : E^S \to \mathbb{R}/f \text{ es acotada y } \underline{d} - \text{continua}\}$.

Notación 3.1.3 *Sea $\mu \in \mathscr{P} = \mathscr{P}(E^S, \mathscr{E}^S)$, $f_1, \ldots, f_n$ en $CB_{\underline{d}}(E^S, \mathbb{R})$, $\epsilon > 0$. Ponemos:*

$$C(\mu; f_1, \ldots, f_n, \epsilon) := \left\{ v \in \mathscr{P} / \left| \int_{E^S} f_i d\mu - \int_{E^S} f_i dv \right| < \epsilon, \forall 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Proposición 3.1.4 *Sea $\tau_{W\underline{d}}$ la familia de subconjuntos de $\mathscr{P}$ dada por:*

$$\tau_{W\underline{d}} = \{\mathbb{A} \subset \mathscr{P}/\mu \in \mathbb{A} \Leftrightarrow \exists n \geq 1, f_1, \ldots, f_n \text{ en } CB_{\underline{d}}(E^S, \mathbb{R}) \text{ y } \epsilon > 0 \text{ tal que } C(\mu; f_1, \ldots, f_n, \epsilon) \subset \mathbb{A}\}$$

Entonces $\tau_{W\underline{d}}$ es una topología para $\mathscr{P}$ llamada la topología débil sobre $\mathscr{P}(E^S, \mathscr{E}^S)$ inducida por $\underline{d}$

Demostración: Ejercicio.

Proposición 3.1.5 *Sea E numerable, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ la métrica discreta, más precisamente:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$

Entonces $\mathscr{T}_{\mathscr{L}} \prec \tau_{W\underline{d}}$.

Demostración:
Basta ver que: si $\mu \in \mathscr{P}, f \in \bar{\mathscr{L}}, \epsilon > 0$ entonces $A(\mu; f, \epsilon)$ es $\tau_{W\underline{d}}$-abierto. Lo que sigue, fácilmente de la siguente afirmación.

Afirmación 3.1.1 *$f \in \bar{\mathscr{L}}, \underline{x} \in E^S \Rightarrow f$ es $\underline{d}$-continua en $\underline{x}$.*

Demostración: Ejercicio. (recomendado).

Proposición 3.1.6 *Si (E,d) es métrico compacto, entonces $\tau_{W\underline{d}} \prec \mathscr{T}_{\mathscr{L}}$.*

Demostración:
Sigue por el hecho de que $\left(E^S, \underline{d}\right)$ es compacto $\Rightarrow$ si $f : E^S \to \mathbb{R}$ es continua es uniformemente continua $\Rightarrow f \in \overline{\mathscr{L}}$ (si además es acotada) (Proposición 2.2.2)

Proposición 3.1.7 *Si E es finito, entonces $\tau_{W\underline{d}} \equiv \mathscr{T}_{\mathscr{L}}$.*

Demostración:
Sigue por la Proposición 2.2.3.

■

3.2. Existencia de puntos de clausura

Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio medible. Sean : $S, \mathscr{S}$ y $\mathscr{F}$ como en la Sección anterior.

El problema que trataremos en esta Sección es el siguiente:

Si $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ es una red en $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$, ¿Cuándo esta red tiene un punto de clausura con respecto a la $\mathscr{L}$-topología?

Proposición 3.2.1 *Sea $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{P}$ que tiene un punto de clausura, μ, con respecto a la $\mathscr{L}$-topología. Entonces, es válida la siguiente implicación:*

$(A_m)_{m\geq 1}$ *sucesión en $\mathscr{F}_0$ tal que $A_1 \supset A_2 \dots$ y $\bigcap_{m\geq 1} A_m = \emptyset$*

$$\Rightarrow \text{lím}_{m\to\infty} \sup_{\gamma_0\in\Gamma} \text{ínf}_{\gamma\succcurlyeq\gamma_0} \mu_\gamma (A_m) = 0.$$

(esto también se denota por: $\text{lím}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma (A_m)$)

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Como $A_1 \supset A_2 \ldots, \bigcap_{m\geq 1} A_m = \emptyset$ y $\mu \in \mathscr{P}, \exists m_0/m \geq m_0 \Rightarrow \mu(A_m) < \epsilon/2$.

Sea $m \geq m_0$. Como μ es punto de $\mathscr{L}$-clausura de $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ y $A(\mu, A_m, \epsilon/2)$ es un $\mathscr{L}$-entorno de μ, para todo $\gamma_0 \in \Gamma, \exists\gamma \in \Gamma$ con $\gamma \succcurlyeq \gamma_0$ tal que $\mu_\gamma \in A(\mu, A_m, \epsilon/2) \Rightarrow \mu_\gamma (A_m) \leq |\mu_\gamma (A_m) - \mu(A_m)| + \mu(A_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Luego:

$$\text{lím}_{m\to\infty} \sup_{\gamma_0\in\Gamma} \text{ínf}_{\gamma\succcurlyeq\gamma_0} \mu_\gamma (A_m) < \epsilon$$

De donde:

$$\text{lím}_{m\to\infty} \sup_{\gamma_0\in\Gamma} \text{ínf}_{\gamma\succcurlyeq\gamma_0} \mu_\gamma (A_m) = 0.$$

■

Definición 3.2.1 *Sea $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ es una red en $\mathscr{P}$. Se dice que es localmente equicontinua (l. e.) si: para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $(A_m)_{m\geq 1}$ en $\mathscr{F}_\Lambda$ con $A_m \downarrow \emptyset$ se cumple:*

$$\text{lím}_{m} \overline{\lim_{\gamma\in\Gamma}} \mu_\gamma (A_m) = \text{lím}_{m\to\infty} \text{ínf}_{\gamma_0\in\Gamma} \sup_{\gamma\succcurlyeq\gamma_0} \mu_\gamma (A_m) = 0$$

Definición 3.2.2 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio medible. Se dice que es un espacio de Borel estándar, si existe una métrica d sobre E tal que (E, d) es métrico separable y completo, y tal que $\mathscr{E}$ es la σ-álgebra de Borel con respecto a d.*

Proposición 3.2.2 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio medible. Consideramos la Notación 3.1.1. Para cada $\mu \in \mathscr{P}(E^S, \mathscr{F})$ sea $\mu_0 \in \mathscr{P}(E^S, \mathscr{F}_0)$ la restricción de μ a $\mathscr{F}_0$. Sea $\mu_0 \in \mathscr{P}(E^S, \mathscr{F}_0) \Rightarrow$ para cada $A \in \mathscr{F}_0, \mu_0(A)$ está en $[0,1]$. Luego, $\mathscr{P}(E^S, \mathscr{F}_0)$ es un subconjunto de $[0,1]^{\mathscr{F}_0}$. Consideremos a $[0,1]$ con la topología usual y a $\mathscr{P}(E, \mathscr{F}_0)$ con la topología relativa de $[0,1]^{\mathscr{F}_0}$. Notemos que $[0,1]^{\mathscr{F}_0}$ es compacto con la topología producto que es la de la convergencia puntual. Sea $\pi : \mathscr{P}(E^S, \mathscr{F}) \to \mathscr{P}(E^S, \mathscr{F}_0)$ dada por:*

$$\pi(\mu) = \mu_0$$

Entonces, π es un homeomorfismo, considerando a $\mathscr{P}(E^S, \mathscr{F})$ con la $\mathscr{L}$-topología. Luego $\tau_{\mathscr{L}}$ es Hausdorff.

Demostración: Ejercicio. (**Ayuda:** para probar que π es biyectiva, usar el Teorema de Extensión de Caratheodory o el Teorema A en [Hal50])

Proposición 3.2.3 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar. Si $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ es una red en $\mathscr{P} = \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ l.e., entonces $\exists \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ tal que μ es punto de clausura de esa red, con respecto a la $\mathscr{L}$-topología.*

Demostración:

Sea $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ es una red en $\mathscr{P} = \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ l.e..

Sea $\pi : \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) \to \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}_0\right)$ como en la Proposición 3.2.2. Luego, $(\pi(\mu_\gamma), \Gamma, \succcurlyeq)$ es una red en $[0,1]^{\mathscr{F}_0}$ que es compacto en la topología de la convergencia puntual, $\Rightarrow \mu_0 \in [0,1]^{\mathscr{F}_0}$ tal que μ_0 es punto de clausura de $(\pi(\mu_\gamma), \Gamma, \succcurlyeq) \Rightarrow \exists (\pi(\mu_\gamma), L, \succcurlyeq)$ que es una subred de $(\pi(\mu_\gamma), \Gamma, \succcurlyeq)$ y tal que:

$$\pi(\mu_\gamma) \underset{\gamma \in L}{\longrightarrow} \mu_0 \tag{3.1}$$

en la topología de la convergencia puntual.

Afirmación 3.2.1 *Sean: $\Lambda \in \mathscr{S}, \mu_{0,\Lambda}$ la restricción de μ_0 a $\mathscr{F}_\Lambda$, entonces $\mu_{0,\Lambda} \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right)$.*

Supongamos probada esta afirmación.

Es de observar, que es cierta:

$\Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}$ y $A \in \mathscr{F}_\Lambda (\subset \mathscr{F}_\Delta) \Rightarrow \mu_{0,\Delta}(A) = \mu_0(A) = \mu_{0,\Lambda}(A)$.

Luego, por el Teorema de Kolmogorov (ver por ejemplo Theorem 5.1 de la pg. 144 de [Par67]) existe $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ tal que $\mu_{0,\Lambda}(A) = \mu(A) \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Luego, para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $A \in \mathscr{F}_\Lambda, \mu_\gamma(A) \underset{\gamma \in L}{\longrightarrow} \mu(A) \Rightarrow (\mu_\gamma)_{\gamma \in L}$ converge en la $\mathscr{L}$-topología a μ.

$\blacksquare$

Demostración de la Afirmación 3.2.1:

Es evidente que $\mu_{0,\Lambda}$ es finita y no negativa.

Además:

Si $A, B \in \mathscr{F}_\Lambda$ y $A \cap B = \emptyset$, tenemos:

$$\pi(\mu_\gamma)(A \cup B) = \pi(\mu_\gamma)(A) + \pi(\mu_\gamma)(B) \forall \gamma \in \Gamma$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_0 (A \cup B) &= \lim_{\gamma \in L} \pi(\mu_\gamma)(A \cup B) \\
&= \lim_{\gamma \in L} (\pi(\mu_\gamma)(A) + \pi(\mu_\gamma)(B)) \\
&= \mu_0 (A) + \mu_0 (B) .
\end{aligned}$$

Por el Theorem F, pg. 39 de [Hal50], bastaría ver que $\mu_{0,\Lambda}$ es continua por arriba en $\emptyset$, esto es, que se verfica las siguiente aplicación:

$$(A_m)_{m \geq 1} \text{ sucesión en } \mathscr{F}_\Lambda \text{ tal que } A_m \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu_{0,\Lambda}(A_m) \underset{m}{\longrightarrow} 0. \tag{3.2}$$

Ahora, como vale la ecuación 3.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_m \mu_{0,\Lambda}(A_m) &= \lim_m \lim_{\gamma \in L} \pi(\mu_\gamma)(A_m) \\
&\leq \lim_m \overline{\lim_{\gamma \in \Gamma}} \mu_\gamma (A_m) = 0.
\end{aligned}$$

pues, $(\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ es l.e..

Luego, la ecuación 3.2 está demostrada y con ello la Afirmación 3.2.1 también queda probada.

■

Definición 3.2.3 *Sea $R = (\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{P}(E^S, \mathscr{F}), \Lambda \in \mathscr{S}$. Se dice que R está uniformemente dominada por una medida finita $\nu_\Lambda \in \mathscr{M}(E^S, \mathscr{F}_\Lambda)$ sobre $\mathscr{F}_\Lambda$, si dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\overline{\lim}_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma(A) < \epsilon$, para todo $A \in \mathscr{F}_\Lambda$ con $\nu_\Lambda(A) < \delta$.*

Si R está uniformemente dominada sobre $\mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$, diremos que R está localmente uniformemente dominada (l.u.d.)

Proposición 3.2.4 *Sea $R = (\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{P}(E^S, \mathscr{F})$. Si R está l. u. d., entonces R es l.e..*

Demostración:

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$ y sea $(A_m)_{m \geq 1}$ en $\mathscr{F}_\Lambda$ tal que $A_m \downarrow \emptyset$.

Sea $\nu_\Lambda \in \mathscr{M}(E^S, \mathscr{F}_\Lambda)$ que cumple con la condición de la Definición 3.2.3.

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $A \in \mathscr{F}_\Lambda, \nu_\Lambda(A) < \delta \Rightarrow \overline{\lim}_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma(A) < \epsilon$.

Como $A_m \downarrow \phi$ y ν_Λ es finita, $\exists m_0$ tal que

$$m \geq m_0 \Rightarrow \nu_\Lambda (A_m) < \delta \Rightarrow 0 \leq \overline{\lim_{\gamma \in \Gamma}} \mu_\gamma (A_m) < \epsilon.$$

Por lo tanto, dada la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ se tiene:

$$\lim_m \overline{\lim_{\gamma \in \Gamma}} \mu_\gamma (A_m) = 0$$

■

Corolario 3.2.1 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar. Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea ν_Λ una medida finita sobre $\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right)$.*

Sea $\mathscr{K} = \left\{\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) / \mu(A) \leq \nu_\Lambda(A), \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}\right\}$. Entonces $\mathscr{K}$ es $\mathscr{L}$-compacto (compacto con respecto a la $\mathscr{L}$-topología).

Demostración:

Sea $R = (\mu_\gamma, \Gamma, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{K} \Rightarrow \mu_\gamma(A) < \epsilon, \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda$ tal que $\nu_\Lambda(A) < \epsilon \Rightarrow R$ está uniformemente dominada por $\nu_\Lambda \Rightarrow R$ es l. e. $\Rightarrow$ por la Proposición 3.2.3, $\exists \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ tal que μ es punto de clausura de R. Como $\mathscr{K}$ es $\mathscr{L}$-cerrado $\Rightarrow \mu \in \mathscr{K}$.

Luego, hemos probado que toda red en $\mathscr{K}$ tiene un punto de clausura en $\mathscr{K} \Rightarrow \mathscr{K}$ es compacto.

■

Proposición 3.2.5 *Sean: $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ finita, $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una λ-modificación tal que $\rho_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$ para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$, y sea $\gamma = \rho\lambda_.$.*

Entonces: para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, existe $\nu_\Lambda \in \mathscr{M}\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right)$ finita tal que $\mathscr{G}(\gamma) \subset \mathscr{K} := \left\{\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) / \mu(A) \leq \nu_\Lambda(A), \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}\right\}$

Demostración:

Sea $A \in \mathscr{F}_\Lambda$. Por la Proposición 1.3.4 tenemos: $\mu \in \mathscr{G}(\gamma) \Rightarrow \mu = \rho_\Lambda(\mu\lambda_\Lambda) \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Sean $C \in \mathscr{E}^\Lambda$ tal que $A = \sigma_\Lambda^{-1}(C)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \rho_\Lambda(\mu\lambda_\Lambda)(A) \\
&= \int_A \rho_\Lambda(w)(\mu\lambda_\Lambda)(dw) \\
&\leq \|\rho_\Lambda\|_\infty (\mu\lambda_\Lambda)(A) \\
&= \|\rho_\Lambda\|_\infty \int \left(\lambda^\Lambda \delta_{w_{S\setminus\Lambda}}\right)(A)\,\mu(dw) \\
&= \|\rho_\Lambda\|_\infty \lambda^\Lambda(C)
\end{aligned}$$

Sea, entonces: $\nu_\Lambda : \mathscr{F}_\Lambda \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\nu_\Lambda(A) = \lambda^\Lambda(C)\,\|\rho_\Lambda\|_\infty \text{ si } A = \sigma_\Lambda^{-1}(C)$$

Entonces:

$$\mu(A) \leq \nu_\Lambda(A)\,\forall A \in \mathscr{F}_\Lambda$$

Esto es: $\mu \in \mathscr{K}$.

■

Corolario 3.2.2 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar y sean λ, ρ y γ como en la Proposición 3.2.5. Entonces: $\mathscr{G}(\gamma)$ es $\mathscr{L}$-relativamente compacto.*

Demostración:
Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\nu_\Lambda \in \mathscr{M}\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right)$ (finita) como en la Proposición 3.2.5. Sea $\mathscr{K}$ como en esa Proposición. Por esta misma proposición $\mathscr{G}(\gamma) \subset \mathscr{K}$ y por el Corolario 3.2.1, $\mathscr{K}$-compacto $\Rightarrow \mathscr{G}(\gamma)$ es $\mathscr{L}$-relativamente compacto.

Proposición 3.2.6 *Sea E con $\#(E) < \infty$ y $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$. Sea $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & caso\ contrario \end{cases}$$

Entonces, d es una métrica sobre E y la σ-álgebra de Borel asociada a la topología inducida por d coincide con $\mathscr{E}$. Luego, $(E, \mathscr{E})$ es un espacio de Borel estándar.

Se cumplen:

(a) *$\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ es $\mathscr{L}$-compacto.*

Sea $\{\Lambda(n) / n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión cofinal en $\mathscr{S}$.

(b) *Sea $d_1 : \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) \times \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) \to [0, +\infty)$ dada por:*

$$d_1(u, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \sum_{\xi \in E^{\Lambda(n)}} \left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) - \nu\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right)\right|.$$

Entonces d_1 es una métrica sobre $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ y $\tau_{d_1} \equiv \tau_{\mathscr{L}}$.

(c) *Sea* $d_2 : \mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right) \times \mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right) \to [0,+\infty)$ *dada por:*

$$d_2(\mu,\nu) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \max_{\xi\in E^{\Lambda(n)}} \left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right) - \nu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right)\right|.$$

Entonces, d_2 *es una métrica sobre* $\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ *y* $\tau_{d_2} \equiv \tau_{\mathscr{L}}$.

Demostración:
Parte (a)
Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\nu_\Lambda : \mathscr{F}_\Lambda \to [0,+\infty)$ dada por:

$$\nu_\Lambda(A) = \#(B) \text{ si } A = \{\sigma_\Lambda \in B\} = \sigma_\Lambda^{-1}(B), \Lambda \in \mathscr{F}_\Lambda$$

Entonces, ν_Λ es una medida sobre $\left(E^S,\mathscr{F}_\Lambda\right)$. Ahora, si $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)$, entonces $\mu(A) \leq 1 \forall A \in \mathscr{F} \Rightarrow$
$\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right) = \mathscr{K} = \left\{\mu \in \mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right) / \mu(A) \leq \nu_\Lambda(A), A \in \mathscr{F}_\Lambda, \Lambda \in \mathscr{S}\right\}$, y por el Corolario 3.2.1, $\mathscr{K}$ es $\mathscr{L}$-compacto.

Parte (b)
Es fácil ver que:

$$\mu,\nu \text{ en } \mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right) \Rightarrow \sum_{\xi\in E^{\Lambda(n)}} \left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right) - \nu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right)\right| \leq 2 \qquad (3.3)$$

para todo $n = 1,2,\ldots$.

Luego, $d_1(\mu,\nu) < \infty, \forall \mu,\nu$ en $\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)$.

Para probar que d_1 es una métrica, la única propiedad que es menos evidente es la siguiente:

$$d_1(\mu,\nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu \qquad (3.4)$$

Por el Teorema A pág. 54 de [Hal50], basta ver que:

$$\Lambda \in \mathscr{S}, A \in \mathscr{F}_\Lambda \Rightarrow \mu(A) = \nu(A) \qquad (3.5)$$

Sean entonces $\Lambda \in \mathscr{S}$ y $A \in \mathscr{F}_\Lambda$.

Como $\{\Lambda(n)/n \geq 1\}$ es cofinal, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \subset \Lambda(n) \Rightarrow A \in \mathscr{F}_{\Lambda(n)} \Rightarrow \exists C \in \mathscr{E}^{\Lambda(n)}$ tal que $A = \sigma_{\Lambda(n)}^{-1}(C)$. Luego:

$$A = \cup_{\xi\in C}\left\{\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right\}$$

Luego, por la definición de d_1 y por ser $d_1(\mu,\nu) = 0$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\mu(A) - \nu(A)| &= \left| \sum_{\xi \in C} \left(\mu\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) - \nu\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right)\right) \right| \\
&\leq \sum_{\xi \in C} \left| \mu\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) - \nu\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) \right| = 0
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación 3.5 está demostrada.

■

Veamos ahora

$$\tau_{d_1} \prec \tau_{\mathscr{L}} \tag{3.6}$$

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Sea $n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1(\epsilon) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2 < \epsilon/2. \tag{3.7}$$

Sea $n \geq n_1(\epsilon)$. Por las ecuaciones 3.5 y 3.7 tenemos:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{\xi \in \Lambda(k)} \left| \mu\left(\sigma_{\Lambda(k)} = \xi\right) - \nu\left(\sigma_{\Lambda(k)} = \xi\right) \right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.8}$$

cualesquiera sean μ y ν en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

Sea $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

Sea ahora $\delta > 0$ tal que

$$\delta \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.9}$$

Para cada $k = 1, \ldots, n$ sea

$$n_k = \#\left(E^{\Lambda(k)}\right)$$

Sea $n_0 = \max\{n_k / k = 1, \ldots, n\}$. Sea $\eta = \frac{\delta}{n_0}$. Para cada $k = 1, \ldots, n$ pongamos:

$$E^{\Lambda(k)} = \{\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,n_k}\}$$

Para cada $k = 1, \ldots, n$ y cada $j = 1, \ldots, n_k$ sea

$$A_{k,j} = \left\{x \in E^S / \sigma_{\Lambda(k)}(x) = \xi_{k,j}\right\} \left(= \left\{\sigma_{\Lambda(k)} = \xi_{k,j}\right\}\right)$$

Sea $\nu \in A\left(\mu; \{A_{k,j}/k=1,\ldots,n; j=1,\ldots,n_k\}, \eta\right)$, entonces

$$\left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(k)}=\xi\right)-\nu\left(\sigma_{\Lambda(k)}=\xi\right)\right|<\eta$$

para todo $k=1,\ldots,n$ y todo $j=1,\ldots,n_k$.

Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones 3.8 y 3.9 tenemos:

$$\begin{aligned}
d_1(\mu,\nu) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{\xi\in\Lambda(k)}\left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(k)}=\xi\right)-\nu\left(\sigma_{\Lambda(k)}=\xi\right)\right| \\
&< \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{\xi\in\Lambda(k)}\left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(k)}=\xi\right)-\nu\left(\sigma_{\Lambda(k)}=\xi\right)\right|+\frac{\epsilon}{2} \\
&< \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}n_k\eta+\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}n_k\frac{\delta}{n_0}+\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\delta+\frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.
\end{aligned}$$

De donde:
$A\left(\mu; \{A_{k,j}/k=1,\ldots,n; j=1,\ldots,n_k\}, \eta\right)\subset B_1(\mu,\epsilon)$
(con $B_1(\mu,\epsilon):=\left\{\nu\in\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)/d_1(\mu,\nu)<\epsilon\right\}$)
Luego, la ecuación 3.6 queda probada.
Probaremos ahora que:

$$\mathscr{T}_{\mathscr{L}}\prec\tau_{d_1} \tag{3.10}$$

Sean: $\Lambda\in\mathscr{S}, A\in\mathscr{F}_\Lambda$ y $\epsilon>0$.
Como $(\Lambda(k))_{k\geq1}$ es cofinal, $\exists n\in\mathbb{N}/\Lambda\subset\Lambda(n)$.
Luego, cualesquiera sean μ y ν en $\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ se cumple:

$$|\mu(A)-\nu(A)|\leq\sum_{\xi\in E^{\Lambda(n)}}\left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right)-\nu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right)\right| \tag{3.11}$$

Sea $\delta=\epsilon2^{-n}$.
Supongamos $d_1(\mu,\nu)<\delta$, entonces:

$$2^{-n}\sum_{\xi\in E^{\Lambda(n)}}\left|\mu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right)-\nu\left(\sigma_{\Lambda(n)}=\xi\right)\right|<\delta$$

Luego, por la ecuación 3.11, tenemos

$$|\mu(A) - \nu(A)| < 2^n\delta = \epsilon$$

Luego, $B_1(\mu, \delta) \subset A(\mu; A; \epsilon)$
Luego, la ecuación 3.10 queda probada.
La parte (c) queda como ejercicio.

■

Definición 3.2.4 *Sea $R = (\Lambda_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{S}$. Diremos R converge a S , en símbolos $\Lambda_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathscr{D}]{} S$, si $\{\Lambda_\alpha / \alpha \in \mathscr{D}\}$ es cofinal en $\mathscr{S}$. Esto es, para cada $\Lambda \in \mathscr{S}, \exists \alpha_0 \in \mathscr{D}$ tal que $\Lambda \subset \Lambda_\alpha \forall \alpha \succcurlyeq \alpha_0$.*

Notación 3.2.1 *Sean: $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar; $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}); (\mathscr{D}, \succcurlyeq)$ un conjunto dirigido por la relación de orden parcial $\succcurlyeq$ entre los elementos de $\mathscr{D}$ (es decir, es una relación de orden parcial tal que: $\alpha \in \mathscr{D}, \beta \in \mathscr{D}$ entonces existe $\gamma \in \mathscr{D}$ tal que $\gamma \succcurlyeq \alpha$ y $\gamma \succcurlyeq \beta$). Para cada $\alpha \in \mathscr{D}$, sean: $\nu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right), \rho_\Lambda^\alpha : E^S \to [0, +\infty)\ \mathscr{F}$-medible, $\gamma_\Lambda^\alpha := \rho_\Lambda^\alpha \lambda_\Lambda$ para todo $\Lambda \in$ de modo que $\gamma^\alpha := (\gamma_\Lambda^\alpha)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ sea una λ-especificación y $\mu_\alpha := \nu_\alpha \gamma_{\Lambda_\alpha}^\alpha \left(\therefore \mu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)\right)$.*

Teorema 3.2.1 *Consideremos la Notación 3.2.1 y supongamos que:*

(i) $\Lambda_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathscr{D}]{} S$.

(ii) *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $\epsilon > 0$ existen: $B(\Lambda, \epsilon) \in \mathscr{F}$ y $B_\Lambda(\epsilon) \in \mathscr{E}^\Lambda$ tales que:*

   (ii.1) $B(\Lambda, \epsilon) \subset \sigma_\Lambda^{-1}(B_\Lambda(\epsilon))$.

   (ii.2) $\lambda^\Lambda(B_\Lambda(\epsilon)) < \infty$.

   (ii.3) $\overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}} \sup\{\rho_\Lambda^\alpha(x) / x \in B(\Lambda, \epsilon)\} < \infty$

   (ii.4) $\overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}} \mu_\alpha\left(E^S \setminus B(\Lambda, \epsilon)\right) \leq \epsilon$

Entonces: $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ es una red en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que es l.e..

Demostración:

Sean: $\Lambda \in \mathscr{S}, (A_m)_{m\geq1}$ en $\mathscr{F}_\Lambda$ con $A_m \downarrow \emptyset$. Para cada $m \geq 1$, como $A_m \in \mathscr{F}_\Lambda, \exists A_{m,\Lambda} \in \mathscr{E}^\Lambda$ tal que

$$A_m = \sigma_\Lambda^{-1}(A_{m,\Lambda})$$

Sea $\epsilon > 0$.

Afirmación 3.2.2 $\overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}}\,\mu_\alpha\left(A_m\right) \leq \overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}}\,\mu_\alpha\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right)+\epsilon.$

Esto sigue de **(ii.4)**.
Como $\Lambda_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathscr{D}]{} S, \exists\alpha_0\in D$ tal que $\alpha\succcurlyeq\alpha_0 \Rightarrow \Lambda_\alpha\supset\Lambda$.
Sea $\alpha\succcurlyeq\alpha_0$.
Como $\left(\gamma^\alpha_\Delta\right)_{\Delta\in\mathscr{S}}$ es una λ-especificación, por el Lema 1.3.1 tenemos:

$$\mu_\alpha=\nu_\alpha\gamma^\alpha_{\Lambda_\alpha}=\nu_\alpha\gamma^\alpha_{\Lambda_\alpha}\gamma^\alpha_\Lambda=\mu_\alpha\gamma^\alpha_\Lambda=\mu_\alpha\left(\rho^\alpha_\Lambda\lambda_\Lambda\right)=\rho^\alpha_\Lambda\left(\mu_\alpha\lambda_\Lambda\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}\mu_\alpha\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right) &= \rho^\alpha_\Lambda\left(\mu_\alpha\lambda_\Lambda\right)\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right)\\ &= \int_{A_m\cap B(\Lambda,\epsilon)}\rho^\alpha_\Lambda\left(x\right)\left(\mu_\alpha\lambda_\Lambda\right)\left(dx\right)\\ &\leq \left\|\rho^\alpha_\Lambda 1_{B(\Lambda,\epsilon)}\right\|_\infty \mu_\alpha\lambda_\Lambda\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right) \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Ahora:
$B\left(\Lambda,\epsilon\right)\subset\sigma^{-1}_\Lambda\left(B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)$ y $A_m=\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\right)$ entonces:
$\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right)\subset\left(\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\right)\cap\sigma^{-1}_\Lambda\left(B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)\right)=\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)$
Luego, por la ecuación 3.12 tenemos:

$$\mu_\alpha\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right)\leq\left\|\rho^\alpha_\Lambda 1_{B(\Lambda,\epsilon)}\right\|_\infty\mu_\alpha\lambda_\Lambda\left(\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)\right) \qquad (3.13)$$

Ahora bien:

$$\mu_\alpha\lambda_\Lambda\left(\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)\right)=\int_{E^S}\lambda_\Lambda\left(\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)|x\right)\mu_\alpha\left(dx\right) \qquad (3.14)$$

También
$\lambda_\Lambda\left(\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)|x\right) = \int_{E^\Lambda}1_{\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda(\epsilon)\right)}\left(\xi\sigma_{S\setminus\Lambda}\left(x\right)\right)\lambda^\Lambda\left(d\xi\right) = \lambda^\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right).$
Luego, por la ecuación 3.14,
$\mu_\alpha\lambda_\Lambda\left(\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)\right)=\lambda^\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)\int_{E^S}\mu_\alpha\left(dx\right)=\lambda^\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)$
y por la ecuación 3.13 resulta:

$$\mu_\alpha\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right)\leq\left\|\rho^\alpha_\Lambda 1_{B(\Lambda,\epsilon)}\right\|_\infty\lambda^\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right)$$

Luego, por **(ii.3)** $\exists C_{\Lambda,\epsilon}<\infty$ tal que

$$\overline{\lim_{\alpha\in\mathscr{D}}}\,\mu_\alpha\left(A_m\cap B\left(\Lambda,\epsilon\right)\right)\leq C_{\Lambda,\epsilon}\lambda^\Lambda\left(A_{m,\Lambda}\cap B_\Lambda\left(\epsilon\right)\right) \qquad (3.15)$$

Como $A_m\downarrow\emptyset$ y $A_{m,\Lambda}=\sigma^{-1}_\Lambda\left(A_m\right)$, también $A_{m,\Lambda}\downarrow_m\emptyset$.

Entonces, por la Afirmación 3.2.2 y por la ecuación 3.15 tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{m} \overline{\lim_{\alpha\in\mathscr{D}}} \mu_\alpha(A_m) &\leq \lim_{m} \overline{\lim_{\alpha\in\mathscr{D}}} \mu_\alpha(A_m \cap B(\Lambda,\epsilon)) + \epsilon \\ &\leq \lim_{m} C_{\Lambda,\epsilon}\lambda^\Lambda(A_{m,\Lambda} \cap B_\Lambda(\epsilon)) + \epsilon = \epsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba entonces que $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ es una red l.e. en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

$\blacksquare$

Corolario 3.2.3 *Consideremos la Notación 3.2.1 y supongamos que:*

(i) $\Lambda_\alpha \underset{\alpha\in\mathscr{D}}{\longrightarrow} S$.

(ii) $\lambda(E)) < \infty$.

(iii) *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}, \exists K_\Lambda < \infty$ *tal que* $\sup_{\alpha\in\mathscr{D}} \|\rho_\Lambda^\alpha\|_\infty \leq K_\Lambda$.

Entonces $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ *es una red en* $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *l.e..*

Demostración:
Basta aplicar el Teorema 3.2.1, tomando $B(\Lambda,\epsilon) = \sigma_\Lambda^{-1}(B_\Lambda(\epsilon))$ con $B_\Lambda(\epsilon) = E^\Lambda$.

Notación 3.2.2 *Sean:* $(E, \mathscr{E})$ *un espacio de Borel estándar;* $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E});(\mathscr{D}, \succcurlyeq)$ *un conjunto dirigido por la relación de orden parcial* $\succcurlyeq$ *entre los elementos de* $\mathscr{D}$*. Para cada* $\alpha \in \mathscr{D}$ *sean:* $\nu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right), \Phi^\alpha = (\Phi_\Lambda^\alpha)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial* λ*-admisible,* $\Lambda_\alpha \in \mathscr{S}$ *y* $\mu_\alpha = \nu_\alpha\gamma_{\Lambda_\alpha}^{\Phi^\alpha}$.

Teorema 3.2.2 *Consideremos la Notación 3.2.2 y supongamos que:*

(i) $\Lambda_\alpha \underset{\alpha\in\mathscr{D}}{\longrightarrow} S$.

(ii) $\exists (K_l)_{l\geq 1}$ *en* $\mathscr{E}$ *tal que*

> **(ii.1)** $0 < \lambda(K_l) < \infty, \forall l \geq 1$.
>
> **(ii.2)** $\lim_{l\to\infty} \overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}} \mu_\alpha(\sigma_s \notin K_l) = 0, \forall s \in S$.

(iii) *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}, \exists \Delta \in \mathscr{S}$ *tal que* $\Lambda \subset \Delta$ *y*

$c_{\Lambda,\Delta}(l) := \overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}} \sup\left\{\left|H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)/w \in K_l^\Delta \times E^{S\setminus\Delta}\right|\right\} < \infty, \forall l \geq 1.$

Entonces $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ *es l.e..*
Y por la Proposición 3.2.3, $\exists \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *que es punto de* $\mathscr{L}$*-clausura de* $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$.

Demostración:
Veremos que se cumple **(ii)** del Teorema 3.2.1.
Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$ y $\epsilon > 0$ cualesquiera.
Por **(iii)**, $\exists \Delta \in \mathscr{S}$ tal que $\Lambda \subset \Delta$ y $c_{\Lambda,\Delta}(l) < \infty$.
Por **(ii.2)**, como $\#(\Delta) < \infty, \exists l \geq 1$ tal que

$$\overline{\lim_{\alpha \in \mathscr{D}}} \sum_{s \in \Delta} \mu_\alpha (\sigma_s \notin K_l) < \epsilon \tag{3.16}$$

Sean $B(\Lambda, \epsilon) = K_l^\Delta \times E^{S \setminus \Delta} \left(= \sigma_\Delta^{-1}\left(K_l^\Delta\right)\right)$ y $B_\Lambda(\epsilon) = K_l^\Lambda$.
Luego, $B(\Lambda, \epsilon) \subset \sigma_\Lambda^{-1}(B_\Lambda(\epsilon))$ (**(ii.1)** del Teorema 3.2.1)
También se cumple **(ii.2) del Teorema 3.2.1** :

$$\lambda^\Lambda (B_\Lambda(\epsilon)) = (\lambda(K_l))^{\#(\Lambda)}$$

Además, $B(\Lambda, \epsilon)^c = \bigcup_{s \in \Delta} \{\sigma_s \notin K_l\}$. Luego,

$$\forall \alpha \in \mathscr{D} : \mu_\alpha (B(\Lambda, \epsilon)^c) \leq \sum_{s \in \Delta} \mu_\alpha (\sigma_s \notin K_l)$$

De donde, por la ecuación 3.12, tenemos **(ii.4)** del Teorema 3.2.1:

$$\overline{\lim_{\alpha \in \mathscr{D}}} \mu_\alpha (B(\Lambda, \epsilon)^c) \leq \overline{\lim_{\alpha \in \mathscr{D}}} \sum_{s \in \Delta} \mu_\alpha (\sigma_s \notin K_l) < \epsilon$$

Finalmente, veamos que se cumple **(ii.3)** del Teorema 3.2.1.
Sea $\delta > 0$.
Por **(iii)**, $\exists \alpha_0 \in \mathscr{D}$ tal que $\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \Rightarrow \left|H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)\right| \leq c_{\Lambda,\Delta}(l) + \delta, \forall w \in B(\Lambda, \epsilon)$.
Sea $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$.
Luego, para $w \in B(\Lambda, \epsilon)$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl} h_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w) = \exp\left(-H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)\right) & \leq & \exp(c_{\Lambda,\Delta}(l))\, e^\delta \\ & \geq & e^{-c_{\Lambda,\Delta}(l)} e^{-\delta} \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(w) & = & \displaystyle\int_{E^\Lambda} h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(\xi \sigma_{S \setminus \Lambda}(w)\right) \lambda^\Lambda(d\xi) \\ & \geq & \displaystyle\int_{K_l^\Lambda} h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(\xi \sigma_{S \setminus \Lambda}(w)\right) \lambda^\Lambda(d\xi) \\ & \geq & e^{-c_{\Lambda,\Delta}(l)} e^{-\delta} (\lambda(K_l))^{\#(\Lambda)} \end{array}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
\rho_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w) &= \frac{h_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(w)} \\
&\leq \frac{e^{c_{\Lambda,\Delta}(l)}e^{\delta}}{e^{-c_{\Lambda,\Delta}(l)}e^{-\delta}\left(\lambda\left(K_l\right)\right)^{\#(\Lambda)}} \\
&= e^{2c_{\Lambda,\Delta}(l)}\left(\lambda\left(K_l\right)\right)^{-\#(\Lambda)}e^{2\delta}
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\sup_{w\in B(\Lambda,\epsilon)} \rho_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w) \leq e^{2c_{\Lambda,\Delta}(l)}\left(\lambda\left(K_l\right)\right)^{-\#(\Lambda)}e^{2\delta}, \forall\alpha \succcurlyeq \alpha_0.$$

Luego:

$$\inf_{\alpha'\in\mathscr{D}}\sup_{\alpha\succcurlyeq\alpha'}\sup_{w\in B(\Lambda,\epsilon)} \rho_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w) \leq e^{2c_{\Lambda,\Delta}(l)}\left(\lambda\left(K_l\right)\right)^{-\#(\Lambda)} < \infty$$

O, lo que es lo mismo:

$$\overline{\lim_{\alpha\in\mathscr{D}}}\sup\left\{\rho_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)/w\in B(\Lambda,\epsilon)\right\} < \infty.$$

Luego, el Teorema 3.2.2 queda probado.

■

Corolario 3.2.4 *Consideremos la Notación 3.2.2 con Φ^α potencial sumable, $\forall\alpha\in\mathscr{D}$. Supongamos que:*

(i) $\lambda(E) < \infty$ *($\therefore$ Φ^α es λ-admisible, por la Proposición 2.1.2)*

(ii) $\Lambda_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathscr{D}]{} S$

(iii) $\overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}}\left\|\Phi^\alpha\right\|_s = \overline{\lim}_{\alpha\in\mathscr{D}}\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s}\left\|\Phi_\Lambda^\alpha\right\|_\infty < \infty, \forall s\in S.$

*Entonces se cumplen **(ii)** y **(iii)** del Teorema 3.2.2. Luego, $(\mu_\alpha,\mathscr{D},\succcurlyeq)$ es l.e..*

Demostración:
Para cada $l = 1, 2, \ldots$ tomamos $K_l := E$.
Entonces **(ii)** del Teorema 3.2.2 se cumple obviamente.
Veamos que se cumple **(iii)** del Teorema 3.2.2.
Sea $\Lambda\in\mathscr{S}$. Tomemos $\Delta = \Lambda$.

Por la Definición 2.1.2, para todo $x \in E^S$ y $\alpha \in \mathscr{D}$ tenemos

$$H_{\Lambda}^{\Phi^{\alpha}}(x) = \sum_{\Lambda' \in \mathscr{S} \cap \Lambda} \Phi_{\Lambda'}^{\alpha}(x),$$

donde $\mathscr{S} \cap \Lambda = \{\Lambda' \in \mathscr{S} / \Lambda' \cap \Lambda \neq \emptyset\}$.

Como $\mathscr{S} \cap \Lambda \subset \bigcup_{s \in \Lambda} \mathscr{S} \cap s$, se tiene:

$$\left| H_{\Lambda}^{\Phi^{\alpha}}(x) \right| \leq \sum_{s \in \Lambda} \sum_{\Lambda' \in \mathscr{S} \cap s} \left| \Phi_{\Lambda'}^{\alpha}(x) \right| \leq \sum_{s \in \Lambda} \sum_{\Lambda' \in \mathscr{S} \cap s} \left\| \Phi_{\Lambda'}^{\alpha} \right\|_{\infty}$$

De aquí, por **(iii)** se sigue que se cumple **(iii)** del Teorema 3.2.2.

■

Corolario 3.2.5 *Consideremos la Notación 3.2.2. Suponemos que:*

(i) $\Lambda_{\alpha} \xrightarrow[\alpha \in \mathscr{D}]{} S$.

(ii) *igual a **(ii)** del Teorema 3.2.2*

(iii) *Sea d la métrica euclídea sobre S y un potencial $\Phi = (\Phi_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ tal que*

(iii.1) $\exists R > 0$ *satisfaciendo diámetro*$(\Lambda) > R \Rightarrow \Phi_{\Lambda} \equiv 0$.

(iii.2) *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y $l \geq 1$:*

$$\sup \left\{ \left| \Phi_{\Lambda}(x) \right| / x \in K_l^S \right\} < \infty.$$

(iii.3) $\overline{\lim}_{\alpha \in \mathscr{D}} \left\| \Phi^{\alpha} - \Phi \right\|_s < \infty, \forall s \in S$

*Entonces, se cumple **(iii)** del Teorema 3.2.2.*

Demostración:

Para cada $\Lambda' \in \mathscr{S}$, sea $\phi_{\Lambda'} : E^{\Lambda'} \to \mathbb{R}, \mathscr{E}^{\Lambda'}$-medible tal que:

$$\Phi_{\Lambda'} = \phi_{\Lambda'} \circ \sigma_{\Lambda'} \tag{3.17}$$

Sea para cada $s \in S$:

$$\mathscr{S}_R(s) = \{\Lambda' \in \mathscr{S} \cap s / \text{diámetro}(\Lambda') \leq R\}.$$

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$. Tomamos

$$\Delta := \bigcup_{s \in \Lambda} \bigcup_{\Lambda' \in \mathscr{S}_R(s)} \Lambda'$$

Luego, $\Lambda \subset \Delta$ y $\Delta \in \mathscr{S}$. Sea $l \geq 1$ cualquiera.
Sea $w^\circ \in K_l^S$.
Sea $w \in K_l^\Delta \times E^{S\setminus\Delta} \Rightarrow$ para todo $\alpha \in \mathscr{D}$ tenemos:

$$\left|H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)\right| \leq \sum_{s\in\Lambda}\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}\cap s}\left|\Phi_{\Lambda'}(w)\right| + \sum_{s\in\Lambda}\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}\cap s}\left|\Phi_{\Lambda'}^\alpha(w) - \Phi_{\Lambda'}(w)\right| \tag{3.18}$$

Ahora, para $s \in \Lambda$ y $\Lambda' \in \mathscr{S} \cap s$ tenemos:
$\Phi_{\Lambda'}(w) \neq 0 \Rightarrow$ diámetro$(\Lambda') \leq R \Rightarrow \Lambda' \subset \Delta$.
Por la ecuación 3.17, resulta entonces:

$$\Phi_{\Lambda'}(w) = \phi_{\Lambda'}(\sigma_{\Lambda'}(w)) = \phi_{\Lambda'}\left(\sigma_{\Lambda'}\left(w_{\Lambda'}w^\circ_{S\setminus\Lambda'}\right)\right) = \Phi_{\Lambda'}\left(w_{\Lambda'}w^\circ_{S\setminus\Lambda'}\right)$$

Entonces

$$\left|\Phi_{\Lambda'}(w)\right| \leq c_l(\Lambda') := \sup\left\{\left|\Phi_{\Lambda'}(x)\right| / x \in K_l^S\right\} < \infty$$

Luego:

$$\sup\left\{\left|H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)\right| / w \in K_l^\Delta \times E^{S\setminus\Delta}\right\} \leq \sum_{s\in\Lambda}\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}\cap s} c_l(\Lambda') + \sum_{s\in\Lambda}\left\|\Phi^\alpha - \Phi\right\|_s$$

Luego:

$$\varlimsup_{\alpha\in\mathscr{D}} \sup\left\{\left|H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(w)\right| / w \in K_l^\Delta \times E^{S\setminus\Delta}\right\} \leq \sum_{s\in\Lambda}\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}\cap s} c_l(\Lambda') + \sum_{s\in\Lambda}\varlimsup_{\alpha\in\mathscr{D}}\left\|\Phi^\alpha - \Phi\right\|_s.$$

■

3.3. Resultados de continuidad

Nota 3.3.1 *En esta Sección encaramos el siguiente problema: ¿Bajo qué condiciones es cierto que si μ es punto clausura de una especificación γ, se cumple que $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$?*

Un interesante ejemplo, de lo que puede pasar es el siguiente:

Ejemplo 3.3.1 *Sean: $E = \{0,1\}, \mathscr{E} = \mathscr{P}(E), S \subset \mathbb{Z}^2$ infinito. Para cada $a \in S$, sea $w^a \in E^S$ dado por:*

$$w^a(t) = \begin{cases} 1 & \textit{si } t = a \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Para cada $V \subset S, V \neq \emptyset$, sea $O_V \in E^V$ dado por:

$$O_V(t) = 0, \forall t \in V.$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\gamma_\Lambda : \mathscr{F} \times E^S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\gamma_\Lambda(A|x) = 1_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda}=O_{S\setminus\Lambda}\right\}}(x)\frac{1}{\#(\Lambda)}\sum_{\alpha\in\Lambda} 1_A(w^a)+1_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda}\neq O_{S\setminus\Lambda}\right\}}(x)\,1_A\left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}(x)\right).$$

Se cumple:

(a) *$\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$*

(b) *Si $(\nu_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una red en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$, entonces $\nu_\Lambda\gamma_\Lambda \xrightarrow[\Lambda\in\mathscr{D}]{} \delta_{O_S}$ en la $\mathscr{L}$-topología, donde $\delta_{O_S}(A) = 1_A(O_S), \forall A \in \mathscr{F}$.*

(c) *$\mathscr{G}(\gamma) = \emptyset$*

Demostración:
(a) Queda como ejercicio.
Ayuda: Para ver que $\gamma_\Delta\gamma_\Lambda(A|x) = \gamma_\Delta(A|x)$ con $\Lambda \subset \Delta$ ambas en $\mathscr{S}$, $A \in \mathscr{F}$ y $x \in E^S$.
Probar, primeramente que
(a.1) $\gamma_\Delta\gamma_\Lambda(A|x) = 1_{\left\{O_{S\setminus\Delta}\right\}}\left(\sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right)\frac{1}{\#(\Delta)}\sum_{a\in\Delta}\gamma_\Lambda(A|w^a)$

$$+1_{E^{S\setminus\Delta}\setminus\left\{O_{S\setminus\Delta}\right\}}\left(\sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right)\gamma_\Lambda\left(A|O_\Delta\sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right).$$

(a.2) Luego, analizar separadamente:
Caso 1: $\sigma_{S\setminus\Delta}(x) = O_{S\setminus\Delta}$.
Caso 2: $\sigma_{S\setminus\Delta}(x) \neq O_{S\setminus\Delta}$.
Para el **Caso 1**. A partir de **(a.1)** probar que:

$$\begin{aligned}
\gamma_\Delta\gamma_\Lambda(A|x) &= \frac{1}{\#(\Delta)}\left[\sum_{a\in\Lambda}\gamma_\Lambda(A|w^a) + \sum_{a\in\Delta\setminus\Lambda}\gamma_\Lambda(A|w^a)\right] \\
&= \frac{1}{\#(\Delta)}\left[\sum_{a\in\Lambda}\left(\frac{1}{\#(\Lambda)}\sum_{b\in\Lambda}1_A\left(w^b\right)\right) + \sum_{a\in\Delta\setminus\Lambda}1_A\left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}(w^a)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\#(\Delta)}\left[\sum_{b\in\Lambda}1_A\left(w^b\right) + \sum_{a\in\Delta\setminus\Lambda}1_A(w^a)\right] \\
&= \gamma_\Delta(A|x).
\end{aligned}$$

Para el **Caso 2**. A partir de **(a.1)** ver que:

$$\begin{aligned}
\gamma_\Delta \gamma_\Lambda (A|x) &= \gamma_\Lambda \left(A|O_\Delta \sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right) \\
&= 1_A \left(O_\Lambda \sigma_{S\setminus\Lambda}\left(O_\Delta \sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right)\right) \\
&= 1_A \left(O_\Lambda O_{\Delta\setminus\Lambda} \sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right) \\
&= 1_A \left(O_\Delta \sigma_{S\setminus\Delta}(x)\right) \\
&= \gamma_\Delta (A|x).
\end{aligned}$$

Prueba de **(b)**

Por la Proposición 3.2.6, basta ver que:

(b.1) $d_2(\nu_\Lambda \gamma_\Lambda, \delta_{O_S}) \xrightarrow[\Lambda\in\mathscr{S}]{} 0$, donde

$$d_2(\nu_\Lambda \gamma_\Lambda, \delta_{O_S}) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \max_{\xi\in E^{\Lambda(n)}} \left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right)\right|$$

y donde $(\Lambda(n))_{n\geq 1}$ es una sucesión cofinal. Sea $\epsilon > 0$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$, $\forall n \geq n_0 + 1$.

Luego:

(b.2) $\frac{1}{n} \max_{\xi\in E^{\Lambda(n)}} \left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right)\right| < \epsilon$, cualesquiera sean $\Lambda \in \mathscr{S}$ y $n \geq n_0 + 1$.

Sea $\mathscr{S}_0 = \{\Lambda \in \mathscr{S} / \bigcup_{n=1}^{n_0} \Lambda(n) \subset \Lambda\}$.

Entonces, **(b.1)** es equivalente a

(b.3) $\lim_{\Lambda\in\mathscr{S}_0} d_2(\nu_\Lambda \gamma_\Lambda, \delta_{O_S}) = 0$

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}_0$ cualesquiera.

Como E es finito, existen $1 \leq j \leq n_0, \xi_0 \in E^{\Lambda(j)}$ tales que

(b.4) $\frac{1}{n}\left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi\right)\right| \leq \frac{1}{j}\left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi_0\right)\right|$ $\forall n = 1, \ldots, n_0$, y $\forall \xi \in E^{\Lambda(n)}$.

De aquí y por **(b.2)** tenemos que

(b.5) $d_2(\nu_\Lambda \gamma_\Lambda, \delta_{O_S}) < \epsilon + \frac{1}{j}\left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(n)} = \xi_0\right)\right|$.

Supongamos probada la siguiente

Afirmación 3.3.1 **(i)** *Si* $\xi_0 \neq O_{\Lambda(j)}$, *entonces:*

$$\left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right)\right| \leq \frac{\#(\Lambda(j))}{\#(\Lambda)}$$

(ii) *Si* $\xi_0 = O_{\Lambda(j)}$, *entonces:*

$$\left|\nu_\Lambda \gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right)\right| = 1 - \left(b(\Lambda) + (1 - b(\Lambda))\,\nu_\Lambda\left(\sigma_{S\setminus\Lambda} \neq O_{S\setminus\Lambda}\right)\right)$$

donde $b(\Lambda) := \frac{\#(\Lambda) - \#(\Lambda(j))}{\#(\Lambda)}$

Tenemos entonces.

$$\lim_{\Lambda\in\mathscr{S}_0} \frac{\#\left(\Lambda\left(j\right)\right)}{\#\left(\Lambda\right)} = 0.$$

Por otra parte:

$$b\left(\Lambda\right) \leq b\left(\Lambda\right) + \left(1 - b\left(\Lambda\right)\right)\nu_\Lambda\left(\sigma_{S\setminus\Lambda} \neq O_{S\setminus\Lambda}\right) \leq 1 \text{ y } \lim_{\Lambda\in\mathscr{S}} b\left(\Lambda\right) = 1.$$

Por la Afirmación 3.3.1 se tiene entonces por **(b.5)**:

$$\overline{\lim_{\Lambda\in\mathscr{S}_0}}\, d_2\left(\nu_\Lambda\gamma_\Lambda, \delta_{O_S}\right) \leq \epsilon$$

Por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ queda probado entonces la **(b.3)**.
Demostración de la Afirmación 3.3.1:
Parte (i)
En este caso, $\delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) = 0$.
Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\nu_\Lambda\gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) &= \int \gamma_\Lambda\left(\left\{\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right\}|x\right)\nu_\Lambda\left(dx\right) \\
&= \int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda} = O_{S\setminus\Lambda}\right\}} \gamma_\Lambda\left(\left\{\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right\}|x\right)\nu_\Lambda\left(dx\right) \\
&+ \int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda} \neq O_{S\setminus\Lambda}\right\}} \gamma_\Lambda\left(\left\{\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right\}|x\right)\nu_\Lambda\left(dx\right) \\
\textbf{(b.6)} &= \frac{1}{\#\left(\Lambda\right)}\sum_{a\in\Lambda} 1_{\left\{\sigma_{\Lambda(j)}=\xi_0\right\}}\left(w^a\right)\nu_\Lambda\left(\sigma_{S\setminus\Lambda} = O_{S\setminus\Lambda}\right) \\
&+ \int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda} \neq O_{S\setminus\Lambda}\right\}} 1_{\left\{\sigma_{\Lambda(j)}=\xi_0\right\}}\left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}\left(x\right)\right)\nu_\Lambda\left(dx\right)
\end{aligned}$$

Ahora bien:
$a \in \Lambda \setminus \Lambda\left(j\right) \Rightarrow w^a\left(t\right) = 0,\ \forall t \in \Lambda\left(j\right) \Rightarrow \sigma_{\Lambda(j)}\left(w^a\right) = O_{\Lambda(j)}$
Entonces: $1_{\left\{\sigma_{\Lambda(j)}=\xi_0\right\}}\left(w^a\right) = 0$ **(b.7)**
Además:
Como $\Lambda\left(j\right) \subset \Lambda, \sigma_{\Lambda(j)}\left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}\left(x\right)\right) = O_{\Lambda(j)} \neq \xi_0$
Entonces:
$1_{\left\{\sigma_{\Lambda(j)}=\xi_0\right\}}\left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}\left(x\right)\right) = 0,\ \forall x$**(b.8)**
Por **(b.7)** y **(b.8)** se concluye entonces:
(b.6) $\leq \frac{\#(\Lambda(j))}{\#(\Lambda)}$
Parte **(ii)**.

En este caso: $\delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) = \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(j)} = O_{\Lambda(j)}\right) = 1$
Luego:
(b.9)$\left|\nu_\Lambda\gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) - \delta_{O_S}\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right)\right| = 1 - \nu_\Lambda\gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right)$
Igual que en la prueba de la **Parte (i)**, tenemos:

$$\begin{aligned}\nu_\Lambda\gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = \xi_0\right) &= \nu_\Lambda\gamma_\Lambda\left(\sigma_{\Lambda(j)} = O_{\Lambda(j)}\right)\\ \textbf{(b.10)} &= \frac{1}{\#(\Lambda)}\sum_{a\in\Lambda} 1_{\left\{\sigma_{\Lambda(j)}=O_{\Lambda(j)}\right\}}(w^a)\,\nu_\Lambda\left(\sigma_{S\setminus\Lambda} = O_{S\setminus\Lambda}\right)\\ &+ \int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda}\neq O_{S\setminus\Lambda}\right\}} \left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}(x)\right)\nu_\Lambda(dx)\end{aligned}$$

Ahora:
$a \in \Lambda(j) \Rightarrow w^a(t) = 1$ si $t \in \Lambda(j) \Rightarrow \sigma_{\Lambda(j)}(w^a) \neq O_{\Lambda(j)}$
$a \in \Lambda\setminus\Lambda(j) \Rightarrow w^a(t) = 0$ si $t \in \Lambda(j) \Rightarrow \sigma_{\Lambda(j)}(w^a) = O_{\Lambda(j)}$
Por otra parte:
$\sigma_{\Lambda(j)}\left(O_\Lambda\sigma_{S\setminus\Lambda}(x)\right) = O_{\Lambda(j)}$ pues $\Lambda(j) \subset \Lambda$.
Por estas observaciones, resulta:
(b.10) $= \frac{\#(\Lambda)-\#(\Lambda(j))}{\#(\Lambda)}\nu_\Lambda\left(\sigma_{S\setminus\Lambda} = O_{S\setminus\Lambda}\right) + \nu_\Lambda\left(\sigma_{S\setminus\Lambda} \neq O_{S\setminus\Lambda}\right)$
De aquí, por **(b.9)** queda probada **(ii)** de la Afirmación 3.3.1
Prueba de (c)
Sin pérdida de generalidad supongamos

$$S = \{1, 2, \ldots\}.$$

Por la Proposición 1.2.3, tenemos $\mu \in \mathscr{G}(\gamma) \Leftrightarrow \mu = \mu\gamma_\Lambda$, $\forall\Lambda \in \mathscr{S}$
Supongamos que $\exists\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$.
Sea $\Lambda(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Afirmación 3.3.2 $\mu\left(\sigma_{S\setminus\Lambda(n)} = O_{S\setminus\Lambda(n)}\right) = 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

Supongamos probada esta Afirmación 3.3.2.
Ahora, para cada $n = 1, 2, \ldots$, sea $B_n = \left\{x \in E^S / \sigma_n(x) = 1\right\}$.
Por la Afirmación 3.3.2 tenemos $\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mu(B_n) &= \mu\gamma_{\Lambda(n)}(B_n)\\ &= \int \gamma_{\Lambda(n)}(B_n|x)\,\mu(dx)\\ &= \int_{\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}\neq O_{S\setminus\Lambda(n)}} 1_{B_n}\left(O_{\Lambda(n)}\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}(x)\right)\mu(dx) = 0,\end{aligned}$$

pues $\sigma_n\left(O_{\Lambda(n)}\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}(x)\right)=0,\forall x.$
Luego, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=0$ y $\{O_s\}^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.
Ahora, por la Afirmación 3.3.2:

$$\mu(\{O_s\})=\mu\gamma_{\Lambda(1)}(\{O_s\})=\int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}\neq O_{S\setminus\Lambda(n)}\right\}}1_{B_n}\left(O_{\Lambda(n)}\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}(x)\right)\mu(dx)=0.$$

Luego,

$$\mu\left(E^S\right)=\mu(\{O_S\})+\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=0$$

¡Imposible!
Demostración de la Afirmación 3.3.2:
Sea $A_1=\{(1,0,0,\ldots)\}$.
Sea $n\geq 1$ cualquiera.
Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &= \mu\gamma_{\Lambda(n)}(A_1)\\
&= \int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}=O_{S\setminus\Lambda(n)}\right\}}\gamma_{\Lambda(n)}(A_1|x)\,\mu(dx)+\int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}\neq O_{S\setminus\Lambda(n)}\right\}}\gamma_{\Lambda(n)}(A_1|x)\,\mu(dx)\\
&= \frac{1}{\#(\Lambda(n))}\sum_{a\in\Lambda(n)}1_{A_1}(w^a)\,\mu\left(\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}=O_{S\setminus\Lambda(n)}\right)\\
&\quad+\int_{\left\{\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}\neq O_{S\setminus\Lambda(n)}\right\}}1_{A_1}\left(O_{\Lambda(n)}\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}(x)\right)\mu(dx)\\
&= \frac{1}{\#(\Lambda(n))}\mu\left(\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}=O_{S\setminus\Lambda(n)}\right)
\end{aligned}$$

De esta igualdad:

$$\mu(A_1)=\frac{1}{\#(\Lambda(n))}\mu\left(\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}=O_{S\setminus\Lambda(n)}\right),\forall n\geq 1.$$

y como $\#(\Lambda(n))\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ se deduce que $\mu(A_1)=0$ y $\mu\left(\sigma_{S\setminus\Lambda(n)}=O_{S\setminus\Lambda(n)}\right)=0,\forall n\geq 1.$

■

Notación 3.3.1 *Sea* $ESP=\left\{\gamma=(\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}/\gamma\text{ es una especificación sobre }\left(E^S,\mathscr{F}\right)\right\}.$

Definición 3.3.1 *Sea* $(\gamma^\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ *una red en* $ESP, \gamma \in ESP$. *Diremos que* $(\gamma^\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ *converge uniformemente a* γ *en la* $\mathscr{L}$*-topología si*

$$\lim_{\alpha \in \mathscr{D}} \|\gamma^\alpha_\Lambda (f) - \gamma_\Lambda (f)\|_\infty = 0$$

para toda $f \in \mathscr{L}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$. *Pondremos* $\gamma^\alpha \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} \gamma$.

En lo que sigue, será conveniente tener presente lo visto en la Sección 2.2

Teorema 3.3.1 *Sean:* $(\mathscr{D}, \succcurlyeq)$*un conjunto dirigido; para cada* $\alpha \in \mathscr{D} : \gamma^\alpha \in ESP, \Lambda_\alpha \in \mathscr{S}, \nu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$; *y* $\gamma \in ESP$. *Supongamos que:*

(i) γ *es quasi-local.*

(ii) $\gamma^\alpha \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} \gamma$.

(iii) $\Lambda_\alpha \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} S$.

(iv) $\exists \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *tal que* $\nu_\alpha \gamma^\alpha_{\Lambda_\alpha} \rightarrow \mu$ *en la* $\mathscr{L}$*-topología.*

Entonces $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$.

Demostración:
Por la Proposición 1.2.3, basta ver que:

$$\mu = \mu\gamma_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}.$$

Para ello, será suficiente probar que:

$$\mu (f) = \mu\gamma_\Lambda (f), \forall f \in \mathscr{L}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}. \tag{3.19}$$

Sean $f \in \mathscr{L}$, y $\Lambda \in \mathscr{S}$ cualesquiera:
Por **(i)**, $\gamma_\Lambda (f) \in \bar{\mathscr{L}}$.
Por **(iv)** y la Proposición 3.1.3,

$$\lim_{\alpha \in \mathscr{D}} \nu_\alpha \gamma^\alpha_{\Lambda_\alpha} (\gamma_\Lambda (f)) = \mu (\gamma_\Lambda (f)). \tag{3.20}$$

Por **(iii)**, $\exists \alpha_0 \in \mathscr{D}$ tal que $\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \Rightarrow \Lambda \subset \Lambda_\alpha \Rightarrow \gamma^\alpha_{\Lambda_\alpha}\gamma^\alpha_\Lambda = \gamma^\alpha_{\Lambda_\alpha}$
Luego, para $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\mu\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\mu\left(f\right)\right| &\leq \left|\mu\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)\right|+\left|\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(f\right)\right| \\
&\quad +\left|\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(f\right)-\mu\left(f\right)\right| \\
&= \left|\mu\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)\right|+\left|\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(\gamma_{\Lambda}^{\alpha}\right)\left(f\right)\right| \\
&\quad +\left|\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(f\right)-\mu\left(f\right)\right| \\
&\leq \left|\mu\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)\right|+\left|\mu\left(f\right)-\nu_{\alpha}\gamma_{\Lambda_{\alpha}}^{\alpha}\left(f\right)\right| \\
&\quad +\left\|\gamma_{\Lambda}\left(f\right)-\gamma_{\Lambda}^{\alpha}\left(f\right)\right\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Luego, por **(ii)**, **(iv)** y la ecuación 3.20 se tiene, tomando $\lim_{\alpha\in\mathscr{D}}$ en la última desigualdad, que

$$\left|\mu\left(\gamma_{\Lambda}\left(f\right)\right)-\mu\left(f\right)\right|=0$$

Luego, la ecuación 3.19 queda probada.

■

Corolario 3.3.1 *Sea $\gamma=\left(\gamma_{\Lambda}\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación quasi-local sobre $\left(E^{S},\mathscr{F}\right)$.*

Supongamos que existen $w\in E^{S}$ y $\mu\in\mathscr{P}\left(E^{S},\mathscr{F}\right)$ tales que μ es un punto de $\mathscr{L}$-clausura de la red en $\mathscr{P}\left(E^{S},\mathscr{F}\right)$ dada por $\left(\gamma_{\Lambda}\left(\cdot|w\right)\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$.

Entonces $\mu\in\mathscr{G}\left(\gamma\right)$.

Demostración:

Por definición de punto de clausura, $\exists$ una sub-red $\left(\gamma_{\Lambda'}\left(\cdot|w\right),\mathscr{S}',\subset\right)$ de $\left(\gamma_{\Lambda}\left(\cdot|w\right),\mathscr{S},\subset\right)$ tal que

$$\gamma_{\Lambda'}\left(\cdot|w\right)\underset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow}\mu \text{ en la } \mathscr{L}-\text{topología.} \tag{3.21}$$

Para cada $\Lambda'\in\mathscr{S}'$, sean:

$$\gamma^{\Lambda'}=\gamma \text{ y } \nu_{\Lambda'}=\delta_{w}$$

Entonces: $\gamma^{\Lambda'}\underset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow}\gamma$ y $\Lambda'\underset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow}S$ obviamente, pues $\left(\Lambda',\mathscr{S}',\subset\right)$ es subred de $\left(\Lambda,\mathscr{S},\subset\right)$ y $\Lambda\underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow}S$.

Finalmente:

$\nu_{\Lambda'}\gamma_{\Lambda'}^{\Lambda'}=\delta_{w}\gamma_{\Lambda'}$ y $\delta_{w}\gamma_{\Lambda'}\left(A\right)=\int\gamma_{\Lambda'}\left(A|x\right)\delta_{w}\left(dx\right)=\gamma_{\Lambda'}\left(A|w\right)\underset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow}\mu\left(A\right)$ para todo $A\in\mathscr{F}_{0}$, por la ecuación 3.21.

Esto es:

$$\nu_{\Lambda'}\gamma_{\Lambda'}^{\Lambda'}\underset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow}\mu \text{ en la } \mathscr{L}-\text{topología.}$$

Por el Teorema 3.3.1, tenemos entonces que $\mu\in\mathscr{G}\left(\gamma\right)$

■

Corolario 3.3.2 *Sean:* $\gamma \in ESP; (\mathscr{D}, \succcurlyeq)$ *un conjunto dirigido; para cada* $\alpha \in \mathscr{D} : \mathscr{R}_\alpha \subset \mathscr{S}$ *finito tal que* $\Lambda_\alpha := \bigcap \{\Lambda \in \mathscr{S} / \Lambda \in \mathscr{R}_\alpha\} \neq \emptyset; \nu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right); \mu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *dada por:*

$$\mu_\alpha := \frac{1}{\#\left(\mathscr{R}_\alpha\right)} \sum_{\Lambda \in \mathscr{R}_\alpha} \nu_\alpha \gamma_\Lambda$$

Supongamos que:

(i) γ *es quasi-local.*

(ii) $\Lambda_\alpha \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} S$.

Si μ *es punto de* $\mathscr{L}$*-clausura de* $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$*, entonces* $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$*.*

Demostración:

Sea $\gamma^\alpha = \gamma, \forall \alpha \in \mathscr{D} \Rightarrow \gamma^\alpha \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} \gamma$. De aquí, por **(i)** e **(ii)** tenemos que se cumplen **(i)**, **(ii)** e **(iii)** del Teorema 3.3.1.

Sea ahora $(\mu_{\alpha'}, \mathscr{D}', \succcurlyeq)$ una subred de $(\mu_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ que converge a μ en la $\mathscr{L}$-topología.

Veamos que se cumple **(iv)** del Teorema 3.3.1. Esto es:

$$\mu_{\alpha'} \gamma^{\alpha'}_{\Lambda_{\alpha'}} = \mu_{\alpha'} \gamma_{\Lambda_{\alpha'}} \underset{\mathscr{D}'}{\longrightarrow} \mu. \tag{3.22}$$

Sea $\alpha \in \mathscr{D}$ cualquiera. Como $\Lambda_\alpha \subset \Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{R}_\alpha$, tenemos que: $\gamma_\Lambda = \gamma_\Lambda \gamma_{\Lambda_\alpha}, \forall \Lambda \in \mathscr{R}_\alpha$. Además, $\forall A \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(A) &= \frac{1}{\#\left(\mathscr{R}_\alpha\right)} \sum_{\Lambda \in \mathscr{R}_\alpha} \nu_\alpha \gamma_\Lambda(A) \\
&= \frac{1}{\#\left(\mathscr{R}_\alpha\right)} \sum_{\Lambda \in \mathscr{R}_\alpha} \int \gamma_\Lambda(A|w)\, \nu_\alpha(dw) \\
&= \frac{1}{\#\left(\mathscr{R}_\alpha\right)} \sum_{\Lambda \in \mathscr{R}_\alpha} \int \int 1_A(x)\, \gamma_\Lambda(dx|w)\, \nu_\alpha(dw) \\
&= \int \int 1_A(x) \left(\frac{1}{\#\left(\mathscr{R}_\alpha\right)} \sum_{\Lambda \in \mathscr{R}_\alpha} \gamma_\Lambda \right) (dx|w)\, \nu_\alpha(dw)
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\int f(x)\,\mu_\alpha(dx) = \int\int f(x)\left(\frac{1}{\#(\mathscr{R}_\alpha)}\sum_{\Lambda\in\mathscr{R}_\alpha}\gamma_\Lambda\right)(dx|w)\,\nu_\alpha(dw) \tag{3.23}$$

$\forall f : E^S \to \mathbb{R}, \mathscr{F}$-medible no negativa.
También:

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(A) &= \frac{1}{\#(\mathscr{R}_\alpha)}\sum_{\Lambda\in\mathscr{R}_\alpha}\int\gamma_\Lambda(A|w)\,\nu_\alpha(dw)\\
&= \frac{1}{\#(\mathscr{R}_\alpha)}\sum_{\Lambda\in\mathscr{R}_\alpha}\int\gamma_\Lambda\gamma_{\Lambda_\alpha}(A|w)\,\nu_\alpha(dw)\\
&= \frac{1}{\#(\mathscr{R}_\alpha)}\sum_{\Lambda\in\mathscr{R}_\alpha}\int\int\gamma_{\Lambda_\alpha}(A|x)\,\gamma_\Lambda(dx|w)\,\nu_\alpha(dw)\\
&= \int\int\gamma_{\Lambda_\alpha}(A|x)\left(\frac{1}{\#(\mathscr{R}_\alpha)}\sum_{\Lambda\in\mathscr{R}_\alpha}\right)(dx|w)\,\nu_\alpha(dw)\\
&= \int\gamma_{\Lambda_\alpha}(A|x)\,\mu_\alpha(dx)\\
&= (\mu_\alpha\gamma_{\Lambda_\alpha})(A).
\end{aligned}$$

Es decir, probamos que:

$$\mu_\alpha(A) = (\mu_\alpha\gamma_{\Lambda_\alpha})(A)\,\forall A\in\mathscr{F} \text{ y } \forall\alpha\in\mathscr{D}$$

Luego, $\mu_{\alpha'}\gamma^{\alpha'}_{\Lambda_{\alpha'}} = \mu_{\alpha'} \underset{\mathscr{D}'}{\longrightarrow} \mu$.
Así, la ecuación 3.22 queda demostrada.

$\blacksquare$

Corolario 3.3.3 *Sean:* $(\mathscr{D}, \succcurlyeq)$*un conjunto dirigido,* $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$*. Para cada* $\alpha \in \mathscr{D}$ *sea* $\Phi^\alpha = (\Phi^\alpha_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial* λ*-admisible.*

Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial tal que*

$$\lim_{\alpha\in\mathscr{D}}\left\|H^{\Phi^\alpha-\Phi}_\Lambda\right\|_\infty = 0, \forall\Lambda\in\mathscr{S}$$

Entonces: Φ *es* λ*-admisible y* $\gamma^{\Phi^\alpha} \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \gamma^\Phi$.

Demostración:
Veamos primero:

$$\Phi \text{ es } \lambda - \text{admisible.} \tag{3.24}$$

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$ cualquiera.
Entonces:

$$\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)(x) = \int_{E^\Lambda} \exp\left(-H_\Lambda^\Phi\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\lambda^\Lambda(d\xi) \tag{3.25}$$

Ahora, sea $\alpha \in \mathscr{D}$ cualquiera.
Para todo $y \in E^S$ tenemos:

$$H_\Lambda^\Phi(y) = -H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}(y) + H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(y)$$

Entonces:

$$\exp\left(-H_\Lambda^\Phi(y)\right) = \exp\left(-H_\Lambda^{\Phi^\alpha}(y)\right)\exp\left(H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}(y)\right)$$

Por hipótesis, $\exists \alpha_0 / \alpha \succcurlyeq \alpha_0 \Rightarrow \left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}\right\|_\infty < \infty$
Luego, por la ecuación 3.25:

$$\begin{aligned}
\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)(x) &= \int_{E^\Lambda} \exp\left(H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\exp\left(-H_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\lambda^\Lambda(d\xi) \\
&\leq \exp\left(\left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}\right\|_\infty\right)\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x) < \infty, \forall x
\end{aligned}$$

pues Φ^α es λ-admisible.
Entonces, la expresión 3.24 está probada.
Veamos ahora:

$$\gamma^{\Phi^\alpha} \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \gamma^\Phi \text{ en la } \mathscr{L}\text{-topología.} \tag{3.26}$$

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$ cualquiera y sea $\alpha_0 \in \mathscr{D}$ tal que

$$\left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}\right\|_\infty < \infty, \forall \alpha \succcurlyeq \alpha_0. \tag{3.27}$$

Para todo $x \in E^S$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda_\Lambda\left(\left|\rho_\Lambda^{\Phi^\alpha}-\rho_\Lambda^{\Phi}\right|\right)(x) &= \lambda_\Lambda\left(\left|\frac{h_\Lambda^{\Phi^\alpha}}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)}-\frac{h_\Lambda^{\Phi}}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right|\right)(x)\\
&= \lambda_\Lambda\left(\left|\frac{h_\Lambda^{\Phi^\alpha}}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}-\frac{h_\Lambda^{\Phi}}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}+h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)}-\frac{1}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right)\right|\right)(x)\\
&\leq \lambda_\Lambda\left(\frac{\left|h_\Lambda^{\Phi^\alpha}-h_\Lambda^{\Phi}\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right)(x)+\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)-\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right)(x)\\
&= \lambda_\Lambda\left(\frac{\left|h_\Lambda^{\Phi^\alpha}-h_\Lambda^{\Phi}\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right)(x)+\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)-\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\,\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)}\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\\
&= \lambda_\Lambda\left(\frac{\left|h_\Lambda^{\Phi^\alpha}-h_\Lambda^{\Phi}\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right)(x)+\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)-\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)}\\
&= \lambda_\Lambda\left(\frac{h_\Lambda^{\Phi}\left|h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)^{-1}-1\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)}\right)(x)+\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)-\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)}\\
&= \lambda_\Lambda\left(\rho_\Lambda^{\Phi}\left|h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)^{-1}-1\right|\right)(x)+\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)-\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)^{-1} &= \exp\left(-H_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)\left(\exp\left(-H_\Lambda^{\Phi}\right)\right)^{-1}\\
&= \exp\left(-\left(H_\Lambda^{\Phi^\alpha}-H_\Lambda^{\Phi}\right)\right)\\
&= \exp\left(-H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}\right)
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación 3.28 sigue que

$$\gamma_\Lambda^{\Phi}\left(\left|e^{-H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}}-1\right|\right)(x)+\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}-h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^{\Phi}\right)(x)} \tag{3.29}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi - h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x)\right|}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)(x)} &\leq \frac{\lambda_\Lambda\left(\left|h_\Lambda^\Phi - h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right|\right)(x)}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)(x)} \\
&= \frac{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\left|1 - h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(h_\Lambda^\Phi\right)^{-1}\right|\right)(x)}{\lambda_\Lambda\left(h_\Lambda^\Phi\right)(x)} \\
&= \lambda_\Lambda\left(\rho_\Lambda^\Phi\left|1 - h_\Lambda^{\Phi^\alpha}\left(h_\Lambda^\Phi\right)^{-1}\right|\right) \\
&= \gamma_\Lambda^\Phi\left(\left|1 - e^{-H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}}\right|\right)(x)
\end{aligned}$$

De donde:
la ecuación 3.29

$$\begin{aligned}
&\leq 2\gamma_\Lambda^\Phi\left(\left|e^{-H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}} - 1\right|\right)(x) \\
&= 2\gamma_\Lambda^\Phi\left(\left|h_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi} - 1\right|\right)(x) \\
&\geq 2\left\|h_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi} - 1\right\|_\infty \\
&= 2\left\|e^{-H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}} - 1\right\|_\infty \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Ahora, una cuenta sencilla prueba que

$$\left|e^{-t} - 1\right| \leq e^{|t|} - 1, \forall t \in \mathbb{R} \qquad (3.31)$$

Luego:
La ecuación 3.30 $\leq 2\left(e^{\left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}\right\|_\infty} - 1\right)$
En definitiva, hemos probado:

$$\lambda_\Lambda\left(\left|\rho_\Lambda^{\Phi^\alpha} - \rho_\Lambda^\Phi\right|\right)(x) \leq 2\left(e^{\left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}\right\|} - 1\right), \forall x \in E^S \qquad (3.32)$$

Sea ahora $f \in \mathscr{L}$, entonces $\forall x \in E^S$

$$\begin{aligned}
\left|\gamma_\Lambda^{\Phi^\alpha}(f)(x) - \gamma_\Lambda^\Phi(f)(f)(x)\right| &= \left|\lambda_\Lambda\left(f\rho_\Lambda^{\Phi^\alpha}\right)(x) - \lambda_\Lambda\left(f\rho_\Lambda^\Phi\right)(x)\right| \\
&\leq \|f\|_\infty \lambda_\Lambda\left(\left|\rho_\Lambda^{\Phi^\alpha} - \rho_\Lambda^\Phi\right|\right)(x) \\
&\leq \|f\|_\infty 2\left(e^{\left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha - \Phi}\right\|_\infty} - 1\right)
\end{aligned}$$

De donde, usando la hipótesis:

$$\left\|\gamma_\Lambda^{\Phi^\alpha}(f)-\gamma_\Lambda^{\Phi}(f)\right\|_\infty \le \|f\|_\infty 2\left(e^{\left\|H_\Lambda^{\Phi^\alpha-\Phi}\right\|_\infty}-1\right)\xrightarrow[\alpha\in\mathscr{D}]{}0,\forall\Lambda\in\mathscr{S}$$

Por la Definición 3.3.1 tenemos entonces que $\gamma^{\Phi^\alpha}\underset{\mathscr{D}}{\rightarrow}\gamma^{\Phi}$.

■

Nota 3.3.2 *Para cada* $\gamma=(\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *en* ESP, n *y* m *enteros positivos,* $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ *en* $\mathscr{S}, f_1,\ldots,f_m$ *en* $\mathscr{L}$ *y* $\epsilon>0$*, definimos:*

$$B(\gamma;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n;f_1,\ldots,f_m;\epsilon):=$$

$$\left\{\gamma'=(\gamma'_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}\in ESP/\left\|\gamma'_{\Lambda_i}(f_j)-\gamma_{\Lambda_i}(f_j)\right\|_\infty<\epsilon,1\le i\le n,1\le j\le m\right\}.$$

Sea $\mathscr{U}(ESP)$ *la familia de todos los subconjuntos* $\mathscr{A}$ *de* ESP *tales que:*
$\gamma\in\mathscr{A}\Leftrightarrow$ *Existen* $\epsilon>0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n;f_1,\ldots,f_m,n\ge1,m\ge1$ *con* $\Lambda_i\in\mathscr{S},1\le i\le n;f_j\in\mathscr{L},1\le j\le m$ *tales que* $B(\gamma;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n;f_1,\ldots,f_m;\epsilon)\subset\mathscr{A}$.

Entonces $\mathscr{U}(ESP)$ *es una topología sobre* ESP *que llamaremos "topología de la convergencia uniforme de especificaciones, con respecto a la* $\mathscr{L}$*-topología".*

Nota 3.3.3 *Sea*

$$\mathscr{P}_S=\left\{\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}/\Phi\ \textit{es sumable}\right\}$$

Para cada $s\in S$*, sea* $\|\cdot\|_s$ *como en la Definición 2.1.5, esto es:*

$$\|\Phi\|_s=\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap s}\|\Phi_\Lambda\|_\infty,\forall\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}\in\mathscr{P}_S$$

Entonces:

(i) $\|\cdot\|_s$ *es una seminorma sobre* $\mathscr{P}_S$

(ii) *Para cada* $n\ge1$ *entero, sea*

$$\Delta(n)=[-n,n]^2\cap S$$

Para cada $n=1,2,\ldots$ *y cada* $k=1,2,\ldots$*, sea*

$$U(n,k) = \left\{ \Phi \in \mathscr{P}_S / \, \|\Phi\|_s < \frac{1}{k}, \, \forall s \in \Delta(n) \right\}$$

Sea $\tau_{\mathscr{P}_S}$ la familia de todos los subconjuntos $\mathscr{O}$ de $\mathscr{P}_S$ tales que:

$\Phi \in \mathscr{O} \Rightarrow \exists\, n \geq 1,\ k \geq 1$ *tales que* $\{\Psi \in \mathscr{P}_S / \Phi - \Psi \in U(n,k)\} \subset \mathscr{O}$.

Entonces $\tau_{\mathscr{P}_S}$ es una topología para $\mathscr{P}_S$.

En realidad, se puede probar un resultado más fuerte, usando recursos de la teoría de espacios vectoriales topológicos: $\tau_{\mathscr{P}_S}$ es una topología vectorial sobre $\mathscr{P}_S$ tal que $\mathscr{U} := \{U(n,k)/n \geq 1, k \geq 1$ enteros $\}$ forman una base de entornos del cero de $\mathscr{P}_S$ y $\mathscr{P}_S$ con esa topología es un e. v. t. l. c. (espacio vectorial topológico localmente convexo) metrizable.

Notación 3.3.2 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$. Pondremos:*
$ESPG(\lambda) = \left\{\gamma \in ESP / \exists \Phi \in \mathscr{P}_S\ \lambda\text{-admisible tal que } \gamma = \gamma^{\Phi}\right\}$

Corolario 3.3.4 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ finita (luego $\Phi \in \mathscr{P}_S \Rightarrow \Phi$ es λ-admisible, por la Proposición 2.1.2). Sean $\mathscr{P}_S$ y $ESPG(\lambda)$ con las topologías $\tau_{\mathscr{P}_S}$ y la relativa de $\mathscr{U}(ESP)$ respectivamente. Sea $T : \mathscr{P}_S \to ESPG(\lambda)$ dada por $T(\Phi) = \gamma^{\Phi}$. Entonces T es continua.*

Demostración:

Sean $\Phi \in \mathscr{P}_S$ y $(\Phi^{\alpha}, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{P}_S$ tal que $\Phi^{\alpha} \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} \Phi$ en la $\tau_{\mathscr{P}_S}$–topología. Entonces, dado $\Lambda \in \mathscr{S}$ cualquiera, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|H_{\Lambda}^{\Phi^{\alpha}-\Phi}\right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{\Delta \in \mathscr{S}(\Lambda)} \left(\Phi_{\Delta}^{\alpha} - \Phi_{\Delta}\right) \right\|_{\infty} \\
&\leq \sum_{\Delta \in \mathscr{S}(\Lambda)} \left\|\Phi_{\Delta}^{\alpha} - \Phi_{\Delta}\right\|_{\infty} \\
&\leq \sum_{s \in \Lambda} \sum_{\Delta \in \mathscr{S} \cap s} \left\|\Phi_{\Delta}^{\alpha} - \Phi_{\Delta}\right\|_{\infty} \\
&= \sum_{s \in \Lambda} \|\Phi^{\alpha} - \Phi\|_s \xrightarrow[\alpha \in \mathscr{D}]{} 0
\end{aligned}$$

Luego, $\gamma^{\Phi^{\alpha}} \underset{\mathscr{D}}{\rightarrow} \gamma^{\Phi}$ por el Corolario 3.3.3.

■

Proposición 3.3.1 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Sea $\Delta \in \mathscr{S}$. Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\Phi_\Lambda^\Delta : E^S \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\Phi_\Lambda^\Delta (x) = \begin{cases} \Phi_\Lambda (x) & \text{si } \Lambda \subset \Delta \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces:

(a) $\Phi^\Delta = \left(\Phi_\Lambda^\Delta\right)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es un potencial sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

(b) *Si Φ^Δ es λ-admisible con respecto a una $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$, entonces*

$$\gamma_\Delta^{\Phi^\Delta} (A|x) = \gamma_\Delta^{\Phi^\Delta} (A|y)$$

para todo $A \in \mathscr{F}_\Delta, x, y \in E^S$.

Denotemos por $\mu_{\Phi^\Delta}(A)$ a ese valor, $\forall A \in \mathscr{F}_\Delta$. Luego, μ_{Φ^Δ} es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}_\Delta\right)$ que se llama "distribución de Gibbs para Φ sobre Δ con condiciones de frontera libre".

Demostración:
Parte (a) Ejercicio.
Parte (b)
Sean $x, y \in E^S, A \in \mathscr{F}_\Delta$ cualesquiera. Entonces

$$\gamma_\Delta^{\Phi^\Delta} (A|x) = \int_{E^\Delta} 1_A \left(\xi x_{S\setminus\Delta}\right) \rho_\Delta^{\Phi^\Delta} \left(\xi x_{S\setminus\Delta}\right) \lambda^\Delta (d\xi) \tag{3.33}$$

Como $A \in \mathscr{F}_\Delta$ tenemos:

$$1_A \left(\xi x_{S\setminus\Delta}\right) = 1_A \left(\xi y_{S\setminus\Delta}\right), \forall \xi \in E^\Delta$$

Luego, por la ecuación 3.33, para probar la parte (b) bastará ver que $\rho_\Delta^{\Phi^\Delta}$ es $\mathscr{F}_\Delta$-medible.

Ahora:

$$H_\Delta^{\Phi^\Delta} = \sum_{\Delta' \in \mathscr{S} \cap \Delta} \Phi_{\Delta'}^\Delta = \sum_{\Delta' \subset \Delta} \Phi_{\Delta'}$$

Como $\Phi_{\Delta'}$ es $\mathscr{F}_{\Delta'}$-medible y $\mathscr{F}_{\Delta'} \subset \mathscr{F}_\Delta$, $\forall \Delta' \subset \Delta$, se tiene que $H_\Delta^{\Phi^\Delta}$ es $\mathscr{F}_\Delta$-medible. Entonces $h_\Delta^{\Phi^\Delta}$ es $\mathscr{F}_\Delta$-medible.

Sea $w^\circ \in E^S$.

Como $h_\Delta^{\Phi^\Delta}$ es $\mathscr{F}_\Delta$-medible

$$h_\Delta^{\Phi^\Delta} \left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right) = h_\Delta^{\Phi^\Delta} \left(\xi w_{S\setminus\Delta}^\circ\right), \forall \xi \in E^\Delta$$

Luego, por ser Φ^{Δ} λ-admisible tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_{\Delta}\left(h_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}\right)(w) &= \int_{E^{\Delta}} h_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}\left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^{\Delta}(d\xi)\\ &= \int_{E^{\Delta}} h_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}\left(\xi w^{\circ}_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^{\Delta}(d\xi)\\ &= \lambda_{\Delta}\left(h_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}\right)(w^{\circ})\end{aligned}$$

Luego: $\rho_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}} = \frac{h_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}}{\lambda_{\Delta}\left(h_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}\right)}$ es $\mathscr{F}_{\Delta}$-medible.

■

Nota 3.3.4 *Si Φ es λ-admisible respecto a una $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$ o si $\lambda(E) < \infty$ y $\Phi \in \mathscr{P}_S$, entonces Φ^{Δ} es λ-admisible.*

Proposición 3.3.2 *Sean $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$ y $\Phi = (\Phi_{\Lambda})_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial. Supongamos que se cumplen **(i)** o **(ii)** siendo:*

(i) *$\lambda(E) < \infty$ y $\Phi \in \mathscr{P}_S$.*

(ii) *Φ es λ-admisible y de rango finito.*

Para cada $\Delta \in \mathscr{S}$, sea $\Phi^{\Delta} = \left(\Phi^{\Delta}_{\Lambda}\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ como en la Proposición 3.3.1. Entonces

(a) *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, $\lim_{\Delta\in\mathscr{S}} \left\|H_{\Lambda}^{\Phi^{\Delta}-\Phi}\right\|_{\infty} = 0$*

(b) *Sea $w \in E^S$, μ un punto de $\mathscr{L}$-clausura de $\left(\gamma_{\Delta}^{\Phi^{\Delta}}(\cdot|w)\right)_{\Delta\in\mathscr{S}}$ en $\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)$. Entonces $\mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$.*

Demostración:
Parte (a)

$$H_{\Lambda}^{\Phi^{\Delta}-\Phi} = \sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda}\left(\Phi^{\Delta}_{A} - \Phi_{A}\right) = -\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda\\ A\cap\Delta^{c}\neq\emptyset}}\Phi_{A}$$

Luego, si $\Phi \in \mathscr{P}_S$, entonces:

$$\left\|H_{\Lambda}^{\Phi^{\Delta}-\Phi}\right\|_{\infty} \leq \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda\\ A\cap\Delta^{c}\neq\emptyset}}\|\Phi_{A}\|_{\infty} \leq \sum_{s\in\Lambda}\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda\\ A\cap\Delta^{c}\neq\emptyset}}\|\Phi_{A}\|_{\infty} \underset{\Delta}{\rightarrow} 0$$

Si Φ es de rango finito, para cada $s, \exists \Lambda_s \in \mathscr{S}$ tal que $s \in A, A \cap \Lambda_s^c \neq \emptyset \Rightarrow \Phi_A \equiv 0$.

Luego, $\forall \Delta \in \mathscr{S}$ tal que $\bigcup_{s\in\Lambda} \Lambda_s \subset \Delta$, tenemos que

$$\left| - \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\cap\Delta^c\neq\emptyset}} \Phi_A(x) \right| \leq \sum_{s\in\Lambda} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap s \\ A\cap\Delta^c\neq\emptyset}} |\Phi_A(x)| = 0,\ \forall x \in E^S$$

Parte (b)

Por lo probado en la Parte (a) y el Corolario 3.3.3, tenemos que

$$\gamma^{\Phi^\Delta} \xrightarrow[\Delta\in\mathscr{S}]{} \gamma^\Phi \tag{3.34}$$

Supongamos (i) $\Rightarrow H_\Lambda^\Phi \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$, Φ es λ-admisible (Proposición 2.1.2) y Φ es uniformemente convergente $\Rightarrow \gamma^\Phi$ es q. l. .

Supongamos (ii), Entonces γ^Φ es q. l. por las Proposiciones 2.2.5 y 2.2.6.

Sea $w \in E^S$ y μ un punto de $\mathscr{L}$-clausura de $R = \left(\gamma_\Delta^{\Phi^\Delta}(\cdot|w)\right)_{\Delta\in\mathscr{S}}$.

Sea $R' = \left(\gamma_{\Delta'}^{\Phi^{\Delta'}}(\cdot|w), \mathscr{D}, \subset\right)$ una subred de R tal que $\gamma_{\Delta'}^{\Phi^{\Delta'}}(\cdot|w) \to \mu$ en la $\mathscr{L}$-topología.

Sea: $\nu_{\Delta'} \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ para cada $\Delta' \in \mathscr{D}$ dada por: $\nu_{\Delta'} = \delta_w$.

Entonces, $\forall A \in \mathscr{F}$ tenemos

$$\left(\nu_{\Delta'}\gamma_{\Delta'}^{\Phi^{\Delta'}}\right)(A) = \int \gamma_{\Delta'}^{\Phi^{\Delta'}}(A|x)\,\nu_{\Delta'}(dx) = \gamma_{\Delta'}^{\Phi^{\Delta'}}(A|w) \to \mu(A)$$

Esto es, $\left(\nu_{\Delta'}\gamma_{\Delta'}^{\Phi^{\Delta'}}\right)_{\Delta'\in\mathscr{D}}$ converge a μ en la $\mathscr{L}$-topología.

Además, por definición de subred, $(\Delta')_{\Delta'\in\mathscr{D}}$ converge a S y $\gamma^{\Phi^{\Delta'}} \xrightarrow[\Delta'\in\mathscr{D}]{} \gamma^\Phi$ por la ecuación 3.34.

Luego, $\mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)$ por el Teorema 3.3.1.

Modificación periódica de un potencial

Sea $S = \mathbb{Z}^2$. Para cada $\underset{\sim}{m} = (m_1, m_2) \in S$ y $\underset{\sim}{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$, sea $\Delta\left(\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{p}\right) := S \cap ([m_1, m_1 + p_1 - 1] \times [m_2, m_2 + p_2 - 1])$

Sea $\mathscr{S}_\square = \left\{\Delta\left(\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{p}\right) / \underset{\sim}{m} \in \mathbb{Z}^2 \text{ y } \underset{\sim}{p} \in \mathbb{N}^2\right\}$.

Sean $\underset{\sim}{m} \in \mathbb{Z}^2$ y $\underset{\sim}{p} \in \mathbb{N}^2$, por razones de simplicidad en la notación tomemos $\Delta := \Delta\left(\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{p}\right)$.

Sea $S_{\underset{\sim}{p}}$ el grupo cociente $S/\underset{\sim}{p}S$.

Sea $C_{\underset{\sim}{p}} : S \to S_{\underset{\sim}{p}}$ la aplicación canónica.

Sea $J_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}} : \Delta \to S_{\underset{\sim}{p}}$ dada por $J_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{s}\right) = C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{s}\right)$

Proposición 3.3.3 $J_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{s}\right)$ *es biyectiva*

Demostración: Ejercicio.

Sea $\bar{C}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}} : \mathscr{S} \to \mathscr{P}(\Delta)$ dada por $\bar{C}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(A) = \left\{t \in \Delta / J_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{t}\right) = C_{\underset{\sim}{p}}(A)\right\}$

Sea ahora $D \subset \Delta$. Definimos $\mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(D) = \left\{A \in \mathscr{S} / \bar{C}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(A) = D\right\}$.

Sea $\equiv_{\underset{\sim}{p}}$ la relación entre elementos de $\mathscr{S}$ dada por $A \equiv_{\underset{\sim}{p}} B \Leftrightarrow \exists \underset{\sim}{i} \in \underset{\sim}{p}S$ tal que $B = A + \underset{\sim}{i}$.

Proposición 3.3.4 $\equiv_{\underset{\sim}{p}}$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración: Ejercicio.

Notemos que $A \equiv_{\underset{\sim}{p}} B \Rightarrow C_{\underset{\sim}{p}}(A) = C_{\underset{\sim}{p}}(B)$ pero la recíproca en general no es cierta.

Sea $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}} : \mathscr{S} \to \mathscr{S} / \equiv_{\underset{\sim}{p}}$, la aplicación canónica.

Proposición 3.3.5 *Sean $\mathscr{D}$ y Λ subconjuntos de Δ. Si $\mathscr{D} \cap \Lambda \neq \emptyset$ entonces existe $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D}, \Lambda) \subset \mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D}) \cap \Lambda$ tal que $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}}$ es una biyección entre $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D}, \Lambda)$ y $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}}\left(\mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D})\right)$*

Demostración:

Sea $A \in \mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D})$. Entonces $C_{\underset{\sim}{p}}(A) = \mathscr{D}$ y como $\Lambda \cap \mathscr{D} \neq \emptyset, \exists \underset{\sim}{a} \in A$ y $\underset{\sim}{t} \in \Lambda \cap \mathscr{D}$ tal que $\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}$ con $\underset{\sim}{s} \in S \Rightarrow \underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s} \Rightarrow \underset{\sim}{t} \in A - \underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s} \Rightarrow \exists B \equiv_{\underset{\sim}{p}} A$ tal que $B \cap \Lambda \neq \emptyset$.

De aquí se deduce la existencia de $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D}, \Lambda)$.

Sea ahora $\tilde{\sigma}_\Delta : E^S \to E^S$ dada por:

$$\sigma_{\underset{\sim}{s}}\left(\tilde{\sigma}_\Delta(w)\right) = \sigma_{J^{-1}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{s}\right)\right)}(w), \ \forall \underset{\sim}{s} \in S, \forall w \in E^S$$

Luego, $\tilde{\sigma}_\Delta$ es $\mathscr{F}$-medible.

Proposición 3.3.6 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial sobre $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ invariante por traslaciones. Entonces: $A, B \in \mathscr{S}, A \equiv_{\underset{\sim}{p}} B \Rightarrow \Phi_A \circ \tilde{\sigma}_\Delta = \Phi_B \circ \tilde{\sigma}_\Delta$*

Demostración:
$A \equiv_{\underset{\sim}{p}} B \Rightarrow \exists \underset{\sim}{s} \in S$ tal que $B = A + \underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}$.
Luego, $\forall w \in E^S$ por la invariancia tenemos

$$\Phi_A \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) = \Phi_{A+\underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}} \left(\tau_{-\underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}} \tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) \tag{3.35}$$

Sea $\underset{\sim}{t} \in S$ cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} \tau_{-\underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}} \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) \left(\underset{\sim}{t}\right) &= \tilde{\sigma}_\Delta (w) \left(\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}\right) \\ &= \sigma_{\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}} \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) \\ &= \sigma_{J^{-1}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}\right)\right)} (w) \\ &= \sigma_{J^{-1}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{t}\right)\right)} (w) \\ &= \sigma_{\underset{\sim}{t}} \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) \\ &= \tilde{\sigma}_\Delta (w) \left(\underset{\sim}{t}\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\tau_{-\underset{\sim}{p}.\underset{\sim}{s}} \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) = \tilde{\sigma}_\Delta (w)$$

Entonces por la ecuación 3.35 tenemos

$$\Phi_A \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right) = \Phi_B \left(\tilde{\sigma}_\Delta (w)\right)$$

$\blacksquare$

Definición 3.3.2 *Sea $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ infinito, $\alpha : \mathscr{S}_0 \to \mathbb{R}$. Diremos que $\sum_{A\in\mathscr{S}_0} \alpha (A)$ es absolutamente convergente si dado $\epsilon > 0, \exists \mathscr{D}_0 = \mathscr{D}_0 (\epsilon)$ tal que $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D} \in \mathscr{S} \Rightarrow \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}_0 \\ A\cap\mathscr{D}^c\neq\emptyset}} |\alpha (A)| < \epsilon$*

Definición 3.3.3 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Diremos que Φ es absolutamente convergente (a.c.) si: $\sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_A (x)$ es absolutamente convergente para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $x \in E^S$.*

Proposición 3.3.7 *Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial a. c. e invariante por traslaciones. Entonces: Para cada $\Lambda \subset \Delta$ y $x \in E^S$ se cumple:*

(a) $\sum_{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda,\Lambda)} \Phi_B \left(\tilde{\sigma}_\Delta (x)\right)$ *es a. c. .*

(b) *Sea* $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda) \subset \mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)$ *tal que* $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}}$ *es una biyección entre* $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)$ *y* $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}}\left(\mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)\right)$*. Entonces:*

$$\sum_{B \in \mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)} \Phi_B\left(\tilde{\sigma}_\Delta(x)\right) = \sum_{B \in \mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda,\Lambda)} \Phi_B\left(\tilde{\sigma}_\Delta(x)\right)$$

Demostración:

(a) Sigue por ser Φ a. c. y $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda,\Lambda) \subset \mathscr{S} \cap \Lambda$.

(b) Es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.6.

Proposición 3.3.8 *Sea* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *un potencial a. c. e invariante por traslaciones. Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$*, sea* $\tilde{\Phi}^\Delta_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\tilde{\Phi}^\Delta_\Lambda \equiv 0 \ si\ \Lambda \cap \Delta^c \neq \emptyset$$

$$\tilde{\Phi}^\Delta_\Lambda(x) = \sum_{B \in \mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)} \Phi_B\left(\tilde{\sigma}_\Delta(x)\right), \forall x \in E^S,\ \ si\ \Lambda \subset \Delta,$$

donde $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda) \subset \mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)$ *y* $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}}$ *es una biyección entre* $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)$ *y* $C_{\equiv_{\underset{\sim}{p}}}\left(\mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)\right)$.

Sea $\tilde{\Phi}^\Delta = \left(\tilde{\Phi}^\Delta_\Lambda\right)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$*. Entonces* $\tilde{\Phi}^\Delta$ *es un potencial que llamaremos "modificación* $\Delta\left(\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}\right)$*-periódica de* Φ*".*

Demostración:
Debemos probar:

(1) $\tilde{\Phi}^\Delta_\Lambda$ es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible, $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$

(2) $\exists \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \Lambda} \tilde{\Phi}^\Delta_A(x), \forall x \in E^S, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$

Para probar (1) bastará ver que:

(3) Si $B \in \mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)$ entonces $\Phi_B\left(\tilde{\sigma}_\Delta(x)\right) = \Phi_B\left(\tilde{\sigma}_\Delta(w)\right), \forall (x,w) \in T(\Lambda)$.

Como Φ_B es B-medible, $\exists \phi_B : E^B \to \mathbb{R}, \mathscr{E}^B$-medible tal que $\Phi_B = \phi_B \circ \sigma_B$.
Sea ahora $\underset{\sim}{t} \in B$. Como $B \in \mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda) \subset \mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)$ entonces $J^{-1}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{t}\right)\right) \in \Lambda$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\underset{\sim}{t}}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}\left(w\right)\right) &= \sigma_{J^{-1}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{t}\right)\right)}\left(w\right) \\
&= \sigma_{J^{-1}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}\left(C_{\underset{\sim}{p}}\left(\underset{\sim}{t}\right)\right)}\left(x\right) \\
&= \sigma_{\underset{\sim}{t}}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}\left(w\right)\right).
\end{aligned}$$

Luego, $\sigma_{\underset{\sim}{t}}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}\left(w\right)\right) = \sigma_{\underset{\sim}{t}}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}\left(w\right)\right)$

Entonces sigue (3).

Veamos (2)

Por definición:

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \tilde{\Phi}^{\Delta}_{A}\left(x\right) &= \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\subset\Delta}} \tilde{\Phi}^{\Delta}_{A}\left(x\right) \\
&= \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\subset\Delta}} \sum_{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)} \left(\Phi_{B}\circ\tilde{\sigma}_{\Delta}\right)\left(x\right),
\end{aligned}$$

que está bien definida pues: $\#\left(\{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda/A\subset\Delta\}\right) < \infty$ y para cada $A\in\mathscr{S}\cap\Lambda$ con $A\subset\Delta$, $\sum_{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\Lambda)} \left|\Phi_{B}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}\left(x\right)\right)\right| < \infty$.

$\blacksquare$

Sea $\lambda\in\mathscr{M}\left(E,\mathscr{E}\right)$ y supongamos que $\tilde{\Phi}^{\Delta}$ es λ-admisible.

Proposición 3.3.9 *Sea $\Delta\in\mathscr{S}_{\Box}$. Sea Φ un potencial a. c. invariante por traslaciones y sea $\tilde{\Phi}^{\Delta}$ la modificación Δ-periódica de Φ. Sea $\lambda\in\mathscr{M}\left(E,\mathscr{E}\right)$ y supongamos que λ-admisible. Sea $w^{\circ}\in E^{S}$ cualquiera. Entonces:*

$$\gamma^{\tilde{\Phi}^{\Delta}}_{\Delta}\left(A|w\right) = \gamma^{\tilde{\Phi}^{\Delta}}_{\Delta}\left(A|w^{\circ}\right), \forall w\in E^{S}, \forall A\in\mathscr{F}_{\Delta}$$

Denotemos por $\mu_{\tilde{\Phi}^{\Delta}}\left(A\right)$ ese valor común, $\forall A\in\mathscr{F}_{\Delta}$.

Luego, $\mu_{\tilde{\Phi}^{\Delta}}$ es una probabilidad sobre $\left(E^{S},\mathscr{F}_{\Delta}\right)$ llamada "distribución de Gibbs para Φ sobre Δ con condición de frontera periódica".

Demostración:

Por lo visto, en la Proposición 3.3.8:

$H^{\tilde{\Phi}^{\Delta}}_{\Delta} = \sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Delta}\tilde{\Phi}^{\Delta}_{A} = \sum_{A\subset\Delta}\tilde{\Phi}^{\Delta}_{A}$ y $\tilde{\Phi}^{\Delta}_{A}$ es $\mathscr{F}_{A}$-medible $\therefore$ $\mathscr{F}_{\Delta}$-medible pues $A\subset\Delta$.

Como $\tilde{\Phi}^{\Delta}$ es λ-admisible, existe $\rho^{\Phi^{\Delta}}_{\Delta}$ y por lo recién probado, $\rho^{\Phi^{\Delta}}_{\Delta}$ es $\mathscr{F}_{\Delta}$-medible. Entonces $\exists\phi_{\Delta}: E^{\Delta}\to\mathbb{R}, \mathscr{E}^{\Delta}$-medible tal que $\rho^{\Phi^{\Delta}}_{\Delta} = \phi_{\Delta}\circ\sigma_{\Delta}$.

Por otra parte, como $A \in \mathscr{F}_\Delta$, entonces

$$1_A\left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right) = 1_A\left(\xi w^\circ_{S\setminus\Delta}\right), \forall \xi \in \Delta$$

Luego:

$$\begin{aligned}\gamma_\Delta^{\tilde{\Phi}^\Delta}(A|w) &= \int_{E^\Delta} 1_A\left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right)\rho_\Delta^{\tilde{\Phi}^\Delta}\left(\xi w_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^\Delta(d\xi) \\ &= \int_{E^\Delta} 1_A\left(\xi w^\circ_{S\setminus\Delta}\right)\rho_\Delta^{\tilde{\Phi}^\Delta}\left(\xi w^\circ_{S\setminus\Delta}\right)\lambda^\Delta(d\xi) \\ &= \gamma_\Delta^{\tilde{\Phi}^\Delta}(A|w^\circ)\end{aligned}$$

■

Nota 3.3.5 *Sea Φ un potencial. Es fácil de ver que si $\Phi \in \mathscr{P}_S$ o si Φ es de rango finito, entonces es Φ a. c. .*

Proposición 3.3.10 *Sean $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ y $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial invariante por traslaciones. Supongamos que se cumplen (i) ó (ii), donde:*

(i) *$\lambda(E) < \infty$ y $\Phi \in \mathscr{P}_S$.*

(ii) *Φ es λ-admisible y de rango finito.*

Para cada $\Delta \in \mathscr{S}_\square$ sea $\tilde{\Phi}^\Delta$ la modificación Δ-periódica de Φ.

Entonces:

(a) Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}, \lim_{\Delta\in\mathscr{S}_\square}\left\|H_\Lambda^{\tilde{\Phi}^\Delta-\Phi}\right\|_\infty = 0$.

(b) Sea $w \in E^S$. Sea μ un punto de $\mathscr{L}$-clausura de $\left(\gamma_\Delta^{\tilde{\Phi}^\Delta}(\cdot|w)\right)_{\Delta\in\mathscr{S}_\square}$ en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Entonces $\mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)$.

Demostración:

Una vez probada la parte (a), la parte (b) se prueba en forma análoga a la parte (b) de la Proposición 3.3.2.

Así es que sólo probaremos (a).

Parte (a)

Usando las Proposiciones 3.3.5 y 3.3.8 tenemos, para todo $x \in E^S$:

$$
\begin{aligned}
H_{\Lambda}^{\tilde{\Phi}^{\Delta}-\Phi}(x) &= \sum_{\substack{\mathscr{D}\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ \mathscr{D}\subset\Delta}} \tilde{\Phi}_{\mathscr{D}}^{\Delta}(x) - \sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_{A}^{\Delta}(x) \\
&= \sum_{\substack{\mathscr{D}\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ \mathscr{D}\subset\Delta}} \sum_{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda)} \Phi_{B}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}(x)\right) - \sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_{A}^{\Delta}(x) \\
&= \sum_{\substack{\mathscr{D}\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ \mathscr{D}\subset\Delta}} \sum_{\substack{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda(x)) \\ B\subset\Delta}} \Phi_{B}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}\right) + \sum_{\substack{\mathscr{D}\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ \mathscr{D}\subset\Delta}} \sum_{\substack{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda) \\ B\setminus\Delta\neq\emptyset}} \Phi_{B}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}(x)\right) \\
&\quad - \sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_{A}^{\Delta}(x) \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda), B\subset\Delta \Rightarrow C_{\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D}) = C_{\underset{\sim}{p}}(B) \Rightarrow B=\mathscr{D}$, pues B y $\mathscr{D}$ son subconjuntos de Δ.

Además, $\sigma_B\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}(x)\right) = \sigma_B(x)$ pues $B\subset\Delta$.

Luego, la ecuación 3.36

$$
\sum_{\substack{\mathscr{D}\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ \mathscr{D}\subset\Delta}} \sum_{\substack{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda) \\ B\setminus\Delta\neq\emptyset}} \Phi_{B}\left(\tilde{\sigma}_{\Delta}(x)\right) - \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\setminus\Delta\neq\emptyset}} \Phi_{A}(x) \qquad (3.37)
$$

Por la ecuación 3.37 y teniendo en cuenta que $\left\{\mathscr{S}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D}) / \mathscr{D}\subset\Delta, \mathscr{D}\neq\emptyset\right\}$ es una partición de $\mathscr{S}$, además de la definición de $\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda)$ se tiene:

$$
\left\| H_{\Lambda}^{\tilde{\Phi}^{\Delta}-\Phi} \right\|_{\infty} \leq \sum_{\substack{\mathscr{D}\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ \mathscr{D}\subset\Delta}} \sum_{\substack{B\in\mathscr{R}_{\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{p}}(\mathscr{D},\Lambda) \\ B\setminus\Delta\neq\emptyset}} \|\Phi_B\|_{\infty} + \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\setminus\Delta\neq\emptyset}} \|\Phi_A\|_{\infty} \leq 2 \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\setminus\Delta\neq\emptyset}} \|\Phi_A\|_{\infty} \xrightarrow[\Delta\in\mathscr{S}_{\square}]{} 0
$$

■

Proposición 3.3.11 *Sea* $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *quasi-local. Entonces:*

$$
\mu\in\mathscr{G}(\gamma) \Leftrightarrow \mu(A) = \int \gamma_\Lambda(A|x)\,\mu(dx), \forall A\in\mathscr{F}_\Lambda, \forall\Lambda\in\mathscr{S}.
$$

Demostración:

$(\Rightarrow)$

Cierta, por la Proposición 1.2.3, sin necesidad de suponer que γ es quasi-local.

($\Leftarrow$)
Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $\nu_\Lambda = \mu$ y $\gamma^\Lambda = \gamma$.
Por la condición dada tenemos:

$$\nu_\Lambda \gamma_\Lambda^\Lambda = \mu \gamma_\Lambda \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \mu$$

en la $\mathscr{L}$-topología.
Entonces $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$, por el Teorema 3.3.1.

$\blacksquare$

3.4. Existencia y propiedades topológicas de medidas de Gibbs.

Teorema 3.4.1 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar. Sean: $(\mathscr{D}, \succcurlyeq)$ un conjunto dirigido; para cada $\alpha \in \mathscr{D}$: $\gamma^\alpha \in ESP\left(E^S, \mathscr{F}\right), \Lambda_\alpha \in \mathscr{S}, \nu_\alpha \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ y $\gamma \in ESP$. Supongamos que:*

(i) *γ es q. l..*

(ii) $\gamma^\alpha \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \gamma$.

(iii) $\Lambda_\alpha \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} S$.

(iv) *$\left(\nu_\alpha \gamma_{\Lambda_\alpha}^\alpha\right)_{\alpha \in \mathscr{D}}$ es l.e..*

Entonces $\mathscr{G}(\gamma) \neq \emptyset$.

Demostración:
Por (iv) y la Proposición 3.2.3 se tiene que $\exists \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que es punto de clausura de la red $\left(\nu_\alpha \gamma_{\Lambda_\alpha}^\alpha\right)_{\alpha \in \mathscr{D}}$ con respecto a la $\mathscr{L}$-topología. Entonces existe una subred $(\gamma_\beta, \mathscr{D}', \succcurlyeq')$ de $(\gamma_\alpha, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ tal que $\gamma_\beta \underset{\mathscr{D}'}{\longrightarrow} \mu \Rightarrow \mu \in \mathscr{G}(\gamma)$ por el Teorema 3.3.1.

Proposición 3.4.1 *Sea $(E, \mathscr{E})$ un espacio medible, $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ finita, $\tau_{\mathscr{P}_S}$ la $\mathscr{L}$-topología sobre $\mathscr{P}_S$ de la Nota 3.3.3, $\tau_{\mathscr{L}}$ la $\mathscr{L}$-topología sobre $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Sea*

$$Grafo(\mathscr{G}) = \left\{(\Phi, \mu) / \Phi \in \mathscr{P}_S, \mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)\right\}$$

Entonces $Grafo(\mathscr{G})$ es $\tau_{\mathscr{P}_S} \times \tau_{\mathscr{L}}$-cerrado.

Demostración:

Sea $R = (I, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ una red en $Grafo\,(\mathscr{G})$ y $(\Phi, \mu) \in \mathscr{P}_S \times \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ tal que R converge a (Φ, μ) con respecto a la topología $\tau_{\mathscr{P}_S} \times \tau_{\mathscr{L}}$.

Para cada $\alpha \in \mathscr{D}$ pongamos $I(\alpha) = (\Phi^\alpha, \mu_\alpha)$. Entonces $\Phi^\alpha \underset{\alpha}{\to} \Phi$ con respecto a la topología $\tau_{\mathscr{P}_S}$ y $\mu_\alpha \underset{\alpha}{\to} \mu$ con respecto a la topología $\tau_{\mathscr{L}}$.

Sean ahora

$$\bar{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \times \mathscr{S}$$

o_x la relación entre elementos de $\bar{\mathscr{D}}$ dada por $(\alpha, \Delta)\, o_x\, (\beta, \Lambda)$ si y solo si $\alpha \succcurlyeq \beta$ y $\Delta \supset \Lambda$

Entonces $\left(\bar{\mathscr{D}}, o_x\right)$ es un conjunto dirigido.

Sea ahora $\bar{I} : \bar{\mathscr{D}} \to \left(\mathscr{P}_S \times \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)\right) \times \mathscr{P}(S)$ dada por:

$$\bar{I}(\alpha, \Lambda) = (I(\alpha), \Lambda) = ((\Phi^\alpha, \mu_\alpha), \Lambda).$$

Luego, $\left(\bar{I}, \bar{\mathscr{D}}, o_x\right)$ es una red en $\left(\mathscr{P}_S \times \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)\right) \times \mathscr{P}(S)$.

Como $\Phi^\alpha \xrightarrow[\bar{I}(\alpha,\Lambda)\in\bar{\mathscr{D}}]{} \Phi$, por el Corolario 3.3.4 se tiene que $\gamma^{\Phi^\alpha} \xrightarrow[\bar{I}(\alpha,\Lambda)\in\bar{\mathscr{D}}]{} \gamma^\Phi$.

También $\Lambda \xrightarrow[\bar{I}(\alpha,\Lambda)\in\bar{\mathscr{D}}]{} S$.

Como para cada $\alpha \in \mathscr{D}, (\Phi^\alpha, \mu_\alpha) \in Grafo\,(\mathscr{G})$ se tiene que $\mu_\alpha \in \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi^\alpha}\right)$, entonces por la Proposición 1.2.3 se tiene

$$\mu_\alpha \gamma^{\Phi^\alpha} = \mu_\alpha$$

Luego:

$$\mu_\alpha \gamma^{\Phi^\alpha} \xrightarrow[(\alpha,\Lambda)\in\bar{\mathscr{D}}]{} \mu$$

Por el Teorema 3.3.1 resulta entonces que $\mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)$.

Luego $(\Phi, \mu) \in Grafo\,(\mathscr{G})$.

$\blacksquare$

Teorema 3.4.2 *Sean: $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar y $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$ con $\lambda(E) < \infty$.*

Entonces:

(a) $\Phi \in \mathscr{P}_S \Rightarrow \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right) \neq \emptyset$ *y es $\mathscr{L}$-compacto.*

(b) *Sea $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}_S$ acotado; esto es: para cada $s \in S$ se cumple:*

$$\sup\left(\left\{\|\Phi\|_s / \Phi \in \mathscr{M}\right\}\right) < \infty$$

Entonces:

$$\mathscr{G}(\mathscr{M}) := \bigcup_{\Phi \in \mathscr{M}} \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$$

es $\mathscr{L}$-relativamente compacto.

(c) *$\mathscr{G}$ es semicontinua superiormente; esto es: para cada $F \subset \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$, $\mathscr{L}$-cerrado, se cumple que $\mathscr{G}^{-1}(F) := \left\{\Phi \in \mathscr{P}_S / \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right) \cap F \neq \emptyset\right\}$ es $\tau_{\mathscr{P}_S}$-cerrado.*

Demostración:

Parte (a)

Sea $w \in E^S$ y $(\mathscr{S}, \supset)$ conjunto dirigido.

Sea $R_{\mathscr{P}_S} = (I_{\mathscr{P}_S}, \mathscr{S}, \supset)$ la red en $\mathscr{P}_S$ dada por $I_{\mathscr{P}_S}(\Lambda) = \Phi^{\Lambda} := \Phi, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

$R_{\mathscr{S}} = (I_{\mathscr{S}}, \mathscr{S}, \supset)$ la red en $\mathscr{S}$ dada por $I_{\mathscr{S}}(\Lambda) = \Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$

$R_{\mathscr{P}} = (I_{\mathscr{P}}, \mathscr{S}, \supset)$ la red en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ dada por $I_{\mathscr{P}}(\Lambda) = \nu_{\Lambda} := \delta_w, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$

$R = (I_{\mathscr{R}}, \mathscr{S}, \supset)$ la red en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ dada por $I_{\mathscr{R}}(\Lambda) = \mu_{\Lambda} := \nu_{\Lambda}\gamma_{\Lambda}^{\Phi^{\Lambda}}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Por el Corolario 3.2.4, R es l.e..

Por el Corolario 2.2.1 (aplicable pues $\Phi \in \mathscr{P}_S$ y $\lambda(E) < \infty \Rightarrow \Phi$ es λ-admisible y u.c.) se tiene que γ^{Φ} es quasi-local.

Por el Teorema 3.4.1 se tiene que $\mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right) \neq \emptyset$.

Ahora bien, como Φ es λ-admisible y $\Phi \in \mathscr{P}_S$ por la Proposición 2.2.7, $\rho_{\Lambda}^{\Phi} \in \mathscr{L}^{\infty}\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right), \forall \Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$ es $\mathscr{L}$-relativamente compacto por el Corolario 3.2.2.

Además, por la Proposición 3.4.1, $\mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$ es $\mathscr{L}$-cerrado $\Rightarrow \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$ es $\mathscr{L}$-compacto.

Parte (b)

Para cada $s \in S$ sea

$$M_s := \sup\left(\left\{\|\Phi\|_s / \Phi \in \mathscr{M}\right\}\right) < \infty$$

Sea $R = (I, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ una red en $\mathscr{G}(\mathscr{M})$.

Para cada $\alpha \in \mathscr{D}$ pongamos

$$\mu_{\alpha} = I(\alpha)$$

$$\Phi^{\alpha} \in \mathscr{M} \text{ tal que } \mu_{\alpha} \in \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$$

Sea $\bar{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \times \mathscr{S}$ y o_x el orden parcial en $\bar{\mathscr{D}}$ definido por:

$$(\alpha, \Delta)\, o_x\, (\beta, \Lambda) \text{ si y solo si } \alpha \succcurlyeq \beta \text{ y } \Delta \supset \Lambda$$

Sea $\left(\bar{I}, \bar{\mathscr{D}}, o_x\right)$ la red en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right) \times \mathscr{P}_S \times \mathscr{P}(S)$ dada por:

$$\bar{I}\left((\alpha, \Lambda)\right) = \left(\mu_\alpha, \Phi^\alpha, \Lambda\right)$$

Para simplificar la notación pongamos entonces $\bar{\alpha} = (\alpha, \Lambda)\,, \mu_{\bar{\alpha}} = \mu_\alpha, \Phi^{\bar{\alpha}} = \Phi^\alpha$ y $\Lambda_{\bar{\alpha}} = \Lambda$.

Por la Proposición 1.2.3 tenemos:

$$\mu_{\bar{\alpha}} = \mu_{\bar{\alpha}} \gamma_{\Lambda_{\bar{\alpha}}}^{\Phi^{\bar{\alpha}}}, \forall \bar{\alpha} \in \bar{\mathscr{D}}.$$

Además

$$\Lambda_{\bar{\alpha}} \underset{\bar{\mathscr{D}}}{\rightarrow} S$$

Finalmente:

$$\overline{\lim_{\bar{\alpha} \in \bar{\mathscr{D}}}} \left\|\Phi^{\bar{\alpha}}\right\|_s \leq M_s, \forall s \in S$$

Por el Corolario 3.2.4 tenemos que $\exists \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que es punto de $\mathscr{L}$-clausura de R.

Parte (c)

Como $\mathscr{P}_S$ con la topología $\tau_{\mathscr{P}_S}$ es metrizable, bastará ver que si $\left(\Phi^n\right)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathscr{G}^{-1}(F)$ tal que $\Phi^n \underset{n}{\rightarrow} \Phi$ con $\Phi \in \mathscr{P}_S$, con respecto a la topología $\tau_{\mathscr{P}_S}$, entonces $\Phi \in \mathscr{G}^{-1}(F)$

Para cada $n = 1, 2, \ldots$ sean

$$\mu_n \in F \text{ tal que } \mu_n \in \mathscr{G}\left(\Phi^n\right) \text{ y } \Delta_n = [-n, n]^2 \cap S$$

Entonces:

$$\mu_n = \mu_n \gamma_{\Delta_n}^{\Phi^n}, \forall n = 1, 2, \ldots \text{ y } \Delta_n \underset{n}{\rightarrow} S,$$

y por la definición de la topología $\tau_{\mathscr{P}_S}$:

$$\lim_n \left\|\Phi^n\right\|_s = \|\Phi\|_s < \infty, \forall s \in S$$

Por el Corolario 3.2.4 tenemos que $\left(\mu_n\right)_{n \geq 1}$ es l.e..

Como $(E, \mathscr{E})$ es un espacio de Borel estándar, por la Proposición 3.2.3 se tiene que existe una red $R = (I, \mathscr{D}, \succcurlyeq)$ en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que es una subred de $\left(\mu_n\right)_{n \geq 1}$, y una $\mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ tal que $\mu_\alpha \underset{n}{\rightarrow} \mu$ en la $\mathscr{L}$-topología (siendo $\mu_\alpha = I(\alpha)\,, \forall \alpha \in \mathscr{D}$).

Como R es subred de $(\mu_n)_{n\geq 1}$ existe $n : \mathscr{D} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha \preccurlyeq \alpha' \Rightarrow n(\alpha) \leq n(\alpha')$$

y para cada $n \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathscr{D}$ tal que $n(\alpha) \geq n$.

Así, $\left(\Phi^{n(\alpha)}, \mu_{n(\alpha)}\right)_{\alpha \in \mathscr{D}}$ es una red en $Grafo\,(\mathscr{G})$ tal que converge a (Φ, μ) en la $\tau_{\mathscr{P}_S} \times \tau_{\mathscr{L}}$-topología. Por la Proposición 3.4.1 $(\Phi, \mu) \in Grafo\,(\mathscr{G}) \Rightarrow \mu \in \mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)$.

Como F es cerrado y $\mu_n \in F, \forall n$ se tiene que $\mu \in F$.

Luego, $\Phi \in \mathscr{G}^{-1}(F)$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Unicidad de distribuciones de Gibbs adaptadas a especificaciones

4.1. Condición de Dobrushin de dependencia débil

Sean: $(Y, \mathscr{B})$ un espacio medible; $\mathscr{P} = \mathscr{P}(Y, \mathscr{B})$ el conjunto de todas las probabilidades sobre $(Y, \mathscr{B})$; $d_U : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ y $d_T : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ definidos por: $d_U(\mu, \tilde{\mu}) = \sup\{|\mu(B) - \tilde{\mu}(B)| / B \in \mathscr{B}\}$ y $d_T(\mu, \tilde{\mu}) = \sup\left\{\left|\int_Y f d\mu - \int_Y f d\tilde{\mu}\right| / f \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R}) \text{ y } \|f\|_\infty = 1\right\}$ respectivamente.

Notemos que $d_U(\mu, \tilde{\mu}) \leq 1, \forall \mu$ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{P}$.

Proposición 4.1.1 *d_U y d_T son distancias sobre $\mathscr{P}$ llamadas «uniforme» y «variación total» respectivamente.*

Demostración: Fácil.

Definición 4.1.1 *Sea $f \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R})$ se llama oscilación de f a:*

$$\delta(f) = \sup\{|f(y) - f(y')| / y, y' \text{ en } Y\}$$

Proposición 4.1.2 *Para toda $f \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R})$ se cumple:*

$$\delta(f) = \sup\{f(y) / y \in Y\} - \text{ínf}\{f(y) / y \in Y\}$$

Demostración: Fácil.

Proposición 4.1.3 *Sea $f \in \mathscr{L}^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R})$. Entonces*

$$\delta(f) = 2\left\|f - m(f)\right\|_{\infty}$$

donde $m(f) = \frac{1}{2}(\sup(f) + \text{ínf}(f))$

Demostración:
Para todo $y \in Y$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(y) - m(f) &\leq \sup(f) - m(f) = \frac{1}{2}(\sup(f) - \text{ínf}(f)) = \frac{1}{2}\delta(f) \quad (4.1) \\ &\geq \text{ínf}(f) - m(f) = -\frac{1}{2}(\sup(f) - \text{ínf}(f)) = -\frac{1}{2}\delta(f) \quad (4.2) \end{aligned}$$

Luego:

$$|f(y) - m(f)| \leq \frac{1}{2}\delta(f)$$

Por lo tanto:

$$\left\|f - m(f)\right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\delta(f) \tag{4.3}$$

Como $\delta(f) < \infty$ ya que $f \in \mathscr{L}^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R})$ se tiene que dado $\epsilon > 0$ $\exists y, y' \in Y$ tales que:

$$\delta(f) \leq |f(y) - f(y')| + \epsilon \leq |f(y) - m(f)| + |f(y') - m(f)| + \epsilon \leq 2\left\|f(y) - m(f)\right\|_{\infty} + \epsilon$$

Por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ se tiene que $\frac{1}{2}\delta(f) \leq \left\|f(y) - m(f)\right\|_{\infty}$
Por la ecuación 4.3, queda probada la Proposición.

■

Proposición 4.1.4 *Sea μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{P} = \mathscr{P}(Y, \mathscr{B})$. Entonces:*

$$\begin{aligned} d_U(\mu, \tilde{\mu}) &= \sup\left\{\frac{\left|\int_Y f d\mu - \int_Y f d\tilde{\mu}\right|}{\delta(f)} / f \in \mathscr{L}^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R}), f \neq \text{ constante}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int_Y |g_\mu - g_{\tilde{u}}| \, d(\mu + \tilde{u}) \\ &= \frac{1}{2} d_T(\mu, \tilde{\mu}). \end{aligned}$$

donde g_μ y $g_{\tilde{u}}$ son las densidades de μ y $\tilde{\mu}$ respectivamente con respecto a $\mu + \tilde{\mu}$.

Demostración:
Pongamos $S1 = \sup \left\{ \frac{\left|\int_Y f d\mu - \int_Y f d\tilde{\mu}\right|}{\delta(f)} / f \in \mathscr{L}^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R}), f \neq \text{ constante} \right\}$

Afirmación 4.1.1 $d_U(\mu, \tilde{\mu}) \leq S1$.

Demostración de la Afirmación 4.1.1:
Sea $B \in \mathscr{B}$ cualquiera, con $B \neq Y$.

$$|\mu(B) - \tilde{\mu}(B)| = \left| \int_Y 1_B d\mu - \int_Y 1_B d\tilde{\mu} \right| = \frac{\left|\int_Y 1_B d\mu - \int_Y 1_B d\tilde{\mu}\right|}{\delta(1_B)} \leq S1$$

■

Afirmación 4.1.2 $S1 \leq \frac{1}{2} \int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu})$.

Demostración:
Sea $f \in \mathscr{L}^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R}), f \neq$ constante.
Sea $m(f) = \frac{1}{2}(\sup(f) + \text{ínf}(f))$
Como

$$\int_Y (g_\mu - g_{\tilde{\mu}}) \, d(\mu + \tilde{\mu}) = \mu(Y) - \tilde{\mu}(Y) = 0,$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_Y f d\mu - \int_Y f d\tilde{\mu} \right| &= \left| \int_Y f (g_\mu - g_{\tilde{\mu}}) \, d(\mu + \tilde{\mu}) \right| \\
&= \left| \int_Y [(g_\mu - g_{\tilde{\mu}})(f - m(f)) + (g_\mu - g_{\tilde{\mu}}) m(f)] \, d(\mu + \tilde{\mu}) \right| \\
&= \left| \int_Y (g_\mu - g_{\tilde{\mu}})(f - m(f)) \, d(\mu + \tilde{\mu}) \right| \\
&\leq \|f - m(f)\|_\infty \int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) \\
&= \frac{1}{2} \delta(f) \int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}).
\end{aligned}$$

De aquí, es fácil concluir la prueba de la Afirmación 4.1.2.

■

Afirmación 4.1.3 $\frac{1}{2}\int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) \leq d_U(\mu, \mu')$.

Demostración:
Sea $B := \{y \in Y / g_\mu(y) \geq g_{\tilde{\mu}}(y)\} \Rightarrow B \in \mathscr{B}$.
Ahora

$$\begin{aligned}
\int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) &= \int_B |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) + \int_{B^c} |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) \\
&= \int_B (g_\mu - g_{\tilde{\mu}}) \, d(\mu + \tilde{\mu}) + \int_{B^c} (g_{\tilde{\mu}} - g_\mu) \, d(\mu + \tilde{\mu}) \\
&= \mu(B) - \tilde{\mu}(B) + \tilde{\mu}(B^c) - \mu(B^c) \\
&\leq |\mu(B) - \tilde{\mu}(B)| + |\mu(B^c) - \tilde{\mu}(B^c)| \\
&\leq 2d_U(\mu, \tilde{\mu})
\end{aligned}$$

■

De las Afirmaciones hasta aquí probadas, deducimos las dos primeras igualdades de la Proposición 4.1.4.

Para terminar, probamos:

Afirmación 4.1.4 $\int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) = d_T(\mu, \tilde{\mu})$.

Demostración:
Sea $f \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R})$ con $\|f\|_\infty = 1$

$$\begin{aligned}
\left| \int_Y f d\mu - \int_Y f d\tilde{\mu} \right| &= \left| \int_Y f g_\mu d(\mu + \tilde{\mu}) - \int_Y f g_{\tilde{\mu}} d(\mu + \tilde{\mu}) \right| \\
&= \left| \int_Y f (g_\mu - g_{\tilde{\mu}}) \, d(\mu + \tilde{\mu}) \right| \\
&\leq \int_Y |f| \, |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) \\
&\leq \int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) .
\end{aligned}$$

Luego,

$$d_T(\mu, \tilde{\mu}) \leq \int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}| \, d(\mu + \tilde{\mu}) \tag{4.4}$$

Por otra parte, tomando B como en la demostración de la Afirmación 4.1.3 tenemos:

$$\begin{aligned}\int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}|\, d(\mu+\tilde{\mu}) &= \mu(B) - \tilde{\mu}(B) + \tilde{\mu}(B^c) - \mu(B^c) \\ &= (\mu(B) - \mu(B^c)) - (\tilde{\mu}(B) - \tilde{\mu}(B^c)) \\ &= \int_Y f_B d\mu - \int_Y f_B d\tilde{\mu}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde

$$f_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in B \\ -1 & \text{si } y \in B^c \end{cases}$$

Luego, $f_B \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B}, \mathbb{R})$ y $\|f_B\|_\infty = 1$.
De donde, por la ecuación 4.5 resulta

$$\int_Y |g_\mu - g_{\tilde{\mu}}|\, d(\mu+\tilde{\mu}) \leq d_T(\mu, \tilde{\mu})$$

Esto, junto con la ecuación 4.4 prueba la Afirmación 4.1.4.

$\blacksquare$

De aquí en adelante sea: $S \subset \mathbb{Z}^2, \mathscr{S} = \{\Lambda \subset S / 1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}, (E, \mathscr{E})$ un espacio medible y $\mathscr{F}$ la σ-álgebra $\mathscr{E}^S$ sobre E^S.

Proposición 4.1.5 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.*
Para cada $s \in \mathscr{S}$, sea $\gamma_s^\circ : \mathscr{E} \times E^S \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma_s^\circ(A|w) = \gamma_{\{s\}}\left(\sigma_s^{-1}(A)\,|w\right)$$

Entonces, γ_s° es un núcleo de probabilidad de $\left(E^S, \mathscr{T}_{\{s\}}\right)$ a $(E, \mathscr{E})$.

Demostración: Ejercicio.

Definición 4.1.2 *Para cada: $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right), a \in S, b \in S$, sea*

$$\gamma_{a,b} = \sup\left(\{d_U(\gamma_a^\circ(\cdot|x), \gamma_a^\circ(\cdot|w)) / (x, w) \in T(\{b\}^c)\}\right)$$

Nota 4.1.1 $\gamma_{a,a} = 0$

En efecto, como γ_a° es un núcleo de probabilidad de $\left(E^S, \mathscr{T}_{\{a\}}\right)$ a $(E, \mathscr{E})$, se tiene que $\gamma_a^\circ(A|\cdot)$ es $\mathscr{T}_{\{a\}} = \mathscr{F}_{S\backslash a}$-medible, $\forall A \in \mathscr{E}$.

Como $(x, w) \in T\left(\{a\}^c\right), x_{S\backslash a} = w_{S\backslash a}$.

Luego, $\gamma_a^\circ(A|x) = \gamma_a^\circ(A|w), \forall A \in \mathscr{E}$.

Definición 4.1.3 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Por definición*

$$\alpha(\gamma) = \sup\left(\left\{\sum_{b\in S} \gamma_{a,b}/a \in S\right\}\right)$$

Definición 4.1.4 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Diremos que γ satisface la condición D (de Dobrushin), si γ es q. l. y $\alpha(\gamma) < 1$.*

Proposición 4.1.6 *Sean: $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ λ-admisible. Si*

$$\sum_{\substack{\Lambda\in\mathscr{S}(a)\\ \#(\Lambda)\geq 2}} \delta(\Phi_\Lambda) < \infty, \forall a \in S$$

entonces γ^Φ es quasi-local.

Demostración:

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$. Por la Proposición 2.2.5 (b) , bastaría ver que H_Λ^Φ es quasi-local.

Afirmación 4.1.5 *Sea $\Delta \in \mathscr{S}$ tal que $\Lambda \subset \Delta$. Entonces:*

$$O_\Delta\left(H_\Lambda^\Phi\right) \leq \sum_{a\in\Lambda} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(a)\\ A\backslash\Delta\neq\emptyset}} \delta(\Phi_A)$$

siendo $O_\Delta\left(H_\Lambda^\Phi\right)$ como en la Sección 2.2.

Supongamos probada esta Afirmación 4.1.5.

Como Λ es finito y por hipótesis, se tiene que:

$$\lim_{\Lambda\subset\Delta\uparrow S} \sum_{a\in\Lambda} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(a)\\ A\backslash\Delta\neq\emptyset}} \delta(\Phi_A) = 0,$$

Luego, H_Λ^Φ es quasi-local, por la Proposición 2.2.1.

Demostración: de la Afirmación 4.1.5

Sea $(x, x') \in T(\Delta)$ $(\therefore \sigma_\Delta(x) = \sigma_\Delta(x'))$. Entonces

$$\left|H_\Lambda^\Phi(x) - H_\Lambda^\Phi(x')\right| = \left|\sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda} (\Phi_A(x) - \Phi_A(x'))\right| \tag{4.6}$$

Sea $A \in \mathscr{S} \cap \Lambda$ tal que $A \subset \Delta$, como Φ_A es $\mathscr{F}_A$-medible, $A \subset \Delta$ y $(x, x') \in T(\Delta)$ se tiene que $\Phi_A(x) = \Phi_A(x')$. Luego, la ecuación 4.6

$$\leq \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\setminus\Delta\neq\emptyset}} |\Phi_A(x) - \Phi_A(x')| \leq \sum_{a\in\Lambda} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(a) \\ A\setminus\Delta\neq\emptyset}} \delta(\Phi_A)$$

■

Definición 4.1.5 *Sean $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$, $f : E \to \mathbb{R}$, $\mathscr{E}$-medible.*

Diremos que $f \in \mathscr{L}_{exp}(E, \mathscr{E}, \mathbb{R}, \lambda)$ si $\int_E \exp(f(\gamma))\lambda(dy) < \infty$.

En ese caso, llamaremos probabilidad sobre $(E, \mathscr{E})$ inducida por f con respecto a λ a: $\lambda_f : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\lambda_f(A) = \frac{1}{\int_E \exp(f(y))\lambda(dy)} \int_A \exp(f(y))\lambda(dy).$$

Proposición 4.1.7 *Sean: $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$, h y g en $\mathscr{L}_{exp}(E, \mathscr{E}, \mathbb{R}, \lambda)$:*

Si $q = h - g \in \mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$, entonces

$$d_T(\lambda_h, \lambda_g) \leq \frac{1}{2}\delta(q) \leq \|q\|_\infty$$

Demostración:

Para cada $\theta \in [0, 1]$ sea

$$\vartheta_\theta = \lambda_{\theta h + (1-\theta)g}$$

Afirmación 4.1.6 *Sea $r \in \mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$.*

Sea $F_r : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F_r(\theta) = \int_E r(x)\exp(\theta h(x) + (1-\theta)g(x))\lambda(dx).$$

Entonces, F_r es diferenciable en $[0, 1]$ y

$$F_r'(\theta) = F_{rq}(\theta), \forall\theta \in [0, 1]$$

Supongamos probada esta Afirmación 4.1.6.

Sea $f \in \mathscr{L}^{\infty}(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$ con $\|f\|_{\infty} = 1$

Sea $F(\theta) = \frac{F_f(\theta)}{F_1(\theta)} = \vartheta_\theta(f), \forall \theta \in [0,1]$ (donde "1" es la función idénticamente 1 sobre E). Entonces:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{F_1(\theta) F_f'(\theta) - F_1'(\theta) F_f(\theta)}{(F_1(\theta))^2} \\ &= \frac{F_f'(\theta)}{F_1(\theta)} - \frac{F_f(\theta) F_1'(\theta)}{(F_1(\theta))^2} \\ &= \frac{F_{fq}(\theta)}{F_1(\theta)} - \frac{F_f(\theta)}{F_1(\theta)} \frac{F_q(\theta)}{F_1(\theta)} \end{aligned}$$

Y (por otro lado)

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \vartheta_\theta(fq) - \vartheta_\theta(f) \vartheta_\theta(q) \\ &= \vartheta_\theta(f(q - \vartheta_\theta(q))) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F'(1) - F(0) &= \int_0^1 F'(\theta) \, d\theta \\ &= \int_0^1 \vartheta_\theta(f(q - \vartheta_\theta(q))) \, d\theta \\ &= \vartheta_1(f) - \vartheta_0(f) \\ &= \lambda_h(f) - \lambda_g(f) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |\lambda_h(f) - \lambda_g(f)| &\leq \int_0^1 |\vartheta_\theta(f(q - \vartheta_\theta(q)))| \, d\theta \\ &= \int_0^1 \left| \int (f(q - \vartheta_\theta(q))) \, d\lambda_{\theta h + (1-\theta) g} \right| d\theta \\ &\leq \int_0^1 \int |q - \vartheta_\theta(q)| \, d\lambda_{\theta h + (1-\theta) g} d\theta \\ &\leq \int_0^1 \vartheta_\theta(|q - \vartheta_\theta(q)|) \, d\theta \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\theta\left(\left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right|\right) &= \int_E \left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right| d\lambda_{\theta h+(1-\theta)g} \\
&\leq \left(\int_E \left(\left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right|^2\right) d\lambda_{\theta h+(1-\theta)g}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\vartheta_\theta\left(\left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Entonces:
Siguiendo la ecuación 4.7

$$\left(\vartheta_\theta\left(\left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left(\vartheta_\theta\left(\left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} d\theta \tag{4.8}$$

Por otra parte

$$\vartheta_\theta\left(q\right) = \int q d\lambda_{\theta h+(1-\theta)g} = E_{\lambda_{\theta h+(1-\theta)g}}\left(q\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\theta\left(\left(q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right)^2\right) &= Var_{\lambda_{\theta h+(1-\theta)g}}\left(q\right) \\
&\leq E_{\lambda_{\theta h+(1-\theta)g}}\left(\left(q-m\right)^2\right) \\
&\leq \vartheta_\theta\left(\left(q-m\right)^2\right), \forall m \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

De donde resulta:
Siguiendo la ecuación 4.8

$$\int_0^1 \left(\vartheta_\theta\left(\left|q-\vartheta_\theta\left(q\right)\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} d\theta \leq \int_0^1 \left(\vartheta_\theta\left(\left(q-m\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \forall m \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

En particular, para

$$m = \frac{1}{2}\left\{\sup_{x\in E}\left(q\right) + \inf_{x\in E}\left(q\right)\right\}$$

Entonces:

$$q - m = q - \frac{1}{2}\sup\left(q\right) - \frac{1}{2}\inf\left(q\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}\|q-m\|_\infty &= \sup(q)-\frac{1}{2}\sup(q)-\frac{1}{2}\operatorname{inf}(q)\\ &= \frac{1}{2}\delta(q)\end{aligned}$$

Tenemos así, de la ecuación 4.9

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\vartheta_\theta\left((q-m)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \int_0^1\left(\int_E (q-m)^2\,d\lambda_{\theta h+(1-\theta)g}\right)^{\frac{1}{2}}d\theta\\ &\leq \int_0^1\|q-m\|_\infty\,d\theta\\ &= \|q-m\|_\infty\\ &= \frac{1}{2}\delta(q).\end{aligned}$$

Tenemos así, probado que:

$$|\lambda_h(f)-\lambda_g(f)|\leq\|q-m\|_\infty=\frac{1}{2}\delta(q)$$

para toda $f\in\mathscr{L}^\infty(E,\mathscr{E},\mathbb{R})$ con $\|f\|_\infty=1$.

Entonces:

$$d_T(\lambda_h,\lambda_g)\leq\frac{1}{2}\delta(q)=\frac{1}{2}\delta(h-g)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\delta(q)=\delta(h-g) &= \sup(h-g)-\operatorname{inf}(h-g)\\ &= \sup(h-g)-\sup(g-h)\end{aligned}$$

Entonces

$$\delta(q)\leq 2\|h-g\|_\infty$$

■

Demostración de la Afirmación 4.1.6:
Sea $\theta\in(0,1)$. Sea $\epsilon_\theta>0$ tal que $(\theta-\epsilon_\theta,\theta+\epsilon_\theta)\subset(0,1)$.
Sea $\epsilon\in(-\epsilon_\theta,\epsilon_\theta)$.

$$F_r(\theta+\epsilon)-F_r(\theta)=\int_E r(x)\exp(\theta h(x)+(1-\theta)g(\theta))\left[\exp(\epsilon q(x))-1\right]\lambda(dx) \tag{4.10}$$

Para cada $x \in E$ tenemos:

$$\begin{aligned}
r(x)\exp(\theta h(x)+(1-\theta)g(\theta))\left[\exp(\epsilon q(x))-1\right] &= \\
&= r(x)\exp(\theta h(x)+(1-\theta)g(\theta))\left[\epsilon q(x)+\sum_{k=2}^{\infty}\epsilon^k q(x)^k\frac{1}{k!}\right] \\
&= r(x)\exp(\theta h(x)+(1-\theta)g(\theta))\,\epsilon\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\epsilon^{k-1} q(x)^{k-1}\frac{1}{k!}\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{F_r(\theta+\epsilon)-F_r(\theta)}{\epsilon}=\int_E r(x)\exp(\theta h(x)+(1-\theta)g(\theta))\,R(\epsilon,x)\,\lambda(dx)$$

donde $R(\epsilon,x):=1+\sum_{k=2}^{\infty}\epsilon^{k-1}q(x)^(k-1)\frac{1}{k!}$
Ahora, para cada $x \in E, R(\epsilon,x)\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$, pues

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=2}^{\infty}\epsilon^{k-1}q(x)^{k-1}\frac{1}{k!}\right| &\leq |\epsilon|\,|q(x)|\sum_{k=2}^{\infty}|\epsilon|^{k-2}\frac{|q(x)|^{k-2}}{k!} \\
&\leq |\epsilon|\,|q(x)|\sum_{k=2}^{\infty}|\epsilon|^{k-2}\frac{|q(x)|^{k-2}}{(k!} \\
&= |\epsilon|\,|q(x)|\,e^{|\epsilon||q(x)|}\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Además, por estas mismas acotaciones:

$$|R(\epsilon,x)|\leq 1+|\epsilon|\,|q(x)|\,e^{|\epsilon||q(x)|}\leq 1+|\epsilon|\,\|q(x)\|_{\infty}e^{|\epsilon|\|q(x)\|_{\infty}}$$

Como $|\epsilon|\,\|q(x)\|_{\infty}e^{|\epsilon|\|q\|_{\infty}}\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, se sigue que $\exists\epsilon_0>0$, con $\epsilon_0<\epsilon_\theta$ tal que

$$0\leq|\epsilon|<\epsilon_0\Rightarrow|\epsilon|\,\|q(x)\|_{\infty}e^{|\epsilon|\|q(x)\|_{\infty}}\leq 1$$

Luego:

$$|R(\epsilon,x)|\leq 2,\forall x\in E,\forall 0\leq|\epsilon|<\epsilon_0.$$

De aquí:

$$\left|r\left(x\right)q\left(x\right)\exp\left(\theta h\left(x\right)+\left(1-\theta\right)g\left(x\right)\right)\right|\left|R\left(\epsilon,x\right)\right|\leq 2\left|r\left(x\right)q\left(x\right)\exp\left(\theta h\left(x\right)+\left(1-\theta\right)g\left(x\right)\right)\right|,$$

$\forall x\in E$, $\forall 0\leq|\epsilon|<\epsilon_0$

Como para cada $x\in E, R\left(\epsilon,x\right)\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}1$, por esta acotación y por el Teorema de Lebesgue de la convergencia dominanda F_r es diferenciable en θ y

$$F_r^{'}\left(\theta\right)=\int_E r\left(x\right)q\left(x\right)\exp\left(\theta h\left(x\right)+\left(1-\theta\right)g\left(x\right)\right)\lambda\left(dx\right)$$

Análogamente se prueban que:

- F_r es diferenciable a derecha en 0 y $F_r^{'}\left(0\right)=$ derivada a derecha de F_r en $0=\int_E r\left(x\right)q\left(x\right)e^{g(x)}\lambda\left(dx\right)=F_{rq}\left(0\right)$
- F_r es diferenciable a izquierda en 1 y $F_r^{'}\left(0\right)=$ derivada a derecha de F_r en $1=\int_E r\left(x\right)q\left(x\right)e^{h(x)}\lambda\left(dx\right)=F_{rq}\left(1\right)$

■

Proposición 4.1.8 *Sean:* $\lambda\in\mathscr{M}\left(E,\mathscr{E}\right),\Phi=\left(\Phi_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial* λ*-admisible. Si* $\sup_{a\in S}\Sigma_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\left(\#\left(\Lambda\right)-1\right)\delta\left(\Phi_\Lambda\right)<2$*, entonces* γ^Φ *satisface la condición D.*

Demostración

Por la Proposición 4.1.6 tenemos que γ^Φ es q. l..

Veamos ahora que $\alpha\left(\gamma^\Phi\right)<1$.

Sean $a\in S,b\in S,a\neq b$.

Sean $x,x'\in E^S$ con $x\left(s\right)=x'\left(s\right),\forall s\neq b$.

Sean $h:E\to\mathbb{R}$ y $g:E\to\mathbb{R}$ dadas por:

$$h\left(\xi\right):=H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x_{S\setminus a}\right)=\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\setminus a}\right)$$

$$g\left(\xi\right):=H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x'_{S\setminus a}\right)$$

Luego:

$$\exp\left(-h\left(\xi\right)\right)=\exp\left(-H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x_{S\setminus a}\right)\right)=h_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x_{S\setminus a}\right)$$

$$\exp\left(-g\left(\xi\right)\right)=\exp\left(-H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x'_{S\setminus a}\right)\right)=h_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x'_{S\setminus a}\right)$$

Como Φ es λ-admisible, tenemos que $-h$ y $-g$ están en $\mathscr{L}_{exp}\left(E,\mathscr{E},\mathbb{R},\lambda\right)$.

Sea $q=-h-\left(-g\right)=g-h$.

Afirmación 4.1.7 $q \in \mathscr{L}^{\infty}(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$.

Demostración:
Sea $\xi \in E$.

$$\begin{aligned} q(\xi) &= g(\xi) - h(\xi) \\ &= \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a} \left(\Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S \setminus a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\xi x_{S \setminus a}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Como Φ_Λ es $\mathscr{F}_\Lambda$-medible, se tiene que:
la ecuación 4.11

$$= \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a, \#(\Lambda) \geq 2} \left(\Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S \setminus a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\xi x_{S \setminus a}\right)\right).$$

Entonces:

$$|q(\xi)| \leq \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a, \#(\Lambda) \geq 2} \left(\Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S \setminus a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\xi x_{S \setminus a}\right)\right) \leq \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a, \#(\Lambda) \geq 2} \delta(\Phi_\Lambda) < \infty \text{ por hipótesis}$$

Entonces $q \in \mathscr{L}^{\infty}(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$.

■

Sea $A \in \mathscr{E}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(A|x) &= \gamma_{\{a\}}^\Phi\left(\sigma_{\{a\}}^{-1}(A)\,|x\right) \\ &= \frac{1}{\int_E h_{\{a\}}^\Phi\left(\xi x_{S \setminus a}\right)\lambda(d\xi)} \int_E 1_{\sigma_{\{a\}}^{-1}(A)}\left(\xi x_{S \setminus a}\right) h_{\{a\}}^\Phi\left(\xi x_{S \setminus a}\right)\lambda(d\xi) \\ &= \frac{1}{\int_E \exp(-h(\xi))\,\lambda(d\xi)} \int 1_A(\xi)\exp(-h(\xi))\,\lambda(d\xi) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Luego, $\forall f \in \mathscr{L}^{\infty}(E, \mathscr{E}, \mathbb{R})$ tenemos:

$$\int_E f(\xi)\left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(d\xi|x) = \int_E f(\xi)\,\lambda_{-h}(d\xi)$$

Análogamente:

$$\int_E f(\xi)\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(d\xi|x') = \int_E f(\xi)\,\lambda_{-g}(d\xi)$$

De aquí resulta:

$$d_T\left(\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x),\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x')\right) = d_T(\lambda_{-h},\lambda_{-g})$$

Por la Afirmación 4.1.7 y por la Proposición 4.1.7 tenemos:

$$d_T\left(\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x),\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x')\right) \leq \frac{\delta(q)}{2}$$

Afirmación 4.1.8 $\delta(q) \leq 2\sum_{\Lambda\supset\{a,b\}}\delta(\Phi_\Lambda)$

Demostración:

$-q = h - g \in \mathscr{L}^{\infty}(E,\mathscr{E},\mathbb{R})$ y $\delta(q) = \delta(-q)$

Sea $\epsilon > 0, \exists\xi$ y $\eta \in E|\sup(h-g) - \frac{\epsilon}{2} < h(\xi) - g(\xi), \text{ínf}(h-g) + \frac{\epsilon}{2} > h(\eta) - g(\eta)$

Entonces:

$$\begin{aligned}\sup(h-g) - inf(h-g) - \epsilon &< h(\xi) - g(\xi) - h(\eta) + g(\eta)\\ &= \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\left(\Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S\backslash a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\eta x_{S\backslash a}\right) + \Phi_\Lambda\left(\eta x'_{S\backslash a}\right.\right.\\ &\leq \sup_{\xi,\eta} A(\xi,\eta) \doteq A\,(< \infty \text{ por hipótesis sobre } \Phi)\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$A(\xi,\eta) = \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\left(\Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S\backslash a}\right) - \Phi_\Lambda\left(\eta x_{S\backslash a}\right) + \Phi_\Lambda\left(\eta x'_{S\backslash a}\right)\right)$$

Por otra parte:

Dado $\epsilon > 0, \exists(\xi,\eta) \in E\times E$ tal que $A(\xi,\eta) > A - \epsilon = \sup(h-g) - \text{ínf}(h-g) \geq h(\xi) - g(\xi) - h(\eta) + h(\eta) = A(\xi,\eta) > A - \epsilon$.

Por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$, queda probado que $\delta(q) = A$.

Además, para cada ξ y η en E es inmediato que si $b \notin \Lambda$ se tiene que $\Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right) = \Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S\backslash a}\right)$, pues por definición $\exists\phi : E^{\Lambda} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right) = \phi\left(\sigma_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right)\right) = \phi\left(\sigma_\Lambda\left(\xi x'_{S\backslash a}\right)\right)$$

pues $\xi x_{S\backslash a}(t) = \xi x'_{S\backslash a}(t), \forall t \neq b$ y $b \in \Lambda$.

Análogamente $\Phi_\Lambda\left(\eta x_{S\backslash a}\right)=\Phi_\Lambda\left(\eta x'_{S\backslash a}\right)$
Luego:

$$A=\sup_{\xi,\eta}\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\left(\Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right)-\Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S\backslash a}\right)-\Phi_\Lambda\left(\eta x_{S\backslash a}\right)+\Phi_\Lambda\left(\eta x'_{S\backslash a}\right)\right)\leq 2\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\delta\left(\Phi_\Lambda\right).$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\gamma^\Phi\right) &= \sup_{a\in S}\sum_{b\neq a}\gamma^\Phi_{a,b}\\
&= \sup_{a\in S}\sum_{b\neq a}\sup\left(\left\{d_U\left(\left(\gamma^\Phi_a\right)^\circ(\cdot|x),\left(\gamma^\Phi_a\right)^\circ(\cdot|x')\right)\mid(x,x')\in T\left(\{b\}\right)\right\}\right)\\
&= \sup_{a\in S}\sum_{b\neq a}\frac{1}{2}\sup\left(\left\{d_T\left(\left(\gamma^\Phi_a\right)^\circ(\cdot|x),\left(\gamma^\Phi_a\right)^\circ(\cdot|x')\right)\mid(x,x')\in T\left(\{b\}^c\right)\right\}\right)\\
&\leq \sup_{a\in S}\sum_{b\neq a}\frac{1}{2}\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\delta\left(\Phi_\Lambda\right)\\
&= \sup_{a\in S}\frac{1}{2}\sum_{a\in\Lambda}\left(\#\left(\Lambda\right)-1\right)\delta\left(\Phi_\Lambda\right).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce fácilmente la veracidad de la Proposición 4.1.8.

Ejemplo 4.1.1 ***Espacio de estados binario***. *Sean:* $E=\{0,1\},\lambda:\mathscr{E}\to\mathbb{R}$ *la medida de conteo,* $\Phi=\left(\Phi_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial* λ*-admisible tal que*

$$\Phi_\Lambda(x)=\begin{cases}K(\Lambda) & si\ x(t)=1,\forall t\in\Lambda\\ 0 & caso\ contrario,\end{cases}$$

Si $\sup_{a\in S}\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\left(\#\left(\Lambda\right)-1\right)\left|K\left(\Lambda\right)\right|\leq 4$*, entonces se cumple la condición D.*

Demostración:
Que γ^Φ es q. l. sigue por hipótesis y por la Proposición 4.1.6.
Sea $\Lambda\in\mathscr{S}\cap a$ tal que $\{a,b\}\subset\Lambda$ con $a\neq b$. Sean x y x' en E^S tales que $(x,x')\in T\left(\{b\}^c\right)$.
Por definición de Φ_Λ, si $x(b)\neq x'(b)$ entonces:

$$-\Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S\backslash a}\right)+\Phi_\Lambda\left(\eta x'_{S\backslash a}\right)=0 \text{ ó } \Phi_\Lambda\left(\xi x_{S\backslash a}\right)-\Phi_\Lambda\left(\eta x_{S\backslash a}\right)=0$$

De aquí, procediendo como en la demostración de que $A \leq 2\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\delta\left(\Phi_\Lambda\right)$, en la demostración de la Proposición 4.1.8, tenemos:

$$A \leq \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\delta\left(\Phi_\Lambda\right) = \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\left|K\left(\Lambda\right)\right|$$

De nuevo, procediendo como en la prueba de la Proposición 4.1.8 tenemos finalmente:

$$\alpha\left(\gamma^\Phi\right) \leq \sup_{a\in S}\frac{1}{4}\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\left(\#\left(\Lambda\right)-1\right)\left|K\left(\Lambda\right)\right|$$

De aquí es fácil terminar la prueba del enunciado del Ejemplo 4.1.1.

■

Nota 4.1.2 *Recordemos que las funciones hiperbólicas: coseno hiperbólico (*$\cosh$*), seno hiperbólico (*$\sinh$*) y tangente hiperbólica (*$\tanh$*) se definen para todo* $x\in\mathbb{R}$ *por:* $\sinh\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right), \cosh\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right), \tanh\left(x\right)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$*. Se cumplen las siguiente propiedades:*

1. $\cosh$ *es par.*

2. $\sinh$ *es impar.*

3. $\tanh$ *es impar.*

4. $\mathrm{d}\cosh\left(x\right)=\sinh\left(x\right),\forall x$*.*

5. $\mathrm{d}\sinh\left(x\right)=\cosh\left(x\right),\forall x$ *.*

6. $\sinh$ *es estrictamente creciente sobre* $(-\infty,+\infty)$ *y* $\cosh$ *lo es sobre* $[0,\infty)$*.*

7. $\cosh^2\left(x\right)-\sinh^2\left(x\right)=1,\forall x$*.*

8. $\tanh$ *es estrictamente creciente.*

9. $0\leq u\leq v\Rightarrow\tanh\left(v\right)-\tanh\left(u\right)\leq\tanh\left(v-u\right)$*.*

10. $0\leq\alpha\leq\beta\Rightarrow\tanh\left(\alpha+\beta\right)\leq\tanh\left(\alpha\right)+\tanh\left(\beta\right)$*.*

11. $\mathrm{d}^2\tanh\left(x\right)<0,\forall x\in(0,+\infty)$*.*

12. $\tanh$ *es cóncava sobre* $[0,+\infty)$*.*

13. u, v cualesquiera $\Rightarrow |\tanh(u) - \tanh(v)| \leq 2\tanh\left(\frac{|u-v|}{2}\right)$.

Demostración:
Las propiedades (1) a (8) son directas.
Veamos la propiedad (9).

$$\begin{aligned} \tanh(v) - \tanh(u) &= \frac{\mathrm{e}^{v} - \mathrm{e}^{-v}}{\mathrm{e}^{v} + \mathrm{e}^{-v}} - \frac{\mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}} \\ &= \frac{2\left(\mathrm{e}^{v-u} - \mathrm{e}^{-(v-u)}\right)}{\mathrm{e}^{u+v} + \mathrm{e}^{v-u} + \mathrm{e}^{-(v-u)} + \mathrm{e}^{-(u+v)}} \\ &= \frac{4\sinh(v-u)}{2\cosh(u+v) + 2\cosh(v-u)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ahora, $\cosh(u+v) \geq \cosh(v-u)$ pues $0 \leq u \leq v$ y por la propiedad (6).

Luego, por la ecuación 4.14

$$\tanh(v) - \tanh(u) \leq \frac{4\sinh(v-u)}{4\cosh(v-u)} = \tanh(v-u)$$

Veamos (10)
Tomamos $v = \alpha + \beta, u = \alpha$, entonces por (9):

$$\tanh(\alpha+\beta) - \tanh(\alpha) \leq \tanh((\alpha+\beta) - \alpha) = \tanh(\beta)$$

Veamos (11) y (12)

$$\mathrm{d}\tanh(x) = \mathrm{d}\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0$$

Luego:

$$\mathrm{d}^2\tanh(x) = -\frac{2\sinh(x)}{\cosh^3(x)} < 0, \forall x > 0.$$

Luego, tanh es estrictamente cóncava en $(0, +\infty)$ por el Lema C.0.2, pág. 302, de [Win95].

Veamos (13)

Caso 1 $0 \leq u < v$.

En este caso, $|u - v| = v - u$ y $|\tanh(u) - \tanh(v)| = \tanh(v) - \tanh(u)$.

Luego, por (9):

$|\tanh(u) - \tanh(v)| \leq \tanh(|u-v|) = \tanh\left(2\frac{|u-v|}{2}\right) \leq 2\tanh\left(\frac{|u-v|}{2}\right)$.

Caso 2 $u < v \leq 0$.

En este caso, $0 \leq -v < -u$, entonces por Caso 1 tenemos:

$|\tanh(u) - \tanh(v)| = |-\tanh(-u) + \tanh(-v)| \leq 2\tanh\left(\frac{|-v-(-u)|}{2}\right) = \tanh\left(\frac{|u-v|}{2}\right)$

Caso 3 $u < 0 < v$.

En este caso, v y $-u$ son mayores que cero. Luego:

$|\tanh(u) - \tanh(v)| = \tanh(v) - \tanh(u) = \tanh(v) + \tanh(-u) = 2\left(\frac{1}{2}\tanh(v) + \frac{1}{2}\tanh(-u)\right) \leq \left(\tanh\left(\frac{v}{2} + \frac{(-u)}{2}\right)\right) = 2\tanh\left(\frac{v-u}{2}\right) = 2\tanh\left(\frac{|v-u|}{2}\right)$.

Ejemplo 4.1.2 ***Condición de Dobrushin para el modelo de Ising sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.***

Sean: $S = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, E = \{-1,+1\}, \beta \geq 0$. Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea $(\beta\Phi)_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{array}{rll} (\beta\Phi_\Lambda) \equiv 0 & si & \#(\Lambda) \neq 2 \text{ ó} \\ & si & \#(\Lambda) = 2 \text{ con } \Lambda = \{t,s\} \text{ tal que } t \notin V_s^1 \\ (\beta\Phi_\Lambda)(x) = \beta x(s)\, x(t) & si & \Lambda = \{t,s\} \text{ con } t \in V_s^1 \end{array}$$

donde para cada $s \in S$ se define:

$$V_s^1 := \{t = (t_1,t_2) \in S / |s_1 - t_1| + |s_2 - t_2| = 1\}$$

siendo $s = (s_1, s_2)$.

Afirmación 4.1.9 *Sea $H_\Lambda^{\beta\Phi}(x) = \sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap\Lambda}(\beta\Phi_\Delta)(x)$ entonces*

$$H_\Lambda^{\beta\Phi}(x) = \sum_{s\in\Lambda}\sum_{t\in V_s^1}\beta x(s)\, x(t) - \sum_{s\in\Lambda, t\in V_s^1\cap\Lambda}\beta x(s)\, x(t).$$

Luego $H_\Lambda^{\beta\Phi}(x)$ es local.

Demostración: Ejercicio.
Pongamos $\beta\Phi = (\beta\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$
Como E es finito, $\forall\Lambda \in \mathscr{S}$ tenemos:

$$Z_\Lambda^{\beta\Phi}(x) = \sum_{\xi\in E^\Lambda} h_\Lambda^{\beta\Phi}\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right) < \infty$$

donde

$$\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(x) = \exp\left(-H_\Lambda^{\beta\Phi}(x)\right)$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, sea

$$\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(A|x) = \frac{1}{Z_\Lambda^{\beta\Phi}(x)} \sum_{\xi\in E^\Lambda} 1_A\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right) h_\Lambda^{\beta\Phi}\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)$$

Entonces $\gamma^{\beta\Phi} = \left(\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es una especificación.
$\gamma^{\beta\Phi}$ es q. l. pues $H_\Lambda^{\beta\Phi}$ es q. l. $\forall\Lambda$ y por la Proposición 2.2.5.
Sean $a \in S, b \in S$. Sea $A \in \mathscr{E}$.
Si $A = E$, entonces $\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|z) = 1, \forall z \in E^S$. Si $A = \emptyset$, entonces $\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|z) = 0, \forall z \in E^S$.
Sea $A = \{\xi\}$ con $\xi \in \{-1, +1\}$. Una cuenta simple muestra que:

$$\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|z) = \frac{1}{1 + \exp\left(\xi 2\beta \sum_{t\in V_a^1} z(t)\right)}, \forall z \in E^S$$

Sean ahora $x \in E^S, x' \in E^S$ tales que $x(b) \neq x'(b)$ y $x(s) = x'(s), \forall s \neq b$.
Luego, para todo $A \in \mathscr{E}^S$ tenemos:

$$\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|x) - \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|x') = 0 \text{ si } b \notin V_a^1$$

Sea $b \in V_a^1$.
Pongamos $u(x) = \sum_{t\in V_a^1, t\neq b} x(t) \Rightarrow u(x) = u(x') \Rightarrow u(x) \in \{-3, -1, 1, 3\}$
Luego

$$\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|x) - \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(A|x') = \frac{1}{1 + \exp(\xi 2\beta(u(x) + x(b)))} - \frac{1}{1 + \exp(\xi 2\beta(u(x) + x'(b)))} \tag{4.15}$$

Ahora:

$$\exp(\xi 2\beta(u(x) + x(b))) = \alpha \exp(\xi 2\beta x(b))$$

donde $\alpha = \exp\left(\xi 2\beta u\left(x\right)\right)$
Luego:
la ecuación 4.15

$$\begin{aligned} &= \frac{1+\alpha\exp\left(\xi 2\beta x'\left(b\right)\right)-\left(1+\alpha\exp\left(\xi 2\beta x\left(b\right)\right)\right)}{1+\alpha\exp\left(\xi 2\beta x'\left(b\right)\right)+\alpha\exp\left(\xi 2\beta x\left(b\right)\right)+\alpha^2} \\ &= \frac{2\sinh\left(-\xi 2\beta x\left(b\right)\right)}{\frac{1}{\alpha}+\alpha+\left(\exp\left(-\xi 2\beta\right)+\exp\left(\xi 2\beta\right)\right)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}+\alpha &= \exp\left(-\xi 2\beta u\left(x\right)\right)+\exp\left(\xi 2\beta u\left(x\right)\right) \\ &= 2\cosh\left(-\xi 2\beta u\left(x\right)\right) \\ &= 2\cosh\left(2\beta u\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

Luego:
la ecuación 4.16

$$\frac{2\sinh\left(-\xi 2\beta x\left(b\right)\right)}{2\cosh\left(2\beta u\left(x\right)\right)+2\cosh\left(2\beta\right)} \tag{4.17}$$

Sea ahora μ la medida con signo sobre $(E,\mathscr{E}) = \left(\{-1,1\},\mathscr{P}\left(E\right)\right)$ dada por:

$$\mu\left(\cdot\right) = \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^{\circ}\left(\cdot|x\right)-\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^{\circ}\left(\cdot|x'\right)$$

Luego, si f es una función de E en $\mathbb{R}$ tenemos

$$\int f d\mu = f\left(-1\right)\mu\left(\{-1\}\right)+f\left(1\right)\mu\left(\{1\}\right) \tag{4.18}$$

Por la ecuación 4.17 tenemos:

$$\mu\left(\{\xi\}\right) = \frac{\sinh\left(-\xi 2\beta\right)}{\cosh\left(2\beta u\left(x\right)\right)+\cosh\left(2\beta\right)}$$

Entonces,

$$\mu\left(\{\xi\}\right) = -\mu\left(\{-\xi\}\right) \tag{4.19}$$

Por la ecuación 4.18 tenemos:

$$\int f d\mu = (f(\xi) - f(-\xi))\,\mu(\{\xi\})$$

Si $f \in \mathscr{L}^\infty$ y $\|f\|_\infty = 1$:

$$\left|\int f d\mu\right| \leq |f(\xi) - f(-\xi)|\,|\mu(-\xi)| \leq 2\,|\mu(-\xi)|$$

Sea $f_0 : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_0(\xi) = 1, f_0(-\xi) = -1$$

entonces $\|f_0\|_\infty = 1$.
De aquí resulta

$$\sup_{f\in\mathscr{L}^\infty, \|f\|_\infty=1} \left|\int f d\mu\right| = 2\,|\mu(\{\xi\})|$$

Luego:

$$\begin{aligned} d_T\left(\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x')\right) &= \sup_{f\in\mathscr{L}^\infty, \|f\|_\infty=1} \left|\int f d\mu\right| \\ &= 2\,|\mu(\{\xi\})| \\ &= 2\frac{|\sinh(-\xi 2\beta x(b))|}{\cosh(2\beta u(x)) + \cosh(2\beta)} \end{aligned}$$

Sea $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, función par (simétrica en x=0), luego $\cosh(2\beta) = \cosh(-2\beta) = \cosh(|2\beta|)$.

$\mathrm{d}\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sinh(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ y < 0 si $x < 0$.

De esta forma cosh queda creciente para $x \geq 0$ y decreciente para $x < 0$, entonces $\cosh(2u(x)\beta) = \cosh(2|u(x)|\,|\beta|) \geq \cosh(2|\beta|) = \cosh(2\beta)$, pues $|u(x)| \geq 1$ pues $u(x) \in \{-3, -1, 1, 3\}$

Luego $\cosh(2u(x)\beta) \geq \cosh(2\beta) \Rightarrow \frac{1}{\cosh(2\beta u(x))+\cosh(2\beta)} \leq \frac{1}{2\cosh(2\beta)}$.

Luego para $(x, x') \in T(\{b\}^c)$:

$$d_U\left(\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x')\right) = |\mu(\{\xi\})| = \frac{\operatorname{senh}(2|\beta|)}{\cosh(2\beta u(x)) + \cosh(2\beta)},$$

cuando $x(b) \neq x'(b)$ y $b \in V_a^1$
y

$$d_U\left(\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x')\right) = 0$$

cuando $x(b) = x'(b)$ ó $b \notin V_a^1$.

Entonces para $b \notin V_a^1$:

$$\gamma_{a,b}^{\beta\Phi} = \sup_{(x,x')\in T(\{b\}^c)} d_U\left(\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x')\right) = 0$$

y para $b \in V_a^1$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{a,b}^{\beta\Phi} &= \sup_{(x,x')\in T(\{b\}^c)} d_U\left(\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x')\right) \\
&= \sup_{(x,x')\in T(\{b\}^c), x(b)\neq x'(b)} d_U\left(\left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\beta\Phi}\right)^\circ(\cdot|x')\right) \\
&= \sup_{u(x)\in\{-3,-1,1,3\}} \frac{\operatorname{senh}(2|\beta|)}{\cosh(2\beta u(x)) + \cosh(2\beta)} \\
&= \frac{\operatorname{senh}(2|\beta|)}{\cosh(2\beta)} \\
&= \frac{1}{2}\tanh(2|\beta|)
\end{aligned}$$

Luego $\alpha\left(\gamma^{\beta\Phi}\right) = \sup_{a\in S}\left(\sum_{b\in S}\gamma_{a,b}^{\beta\Phi}\right) = \sup_{a\in S}\sum_{b\in V_a^1}\gamma_{a,b}^{\beta\Phi} = 4\frac{1}{2}\tanh(2|\beta|)$ pues $\#V_a^1 = 4$.

Luego $\alpha\left(\gamma^{\beta\Phi}\right) = 2\tanh(2|\beta|)$

$\beta\Phi$ satisface la condición de Dobrushin si $\alpha\left(\gamma^{\beta\Phi}\right) < 1$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
2\tanh(2|\beta|) &< 1 \\
2|\beta| &< \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
0 < |\beta| &< \frac{1}{4}\ln(3) \approx 0{,}275
\end{aligned}$$

*****18-1-4*****

*****COMIENZO tesis Valeria*****

Ejemplo 4.1.3 ***Condición de Dobrushin para el modelo auto-logístico****, extraído de [Rul14]: Para $a \in S = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, sea $\partial a = V_a^2 = \{s \pm v_i\}_{i=1}^4$, con $v_1 \doteq (1,0)$, $v_2 \doteq (0,1)$, $v_3 \doteq (1,1)$ y $v_4 \doteq (-1,1)$. Luego:*

$$\partial a = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a-v_3 & a-v_1 & a+v_4 \\ \hline a-v_2 & & a+v_2 \\ \hline a-v_4 & a+v_1 & a+v_3 \\ \hline\end{array}.$$

Sea $E=\{0,1\}$ el espacio de estados, β_i con $0\leq i\leq 4$. El modelo auto-logístico (anisotrópico, de Besag) es el definido por el potencial

$$\Phi_\Lambda(x)=\begin{cases}\beta_i x_t x_{t+v_i} & \Lambda=\{t,t+v_i\}, t\in S, 1\leq i\leq 4\\ \beta_0 x_t & \Lambda=\{t\}\\ 0 & \textit{caso contrario}\end{cases}, \forall x\in E^S.$$

La función de energía local en $a\in S$ queda:

$$H_{\{a\}}(x)=x_a\left(\beta_0+\sum_{i=1}^{4}\beta_i(x_{a+v_i}+x_{a-v_i})\right),$$

y la característica local:

$$\rho_{\{a\}}(x)=\frac{\exp-\left(x_a\left(\beta_0+\sum_{i=1}^4\beta_i\left(x_{a-v_i}+x_{a+v_i}\right)\right)\right)}{1+\exp-\left(\beta_0+\sum_{i=1}^4\beta_i\left(x_{a-v_i}+x_{a+v_i}\right)\right)}.$$

Proposición 4.1.9 *Sea Φ como en el Ejemplo 4.1.3(modelo auto-logístico), se cumple:*

$$2\sum_{l=1}^{4}\tanh(|\beta_l|/4)<1\Rightarrow \textit{ se cumple la condición } D$$

Demostración:

Sea γ la especificación de Gibbs para Φ.

Por otra parte, $\delta\left(\Phi_\Lambda\right)=2\Rightarrow\sum_{\Lambda\in\mathscr{S},\#(\Lambda)\geq 2}\delta\left(\Phi_\Lambda\right)<\infty\Rightarrow\gamma^\Phi$ es q. l. por la Proposición 4.1.6.

Luego, para demostrar el teorema basta con demostrar que $\alpha(\gamma)\leq 2\sum_{l=1}^4\tanh(|\beta_l|/4)$.

Sea $a\in S$, $t\in\partial a$, x y w en E^S tal que $x_{S\setminus t}=w_{S\setminus t}$.

Si $x_t=w_t$, entonces $x=w$ y $d(\gamma_a^0(\cdot|x),\gamma_a^0(\cdot|w))=0$.

Sea $x_t=1-w_t$, donde $t=a+v_l$ ó $t=a-v_l$, para $1\leq l\leq g$. Sin pérdida de generalidad, se asume que $t=a-v_l$. Entonces $x_r=w_r$, $\forall r\neq a-v_l$ y $x_{a-v_l}=1-w_{a-v_l}$.

Es de notar que :

$$\begin{aligned}d(\gamma_a^0(\cdot|x),\gamma_a^0(\cdot|w)) &= \sup\left\{|\gamma_a^0(A|x)-\gamma_a^0(A|w)|/A\in\mathscr{E}\right\}\\ &= \text{máx}\left\{|\gamma_a^0(A|x)-\gamma_a^0(A|w)|/A=\emptyset,E,\{0\},\{1\}\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\gamma_a^0(\emptyset|x) - \gamma_a^0(\emptyset|w)| &= |0-0| = 0 \\
|\gamma_a^0(E|x) - \gamma_a^0(E|w)| &= |1-1| = 0 \\
|\gamma_a^0(\{1\}|x) - \gamma_a^0(\{1\}|w)| &= |\gamma_a^0(\{0\}|x) - \gamma_a^0(\{0\}|w)|
\end{aligned}$$

(pues $\gamma_a^0(\{1\}|x) = 1 - \gamma_a^0(\{0\}|x)$), entonces:

$$\begin{aligned}
d(\gamma_a^0(\cdot|x), \gamma_a^0(\cdot|w)) &= \left|\gamma_a^0(\{1\}|x) - \gamma_a^0(\{1\}|w)\right| \\
&= \left|\frac{e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i(x_{a+v_i} + x_{a-v_i}))}}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i(x_{a+v_i} + x_{a-v_i}))}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i(w_{a+v_i} + w_{a-v_i}))}}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i(w_{a+v_i} + w_{a-v_i}))}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(x_{a+v_l} + x_{a-v_l}) + \sum_{i\neq l} \beta_i(x_{a+v_i} + x_{a-v_i})}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(w_{a+v_l} + w_{a-v_l}) + \sum_{i\neq l} \beta_i(w_{a+v_i} + w_{a-v_i})}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(x_{a+v_l} + x_{a-v_l}) + \sum_{i\neq l} \beta_i(x_{a+v_i} + x_{a-v_i})}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(x_{a+v_l} + (1 - x_{a-v_l})) + \sum_{i\neq l} \beta_i(x_{a+v_i} + x_{a-v_i})}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1 + e^{\beta_l x_{a-v_l}} e^{\theta}} - \frac{1}{1 + e^{\beta_l(1 - x_{a-v_l})} e^{\theta}}\right|^2 \\
&= \left|\frac{e^{\beta_l(1 - x_{a-v_l})} - e^{\beta_l x_{a-v_l}}}{e^{-\theta} + e^{\beta_l(x_{a-v_l})} + e^{\beta_l(1 - x_{a-v_l})} + e^{\beta_l} e^{\theta}}\right| \\
&= \frac{|1 - e^{\beta_l}|}{e^{\beta_l} e^{\theta} + e^{-\theta} + e^{\beta_l} + e^0} \\
&\leq \frac{|1 - e^{\beta_l}|}{e^{\beta_l} e^{-\beta_l/2} + e^{\beta_l/2} + e^{\beta_l} + 1} \\
&= \frac{|1 - e^{\beta_l}|}{(1 + e^{\beta_l/2})^2} = \frac{(1 + e^{\beta_l/2})|1 - e^{\beta_l/2}|}{(1 + e^{\beta_l/2})^2} \\
&= \frac{|1 - e^{\beta_l/2}|}{1 + e^{\beta_l/2}} = \frac{e^{|\beta_l|/2} - 1}{e^{|\beta_l|/2} + 1} = \tanh(|\beta_l|/4)
\end{aligned}$$

(pues $e^{\beta_l} e^{-\beta_l/2} + e^{\beta_l/2} \leq e^{\beta_l} e^{z} + e^{-z}$, $z \in \mathbb{R}$).

[2] $\theta = \beta_0 + \beta_l(x_{a+v_l}) + \sum_{i\neq l} \beta_i(x_{a+v_i} + x_{a-v_i})$

Luego $\gamma_{a,a-v_l} \leq \tanh(|\beta_l|/4)$ y $\sum_{t\in\partial a}\gamma_{a,t} \leq \sum_{l=1}^{4} 2\tanh(|\beta_l|/4)$, $\forall a \in S$, entonces:

$$\alpha(\gamma) = \sup_{a\in S}\left\{\sum_{t\in\partial a}\gamma_{a,t}\right\} \leq 2\sum_{l=1}^{4}\tanh(|\beta_l|/4)$$

■

La Proposición 4.1.9 provee de una región para los parámetros de interacción. Se la llama región de unicidad y se puede ver su gráfico en la Figura 4.1, correspondiente al modelo del primer orden (cuando $\partial a = V_a^1$ o cuando $\beta_3 = \beta_4 = 0$).

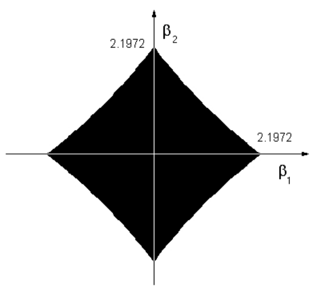

Figura 4.1: Región de Unicidad

*****FIN tesis Valeria*****

Ejemplo 4.1.4 *Sea* $E = \{-1,+1\}$. *Sea* $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial dado por:*

$$\Phi_\Lambda(x) = -\prod_{t\in\Lambda} x(t)\, J(\Lambda)$$

con $J : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ *tal que* Φ *satisface:*

$$\sup_{a\in S}\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}(\#(\Lambda)-1)\tanh(|J(\Lambda)|) < 1.$$

Entonces γ^Φ *cumple la condición de Dobrushin.*

Demostración: Sean a y b en S con $a \neq b$. Sean x, x' en E^S con $x(b) \neq x'(b)$ y $x(s) = x'(s), \forall x \neq b$.

Sean $h : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$h(\xi) = H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x_{S\setminus a}\right) = \sum_{a\in\Lambda} \Phi_{\Lambda}\left(\xi x_{S\setminus a}\right)$$

$$g(\xi) = \sum_{a\in\Lambda} \Phi_{\Lambda}\left(\xi x'_{S\setminus a}\right)$$

Sea $\xi \in \{-1,1\}$

Afirmación 4.1.10 **(a)** $\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x) = -\frac{1}{2}\tanh(h(\xi)) + \frac{1}{2}$.

(b) $\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x') = -\frac{1}{2}\tanh(g(\xi)) + \frac{1}{2}$.

Para que Φ sea potencial, debe cumplirse que $\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}} |J(\Lambda)| < \infty$.

Por otra parte, $\delta(\Phi_{\Lambda}) = 2\,|J(\Lambda)| \Rightarrow \sum_{\Lambda\in\mathscr{S},\#(\Lambda)\geq 2} \delta(\Phi_{\Lambda}) < \infty \Rightarrow \gamma^{\Phi}$ es q. l. por la Proposición 4.1.6.

La haremos para (a), pues (b) es similar.

$$\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x) = \frac{\exp(-h(\xi))}{\exp(-h(\xi)) + \exp(-h(-\xi))} \tag{4.20}$$

Ahora, para $\Lambda \in \mathscr{S} \cap a$ se tiene:

$$\Phi_{\Lambda}\left(\xi x_{S\setminus a}\right) = -\Phi_{\Lambda}\left(-\xi x_{S\setminus a}\right)$$

Luego:

la ecuación 4.20

$$= \frac{\exp(-h(\xi))}{\exp(-h(\xi)) + \exp(-h(-\xi))} = \frac{\exp(-h(\xi))}{2\cosh(h(\xi))} \tag{4.21}$$

Lema 4.1.1

$$\frac{\mathrm{e}^{-y}}{2\cosh(y)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\tanh(y)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{-y}}{2\cosh(y)} - \frac{1}{2} &= \frac{\mathrm{e}^{-y} - \cosh(y)}{2\cosh(y)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-y} - \frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}}{2\cosh(y)} \\
&= \frac{\frac{2\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}}{2\cosh(y)} \\
&= \frac{-\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}}{2\cosh(y)} \\
&= -\frac{\sinh(y)}{2\cosh(y)}
\end{aligned}$$

■

Luego:
la ecuación 4.21

$$= -\frac{1}{2}\tanh(h(\xi)) + \frac{1}{2}$$

■

Sea μ la medida con signo sobre $(E, \mathscr{E})$ tal que $\forall \xi \in E$ se tiene:

$$\mu(\{\xi\}) = \left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x) - \left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x')$$

Por la Afirmación 4.1.10, tenemos:

$$\mu(\{\xi\}) = \frac{1}{2}\left(\tanh(g(\xi)) - \tanh(h(\xi))\right)$$

Como h y g son impares, se tiene que:

$$\mu(\{-\xi\}) = -\mu(\{\xi\}).$$

Por lo tanto, para toda $f : E \to \mathbb{R}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f d\mu\right| &= |f(1)\,\mu(\{1\}) + f(-1)\,\mu(\{-1\})| \\
&= |f(1) - f(-1)|\,|\mu(\{1\})| \\
&= \frac{1}{2}|f(1) - f(-1)|\,|\tanh(h(1)) - \tanh(g(1))|
\end{aligned}$$

Por (13) de Nota 4.1.2 se tiene:

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leq |f(1) - f(-1)| \tanh\left(\frac{|h(1) - g(1)|}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d_T\left(\left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(\cdot|x')\right) &= \frac{1}{2}\sup\left\{\left|\int_E f d\mu\right| \mid \|f\|_\infty = 1\right\} \\ &\leq \tanh\left(\frac{|h(1) - g(1)|}{2}\right) && (4.22) \\ & && (4.23) \end{aligned}$$

Ahora, como $x(s) = x'(s), \forall s \neq b$ y $x(b) = -x'(b)$:

$$\begin{aligned} h(1) - g(1) &= \sum_{a\in\Lambda} \Phi_\Lambda\left(1x_{S\setminus a}\right) \\ &= \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \left(\Phi_\Lambda\left(1x_{S\setminus a}\right) - \Phi_\Lambda\left(1x'_{S\setminus a}\right)\right) \\ &= 2\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \Phi_\Lambda\left(1x_{S\setminus a}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la ecuación 4.22:

$$\begin{aligned} d_U\left(\left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(\cdot|x')\right) &\leq \tanh\left(\left|\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \Phi_\Lambda\left(1x_{S\setminus a}\right)\right|\right) \\ &\leq \tanh\left(\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} |J(\Lambda)|\right) \\ &\leq \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \tanh\left(|J(\Lambda)|\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha\left(\gamma^\Phi\right) = \sup_{a\in S} \sum_{b\in S, b\neq a} \gamma_{a,b}^\Phi \leq \sup_{a\in S} \sum_{b\in S, b\neq a} \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \tanh\left(|J(\Lambda)|\right) \qquad (4.24)$$

Ahora, por la hipótesis sobre J, tenemos que:

$$\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\tanh\left(|J(\Lambda)|\right)<\infty$$

Luego, por la ecuación 4.24 tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha\left(\gamma^{\Phi}\right) &\leq \sup_{a\in S}\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\sum_{b\in\Lambda,b\neq a}\tanh\left(|J(\Lambda)|\right)\\ &= \sup_{a\in S}\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\left(\#(\Lambda)-1\right)\tanh\left(|J(\Lambda)|\right)\end{aligned}$$

De aquí se deduce fácilmente lo que se quería probar.

■

Ejemplo 4.1.5 *Sea* $E=\{-1,+1\}$. *Sea* $J:\mathbb{Z}^2\to[0,+\infty)$ *con* $J(0)=0$ *y* $J(i)=J(-i),\forall i\in\mathbb{Z}^2$

Sea $\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial dado por:*

$$\Phi_\Lambda(x)=\begin{cases}J(i-j)\,x(i)\,x(j) & \textit{si } \Lambda=\{i,j\}\\ 0 & \textit{caso contrario,}\end{cases}$$

(a) *Supongamos que* $\sum_{s\in\mathbb{Z}^2}J(s)<\infty$ *, entonces* Φ *es sumable.*

(b) *Si además* $\sum_{s\in\mathbb{Z}^2}\tanh\left(J(s)\right)<1$, *entonces* γ^{Φ} *cumple la condición de Dobrushin.*

Desarrollo:

Que γ^{Φ} es q. l. sigue por el Corolario 2.2.1

Veamos **(a)**.

Sea $a\in S$. Entonces, para cada $\Lambda=\{a,b\}$ con $a\neq b$ tenemos:

$$\|\Phi_\Lambda\|_\infty=\sup\left\{|\Phi_\Lambda(x)|\,/x\in E^S\right\}=J(b-a)$$

Luego:

$$\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}\|\Phi_\Lambda\|_\infty=\sum_{b\in\mathbb{Z}^2}J(b-a)=\sum_{i\in\mathbb{Z}^2}J(i)<\infty$$

Veamos **(b)**.

Sean a,b en S con $a\neq b$. Sean x y x' en E^S tales que $x(s)=x'(s),\forall s\neq b$ y $x(b)\neq x'(b)$. Sea $\xi\in\{-1,1\}$. Definimos

$$\mu(\{\xi\})=\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x)-\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}\,|x')$$

Pongamos

$$h(\xi) = H^{\Phi}_{\{a\}}\left(\xi x'_{S\setminus a}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^2} \xi x'(i)\, J(i-a)$$

Luego:

$$\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}|x) = \frac{\exp(-h(\xi))}{\exp(-h(\xi)) + \exp(-h(-\xi))} \tag{4.25}$$

Ahora, h y g son funciones impares.
Entonces:
la ecuación 4.25

$$= \frac{\exp(-h(\xi))}{\exp(-h(\xi)) + \exp(h(\xi))} = \frac{\exp(-h(\xi))}{2\cosh(h(\xi))} \tag{4.26}$$

Por el Lema en la Demostración del Ejemplo 4.1.4.
la ecuación 4.26

$$= -\frac{1}{2}\tanh(h(\xi)) + \frac{1}{2}$$

Análogamente:

$$\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}|x') = -\frac{1}{2}\tanh(g(\xi)) + \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\mu(\{\xi\}) = \frac{1}{2}\left(\tanh(g(\xi)) - \tanh(h(\xi))\right)$$

También: $\mu(\{-\xi\}) = -\mu(\{\xi\})$.
Luego, si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} \left|\int_E f d\mu\right| &= |f(1) - f(-1)| \frac{1}{2} |\tanh(g(1)) - \tanh(h(1))| \\ &\leq |f(1) - f(-1)| \tanh\left(\frac{|g(1) - h(1)|}{2}\right) \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$d_U\left(\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x')\right) \leq \tanh\left(\frac{|g(1) - h(1)|}{2}\right) \tag{4.27}$$

Ahora:

$$|g(1) - h(1)| = \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} x'(i) J(i-a) - \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} x(i) J(i-a) \right| = 2J(a-b)$$

Entonces, por la ecuación 4.27:

$$d_U\left(\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x), \left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x')\right) \leq \tanh(J(a-b))$$

De donde:

$$\alpha\left(\gamma^{\Phi}\right) = \sup_{a \in S} \sum_{b \in S} \gamma_{a,b}^{\Phi} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \tanh(J(i)) < 1$$

Ejemplo 4.1.6 ***Campo externo grande.*** *Sean:* $E = \{-1, 1\}, \lambda$ *la medida de conteo sobre* $(E, \mathscr{P}(E)), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *un potencial sumable tal que:*

$$\Phi_{\{s\}}(x) = -h\, x(s)$$

con $h \in \mathbb{R}$*, para todo* $x \in E^S$*, para todo* $s \in S$*.*

Si

$$e^{|h|} > \sup_{a \in S} \left\{ \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) \right) \cdot \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a} (\#(\Lambda) - 1)\, \delta(\Phi_\Lambda) \right\}$$

entonces se cumple la condición de Dobrushin.

Demostración:

Que γ^{Φ} es q. l. sigue por ser Φ sumable y el Corolario 2.2.1.

Sin pérdida de generalidad, suponemos $h \geq 0$ (pues si $h < 0$, se intercambia 1 por -1).

Sean a y b en S con $a \neq b$ y sean $x \in E^S, x' \in E^S$ tales que $x(s) = x'(s), \forall s \neq b$ y $x(b) \neq x'(b)$.

Para cada $\xi \in E$ sean:

$$h(\xi) = -H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x_{S \setminus a}\right) = -\sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a} \Phi_\Lambda\left(\xi x_{S \setminus a}\right).$$

$$g(\xi) = -H_{\{a\}}^{\Phi}\left(\xi x'_{S \setminus a}\right) = -\sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a} \Phi_\Lambda\left(\xi x'_{S \setminus a}\right).$$

$$\mu(\{\xi\}) = \left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}|x) - \left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\{\xi\}|x').$$

Luego, poniendo $\|\mu\| := d_U\left(\left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(\cdot|x), \left(\gamma_a^\Phi\right)^\circ(\cdot|x')\right)$:

$$\begin{aligned}
\|\mu\| &= \sup\left\{\left|\int_E f d\mu\right| |f : E \to \mathbb{R} \text{ con } \|f\|_\infty = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_E f(\xi)\, d\lambda_h(\xi) - \int_E f(\xi)\, d\lambda_g(\xi)\right| / f : E \to \mathbb{R} \text{ con } \|f\|_\infty = 1\right\}
\end{aligned}$$

Procediendo como en la demostración de la Proposición 4.1.7:

$$2\|\mu\| \leq \int_0^1 \left(\nu_\theta\left((q-m)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} d\theta, \forall m \in \mathbb{R}$$

con $\nu_\theta = \lambda_{\theta h+(1-\theta)g}$ y $q = h - g$

En particular, para $m = q(1)$. De donde:

$$2\|\mu\| \leq \sup_{0\leq\theta\leq 1}\left\{\left(\nu_\theta\left((q-q(1))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{4.28}$$

Pongamos $u_\theta(\xi) = \theta h(\xi) + (1-\theta) g(\xi), \forall \xi \in E$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\left(\nu_\theta\left((q-q(1))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \left((q(-1)-q(1))^2 \cdot \frac{\exp(u_\theta(-1))}{\exp(u_\theta(-1)) + \exp(u_\theta(1))}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |q(-1)-q(1)|\left(1+\exp\left(u_\theta(1)-u_\theta(-1)\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Ahora:

$$
\begin{aligned}
u_\theta(1) - u_\theta(-1) &= \theta h(1) + (1-\theta) g(1) - \theta h(-1) - (1-\theta) g(-1) \\
&= h - \theta \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \Phi_A \left(1 x_{S \setminus a}\right) - (1-\theta) \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \Phi_A \left(1 x'_{S \setminus a}\right) \\
&- \left(-h - \theta \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \Phi_A \left(-1 x_{S \setminus a}\right) - (1-\theta) \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \Phi_A \left(-1 x'_{S \setminus a}\right) \right) \\
&= 2h - \theta \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \left(\Phi_A \left(1 x_{S \setminus a}\right) - \Phi_A \left(-1 x_{S \setminus a}\right) \right) \\
&- (1-\theta) \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \left(\Phi_A \left(1 x'_{S \setminus a}\right) - \Phi_A \left(-1 x'_{S \setminus a}\right) \right) \\
&\geq 2h - \theta \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) - (1-\theta) \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) \\
&= 2h - \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A)
\end{aligned}
$$

Luego por las ecuaciones 4.28 y 4.29

$$
\begin{aligned}
2 \|\mu\| &\leq |q(1) - q(-1)| \left(1 + \exp(2h) \exp\left(- \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq |q(1) - q(-1)| \left(\mathrm{e}^{2h} \exp\left(- \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
&= |q(1) - q(-1)| \, \mathrm{e}^{-h} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) \right) \\
&= \mathrm{e}^{-h} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{A \in \mathscr{S} \cap a \\ \#(A) \geq 2}} \delta(\Phi_A) \right) \delta(q)
\end{aligned}
$$

Por la Afirmación 4.1.8 en la demostración de la Proposición 4.1.8 tenemos:

$$2\ \|\mu\| \leq \mathrm{e}^{-h} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap a\\ \#(A)\geq 2}} \delta\left(\Phi_A\right)\right) 2 \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \delta\left(\Phi_\Lambda\right)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}} \gamma^{\Phi}_{a,b} &= \sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}} \sup\left\{d_U\left(\left(\gamma^{\Phi}_a\right)^{\circ}(\cdot|x), \left(\gamma^{\Phi}_a\right)^{\circ}(\cdot|x')\right)/x, x' \in E^S, x(s) = x'(s), \forall s \neq b\right\} \\
&\leq \sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}} \left(\mathrm{e}^{-h} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap a\\ \#(A)\geq 2}} \delta\left(\Phi_A\right)\right) \sum_{\{a,b\}\subset\Lambda} \delta\left(\Phi_\Lambda\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-h} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap a\\ \#(A)\geq 2}} \delta\left(\Phi_A\right)\right) \cdot \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a} \left(\#\left(\Lambda\right) - 1\right) \delta\left(\Phi_\Lambda\right) \\
&< 1, \forall a \in S, \text{ por hipótesis.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\alpha\left(\gamma^{\Phi}\right) = \sup_{a\in S} \sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}} \gamma^{\Phi}_{a,b} < 1.$$

■

Notación 4.1.1 *Si* $\Phi = \left(\Phi_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *es un potencial y* $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, *entonces pondremos* $\beta\Phi$ *para denotar el potencial definido por* $\left(\beta\Phi\right)_\Lambda = \beta\Phi_\Lambda, \forall\Lambda \in \mathscr{S}$.

Ejemplo 4.1.7 ***Bajas temperaturas*** *Si* $(E, \mathscr{E})$ *es un espacio medible,* λ *una medida finita sobre* $(E, \mathscr{E})$ *y* $\Phi = \left(\Phi_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *un potencial que cumple que: existe* $\tilde{\beta} > 0$ *tal que si* $0 < \beta \leq \tilde{\beta} \Rightarrow \beta\Phi$ *es* λ*-admisible y* $c(\Phi) := \sup_{a\in S} \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a} \left(\#\left(\Lambda\right) - 1\right) \delta\left(\Phi_\Lambda\right) < \infty$

entonces por la Proposición 4.1.8, existe $\beta_0 > 0$ *tal que* $0 < \beta \leq \beta_0 \Rightarrow \alpha\left(\gamma^{\beta\Phi}\right) \leq \frac{1}{2}c(\beta\Phi) < 1$ *y* $\gamma^{\beta\Phi}$ *es q.l.. En otras palabras: para temperaturas altas* $\left(\frac{1}{\beta}\right)$ *se cumple la condición de Dobrushin.*

En este ejemplo también veremos que, bajo ciertas condiciones la condición de Dobrushin se cumple además para temperaturas bajas, es decir para $\frac{1}{\beta}$ *suficientemente chico.*

Sea E *con* $\#(E) < \infty$ *y* $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$. *Sea* λ *la medida de conteo sobre* $(E, \mathscr{P}(E))$.

Sea $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es un potencial tal que*

1. $\alpha_\Phi := \sup_{a \in S} \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap a} (\#(\Lambda) - 1)\, \delta(\Phi_\Lambda) < \infty$.

2. $\exists x_0 \in E^S$ *tal que*

$$b(\Phi) := \inf_{a \in S} \inf_{\substack{x \in E^S \\ x(a) \neq x_0(a)}} \left[H^\Phi_{\{a\}}(x) - H^\Phi_{\{a\}}\left(x_0(a)\, x_{S \setminus a}\right)\right] > 0$$

Entonces, $\exists \beta_1 > 0$ *tal que* $\beta \geq \beta_1 \Rightarrow \beta\Phi$ *satisface la condición de Dobrushin.*

Demostración:

Que $\gamma^{\beta\Phi}$ es q. l. sigue de 1. y por la Proposición 4.1.6.

Sean $a \in S, b \in S, a \neq b; x \in E^S, x' \in E^S$ tales que $x(s) = x'(s), \forall s \neq b, x(b) \neq x'(b)$.

Usando la misma notación y argumentación que en el Ejemplo 4.1.6, tenemos que si μ es la medida de probabilidad que cumple:

$$\mu(\{\xi\}) = \left(\gamma^\Phi_a\right)^\circ (\{\xi\} | x) - \left(\gamma^\Phi_a\right)^\circ (\{\xi\} | x'), \forall \xi \in E$$

entonces

$$\begin{aligned}
2\|\mu\| &= \sup\left\{ \left| \int_E f d\mu \right| / f \in \mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{E}), \|f\|_\infty = 1 \right\} && (4.30)\\
&= \sup\left\{ \sum_{\xi \in E} f(\xi)\, \mu(\{\xi\}) / f : E \to \mathbb{R} \text{ y } \sup_{\xi \in E} |f(\xi)| = 1 \right\} && (4.31)\\
&\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left(\nu_\theta\left((q-m)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \forall m \in \mathbb{R} && (4.32)
\end{aligned}$$

donde $\nu_\theta = \lambda_{\theta h + (1-\theta) g}$ y $q = h - g$.

Tomemos $m = q(x_0(a))$.

Entonces

$$\left(\nu_\theta\left((q-m)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\substack{\xi\in E\\ \xi\neq x_0(a)}} \left(q\left(\xi\right)-q\left(x_0\left(a\right)\right)\right)^2 \frac{\exp\left(u_\theta\left(\xi\right)\right)}{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.33}$$

donde $u_\theta\left(\xi\right) = \theta h\left(\xi\right) + \left(1-\theta\right) g\left(\xi\right), \forall \xi \in E$.
Continúa la Ecuación 4.33:

$$\begin{aligned}
&\leq \delta\left(q\right)\left(\frac{\sum_{\substack{\xi\in E\\ \xi\neq x_0(a)}}\exp\left(u_\theta\left(\xi\right)\right)}{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \delta\left(q\right)\left(\frac{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)\right)-\exp\left(u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)}{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \delta\left(q\right)\left(1-\frac{\exp\left(u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)}{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \delta\left(q\right)\left(1-\frac{1}{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \delta\left(q\right)\left(\frac{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)-1}{\sum_{\zeta\in E}\exp\left(u_\theta\left(\zeta\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \delta\left(q\right)\left(\frac{\sum_{\substack{\xi\in E\\ \xi\neq x_0(a)}}\exp\left(u_\theta\left(\xi\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)}{1+\sum_{\substack{\xi\in E\\ \xi\neq x_0(a)}}\exp\left(u_\theta\left(\xi\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \delta\left(q\right)\left(\sum_{\substack{\xi\in E\\ \xi\neq x_0(a)}}\exp\left(u_\theta\left(\xi\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ahora para $\xi\in E, \xi\neq x_0\left(a\right)$ tenemos para $0\leq\theta\leq 1$

$$\begin{aligned}
u_\theta\left(\xi\right)-u_\theta\left(x_0\left(a\right)\right) &= -\theta\left(H_a^\Phi\left(\xi x_{S\setminus a}\right)-H_{\{a\}}^\Phi\left(x_0\left(a\right)x_{S\setminus a}\right)\right)\\
&\quad -\left(1-\theta\right)\left(H_{\{a\}}^\Phi\left(\xi x'_{S\setminus a}\right)-H_{\{a\}}^\Phi\left(x_0\left(a\right)x'_{S\setminus a}\right)\right)\\
&\leq -\theta b\left(\Phi\right)-\left(1-\theta\right)b\left(\Phi\right)\\
&= -b\left(\Phi\right).
\end{aligned}$$

Luego, siguiendo la Ecuación 4.34:

$$\begin{aligned}\delta(q)\left(\sum_{\substack{\xi\in E\\ \xi\neq x_0(a)}}\exp\left(u_\theta(\xi)-u_\theta(x_0(a))\right)\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \delta(q)\left((\#(E)-1)\exp(-b(\Phi))\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \delta(q)(\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}b(\Phi)\right)\end{aligned}$$

Por la Afirmación 4.1.8, en la demostración de la Proposición 4.1.8, tenemos:

$$\delta(q)(\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}b(\Phi)\right)\leq(\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}b(\Phi)\right)2\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\delta(\Phi_\Lambda) \tag{4.35}$$

Hemos probado entonces que:

$$\begin{aligned}\gamma_{a,b}^{\Phi} &= \sup\left(\left\{d_U\left(\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x),\left(\gamma_a^{\Phi}\right)^{\circ}(\cdot|x')\right)\mid(x,x')\in T(\{b\}^c)\right\}\right)\\ &\leq (\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}b(\Phi)\right)\sum_{\{a,b\}\subset\Lambda}\delta(\Phi_\Lambda)\end{aligned}$$

Luego, $\forall a\in S$:

$$\sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}}\gamma_{a,b}^{\Phi}\leq(\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}b(\Phi)\right)\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap a}(\#(\Lambda)-1)\,\delta(\Phi_\Lambda)$$

Luego: $\forall\beta>0$

$$\sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}}\gamma_{a,b}^{\Phi}\leq\beta\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta b(\Phi)}(\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\alpha_\Phi$$

Por lo tanto

$$\alpha\left(\gamma^{\beta\Phi}\right)=\sup_{a\in S}\sum_{\substack{b\in S\\ b\neq a}}\gamma_{a,b}^{\beta\Phi}\leq\beta\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta b(\Phi)}(\#(E)-1)^{\frac{1}{2}}\alpha_\Phi\xrightarrow[\beta\to+\infty]{}0$$

de donde se deduce fácilmente lo que se quería probar.

■

Ejemplo 4.1.8 ***Modelo de Potts autoferromagnético para N "grande".*** *Sea $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ infinito. Sea $\mathscr{H}$ una familia (no vacía) de subconjuntos de S tal que*

(1) $\#(B) = 2, \forall B \in \mathscr{H}$.

(2) $S = \cup \mathscr{H}$.

(3) $\#\left(V_s^{\mathscr{H}}\right) < \infty, \forall s \in S,$ *donde* $V_s^{\mathscr{H}} = \{t \in S / \{s,t\} \in \mathscr{H}\}$

(4) $\mathscr{V}_{\mathscr{H}} := \left\{V_s^{\mathscr{H}}\right\}_{s \in S}$

Sean: $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ *con* $N \geq 2$, $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$, λ *la medida de conteo sobre* $(E, \mathscr{E})$. *Sea* $J > 0$ *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$, *sea* $\Phi_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\Phi_\Lambda(x) = \begin{cases} J\delta(x(i), x(j)) & si\ \Lambda = \{i,j\} \in \mathscr{H}, \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

donde δ *es la delta de Kronecker Supongamos que:*

(4) $A := \sup\left\{\#\left(V_s^{\mathscr{H}}\right) / s \in S\right\} < \infty$.

(5) $3A < N < \infty$.

Entonces:

(a) $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *es un potencial sumable.*

(b) $\alpha\left(\gamma^\Phi\right) < 1$.

Demostración:
Veamos (a)
Sea $s \in S, \Lambda \in \mathscr{S} \cap s$ tal que $\Phi_\Lambda \not\equiv 0 \Leftrightarrow \Lambda = \{s,t\} \in \mathscr{H} \Leftrightarrow t \in V_s^{\mathscr{H}}$.
Luego:

$$\sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap s} \|\Phi_\Lambda\| = \sum_{t \in V_s^{\mathscr{H}}} \left\|\Phi_{\{s,t\}}\right\| < \infty$$

por la ecuación 4.34.
De (a) sigue que γ^Φ e q. l., por el Corolario 2.2.1.
Veamos (b)
Sean $a \in S, b \in S$ con $a \neq b$.
Sean $x \in E^S, x' \in E^S$ tales que $x(s) = x'(s)\, \forall s \neq b$ y $x(b) = x'(b)$.

Sean $h : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$h(\xi) = -H^{\Phi}_{\{a\}}\left(\xi x_{S\setminus a}\right), g(\xi) = -H^{\Phi}_{\{a\}}\left(\xi x'_{S\setminus a}\right), \forall \xi \in E.$$

Sea μ la medida con signo sobre $(E, \mathscr{P}(E))$ dada por

$$\mu(\{\xi\}) = \left(\gamma^{\Phi}_{a}\right)^{\circ}(\{\xi\}|x) - \left(\gamma^{\Phi}_{a}\right)^{\circ}(\{\xi\}|x'), \forall \xi \in E.$$

Recordando que $\gamma^{\Phi}_{a,b} = \sup\left(\left\{\frac{1}{2}\sup\left(\left\{\left|\int_E f(\xi)\, d\mu(\xi)\right| / \|f\|_{\infty} = 1\right\}\right) / (x,w) \in T(\{b\}^c)\right\}\right)$
Sea $f : E \to \mathbb{R}$ cualquiera. Entonces, si $\|f\|_{\infty} = 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f(\xi)\, d\mu(\xi)\right| &= \left|\int_E f(\xi) \frac{e^{h(\xi)}}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)}\lambda(d\xi) - \int_E f(\xi) \frac{e^{g(\xi)}}{\int_E e^{g(\zeta)}\lambda(d\zeta)}\lambda(d\xi)\right| \\
&\leq \int_E \left|\frac{e^{h(\xi)}}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)} - \frac{e^{g(\xi)}}{\int_E e^{g(\zeta)}\lambda(d\zeta)}\right| \lambda(d\xi) \\
&\leq \frac{1}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)} \int_E \left|e^{h(\xi)} - e^{g(\xi)}\right| \lambda(d\xi) \\
&\quad + \left|\frac{1}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)} - \frac{1}{\int_E e^{g(\zeta)}\lambda(d\zeta)}\right| \int_E e^{g(\xi)}\lambda(d\xi) \\
&= \frac{1}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)} \int_E \left|e^{h(\xi)} - e^{g(\xi)}\right| \lambda(d\xi) \\
&\quad + \frac{\left|\int_E e^{g(\zeta)}\lambda(d\zeta) - \int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)\right|}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)\int_E e^{g(\zeta)}\lambda(d\zeta)} \int_E e^{g(\xi)}\lambda(d\xi) \\
&\leq \frac{2}{\int_E e^{h(\zeta)}\lambda(d\zeta)} \int_E \left|e^{h(\zeta)} - e^{g(\zeta)}\right| \lambda(d\xi) \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Ahora:

$$e^{h(\xi)} = \exp\left(-\sum_{j \in V^{\mathscr{H}}_a} J\delta(\xi, x(j))\right)$$

$$e^{g(\xi)} = \exp\left(-\sum_{j \in V^{\mathscr{H}}_a} J\delta(\xi, x'(j))\right)$$

Luego:

$$\int_E \left|e^{h(\xi)} - e^{g(\xi)}\right| \lambda(d\xi) = \sum_{\xi \in E} \left|\exp\left(-\sum_{j \in V^{\mathscr{H}}_a} J\delta(\xi, x(j))\right) - \exp\left(-\sum_{j \in V^{\mathscr{H}}_a} J\delta(\xi, x'(j))\right)\right| \qquad (4.37)$$

Caso $b \notin V_a^{\mathscr{H}}$.
En este caso, $x(j) = x'(j), \forall j \in V_a^{\mathscr{H}}$.
Luego: $e^{h(\xi)} = e^{g(\xi)}, \forall \xi \in E$ y entonces $\mu(\{\xi\}) = 0, \forall \xi \in E$. Luego $\gamma_{a,b} = 0$ para $b \notin V_a^{\mathscr{H}}$.
Caso $b \in V_a^{\mathscr{H}}$.
la ecuación 4.37

$$= \sum_{\xi \in E} \exp\left(-J \sum_{\substack{j \in V_a^{\mathscr{H}} \\ j \neq b}} \delta(\xi, x(j))\right) \left| e^{-J\delta(\xi, x(b))} - e^{-J\delta(\xi, x'(b))} \right| \tag{4.38}$$

Como $J > 0$:
la ecuación 4.38

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\xi \in E} \left| e^{-J\delta(\xi, x(b))} - e^{-J\delta(\xi, x'(b))} \right| \\ &= \sum_{\xi \in \{x(b), x'(b)\}} \left| e^{-J\delta(\xi, x(b))} - e^{-J\delta(\xi, x'(b))} \right| \\ &= 2\left(1 - e^{-J}\right) \\ &< 2 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Por otra parte:

$$\int_E e^{h(\xi)} \lambda(d\xi) = \sum_{\xi \in E} e^{h(\xi)} = \sum_{\xi \in E} \exp\left(-\sum_{j \in V_a^{\mathscr{H}}} J\delta(\xi, x(j))\right) \tag{4.40}$$

Sea ahora $E' = \left\{\xi \in E / \xi \neq x(j), \forall j \in V_a^{\mathscr{H}}\right\}$
Entonces:
la ecuación 4.40

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{\xi \in E'} \exp\left(-\sum_{j \in V_a^{\mathscr{H}}} J\delta(\xi, x(j))\right) \\ &= \#(E') \\ &\geq \left(\#(E) - \#\left(V_a^{\mathscr{H}}\right)\right) \end{aligned}$$

De donde, por las ecuaciones 4.36, 4.39 y esta última desigualdad, para $b \in V_a^{\mathscr{H}}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma_{a,b}^{\Phi} &< 2\left(\#(E) - \#\left(V_a^{\mathscr{H}}\right)\right)^{-1} \\ &= 2\left(\left(N - \#\left(V_a^{\mathscr{H}}\right)\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

Y como $\gamma_{a,b}^{\Phi} = 0$ para $b \notin V_a^{\mathscr{H}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{b\in S \\ b\neq a}} \gamma_{a,b}^{\Phi} &= \sum_{b\in V_a^{\mathscr{H}}} \gamma_{a,b}^{\Phi} \\ &< 2\frac{\#\left(V_a^{\mathscr{H}}\right)}{\left(N - \#\left(V_a^{\mathscr{H}}\right)\right)} \\ &\leq \frac{2A}{(N-A)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\alpha\left(\gamma^{\Phi}\right) = \sup_{a\in S} \sum_{\substack{b\in S \\ b\neq a}} \gamma_{a,b}^{\Phi} \leq \frac{2A}{N-A} < \frac{2A}{3A-A} = 1$$

■

Ejemplo 4.1.9 ***Unicidad en el caso $S = \mathbb{Z}$.***
En la pág. 165 de [Geo88] se demuestra el siguiente resultado:
Sean: E un espacio métrico separable y completo; $\mathscr{E}$ la σ-álgebra de Borel de E; λ una medida finita (no negativa) sobre $(E, \mathscr{E})$; $S = \mathbb{Z}$; $\mathscr{S} = \{\Lambda \subset S / 1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}$; $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial sumable (luego, como λ es finita, Φ es λ-admisible). Si $\sup_{a\in S} \sum_{\Lambda\in\mathscr{T}(a)} \delta(\Phi_\Lambda) < \infty$, donde $\mathscr{T}(a) = \{\Lambda \in \mathscr{S} / \operatorname{mín}(\Lambda) \leq a < \operatorname{máx}(\Lambda)\}$ entonces $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma^{\Phi}\right)\right) = 1$.

4.2. Comparación de probabilidades desde el punta de vista “microscópico”.

Definición 4.2.1 *Sea $f \in \mathscr{L}^{\infty}\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$. Para cada $b \in S$, llamamos “oscilación de f en b” a:*

$$\delta_b(f) := \sup\left\{\left|f(x) - f(x')\right| / (x, x') \in T\left(\{b\}^c\right)\right\}$$

Definición 4.2.2 *Para cada* $f : E^S \to \mathbb{R}, b \in S, x \in E^S$ *definimos* $f_{b,x}(\xi) = f\left(\xi x_{S\setminus b}\right), \forall \xi \in E$

Proposición 4.2.1 *Sea* $f : E^S \to \mathbb{R}$ *quasilocal,* $b \in S$*. Entonces:*

$$\delta_b(f) = \sup\left\{\delta\left(f_{b,x}\right)/x \in E^S\right\}$$

Demostración: Ejercicio.

Proposición 4.2.2 *Sea* $f \in \bar{\mathscr{L}}\left(f \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)\right.$ *y es q. l.*$\left.\right)$*. Se cumple:*

$$\delta(f) \leq \sum_{b\in S} \delta_b(f)$$

Demostración:
Sean x, x' en E^S cualesquiera. Veamos que $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leq \left|f\left(x_\Lambda x_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(x_\Lambda x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right| + \sum_{b\in\Lambda} \delta_b(f) \tag{4.41}$$

En efecto:

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leq \left|f(x) - f\left(x_\Lambda x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right| + \left|f\left(x_\Lambda x'_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(x'_\Lambda x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right|$$

Pongamos

$$\Lambda = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\left|f\left(x_\Lambda x'_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(x'_\Lambda x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right| & = & \left|f\left(x_{b_1}\ldots x_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(x'_{b_1}\ldots x'_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right| \\
& = & \left|f\left(x_{b_1} x_{b_2}\ldots x_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(x'_{b_1} x_{b_2}\ldots x'_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right. \\
& + & f\left(x'_{b_1} x_{b_2} x_{b_3}\ldots x'_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right) \\
& - & f\left(x'_{b_1} x'_{b_2} x_{b_3}\ldots x_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right) \\
& + & \ldots + f\left(x'_{b_1} x'_{b_2}\ldots x'_{b_{n-1}} x_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right) \\
& - & \left. f\left(x'_{b_1}\ldots x'_{b_n} x'_{S\setminus\Lambda}\right)\right| \\
& \leq & \displaystyle\sum_{b\in\Lambda} \delta_b(f)
\end{array}$$

Por la Proposición 2.2.1, dado $\epsilon > 0, \exists \Lambda \in \mathscr{S}$ tal que $O_\Lambda(f) < \epsilon$.
Por la ecuación 4.41 tenemos entonces

$$|f(x) - f(x')| \leq \sum_{b \in \Lambda} \delta_b(f) + \epsilon \leq \sum_{b \in S} \delta_b(f) + \epsilon$$

Luego $\delta(f) \leq \sum_{b \in S} \delta_b(f)$ por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$.

$\blacksquare$

Definición 4.2.3 *Sean μ y $\tilde{\mu}$ dos probabilidades sobre $\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$. Diremos que $a = (a_b)_{b \in S}$ con $a_b \geq 0, \forall b \in S$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$ si*

$$|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| \leq \sum_{b \in S} a_b \delta_b(f)$$

para toda $f \in \bar{\mathscr{L}}$.

Proposición 4.2.3 *Sean: μ y $\tilde{\mu}$ dos probabilidades sobre $\left(E^S, \mathscr{F}^S\right)$; $a = (a_b)_{b \in S}$ un estimador para μ y $\tilde{\mu}$. Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ se cumple:*

$$\|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)\|_\Lambda := \sup\left\{\frac{|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)|}{\delta(f)} / f \in \mathscr{L}_\Lambda \text{ y } f \not\equiv cte\right\} \leq \sum_{b \in \Lambda} a_b$$

donde $\mathscr{L}_\Lambda = \left\{f \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right) / \exists \phi_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty\left(E^\Lambda, \mathscr{E}^\Lambda, \mathbb{R}\right) \text{ tal que } f = \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda\right\}$

Demostración:

Sea $f \in \mathscr{L}_\Lambda, f \not\equiv$ cte. $\Rightarrow f$ es quasilocal $\Rightarrow |\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| \leq \sum_{b \in S} a_b \delta_b(f) \Rightarrow$

$$\frac{|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)|}{\delta(f)} \leq \sum_{b \in S} a_b \frac{\delta_b(f)}{\delta(f)} \tag{4.42}$$

Sea $\phi_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty\left(E^\Lambda, \mathscr{E}^\Lambda, \mathbb{R}\right)$ tal que $f = \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda$.

Sea $b \notin \Lambda$. Sean x, x' en E^S con $x(s) = x'(s), \forall s \neq b \Rightarrow x(t) = x'(t), \forall t \in \Lambda \Rightarrow f(x) - f(x') = \phi_\Lambda(\sigma_\Lambda(x)) - \phi_\Lambda(\sigma_\Lambda(x'))$. Luego, $\delta_b(f) = 0$.

Por lo tanto, por la ecuación 4.42:

$$\frac{|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)|}{\delta(f)} \leq \sum_{b \in \Lambda} a_b \frac{\delta_b(f)}{\delta(f)} \tag{4.43}$$

Por otra parte, para todo $b \in S$, tenemos

$$\begin{aligned} \delta_b(f) &= \sup\left\{|f(x) - f(x')| / (x, x') \in T(\{b\}^c)\right\} \\ &\leq \sup\left\{|f(x) - f(x')| \,|\, (x, x') \in E^S \times E^S\right\} \\ &= \delta(f) \end{aligned}$$

Entonces, por la ecuación 4.43 se deduce lo que se quiere probar.

■

Proposición 4.2.4 *Sean: μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Para cada $b \in S$ sea $a_b = 1$. Entonces: $a = (a_b)_{b \in S}$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.*

Demostración:
Sigue de la Proposición 4.1.4 y de la Proposición 4.2.2.

■

Proposición 4.2.5 *Sean μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$: $a = (a_b)_{b \in S}$ con $a_b \geq 0, \forall b \in S$. Si*

$$|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| \leq \sum_{b \in S} a_b \delta_b(f), \forall f \in \mathscr{L}$$

entonces a es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.

Demostración:
Sea f quasilocal y $f \in \mathscr{L}^{\infty}\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$, esto es: $f \in \bar{\mathscr{L}}$.
Sea $x \in E^S$.
Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea $f_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_\Lambda(y) = f\left(\sigma_\Lambda(y)\, x_{S \setminus \Lambda}\right)$$

Luego, $f_\Lambda \in \mathscr{L}, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$.

Afirmación 4.2.1 *$(f_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ converge a f en $\mathscr{L}^{\infty}\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$.*

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$.
Como f es quasilocal, $\exists \Lambda_0 \in \mathscr{S}$ tal que:
$\Lambda_0 \subset \Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \exists \phi_\Lambda \in \mathscr{L}^{\infty}\left(E^\Lambda, \mathscr{E}^\Lambda, \mathbb{R}\right)$ tal que

$$\|f - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego, para todo $y \in E^S$ tenemos:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f_\Lambda(y)| &\leq |f(y) - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(y)| + |\phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(y) - f_\Lambda(y)| \\
&= |f(y) - \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(y)| + \left|\phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda\left(\sigma_\Lambda(y)\, x_{S \setminus \Lambda}\right) - f\left(\sigma_\Lambda(y)\, x_{S \setminus \Lambda}\right)\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \qquad (4.44) \\
&= \epsilon. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Como $|\nu(g) - \nu(h)| \leq \|g-h\|_\infty, \forall g,h \in \mathscr{L}^\infty, \forall \nu \in \mathscr{P}$, por la Afirmación 4.2.1 se sigue que $\left(|\mu(f_\Lambda) - \tilde{\mu}(f_\Lambda)|\right)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ converge a $|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)|$.

Luego, dado $\epsilon > 0, \exists \Lambda_0 \in \mathscr{S}$ tal que $\Lambda_0 \subset \Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| &\leq |\mu(f_\Lambda) - \tilde{\mu}(f_\Lambda)| + \epsilon \\ &\leq \sum_{b \in S} a_b \delta_b(f_\Lambda) + \epsilon \end{aligned} \tag{4.46}$$

por hipótesis, pues $f_\Lambda \in \mathscr{L}$.

Afirmación 4.2.2 *(a)* $b \notin \Lambda \Rightarrow \delta_b(f_\Lambda) = 0$.

(b) $b \in \Lambda \Rightarrow \delta_b(f_\Lambda) \leq \delta_b(f)$.

Demostración:

Veamos **(a)**.

Sea $(y, y') \in T(\{b\}^c)$.

Como $b \notin \Lambda, T(\Lambda) \subset T(\{b\}^c) \Rightarrow \sigma_\Lambda(y) = \sigma_\Lambda(y') \Rightarrow f_\Lambda(y) = f_\Lambda(y')$

Veamos **(b)**.

Sea $(y, y') \in T(\{b\}^c) \Rightarrow y(s) = y'(s), \forall s \neq b$.

Como $b \in \Lambda, \left(\sigma_\Lambda(y) x_{S\setminus\Lambda}, \sigma_\Lambda(y') x_{S\setminus\Lambda}\right) \in T(\{b\}^c) \Rightarrow |f_\Lambda(y) - f_\Lambda(y')| = \left|f\left(\sigma_\Lambda(y) x_{S\setminus\Lambda}\right) - f\left(\sigma_\Lambda(y') x_{S\setminus\Lambda}\right)\right| \leq \delta_b(f)$

■

De aquí por la ecuación 4.46 tenemos

$$|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| \leq \sum_{b \in S} a_b \delta_b(f) + \epsilon$$

Por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ queda probada la Proposición 4.2.5.

■

Proposición 4.2.6 *Sean μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Para cada $k = 1, 2, \ldots$, sea $a^k = \left(a_b^k\right)_{b \in S}$ un estimador para μ y $\tilde{\mu}$. Supongamos que para cada $b \in S\, \exists a_b \geq 0$ tal que*

$$a_b = \lim_k a_b^k \tag{4.47}$$

Entonces $a = (a_b)_{b \in S}$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.

Demostración:
Sea $f \in \mathscr{L}$, $f \not\equiv \text{cte} \Rightarrow \exists \Lambda \in \mathscr{S}, \phi_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty \left(E^\Lambda, \mathscr{E}^\Lambda, \mathbb{R}\right)$ tales que

$$f = \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda \tag{4.48}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $\#(\Lambda) < \infty$, por la ecuación 4.47, $\exists k_0 | k \geq k_0 \Rightarrow$

$$a_b^k \leq a_b + \frac{\epsilon}{\left(\sum_{b' \in \Lambda} \delta_{b'}(f)\right)} \tag{4.49}$$

Sea $k \geq k_0$.
Como a^k es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$,

$$|\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| \leq \sum_{b \in S} a_b^k \delta_b(f) \tag{4.50}$$

Por la ecuación 4.48 tenemos que

$$\delta_b(f) = 0, \, \forall b \notin \Lambda$$

Por la desigualdad 4.50 tenemos

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \tilde{\mu}(f)| &\leq \sum_{b \in \Lambda} a_b^k \delta_b(f) && (4.51) \\ &\leq \sum_{b \in \Lambda} a_b \delta_b(f_\Lambda) + \epsilon && (4.52) \\ &\leq \sum_{b \in S} a_b \delta_b(f_\Lambda) + \epsilon && (4.53) \end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ y por la Proposición 4.2.5 (anterior), se concluye que $a = (a_b)_{b \in S}$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.

■

Notación 4.2.1 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación. Sea $\Gamma(\gamma) := (\gamma_{s,t})_{(s,t) \in S \times S}$. Sea $a = (a_s)_{s \in S}$ con $a_s \in [0, +\infty)$, $\forall s \in S$.*
Para cada $s \in S$, definimos

$$(\Gamma(\gamma) a)_s := \sum_{t \in S} \gamma_{s,t} a_t$$

(luego, $(\Gamma(\gamma) a)_b$ podría ser $+\infty$). Finalmente, definimos $\Gamma(\gamma) a := \left((\Gamma(\gamma) a)_b\right)_{b \in S}$.

Lema 4.2.1 *Sea* $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$*. Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *sea* $\gamma_\Lambda^\circ : \mathscr{E}^\Lambda \times E^S \to [0,1]$ *definida por:*

$$\gamma_\Lambda^\circ (B|x) = \gamma_\Lambda \left(\sigma_\Lambda^{-1}(B)\,|x\right), \forall B \in \mathscr{E}^\Lambda$$

Entonces:

(a) $\gamma_\Lambda (A|x) = \gamma_\Lambda^\circ (\cdot|x)\, \delta_{x_{S\setminus\Lambda}}(A), \forall A \in \mathscr{F}$*, donde* $\delta_{x_{S\setminus\Lambda}}$ *es la probabilidad sobre* $\left(E^{S\setminus\Lambda}, \mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}\right)$ *dada por*

$$\delta_{x_{S\setminus\Lambda}}(C) = 1_C \left(x_{S\setminus\Lambda}\right), \forall C \in \mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}.$$

(b) Sea $f : E^S \to \mathbb{R}, \mathscr{F}$*-medible tal que* $f(x) \geq 0, \forall x \in E^S$ *ó* $f \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$*. Entonces:*

$$\gamma_\Lambda (f|x) = \gamma_\Lambda^\circ (f_{\Lambda,x}|x)$$

donde $f_{\Lambda,x} : E^\Lambda \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$f_{\Lambda,x}(\xi) = f\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right), \forall \xi \in E^\Lambda.$$

Demostración:
Veamos **(a)**.
Por el Theorem B, pág. 144 de [Hal50], bastará ver que

$$\gamma_\Lambda (B \times C|x) = \left(\gamma_\Lambda^\circ (\cdot|x)\, \delta_{x_{s\setminus\Lambda}}\right)(B \times C)$$

cualesquiera sean $B \in \mathscr{E}^\Lambda$ y $C \in \mathscr{E}^{S\setminus\Lambda}$.
Ahora: $B \times C = \left\{w | w_\Lambda \in B \text{ y } w_{S\setminus\Lambda} \in C\right\} = \sigma_\Lambda^{-1}(B) \cap \sigma_{S\setminus\Lambda}^{-1}(C)$.
Luego:

$$\begin{aligned}
\gamma_\Lambda (B \times C|x) &= \gamma_\Lambda \left(\sigma_\Lambda^{-1}(B) \cap \sigma_{S\setminus\Lambda}^{-1}(C)\,|x\right) \\
&= 1_{\sigma_{S\setminus\Lambda}^{-1}(C)}(x)\, \gamma_\Lambda \left(\sigma_\Lambda^{-1}(B)\,|x\right) \\
&= 1_C\left(x_{S\setminus\Lambda}\right) \gamma_\Lambda^\circ (B|x) \\
&= \left(\gamma_\Lambda^\circ (\cdot|x)\, \delta_{x_{S\setminus\Lambda}}\right)(B \times C)
\end{aligned}$$

Veamos **(b)**.
Por lo probado en **(a)** y por el Teorema de Fubini, $\forall A \in \mathscr{F}$:

$$\int_{E^S} 1_A(w)\,\gamma_\Lambda(dw|x) = \int_{E^\Lambda} 1_A\left(\xi x_{S\setminus\Lambda}\right)\gamma_\Lambda^\circ(d\xi|x) \tag{4.54}$$

Luego, por la ecuación 4.54

$$\int_{E^S} 1_A(w)\,\gamma_\Lambda(dw|x) = \int_{E^\Lambda} (1_A)_{\Lambda,x}(\xi)\,\gamma_\Lambda^\circ(d\xi|x)$$

para todo $A \in \mathscr{F}$.
De aquí se deduce que $\forall f$ como en la hipótesis se cumple:

$$\int_{E^S} f(w)\,\gamma_\Lambda(dw|x) = \int_{E^\Lambda} f_{\Lambda,x}(\xi)\,\gamma_\Lambda^\circ(d\xi|x)$$

■

Proposición 4.2.7 *Sean γ y $\tilde{\gamma}$ dos especificaciones sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.*
Supongamos que γ es quasilocal y que existen $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$ y $\tilde{\mu} \in \mathscr{G}(\tilde{\gamma})$.
Para cada $i \in S$ sea $b_i : E^S \to \mathbb{R}^+$ medible tal que

$$d_U\left(\gamma_i^\circ(\cdot|x), \tilde{\gamma}_i^\circ(\cdot|x)\right) \le b_i(x), \forall x \in E^S \tag{4.55}$$

Sea $a = (a_i)_{i\in S}$ un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.
Sea $\tilde{\mu}(b) = (\tilde{\mu}(b_i))_{i\in S}$ $\left(\tilde{\mu}(b_i) = \int_{E^S} b_i d\tilde{\mu}\right)$.
Entonces

$$\tilde{a} = \Gamma(\gamma)\,a + \tilde{\mu}(b)$$

es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.

Demostración:
Por definición tenemos que

$$\tilde{a}_i = \sum_{j\in S} \gamma_{i,j} a_j + \tilde{\mu}(b_i)$$

Para cada $\Lambda \subset S$ finito definimos $a^\Lambda = \left(a_i^\Lambda\right)_{i\in S}$ por:

$$a_i^\Lambda = \begin{cases} \min(a_i, \tilde{a}_i) & \text{si } i \in \Lambda \\ a_i & \text{si } i \notin \Lambda, \end{cases}$$

Supongamos que para todo $\Lambda \subset S$ finito, a^Λ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.
Veamos que $\tilde{a}$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.
Sea $f \in \mathscr{L} \Rightarrow \exists \Lambda \in \mathscr{S}$ y $\phi_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty\left(E^\Lambda, \mathscr{E}^\Lambda, \mathbb{R}\right)$ tal que $f = \phi_\Lambda \circ \sigma_\Lambda \Rightarrow \delta_b(f) = 0$, $\forall b \notin \Lambda$.

Luego

$$\sum_{i\in S}\delta_i\left(f\right)\tilde{a}_i=\sum_{i\in\Lambda}\tilde{a}_i\delta_i\left(f\right)$$

Como hemos supuesto que a^Λ es un estimador:

$$\left|\mu\left(f\right)-\tilde{\mu}\left(f\right)\right|\leq\sum_{i\in S}a_i^\Lambda\delta_i\left(f\right)=\sum_{i\in\Lambda}a_i^\Lambda\delta_i\left(f\right)\leq\sum_{i\in\Lambda}\tilde{a}_i\delta_i\left(f\right)=\sum_{i\in S}\tilde{a}_i\delta_i\left(f\right)$$

Luego $\tilde{a}$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$ por la Proposición 4.2.5.

Probemos entonces la siguiente

Afirmación 4.2.3 *a^Λ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.*

Demostración:

La haremos por inducción sobre $\#\left(\Lambda\right)$.

Si $\#\left(\Lambda\right)=0$, entonces $\Lambda=\emptyset\Rightarrow a^\Lambda=a$.

Sea $k\geq 0$ y supongamos probada la afirmación para todo $\Lambda\subset S$ finito tal que $\#\left(\Lambda\right)\leq k$.

Sea Δ con $\#\left(\Lambda\right)=k+1$.

Sea $i\in\Delta$ y $\Lambda=\Delta\setminus\{i\}\Rightarrow\#\left(\Lambda\right)=k$. Sea $f\in\bar{\mathscr{L}}$.

Como μ y $\tilde{\mu}$ están en $\mathscr{G}\left(\gamma\right)$ y $\mathscr{G}\left(\tilde{\gamma}\right)$ respectivamente tenemos

$$\begin{aligned}\left|\mu\left(f\right)-\tilde{\mu}\left(f\right)\right| &= \left|\mu\left(\gamma_{\{i\}}f\right)-\tilde{\mu}\left(\tilde{\gamma}_{\{i\}}f\right)\right|\\ &\leq \left|\mu\left(\gamma_{\{i\}}f\right)-\tilde{\mu}\left(\gamma_{\{i\}}f\right)\right|+\left|\tilde{\mu}\left(\gamma_{\{i\}}f-\tilde{\gamma}_{\{i\}}f\right)\right| \quad (4.56)\end{aligned}$$

Ahora, para todo $x\in E^S$ tenemos por el Lema 4.2.1:

$$\begin{aligned}\left|\left(\gamma_{\{i\}}f\right)\left(x\right)-\left(\tilde{\gamma}_{\{i\}}f\right)\left(x\right)\right| &= \left|\int_E f\left(\xi x_{S\setminus i}\right)d\gamma_i^\circ\left(\xi|x\right)-\int_E f\left(\xi x_{S\setminus i}\right)d\tilde{\gamma}_i^\circ\left(\xi|x\right)\right|\\ &= \left|\int_E f_{i,x}\left(\xi\right)d\gamma_i^\circ\left(\xi|x\right)-\int_E f_{i,x}\left(\xi\right)d\tilde{\gamma}_i^\circ\left(\xi|x\right)\right|\\ &\leq d_U\left(\gamma_i^\circ\left(\cdot|x\right),\tilde{\gamma}_i^\circ\left(\cdot|x\right)\right)\delta\left(f_{i,x}\right) \quad (4.57)\\ &\leq b_i\left(x\right)\delta_i\left(f\right) \quad (4.58)\end{aligned}$$

por Proposición 4.1.4, por la desigualdad 4.55 y la Proposición 4.2.1.

Luego

$$\left|\tilde{\mu}\left(\gamma_{\{i\}}f-\tilde{\gamma}_{\{i\}}f\right)\right|\leq\delta_i\left(f\right)\tilde{\mu}\left(b_i\right) \quad (4.59)$$

Por otra parte, como γ es quasilocal y f es q. l. (quasilocal) tenemos que $\gamma_{\{i\}}f$ es q. l..

Como a^Λ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$ (por hipótesis) tenemos:

$$\left|\mu\left(\gamma_{\{i\}}f\right)-\tilde{\mu}\left(\gamma_{\{i\}}f\right)\right|\leq\sum_{j\in S}a_j^\Lambda\delta_j\left(\gamma_{\{i\}}f\right) \tag{4.60}$$

Notemos que

$$\delta_i\left(\gamma_{\{i\}}f\right)=0 \tag{4.61}$$

En efecto:

Sea $(x,x')\in T\left(\{i\}^c\right)$.

Por definición de especificación tenemos que $\gamma_{\{i\}}f$ es $\mathscr{E}^{S\setminus i}$-medible $\Rightarrow$ $\exists\phi\in\mathscr{L}^\infty\left(E^{S\setminus i},\mathscr{E}^{S\setminus i},\mathbb{R}\right)$ tal que $\gamma_{\{i\}}f=\phi\circ\sigma_{S\setminus i}$

Como $(x,x')\in T\left(\{i\}^c\right)$, tenemos $\sigma_{S\setminus i}(x)=\sigma_{S\setminus i}(x')$ de donde concluimos la ecuación 4.61.

Por la ecuación 4.60 tenemos entonces

$$\left|\mu\left(\gamma_{\{i\}}f\right)-\tilde{\mu}\left(\gamma_{\{i\}}f\right)\right|\leq\sum_{j\neq i}a_j^\Lambda\delta_j\left(\gamma_{\{i\}}f\right) \tag{4.62}$$

Sea ahora $j\neq i$.

Sea $(x,x')\in T\left(\{j\}^c\right)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\{i\}}f(x)-\gamma_{\{i\}}f(x')\right| &= \left|\int_E f_{i,x}(\xi)\,d\gamma_i^\circ(\xi|x)-\int_E f_{i,x}(\xi)\,d\gamma_i^\circ(\xi|x')\right|\\ &\leq \left|\int_E\left(f_{i,x}(\xi)-f_{i,x'}(\xi)\right)d\gamma_i^\circ d\gamma_i^\circ(\xi|x)\right|\\ &\quad+\left|\int_E f_{i,x'}(\xi)\,d\gamma_i^\circ(\xi|x)-\int_E f_{i,x'}(\xi)\,d\gamma_i^\circ(\xi|x')\right|\\ &\leq \left\|f_{i,x}-f_{i,x'}\right\|_\infty+d_U\left(\gamma_i^\circ(\cdot|x),\gamma_i^\circ(\cdot|x')\right)\delta\left(f_{i,x'}\right)\end{aligned}$$

por la Proposición 4.1.4.

Ahora, para todo $\xi\in E$ tenemos:

$$\left|f_{i,x}(\xi)-f_{i,x'}(\xi)\right|=\left|f\left(\xi x_{S\setminus i}\right)-f\left(\xi x'_{S\setminus i}\right)\right|$$

Como $i\neq j$ y $(x,x')\in T\left(\{j\}^c\right)$ tenemos que $\left(\xi x_{S\setminus i},\xi x'_{S\setminus i}\right)\in T\left(\{j\}^c\right)$.

Luego:

$$\left\|f_{i,x}-f_{i,x'}\right\|_\infty\leq\delta_j(f) \tag{4.63}$$

Por definición de $\gamma_{i,j}$ resulta $d_U\left(\gamma_i^\circ\left(\cdot|x\right), \gamma_i^\circ\left(\cdot|x'\right)\right) \leq \gamma_{i,j}$ pues $(x, x') \in T\left(\{j\}^c\right)$.

Por esto, por las ecuaciones 4.63 y 4.63 tenemos:

$$\left|\gamma_{\{i\}} f\left(x\right) - \gamma_{\{i\}} f\left(x'\right)\right| \leq \delta_j\left(f\right) + \gamma_{i,j}\delta_i\left(f\right)$$

Por lo tanto:

$$\delta_j\left(\gamma_{\{i\}} f\right) \leq \delta_j\left(f\right) + \gamma_{i,j}\delta_i\left(f\right)$$

De aquí y por la ecuación 4.62 tenemos:

$$\left|\mu\left(\gamma_{\{i\}} f\right) - \tilde{\mu}\left(\gamma_{\{i\}} f\right)\right| \leq \sum_{j\neq i} a_j^\Lambda \delta_j\left(f\right) + \sum_{j\in S} a_j^\Lambda \gamma_{ij}\delta_i\left(f\right)$$

Por esto, las ecuaciones 4.56 y 4.59:

$$\left|\mu\left(f\right) - \tilde{\mu}\left(f\right)\right| \leq \sum_{j\neq i} a_j^\Lambda \delta_j\left(f\right) + \tilde{a}_i\delta_i\left(f\right) \tag{4.64}$$

Como a^Λ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$ tenemos también

$$\left|\mu\left(f\right) - \tilde{\mu}\left(f\right)\right| \leq \sum_{j\neq i} a_j^\Lambda \delta_j\left(f\right) + a_i\delta_i\left(f\right)$$

De aquí y por ecuación 4.64 tenemos que

$$\left|\mu\left(f\right) - \tilde{\mu}\left(f\right)\right| \leq \sum_{j\neq i} a_j^\Lambda \delta_j\left(f\right) + \text{mín}\left(a_i, \tilde{a}_i\right)\delta_i\left(f\right) = \sum_{j\in S} a_j^\Delta \delta_j\left(f\right)$$

Queda así probado que a^Δ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$. La Afirmación 4.2.3 está probada.

$\blacksquare$

Lema 4.2.2 *Sean* $\Gamma : S\times S \to [0,\infty)\,, L : S\times S \to [0,\infty)$ *tales que:*

$$S\Gamma := \sup_{a\in S}\sum_{b\in S}\Gamma\left(a,b\right) < \infty$$

$$SL := \sup_{a\in S}\sum_{b\in S} L\left(a,b\right) < \infty$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$*, sea* $C_\Lambda : S\times S \to [0,+\infty)$ *dada por*

$$C_\Lambda(i,j) = \sum_{k\in\Lambda} \Gamma(i,k)\, L(k,j)$$

Entonces:

(a) Para cada $(i,j) \in S\times S$ *la red* $(C_\Lambda(i,j))_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *converge. Sea* $\Gamma L(i,j) := \lim_{\Lambda\uparrow S} C_\Lambda(i,j) =: \sum_{k\in S}\Gamma(i,k)\, L(k,j)$

(b) $\sup_{a\in S}\sum_{b\in S}\Gamma L(a,b) \le S\Gamma . SL$.

Demostración: Ejercicio.

Corolario 4.2.1 *Sea* $\Gamma : S\times S \to [0,+\infty)$ *tal que* $\sup_{a\in S}\sum_{b\in S}\Gamma(a,b) = S\Gamma < 1$. *Sean:* $\Gamma^0 : S\times S \to [0,+\infty)$ *dada por*

$$\Gamma^0 = \begin{cases} 1 & \textit{si } a = b \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Pongamos $\Gamma^1 := \Gamma$.
Para cada $n \ge 2$ *sea* $\Gamma^n : S\times S \to [0,+\infty)$ *dada por*

$$\Gamma^n(a,b) := \left(\Gamma^1\Gamma^{n-1}\right)(a,b),\ \forall (a,b) \in S\times S.$$

Entonces para cada $(a,b)\in S\times S$

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\Gamma^n(a,b)\right)_{N\ge 0}$$

es convergente.
Sea $D_\Gamma : S\times S \to [0,+\infty)$ *definida por:*

$$D_\Gamma(a,b) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\Gamma^n(a,b)\left(=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma^n(a,b)\right) \tag{4.65}$$

Demostración: Ejercicio.

Notación 4.2.2 *Sea* $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. *Sea* $\Gamma(\gamma) : S\times S \to [0,+\infty)$ *dada por:* $\Gamma(\gamma)(i,j) = \gamma_{i,j}$.

Teorema 4.2.1 *Sean* γ *y* $\tilde{\gamma}$ *dos especificaciones sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. *Además:*

(i) γ *satisface la condición D (Definición 4.1.4)*

(ii) *Para cada $i \in S$, existe $b_i : E^S \to [0, +\infty)$, $\mathscr{F}$-medible tal que:*

$$d_U\left(\gamma_i^\circ\left(\cdot|x\right), \tilde{\gamma}_i^\circ\left(\cdot|x\right)\right) \leq b_i\left(x\right), \forall x \in E^S, \forall i \in S$$

Si $\mu \in \mathscr{G}\left(\gamma\right)$ y $\tilde{\mu} \in \mathscr{G}\left(\tilde{\gamma}\right)$, entonces:

$$\left|\mu\left(f\right) - \tilde{\mu}\left(f\right)\right| \leq \sum_{(i,j)\in S\times S} \delta_i\left(f\right) D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right) \tilde{\mu}\left(b_j\right) \tag{4.66}$$

para toda $f \in \bar{\mathscr{L}}$.

Demostración:

Para cada $i \in S$ sea $\tilde{b}_i = \tilde{\mu}\left(b_i\right)$ y $\tilde{b} = \left(\tilde{b}_i\right)_{i\in S}$.

Como $d_U\left(\nu, \tilde{\nu}\right) \leq 1$ cualesquiera sean ν y $\tilde{\nu}$ en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$, sin perdida de generalidad, podemos suponer $b_i\left(x\right) \leq 1$, $\forall x \in E^S \Rightarrow$

$$\tilde{b}_i \leq 1, \forall i \in S \tag{4.67}$$

Supongamos que $D_{\Gamma(\gamma)}\tilde{b}$ es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.

Entonces, para toda $f \in \bar{\mathscr{L}}$ tenemos:

$$\left|\mu\left(f\right) - \tilde{\mu}\left(f\right)\right| \leq \sum_{i\in S} \left(D_{\Gamma(\gamma)}\tilde{b}\right)_i \delta_i\left(f\right) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right) \tilde{b}_j \delta_i\left(f\right)$$

que es la ecuación 4.66

Por lo tanto, para probar el Teorema 4.2.1, bastará probar la siguiente

Afirmación 4.2.4 $D_{\Gamma(\gamma)}\tilde{b} := \left(\sum_{j\in S} D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right) \tilde{\mu}\left(b_j\right)\right)_{i\in S}$ *es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.*

Demostración:

Sea $a_i^0 = 1$, $\forall i \in S$ y $a^{(0)} = \left(a_i^0\right)_{i\in S}$.

Por ser γ quasilocal, aplicando la Proposición 4.2.7 tenemos que:

$$a^{(1)} = \Gamma\left(\gamma\right) a^{(0)} + \tilde{b}$$

es un estimador para μ y $\tilde{\mu}$.

Reiterando este argumento concluimos que $\left(a^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ es una sucesión de estimadores para μ y $\tilde{\mu}$ donde:

$$\begin{aligned} a^{(n)} &:= \Gamma(\gamma)\, a^{(n-1)} + \tilde{b} \\ &= \Gamma(\gamma)\left(\Gamma(\gamma)\, a^{(n-2)} + \tilde{b}\right) + \tilde{b} \\ &= \Gamma(\gamma)^2\, a^{(n-2)} + \Gamma(\gamma)\,\tilde{b} + \tilde{b} = \ldots = \\ &= \Gamma^n(\gamma)\, a^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma^k(\gamma)\,\tilde{b}. \end{aligned}$$

Por inducción sobre n es fácil de ver que para todo $i \in S$, se cumple

$$\sum_{j\in S} \Gamma^n(\gamma)(i,j) \leq (\alpha(\gamma))^n, \ \forall n \geq 0 \tag{4.68}$$

siendo $\alpha(\gamma) = \sup_{a\in S}\sum_{b\in S}\gamma_{a,b}$ (< 1 por (i)).
Luego, para todo $i \in S$ tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j\in S} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) &= \sum_{j\in S}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma^n(\gamma)(i,j) && (4.69)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in S}\Gamma^n(\gamma)(i,j) && (4.70)\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha(\gamma))^n && (4.71)\\ &= \frac{1}{1-\alpha(\gamma)}. && (4.72) \end{aligned}$$

Luego, por la ecuación 4.67:

$$0 \leq \sum_{j\in S} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j)\,\tilde{b}_j \leq \sum_{j\in S} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) < \infty$$

Entonces:

$$\left(D_{\Gamma(\gamma)}\tilde{b}\right)_i \in [0,+\infty), \ \forall i \in S \tag{4.73}$$

Ahora, por la ecuación 4.68 tenemos que

$$\Gamma^n(\gamma)\, a^{(0)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

También, para cada $i \in S$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Gamma^k(\gamma)\,\tilde{b}\right)_i &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j\in S}\Gamma^k(\gamma)(i,j)\,\tilde{b}_j \\ &= \sum_{j\in S}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\Gamma^k(\gamma)(i,j)\right)\tilde{b}_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j\in S}D_{\Gamma(\gamma)}(i,j)\,\tilde{b}_j=\left(D_{\Gamma(\gamma)}\tilde{b}\right)_i\end{aligned}$$

Probamos entonces que $a_i^{(n)} \to \left(D(\gamma)\,\tilde{b}\right)_i, \forall i \in S$.

Por esto, por la ecuación 4.73 y por la Proposición 4.2.6 se concluye la prueba de la Afirmación 4.2.4 y con ella la del Teorema 4.2.1.

■

Corolario 4.2.2 *Sea γ una especifición sobre $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$. Supongamos que γ satisface la condición D. Entonces μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{G}(\gamma) \Rightarrow \mu(f)=\tilde{\mu}(f), \forall f \in \bar{\mathscr{L}}$.*

Demostración:

Consideremos el Teorema 4.2.1 con: $\gamma=\tilde{\gamma}$ y $b_i \equiv 0$, $\forall i \in S$.

Por la ecuación 4.66 del Teorema 4.2.1 se tiene entonces $\mu(f)=\tilde{\mu}(f), \forall f \in \bar{\mathscr{L}}$.

■

Corolario 4.2.3 *Sea γ una especifición sobre $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$. Supongamos que γ satisface la condición D. Entonces μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{G}(\gamma) \Rightarrow \mu=\tilde{\mu}$.*

Demostración:

Por el Corolario 4.2.2, $\mu(A)=\tilde{\mu}(A)$, $\forall A \in \mathscr{F}_0 \Rightarrow \mu=\tilde{\mu}$ por el Teorema de Extensión (Theorem A, pág. 54 de [Hal66])

■

4.3. Otras consecuencias de la condición de Dobrushin.

Notación 4.3.1 *Sea $\gamma_\emptyset : \mathscr{F}\times E^S \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\gamma_\emptyset(A|x)=1_A(x), \forall A \in \mathscr{F}, \forall x \in E^S.$$

Lema 4.3.1 *Sean:* $h : E^S \to \mathbb{R}, \mathscr{F}$*-medible,* $\Lambda \in \mathscr{S}, \xi \in E^\Lambda, h_\xi^* : E^S \Rightarrow \mathbb{R}$ *dada por:*

$$h_\xi^*(y) = h\left(\xi y_{S\setminus\Lambda}\right).$$

Si h *es quasilocal, entonces* h_ξ^* *es quasilocal.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Como h es q. l., $\exists \Lambda_0 \in \mathscr{S}$ tal que $\Lambda_0 \subset \Delta \in \mathscr{S} \Rightarrow \exists \phi_\Delta : E^\Delta \to \mathbb{R}$ medible tal que $\|h - \phi_\Delta \circ \sigma_\Delta\|_\infty < \epsilon$.

Sea $\Delta = \Lambda_0 \cup \Lambda$. Sea $\phi_{\Delta\setminus\Lambda} : E^{\Delta\setminus\Lambda} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_{\Delta\setminus\Lambda}(\eta) = \phi_\Delta(\xi\eta).$$

Luego $\phi_{\Delta\setminus\Lambda}$ es $\mathscr{E}^{\Delta\setminus\Lambda}$-medible.

Sea $y \in E^S$ cualesquiera $\Rightarrow$

$$h_\xi^*(y) - \phi_{\Delta\setminus\Lambda}\left(\sigma_{\Delta\setminus\Lambda}(y)\right) = h\left(\xi y_{S\setminus\Lambda}\right) - \phi_\Delta\left(\xi\sigma_{\Delta\setminus\Lambda}(y)\right) \quad (4.74)$$

$$= h\left(\xi y_{S\setminus\Lambda}\right) - \phi_\Delta\left(\sigma_\Delta\left(\xi y_{S\setminus\Lambda}\right)\right) \quad (4.75)$$

Luego

$$\left|h_\xi^*(y) - \phi_{\Delta\setminus\Lambda}\left(\sigma_{\Delta\setminus\Lambda}(y)\right)\right| = \left|h\left(\xi y_{S\setminus\Lambda}\right) - \phi_\Delta\left(\sigma_\Delta\left(\xi y_{S\setminus\Lambda}\right)\right)\right|$$

De donde

$$\left\|h_\xi^* - \phi_{\Delta\setminus\Lambda} \circ \sigma_{\Delta\setminus\Lambda}\right\|_\infty \leq \|h - \phi_\Delta \circ \sigma_\Delta\|_\infty < \epsilon$$

■

Lema 4.3.2 *Sean:* γ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right); V \subset S; x \in E^S$*. Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *definimos* $\tilde{\gamma}_\Lambda : \mathscr{F} \times E^S \to \mathbb{R}$ *por*

$$\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y) = \gamma_{\Lambda\cap V}\left(A|x_\Lambda y_{S\setminus\Lambda}\right)$$

Entonces:

(a) $\gamma^{(V,x)} := (\tilde{\gamma}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *es una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

(b) $V = S \Rightarrow \gamma^{(V,x)} = \gamma$.

(c) *Si* $\#(V) < \infty$*, entonces* $\gamma_V(\cdot|x) \in \mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right)$.

(d) γ *q. l.* $\Rightarrow \gamma^{(V,x)}$ *q. l..*

(e) $(i,j) \in S \times S, i \neq j \Rightarrow \Gamma\left(\gamma^{(V,x)}\right)(i,j) = 1_V(i)\,\Gamma(\gamma)(i,j)$

Demostración:

Prueba de **(a)**

Que para cada $y \in E^S, A \mapsto \tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)$ es una probabilidad para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$ sigue porque $\gamma_{\Lambda\cap V}\left(\cdot|x_\Lambda y_{S\setminus\Lambda}\right)$ lo es.

Sean $A \in \mathscr{F}, \Lambda \in \mathscr{S}$. Veamos que: $\tilde{\gamma}_\Lambda(A|\cdot)$ es $\mathscr{E}^{\Lambda^c}$-medible. Como γ es una especificación, $\gamma_{\Lambda\cap V}(A|\cdot)$ es $\mathscr{J}_{\Lambda\cap V}$-medible $\Rightarrow \exists\phi_{\Lambda^c\cup V^c} : E^{\Lambda^c\cup V^c} \to \mathbb{R}$ medible tal que para $y \in E^S$

$$\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x_\Lambda y_{\Lambda^c}) = \phi_{\Lambda^c\cup V^c}\left(\sigma_{\Lambda^c\cup V^c}(x_\Lambda y_{\Lambda^c})\right) \tag{4.76}$$

Ahora

$$\sigma_{\Lambda^c\cup V^c}(x_\Lambda y_{\Lambda^c}) = \sigma_{\Lambda^c\cup V^c}\left(x_{\Lambda\cap V} x_{\Lambda\cap V^c} y_{\Lambda^c\cap V} y_{\Lambda^c\cap V^c}\right) = x_{\Lambda\cap V^c} y_{\Lambda^c\cap V} y_{\Lambda^c\cap V^c}$$

Sea ahora $\phi_{\Lambda^c} : E^{\Lambda^c} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\phi_{\Lambda^c}(z) = \phi_{\Lambda^c\cup V^c}(x_{\Lambda\cap V^c} z), z \in E^{\Lambda^c}$$

Luego, ϕ_{Λ^c} es $\mathscr{E}^{\Lambda^c}$-medible y $\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y) = \phi_{\Lambda^c}(y_{\Lambda^c})$ lo que prueba que $\tilde{\gamma}_\Lambda(A|\cdot)$ es $\mathscr{J}_\Lambda$-medible.

Probaremos ahora que:

$$A \in \mathscr{F}, C \in \mathscr{E}^{\Lambda^c} \text{ con } \Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \tilde{\gamma}_\Lambda(A\cap B|y) = 1_B(y)\,\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y) \tag{4.77}$$

para todo $y \in E^S$, con $B = \sigma_{\Lambda^c}^{-1}(C)$.

Sea $C^* = \sigma_{\Lambda^c\cup V^c,\Lambda^c}^{-1}(C) \in \mathscr{E}^{\Lambda^c\cup V^c}$

Sea $B^* = \sigma_{\Lambda^c\cup V^c}^{-1}(C^*)$. Entonces $B^* = B$

Luego, como γ es una especificación, tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_\Lambda(A\cap B|y) &= \gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B|x_\Lambda y_{\Lambda^c}) \\
&= \gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B^*|x_\Lambda y_{\Lambda^c}) \\
&= 1_{B^*}(x_\Lambda y_{\Lambda^c})\,\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x_\Lambda y_{\Lambda^c}) \\
&= 1_B(x_\Lambda y_{\Lambda^c})\,\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Ahora: $x_\Lambda y_{\Lambda^c} \in B \Leftrightarrow \sigma_{\Lambda^c}(x_\Lambda y_{\Lambda^c}) \in C \Leftrightarrow y_{\Lambda^c} \in C \Leftrightarrow \sigma_{\Lambda^c}(y) \in C \Leftrightarrow y \in B$.

Entonces, por la ecuación 4.78 tenemos

$$\tilde{\gamma}_\Lambda(A\cap B|y) = 1_B(y)\,\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)$$

Luego, la ecuación 4.77 está probada.

Para terminar la prueba de **(a)** veamos que se cumple:

$$\Lambda \in \mathscr{S}, \Lambda \subset \Delta \in \mathscr{S}, A \in \mathscr{F}, y \in E^S \Rightarrow \tilde{\gamma}_\Delta \tilde{\gamma}_\Lambda (A|y) = \tilde{\gamma}_\Delta (A|y) \tag{4.79}$$

En efecto

$$\tilde{\gamma}_\Delta \tilde{\gamma}_\Lambda (A|y) = \int_{E^S} \tilde{\gamma}_\Lambda (A|z) \tilde{\gamma}_\Delta (dz|y) = \int_{E^S} \gamma_{\Lambda \cap V} (A|x_\Lambda z_{\Lambda^c}) \gamma_{\Delta \cap V} (dz|x_\Delta y_{\Delta^c}) \tag{4.80}$$

Supongamos que

$$\gamma_{\Delta \cap V} (C|x_\Delta y_{\Delta^c}) = 0 \tag{4.81}$$

donde

$C = \left\{ z \in E^S / \gamma_{\Lambda \cap V} (A|x_\Lambda z_{\Lambda^c}) \neq \gamma_{\Lambda \cap V} (A|z) \right\}$.

Entonces por la ecuación 4.80 tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\Delta \tilde{\gamma}_\Lambda (A|y) &= \int_{E^S} \gamma_{\Lambda \cap V} (A|z) \gamma_{\Delta \cap V} (dz|x_\Delta y_{\Delta^c}) && (4.82) \\ &= \gamma_{\Delta \cap V} \gamma_{\Lambda \cap V} (A|x_\Delta y_{\Delta^c}) && (4.83) \\ &= \gamma_{\Delta \cap V} (A|x_\Delta y_{\Delta^c}) && (4.84) \\ &= \tilde{\gamma}_\Delta (A|y) && (4.85) \end{aligned}$$

pues γ es especificación, con lo que demostramos la ecuación 4.77.

Probemos entonces la ecuación 4.81.

Por la ecuación 4.76, $\forall z \in E^S$:

$$\gamma_{\Lambda \cap V} (A|x_\Lambda z_{\Lambda^c}) = \phi_{\Lambda^c \cup V^c} (x_{\Lambda \cap V^c} z_{\Lambda^c}) \text{ y } \gamma_{\Lambda \cap V} (A|z) = \phi_{\Lambda^c \cup V^c} (z_{\Lambda \cap V^c} z_{\Lambda^c})$$

Luego: $C \subset D := \left\{ z \in E^S / z_{\Lambda \cap V^c} \neq x_{\Lambda \cap V^c} \right\} \in \mathscr{J}_{\Lambda \cap V}$

Como γ es una especificación tenemos:

$$\gamma_{\Delta \cap V} (C|x_\Delta y_{\Delta^c}) \leq \gamma_{\Delta \cap V} (D|x_\Delta y_{\Delta^c}) = 1_D (x_\Delta y_{\Delta^c}) = 0$$

pues $\sigma_{\Lambda \cap V^c} (x_\Delta y_{\Delta^c}) = x_{\Lambda \cap V^c}$ pues $\Lambda \subset \Delta$. Luego, la ecuación 4.81 está probado.

La prueba de **(a)** está completada.

Prueba de **(b)**

Si $V = S$, entonces para todo $\Lambda \in \mathscr{S}, A \in \mathscr{F}$ e $y \in E^S$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_\Lambda (A|y) &= \gamma_{\Lambda\cap S} (A|x_\Lambda y_{\Lambda^c}) \\
&= \gamma_\Lambda (A|x_\Lambda y_{\Lambda^c}) \\
&= \gamma_\Lambda (A|y) .
\end{aligned}$$

pues γ es una especificación y entonces $\gamma_\Lambda (A|\cdot)$ es $\mathscr{J}_\Lambda$-medible.

Prueba de **(c)**

Por la Proposición 1.2.3 bastará ver que

$$\gamma_V (A|x) = \gamma_V \tilde{\gamma}_\Lambda (A|x) \tag{4.86}$$

cualesquiera sean $\Lambda \in \mathscr{S}, A \in \mathscr{F}$ y $x \in E^S$.

$$\begin{aligned}
\gamma_V \tilde{\gamma}_\Lambda (A|x) &= \int \tilde{\gamma}_\Lambda (A|w) \gamma_V (dw|x) \\
&= \int \gamma_{\Lambda\cap V} \left(A|x_\Lambda w_{S\setminus\Lambda}\right) \gamma_V (dw|x) \\
&= \int \gamma_{\Lambda\cap V} (A|w) \gamma_V (dw|x) \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

Esto último es cierto por la ecuación 4.81 con $\Delta = V$ lo que es posible realizarlo pues $V \in \mathscr{S}$ $(\# (V) < \infty)$.

Luego, de la ecuación 4.87 tenemos:

$$\gamma_V \tilde{\gamma}_\Lambda (A|x) = \gamma_V \gamma_{\Lambda\cap V} (A|x) = \gamma_V (A|x)$$

pues, γ es una especificación y $(\Lambda \cap V) \subset V$ ambos en $\mathscr{S}$. Luego, la ecuación 4.86 está probada.

Prueba de **(d)**

Como γ es q.l., si $\Lambda \in \mathscr{S}$, entonces dada $f : E^S \to \mathbb{R}$ que sea q.l. $\Rightarrow \gamma_{\Lambda\cap V} f$ es q.l..

Ahora, $\forall y \in E^S$ tenemos:

$$\tilde{\gamma}_\Lambda f (y) = \gamma_{\Lambda\cap V} f (x_\Lambda y_{\Lambda^c})$$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_\Lambda f$ es q. l., por el Lema 4.3.1.

Prueba de **(e)**

Supongamos que $i \notin V$. Entonces, $\forall y \in E^S$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_i^\circ (A|y) &= \gamma_\emptyset \left(\sigma_i^{-1} (A) |x_i y_{S\setminus i}\right) && (4.88)\\
&= 1_{\sigma_i^{-1}(A)} \left(x_i y_{S\setminus i}\right) && (4.89)\\
&= 1_A (x_i) . && (4.90)
\end{aligned}$$

para todo $A \in \mathscr{E}$.

Luego $\tilde{\gamma}_i^{\circ}(A|y) - \tilde{\gamma}_i^{\circ}(A|y') = 0$ cualesquiera sean y e y' en $E^S \Rightarrow \Gamma\left(\gamma^{(V,x)}\right)(i,j) = 0 = 1_V(i)\,\Gamma(\gamma)(i,j)$.

Supongamos que $i \in V$. Por definición

$$\Gamma\left(\gamma^{(V,x)}\right)(i,j) = \sup\left\{d_U\left(\tilde{\gamma}_i^{\circ}(\cdot|y), \tilde{\gamma}_i^{\circ}(\cdot|y')\right) / (y,y') \in T(\{j\}^c)\right\}$$

Ahora, si $A \in \mathscr{E}$, como $i \in V$ tenemos que la función $\gamma_{\{i\}}^{\circ}(A|\cdot) = \gamma_{\{i\}}\left(\sigma_i^{-1}(A)|\cdot\right)$ es $\mathcal{J}_{\{i\}}$-medible, luego existe $\psi_A : E^{S\setminus\{i\}} \to \mathbb{R}$ medible tal que $\gamma_{\{i\}}\left(\sigma_i^{-1}(A)|z\right) = \psi_A(z_{S\setminus\{i\}})$ cualquiera sea $z \in E^S$. Luego:

$$\gamma_{\{i\}}\left(\sigma_i^{-1}(A)|x_i z_{S\setminus\{i\}}\right) = \gamma_{\{i\}}\left(\sigma_i^{-1}(A)|z\right),$$

para todo $z \in E^S$. Por lo tanto:

$$\tilde{\gamma}_{\{i\}}^{\circ}(\cdot|z) = \gamma_{\{i\}}^{\circ}(\cdot|z)$$

para todo $z \in E^S$

De aquí se deduce entonces que

$$\Gamma\left(\gamma^{(V,x)}\right)(i,j) = \Gamma(\gamma)(i,j)$$

cualesquiera sea $(i,j) \in S \times S$

■

Lema 4.3.3 *Sean: $(Y, \mathscr{Y})$ un e.m., $\mathscr{B} \subset \mathscr{Y}$ σ-álgebras sobre Y. Sea $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\mathscr{Y}, \mathscr{B})$ el conjunto de todos los núcleos de probabilidad propios de $(Y, \mathscr{B})$ a $(Y, \mathscr{Y})$.*

Sea $d : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sup\left\{|\Gamma_1(A|x) - \Gamma_2(A|x)| / A \in \mathscr{Y}, x \in Y\right\}$$

Entonces d es una métrica sobre $\mathscr{K}$ y $(\mathscr{K}, d)$ es completo.

Demostración:

Que d es una métrica sobre $\mathscr{K}$ es inmediato.

Veamos que $(\mathscr{K}, d)$ es completo.

Sea $(\Gamma_i)_{i\geq 1}$ una d-sucesión de Cauchy sobre $\mathscr{K}$.

Luego, para cada $A \in \mathscr{Y}$ e $y \in Y$, $(\Gamma_i(A|y))_{i\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $[0,1]$, luego existe $\Gamma(A|y) \in [0,1]$ tal que

$$\Gamma_i(A|y) \underset{i}{\to} \Gamma(A|y). \tag{4.91}$$

Veamos que esta convergencia es uniforme sobre

$$A \in \mathscr{Y} \text{ e } y \in Y. \tag{4.92}$$

y luego que $\Gamma(\cdot|\cdot) \in \mathscr{K}$. Sea $\epsilon > 0$. Como $(\Gamma_i)_{i\geq 1}$ es una d-red de Cauchy $\exists i_0$ tal que $i, j \geq i_0 \Rightarrow \sup\{|\Gamma_i(A'|y') - \Gamma_j(A'|y')| / A' \in \mathscr{Y}, y' \in Y\} < \frac{\epsilon}{2}$.

Sean $A \in \mathscr{Y}, y \in Y$ cualesquiera.

Por la ecuación 4.91, $\exists j_0$ que depende de A e y tal que $|\Gamma(A|y) - \Gamma_j(A|y)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall j \geq j_0$.

Sea $i \geq i_0$, tomemos $j > \max(j_0, i_0) \Rightarrow |\Gamma(A|y) - \Gamma_i(A|y)| \leq |\Gamma(A|y) - \Gamma_j(A|y)| + \sup\{|\Gamma_i(A'|y') - \Gamma_j(A'|y')| / A' \in \mathscr{Y}, y' \in Y\} < \epsilon$

Con lo que queda demostrado que la convergencia es uniforme en $A \in \mathscr{Y}$ e $y \in Y$.

Para probar que $\Gamma(\cdot|\cdot) \in \mathscr{K}$ supongamos probada la siguiente

Afirmación 4.3.1 *Para cada $y \in Y, A \mapsto \Gamma(A|y)$ es una probabilidad sobre $(Y, \mathscr{Y})$.*

Que para cada $A \in \mathscr{Y}, y \mapsto \Gamma(A|y)$ es $\mathscr{B}$-medible, sigue del hecho de que $\Gamma_i(A|\cdot)$ es una sucesión de funciones $\mathscr{B}$-medibles que converge puntualmente a $\Gamma(A|\cdot)$.

Finalmente, veamos que Γ es un $\mathscr{B}$-propio. Para ello aplicamos la Proposición 1.1.3.

Sean $B \in \mathscr{B}, y \in Y$ cualesquiera. Entonces:

$$\begin{aligned} |\Gamma(B|y) - 1_B(y)| &\leq |\Gamma(B|y) - \Gamma_i(B|y)| + |\Gamma_i(B|y) - 1_B(y)| \\ &= |\Gamma(B|y) - \Gamma_i(B|y)| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

pues Γ_i es $\mathscr{B}$-propio.

De donde se deduce que $\Gamma(B|y) = 1_B(y)$.

Luego $\Gamma(\cdot|\cdot) \in \mathscr{K}$ y así, el lema 4.3.3 quedará probado.

Prueba de la Afirmación 4.3.1

Es fácil ver que:

$$A_1 \subset A_2 \text{ ambos en } \mathscr{Y} \Rightarrow \Gamma(A_1|y) \leq \Gamma(A_2|y) \tag{4.93}$$

Por otro lado es inmediato también ver que:

$$A_1, \ldots, A_K \text{ en } \mathscr{Y}; A_i \cap A_j = \emptyset \text{ con } 1 \leq i \neq j \leq K \Rightarrow \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k|y\right) = \sum_{k=1}^{K} \Gamma(A_k|y) \tag{4.94}$$

Sea ahora $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión en $\mathscr{Y}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
Por las ecuaciones 4.93 y 4.94 tenemos $\forall K \geq 1$:

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) \geq \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k|y\right) = \sum_{k=1}^{K} \Gamma\left(A_k|y\right)$$

Luego:

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma\left(A_k|y\right) \tag{4.95}$$

Por otro lado. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario $\Rightarrow i \geq 1$ tal que

$$\sup\left\{\left|\Gamma\left(A'|y'\right) - \Gamma_i\left(A'|y'\right)\right| \left| A' \in \mathscr{Y}, y' \in Y\right.\right\} < \frac{\epsilon}{3} \tag{4.96}$$

Luego, como $\Gamma_i\left(\cdot|y\right)$ es una probabilidad $\exists K_0 | K \geq K_0 \Rightarrow \Gamma_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) \leq \Gamma_i\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k|y\right) + \frac{\epsilon}{3}$
De aquí y por las ecuaciones 4.94, 4.95 y 4.96 tenemos para $K \geq K_0$ fijo:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) &\leq \Gamma_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \Gamma_i\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k|y\right) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k|y\right) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \Gamma\left(A_k|y\right) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma\left(A_k|y\right) + \epsilon
\end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ probamos que:

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma\left(A_k|y\right).$$

De aquí y por la ecuación 4.95 tenemos:

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma\left(A_k|y\right).$$

La prueba de la Afirmación 4.3.1.

■

Nota 4.3.1 *Sea γ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que satisface la condición D. Por lo visto en la prueba del Teorema 4.2.1 se tiene que para todo $i \in S$ se cumple que $\sum_{j\in S} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) < \infty$. Luego, para cada $V \subset S$ y cada $i \in S$, la red $\left(RD^i_{\Gamma(\gamma)}, \mathscr{S}(V), \supset\right)$ converge a cero, donde $RD^i_{\Gamma(\gamma)}(\Delta) = \sum_{j\in V\setminus\Delta} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j)$ para todo $\Delta \in \mathscr{S}(V) := \{\Lambda \in \mathscr{S}/\Lambda \subset V\}$*

Proposición 4.3.1 *Sean: $(E, \mathscr{E})$ un espacio de Borel estándar, $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que satisface la condición D. Entonces: Para cada $V \subset S, \exists \Gamma_V : \mathscr{F} \times E^S \to [0,1]$ tal que:*

(a) *Para cada $x \in E^S, \Gamma_V(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.*

(b) *Para cada $A \in \mathscr{F}, \Gamma_V(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}$-medible.*

(c) *Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $\Delta \in \mathscr{S}(V)$ se cumple:*

$$\sup\left(\left\{\left|\gamma_\Delta(A|x) - \Gamma_V(A|x)\right| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, x \in E^S\right\}\right) \leq \sum_{i\in\Lambda} RD^i_{\Gamma(\gamma)}(\Delta)$$

(d) *$(\gamma_\Delta(\cdot|x))_{\Delta\in\mathscr{S}(V)}$ converge a $\Gamma_V(\cdot|x)$ en la topología $\mathscr{L}$ uniformemente sobre $x \in E^S$.*

Demostración:

Afirmación 4.3.2 *Sean Δ y Δ' en $\mathscr{S}(V)$ con $\Delta \subset \Delta'$. Entonces, para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ se cumple que*

$$\sup\left(\left\{\left|\gamma_\Delta(A|x) - \gamma_{\Delta'}(A|x)\right| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, x \in E^S\right\}\right) \leq \sum_{i\in\Lambda} RD^i_{\Gamma(\gamma)}(\Delta)$$

Supongamos probada esta Afirmación 4.3.2.

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}$. Definamos:

$$\mathscr{K}_\Lambda = \left\{ N : \mathscr{F}_\Lambda \times E^S \to \mathbb{R} / \begin{cases} (1) N(\cdot|x) \in Prob\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right), \forall x \in E^S \\ (2) N(A|\cdot) \text{ es } \mathscr{F} - \text{medible}, \forall A \in \mathscr{F}_V \end{cases} \right\}$$

$d_\Lambda : \mathscr{K}_\Lambda \times \mathscr{K}_\Lambda \to \mathbb{R}$ por:

$$d_\Lambda(N_1, N_2) = \sup\left\{ |N_1(A|x) - N_2(A|x)| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, x \in E^S \right\}$$

Procediendo como en la demostración del Lema 4.3.3, se prueba que $(\mathscr{K}_\Lambda, d_\Lambda)$ es un espacio métrico completo.

Como $\#(\Lambda) < \infty$, por la Afirmación 4.3.2 y la Nota 4.3.1, se tiene que $(\gamma_\Delta)_{\Delta \in \mathscr{S}(V)}$ es una d_Λ-red de Cauchy en $\mathscr{K}_\Lambda$.

Luego, $\exists \Gamma_{\Lambda,V} \in \mathscr{K}_\Lambda$ tal que $(\gamma_\Delta)_{\Delta \in \mathscr{S}(V)}$ converge a $\Gamma_{\Lambda,V}$ en la métrica d_Λ.

Nuevamente, por esto último y por la Afirmación 4.3.2, tenemos que para todo $\Delta \in \mathscr{S}(V)$:

$$\sup\left\{ |\gamma_\Delta(A|x) - \Gamma_{\Lambda,V}(A|x)| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, x \in E^S \right\} \leq \sum_{i \in \Lambda} RD^i_{\Gamma(\gamma)}(\Delta) \quad (4.97)$$

Sea $x \in E^S$. Como $\Gamma_{\Lambda,V}(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right)$, por la ecuación 4.97, la Nota 4.3.1 y la Proposición 3.2.4, se tiene que $(\gamma_\Delta(\cdot|x))_{\Delta \in \mathscr{S}(V)}$ es una red en $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ l.e.. Por la Proposición 3.2.3, $\exists \Gamma_{V,x} \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ y una subred $(\gamma_{\Delta'}(\cdot|x))_{\Delta' \in \mathscr{S}'(V)}$ de $(\gamma_\Delta(\cdot|x))_{\Delta \in \mathscr{S}(V)}$ tal que $\gamma_{\Delta'}(\cdot|x) \xrightarrow[\Delta' \in \mathscr{S}'(V)]{} \Gamma_{V,x}$ en la topología $\mathscr{L}$ sobre $\mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{E}^S\right)$. Por la desigualdad 4.97 tenemos que

$$\gamma_{\Delta'}(A|x) \xrightarrow[\Delta']{} \Gamma_{\Lambda,V}(A|x), \forall A \in \mathscr{L}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{V,x}(A) = \Gamma_{\Lambda,V}(A|x), \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S} \quad (4.98)$$

Pongamos $\Gamma_V(A|x) = \Gamma_{V,x}(A), \forall A \in \mathscr{E}^S, \forall x \in E^S$.

Entonces, para cada $x \in E^S, \Gamma_V(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

Veamos **(a)**

Está probada.

Veamos **(b)**

Sea $\mathscr{G} := \{A \in \mathscr{F} / \Gamma_V(A|\cdot) \text{ es } \mathscr{F}\text{-medible}\}$. Por la ecuación 4.98, para cada $A \in \mathscr{F}_\Lambda$ con $\Lambda \in \mathscr{S}$ cualquiera, $\Gamma_{\Lambda,V}(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}$-medible y en ese caso $(A \in \mathscr{F}_\Lambda)$ se tiene que $\Gamma_V(A|\cdot) = \Gamma_{\Lambda,V}(A|\cdot) \Rightarrow \Gamma_V(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}$-medible $\therefore \mathscr{F}_\Lambda \subset \mathscr{G}$. Luego $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{G}$.

Es fácil de ver que $\mathscr{G}$ es una clase monótona, pues para cada $x \in E^S; \Gamma_V(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Esto es:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \text{ en } \mathscr{G} \Rightarrow \Gamma_V\left(\bigcup_i A_i|x\right) = \lim_i \Gamma_V(A_i|x), \forall x \in E^S \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathscr{G}$$

Análogamente, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ en $\mathscr{G} \Rightarrow \bigcap_i A_i \in \mathscr{G}$.

Como $\mathscr{F}$ es la σ-álgebra generada por $\mathscr{F}_0$ y $\mathscr{F}_0$ es un álgebra, $\mathscr{F}$ coincide con la clase monótona generada por $\mathscr{F}$ (Theorem B pág. 27 de [Hal66]). Como $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{G}$ y $\mathscr{G}$ es clase monótona, tenemos $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \therefore \mathscr{F} = \mathscr{G}$

(b) está probada.

(c) sigue por la ecuación 4.97 y 4.98

(d) sigue por **(c)**, la Nota 4.3.1 y la definición de la topología $\mathscr{L}$.

Para completar la prueba de esta Proposición 4.3.1, probemos la Afirmación 4.3.2

Demostración: de la Afirmación 4.3.2

Sea $x \in E^S$. Pongamos $\tilde{\gamma} = \gamma^{(\Delta,x)}, \hat{\gamma} = \gamma^{(\Delta',x)}$

Como γ satisface la condición de Dobrushin, por **(d)** y **(e)** del Lema 4.3.2 tenemos que $\tilde{\gamma}$ satisface la condición de Dobrushin (y también $\hat{\gamma}$).

Por **(c)** del Lema 4.3.2 como $\#(\Delta)$ y $\#(\Delta')$ son finitos tenemos que

$$\gamma_\Delta(\cdot|x) \in \mathscr{G}(\tilde{\gamma}) \text{ y } \gamma_{\Delta'}(\cdot|x) \in \mathscr{G}(\hat{\gamma}) \tag{4.99}$$

Probemos ahora que

$$d_U\left(\tilde{\gamma}^\circ_{\{j\}}(\cdot|y), \hat{\gamma}^\circ_{\{j\}}(\cdot|y)\right) \leq 1_{\Delta'\setminus\Delta}(j) \tag{4.100}$$

para todo $j \in S$ e $y \in E^S$.

En efecto. Sean $j \in S$e $y \in E^S$ cualesquiera.

Caso $j \in \Delta$. Por definición de $\gamma^{(\Delta,x)}$ y $\gamma^{(\Delta',x)}$ tenemos que para todo $B \in \mathscr{F}$:

$$\tilde{\gamma}_{\{j\}}(B|y) = \gamma_{\{j\}\cap\Delta}\left(B|x_{\{j\}}y^{S\setminus\{j\}}\right) = \gamma_{\{j\}}(B|y)$$

pues $\gamma_{\{j\}}(B|\cdot)$ es $\mathscr{J}_{\{j\}}$-medible $\forall B \in \mathscr{F}$.

Análogamente, como $\Delta \subset \Delta'$ tenemos

$$\hat{\gamma}_{\{j\}}(B|y) = \gamma_{\{j\}}(B|y)$$

Luego:

$$\tilde{\gamma}^\circ_{\{j\}}(A|y) = \tilde{\gamma}_{\{j\}}\left(\sigma_j^{-1}(A)|y\right) = \hat{\gamma}_{\{j\}}\left(\sigma_j^{-1}(A)|y\right) = \hat{\gamma}^\circ_{\{j\}}(A|y), \forall A \in \mathscr{E}, \forall y \in E^S$$

De donde: $d_U\left(\tilde{\gamma}^{\circ}_{\{j\}}\left(\cdot|y\right),\hat{\gamma}^{\circ}_{\{j\}}\left(\cdot|y\right)\right)=0$, $\forall y\in E^S$.

Caso $j\notin\Delta'$.

Sean $y\in E^S, A\in\mathscr{E}$ cualesquiera $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^{\circ}_{\{j\}}\left(A|y\right) &= \tilde{\gamma}_{\{j\}}\left(\sigma_j^{-1}\left(A\right)|y\right)\\ &= \gamma_{\{j\}\cap\Delta}\left(\sigma_j^{-1}\left(A\right)|x_{\{j\}}y_{S\setminus j}\right)\\ &= \gamma_{\emptyset}\left(\sigma_j^{-1}\left(A\right)|x_{\{j\}}y_{\{j^c\}}\right)\\ &= 1_{\sigma_j^{-1}(A)}\left(x_{\{j\}}y_{\{j^c\}}\right)\\ &= 1_A\left(x_{\{j\}}\right)\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\hat{\gamma}^{\circ}_{\{j\}}\left(A|y\right)=1_A\left(x_{\{j\}}\right)$$

pues $\{j\}\cap\Delta'=\emptyset$.

Aquí también tenemos entonces que $d_U\left(\tilde{\gamma}^{\circ}_{\{j\}}\left(\cdot|y\right),\hat{\gamma}^{\circ}_{\{j\}}\left(\cdot|y\right)\right)=0$, $\forall y\in E^S$.

Como $d_U\left(\cdot,\cdot\right)$ es siempre ≤ 1, la ecuación 4.100 está probada.

Por las ecuaciones 4.99 y 4.100 aplicando la ecuación 4.66 del Teorema 4.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\Delta}\left(A|x\right)-\gamma_{\Delta'}\left(A|x\right)\right| &\leq \sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i\left(1_A\right)D_{\Gamma(\tilde{\gamma})}\left(i,j\right)\gamma_{\Delta'}\left(b_j|x\right)\\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in\Delta'\setminus\Delta}\delta_i\left(1_A\right)D_{\Gamma(\tilde{\gamma})}\left(i,j\right) \qquad (4.101)\end{aligned}$$

para todo $A\in\mathscr{F}_{\Lambda}$ con $\Lambda\in\mathscr{S}$.

Ahora, por **(e)** del Lema 4.3.2 tenemos que

$$D_{\Gamma(\tilde{\gamma})}\left(i,j\right)\leq D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right),\ \forall i,\forall j$$

Finalmente, sea $i\notin\Lambda$. Entonces para $A\in\mathscr{F}_{\Lambda}$:

$$\delta_i\left(1_A\right)=\sup\left\{\left|1_A\left(y\right)-1_A\left(y'\right)\right|\ /\ \left(y,y'\right)\in T\left(\{i\}^c\right)\right\} \qquad (4.102)$$

Como $A\in\mathscr{F}_{\Lambda},\exists C\in\mathscr{E}^{\Lambda}$ tal que

$$1_A=1_C\circ\sigma_{\Lambda}$$

Como $i \notin \Lambda, \{i\} \subset \Lambda^c \Rightarrow \{i\}^c \supset \Lambda$. Luego, si $(y, y') \in T(\{i\}^c)$ tenemos que $\sigma_{\{i\}^c}(y) = \sigma_{\{i\}^c}(y') \Rightarrow \sigma_\Lambda(y) = \sigma_\Lambda(y') \Rightarrow 1_A(y) = 1_A(y')$.

Luego, por la ecuación 4.102 tenemos que $\delta_i(1_A) = 0$

Luego, por la ecuación 4.101 tenemos que $\forall A \in \mathscr{F}_\Lambda$:

$$|\gamma_\Delta(A|x) - \gamma_{\Delta'}(A|x)| \leq \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Delta'\setminus\Delta} \delta_i(1_A) D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \quad (4.103)$$

$$\leq \sum_{i\in\Lambda} RD^i_{\Gamma(\gamma)}(\Delta) \quad (4.104)$$

La Afirmación 4.3.2 está probada y con ello la Proposición 4.3.1 está demostrada.

■

Proposición 4.3.2 *Continuación de la Proposición 4.3.1.*

Para cada $f : E^S \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in E^S$ ó f es acotada, sea $\Gamma_V(f) : E^S \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma_V(f)(x) = \int f(y)\Gamma_V(dy|x), \forall x \in E^S$$

para cada $V \subset S$.

Si $f \in \bar{\mathscr{L}}$, entonces $\Gamma_V(f) \in \bar{\mathscr{L}}$.

Demostración:

Sea $f \in \bar{\mathscr{L}}$. Como $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ es q. l., se tiene que $\gamma_\Delta(f) \in \bar{\mathscr{L}}, \forall \Delta \in \mathscr{S}(V)$.

Por **(d)** de la Proposición 4.3.1 y por la Proposición 3.1.2 tenemos que: dado $\epsilon > 0, \exists \Delta_0 \in \mathscr{S}$ tal que $\Delta_0 \subset \Delta \in \mathscr{S}(V) \Rightarrow \gamma_\Delta(\cdot|x) \in A(\Gamma_V(\cdot|x); f, \epsilon) \forall x \in E^S$

Equivalentemente:

$$\sup_{x\in E^S}\left|\int_{E^S} f(y)\gamma_\Delta(dy|x) - \int_{E^S} f(y)\Gamma_V(dy|x)\right| \leq \epsilon$$

o lo que es lo mismo

$$\sup_{x\in E^S}|\gamma_\Delta(f)(x) - \Gamma_V(f)(x)| \leq \epsilon$$

Esto es, $(\gamma_\Delta f)_{\Delta\in\mathscr{S}(V)}$ converge en $\bar{\mathscr{L}}$ a $\Gamma_V f \Rightarrow \Gamma_V f \in \bar{\mathscr{L}}$

■

Proposición 4.3.3 *Continuación de la Proposición 4.3.1.*
Si $V \subset W \subset S$*, entonces* $\Gamma_W \Gamma_V = \Gamma_W$*. Más precisamente,* $\forall A \in \mathscr{F}$ *y* $\forall x \in E^S$ *se cumple:*

$$\Gamma_W \Gamma_V (A|x) := \int_{E^S} \Gamma_V (A|y)\, \Gamma_W (dy|x) = \Gamma_W (A|x)$$

Demostración:
Bastará probar que

$$f \in \bar{\mathscr{L}} \Rightarrow \Gamma_W (\Gamma_V (f)) = \Gamma_W (f) \tag{4.105}$$

Por la Proposición 4.3.2:

$$f \in \bar{\mathscr{L}} \Rightarrow \Gamma_V(f) \in \bar{\mathscr{L}}$$

Por **(d)** de la Proposición 4.3.1

$$\gamma_\Delta (\Gamma_V (f)) \xrightarrow[\Delta \in \mathscr{S}(W)]{} \Gamma_W (\Gamma_V (f)) \text{ en } \mathscr{L}^\infty$$

Como $V \subset W, \mathscr{S}(V) = \{\Delta \cap V / \Delta \in \mathscr{S}(W)\}$, por **(d)** de la Proposición 4.3.1

$$\gamma_{\Delta \cap V} (f) \xrightarrow[\Delta \in \mathscr{S}(W)]{} \Gamma_V (f) \text{ en } \mathscr{L}^\infty$$

$\Rightarrow \gamma_\Delta (\gamma_{\Delta \cap V} (f)) - \gamma_\Delta (\Gamma_V (f)) \to 0$ en $\mathscr{L}^\infty$
Pero como γ es una especificación

$$\gamma_\Delta (\gamma_{\Delta \cap V} (f)) = \gamma_\Delta (f)\, , \forall \Delta \in \mathscr{S}(W)$$

Nuevamente, por **(d)** de la Proposición 4.3.1
$\gamma_\Delta (f) \xrightarrow[\Delta \in \mathscr{S}(W)]{} \Gamma_W (f)$ en $\mathscr{L}^\infty$
Entonces, dado $\epsilon > 0, \exists \Delta_0 / \Delta_0 \subset \Delta \in \mathscr{S}(W) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_W (\Gamma_V (f)) - \Gamma_W (f)\|_\infty &\leq \|\Gamma_W (\Gamma_V (f)) - \gamma_\Delta (\Gamma_V (f))\|_\infty \\ &+ \|\gamma_\Delta (\Gamma_V (f)) - \gamma_\Delta (\gamma_{\Delta \cap V} (f))\|_\infty \\ &+ \|\gamma_\Delta (f) - \Gamma_W (f)\|_\infty < \epsilon \end{aligned}$$

Luego $\Gamma_W (\Gamma_V (f)) = \Gamma_W (f)$ en $\mathscr{L}^\infty$, lo que prueba la proposición.

■

Proposición 4.3.4 *Continuación de la Proposición 4.3.1.*
$\Gamma_V(\cdot|x) \in \mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right)$ *para todo* $V \subset S$*, para todo* $x \in E^S$*.* *(*$\gamma^{(V,x)}$ *como en el Lema 4.3.2)*

Demostración:
Si $\#(V) < \infty$ sigue por el Lema 4.3.2 y porque $\Gamma_V(\cdot|x) = \gamma_V(\cdot|x)$ si $\#(V) < \infty$

Consideremos V infinito.

Debemos probar que

$$\Gamma_V(\cdot|x) \in \mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right)$$

Ahora, por definición tenemos:

$$\gamma^{(V,x)} = (\tilde{\gamma}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$$

con $\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y) = \gamma_{\Lambda\cap V}(A|x_\Lambda y_{\Lambda^c}), \forall A \in \mathscr{F}, \forall y \in E^S$.

Luego, debemos probar

$$\int_B \tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)\,\Gamma_V(dy|x) = \Gamma_V(A \cap B|x) \tag{4.106}$$

para todo $A \in \mathscr{F}, \forall B \in \mathscr{J}_\Lambda$

$$\begin{aligned}
\int_B \tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)\,\Gamma_V(dy|x) &= \int_{E^S} 1_B(y)\,\tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)\,\Gamma_V(dy|x)\\
&= \int_{E^S} 1_B(y)\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x_\Lambda y_{\Lambda^c})\,\Gamma_V(dy|x)\\
&= \int_{E^S} \gamma_{\Lambda\cap V}(B\cap A|x_\Lambda y_{\Lambda^c})\,\Gamma_V(y|dx) \text{ pues } \mathscr{J}_V \subset \mathscr{J}_{V\cap\Lambda} \qquad (4.107)
\end{aligned}$$

Sea $C = \left\{z \in E^S / \gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B|x_\Lambda z_{\Lambda^c}) \neq \gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B|z)\right\}$

Supongamos que

$$\Gamma_V(C|x) = 0 \tag{4.108}$$

Entonces por la ecuación 4.107

$$\begin{aligned}
\int_B \tilde{\gamma}_\Lambda(A|y)\,\Gamma_V(dy|x) &= \int \gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B|y)\,\Gamma_V(dy|x)\\
&= \Gamma_V\gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B|x)\\
&= \Gamma_V\Gamma_{\Lambda\cap V}(A\cap B|x)\\
&= \Gamma_V(A\cap B|x) \text{ por la Proposición 4.3.3}
\end{aligned}$$

De esta forma probamos la ecuación 4.106

Prueba de la ecuación 4.108.

$$C \subset D := \left\{z \in E^S / z_{\Lambda \cap V^c} \neq x_{\Lambda \cap V^c}\right\} \in \mathscr{J}_V$$

Supongamos que

$$\Gamma_V\left(A|x\right) = 1_A\left(x\right), \forall A \in \mathscr{J}_V \tag{4.109}$$

Entonces:

$$\Gamma_V\left(C|x\right) \leq \Gamma_V\left(D|x\right) = 1_D\left(x\right) = 0$$

Finalmente probaremos la ecuación 4.109

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}(V^c)$. Por **(d)** de la Proposición 4.3.1 tenemos

$$\Gamma_V\left(A|x\right) = \lim_{\Delta \in \mathscr{S}(V)} \gamma_\Delta\left(A|x\right), \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda$$

Como $\Delta \subset V, V^c \subset \Delta^c$ y como γ es una especificación, tenemos:

$$\gamma_\Delta\left(A|x\right) = 1_A\left(x\right), \qquad \forall \Delta \in \mathscr{S}(V)$$

para todo $A \in \mathscr{F}_{\Delta^c}$, en particular para todo $A \in \mathscr{F}_\Lambda$ pues $\mathscr{F}_\Lambda \subset \mathscr{F}_{V^c} \subset \mathscr{F}_{\Delta^c}$

Probamos entonces:

$$\Gamma_V\left(A|x\right) = 1_A\left(x\right), \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}(V^c) \tag{4.110}$$

Recordemos que $\mathscr{J}_V = \left\{\sigma_{V^c}^{-1}\left(B\right)/B \in \mathscr{E}^{V^c}\right\}$.

Sean μ y ν probabilidades sobre $\left(E^{V^c}, \mathscr{E}^{V^c}\right)$ dadas por:

$$\mu\left(B\right) = \Gamma_V\left(\sigma_{V^c}^{-1}\left(B\right)|x\right) \text{ y } \nu\left(B\right) = 1_{\sigma_{V^c}^{-1}(B)}\left(x\right)$$

Por la ecuación 4.110:

$$\mu|_{\mathscr{F}_\Lambda^{V^c}} = \nu|_{\mathscr{F}_\Lambda^{V^c}}, \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{S}(V^c)$$

con $\mathscr{F}_\Lambda^{V^c} := \sigma_{V^c,\Lambda}^{-1}\left(\mathscr{E}^\Lambda\right), \forall \Lambda \in \mathscr{S}(V^c)$.

Como $\mathscr{E}^{V^c}$ es la σ-álgebra sobre E^{V^c} generada por el álgebra $\bigcup_{\Lambda \in \mathscr{S}(V^c)} \mathscr{F}_\Lambda^{V^c}$, $\mu = \nu$, por el Teorema de Extensión (Theorem A, pág. 54 de [Hal66] Measure Theory).

Luego:

$$\Gamma_V\left(A|x\right) = 1_A\left(x\right), \forall A \in \mathscr{J}_V$$

■

Nota 4.3.2 *Por* **(d)** *y* **(e)** *del Lema 4.3.2 tenemos que* $\gamma^{(V,x)}$ *satisface la condición de Dobrushin pues* γ *así lo hace. Luego, por el Corolario 4.2.3, tenemos que* $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right)\right) \leq 1$*. Entonces, por la Proposición 4.3.4 tenemos*

$$\mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right) = \left\{\Gamma_V\left(\cdot|x\right)\right\}, \forall x \in E^S.$$

Corolario 4.3.1 *Theorem 8.7, pág. 142 de [Geo88], Gibbs Measures and Phase Transitions. Sea* $(E, \mathscr{E})$ *un especio de Borel estándar. Si* γ *es una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *que satisface la condición de Dobrushin, entonces* $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma\right)\right) = 1$

Demostración:
Por **(b)** del Lema 4.3.2, $\gamma^{(S,x)} = \gamma, \forall x \in E^S$. Luego: $\Gamma_S\left(\cdot|x\right) = \Gamma_S\left(\cdot|x'\right), \forall x, x' \in E^S$. Sea $\mu = \Gamma_S\left(\cdot|x\right)$ cualquiera sea $x \in E^S$. Por Nota 4.3.2 resulta $\mathscr{G}\left(\gamma\right) = \{\mu\}$.

$\blacksquare$

A seguir, resumimos los resultados anteriores desde la Proposición 4.3.1.

Teorema 4.3.1 *Sean* E *un espacio métrico separable y completo,* $\mathscr{E}$ *su* σ*-álgebra de Borel,* $S \subset \mathbb{Z}^2$ *infinito,* $\gamma = \left(\gamma_\Lambda\right)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *que satisface la condición de Dobrushin. Entonces:*

(a) *Existe* $\mu \in Prob\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *tal que* $\{\mu\} = \mathscr{G}\left(\gamma\right)$.

(b) *Para cada* $V \subset S$ *existe* $\Gamma_V : \mathscr{F} \times E^S \to \mathbb{R}$ *núcleo de probabilidad* $\mathscr{J}_V$*-propio que satisface:*

(b.1) *Para todo* $x \in E^S$

$$\mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right) = \left\{\Gamma_V\left(\cdot|x\right)\right\}$$

En particular:

$$\Gamma_S\left(\cdot|x\right) = \mu, \; \forall x \in E^S$$
$$\Gamma_V\left(\cdot|x\right) = \gamma_V\left(\cdot|x\right), \; \forall x \in E^S \text{ si } \#\left(V\right) < \infty.$$

(b.2) *Para cada* $\Lambda \in \mathscr{S}$ *y cada* $\Delta \in \mathscr{S}(V)$ *se cumple que:*

$$\sup\left\{\left|\gamma_\Delta\left(A|x\right) - \Gamma_V\left(A|x\right)\right| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, x \in E^S\right\} \leq \sum_{i \in \Lambda} R\mathscr{D}^i_{\Gamma(\gamma)}\left(\Delta\right)$$

En particular: para todo Λ *y* Δ *en* $\mathscr{S}$ *se tiene:*

$$\sup\left\{\left|\gamma_\Delta\left(A|x\right) - \mu\left(A\right)\right| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, x \in E^S\right\} \leq \sum_{i \in \Lambda} R\mathscr{D}^i_{\Gamma(\gamma)}\left(\Delta\right)$$

(b.3) $(\gamma_\Delta(\cdot|x))_{\Delta\in\mathscr{S}(V)}$ *converge a* $\Gamma_V(\cdot|x)$ *en* $\mathscr{P}\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ *uniformemente en* $x\in E^S$ *con respecto a la topología* $\mathscr{L}$.

(b.4) $V\subset W\subset S\Rightarrow\Gamma_W\Gamma_V=\Gamma_W$. *En particular:* $\mu\Gamma_V=\mu$, $\forall V\subset S$.

(b.5) $\Gamma_V(f)\in\bar{\mathscr{L}}$ *si* $f\in\mathscr{L}$.

Demostración:
Sólo nos falta probar:

(1) Para cada $A\in\mathscr{E}^S,\Gamma_V(A|\cdot)$ es $\mathscr{J}_V$-medible.

(2) $B\in\mathscr{J}_V\Rightarrow\Gamma_V(B|x)=1_B(x)$ para todo $x\in E^S$.

Veamos **(1)**
Sean $x,x'\in E^S$ tales que $\sigma_{V^c}(x)=\sigma_{V^c}(x')$.

Afirmación 4.3.3 $\gamma^{(V,x)}=\gamma^{(V,x')}$.

Demostración:
Sea $\Lambda\in\mathscr{S}$ cualquiera. Debemos ver que

$$\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x_\Lambda y_{\Lambda^c})=\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x'_\Lambda y_{\Lambda^c}) \tag{4.111}$$

con $A\in\mathscr{F}$ e $y\in E^S$ cualesquiera.

Como γ es una especificación, $\gamma_{\Lambda\cap V}(A|\cdot)$ es $\mathscr{J}_{(\Lambda\cap V)}$-medible $\Rightarrow\exists\phi_{(\Lambda\cap V)^c}:E^{(\Lambda\cap V)^c}\to\mathbb{R}$ medible (con respecto a $\mathscr{E}^{(\Lambda\cap V)^c}$) tal que

$$\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x_\Lambda y_{\Lambda^c})=\phi_{(\Lambda\cap V)^c}\left(\sigma_{(\Lambda\cap V)^c}(x_\Lambda y_{\Lambda^c})\right)=\phi_{(\Lambda\cap V)^c}(x_{\Lambda\cap V^c}y_{\Lambda^c})$$

$$\gamma_{\Lambda\cap V}(A|x'_\Lambda y_{\Lambda^c})=\phi_{(\Lambda\cap V)^c}(x'_{\Lambda\cap V^c}y_{\Lambda^c})$$

Como $x_{V^c}=x'_{V^c}$ tenemos que la ecuación 4.111 se cumple.

$\blacksquare$

Por la Afirmación 4.3.3 y la Nota 4.3.2 tenemos

$$\{\Gamma_V(\cdot|x)\}=\mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x)}\right)=\mathscr{G}\left(\gamma^{(V,x')}\right)=\{\Gamma_V(\cdot|x')\}$$

Esto es,

$$\Gamma_V(\cdot|x)=\Gamma_V(\cdot|x') \tag{4.112}$$

Sea $A \in \mathscr{E}^S$. Sea $x^\circ \in E^S$ fijo.

Sea $\phi_{V^c} : E^{V^c} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_{V^c}(\xi) = \Gamma_V(A|x^\circ_V \xi), \forall \xi \in V^c$

Por **(b)** de la Proposición 4.3.1 tenemos que ϕ_{V^c} es $\mathscr{E}^{V^c}$-medible.

Sea $x \in E^S$ cualquiera $\Rightarrow \sigma_{V^c}(x) = \sigma_{V^c}(x^\circ_V x_{V^c}) \Rightarrow$ por la ecuaciónn 4.112 tenemos que $\Gamma_V(A|x) = \Gamma_V(A|x^\circ_V x_{V^c}) = \phi_{V^c}(x_{V^c}) = (\phi_{V^c} \circ \sigma_{V^c})(x)$

Luego, $\Gamma_V(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}_{V^c}$-medible. Por lo tanto, **(2)** ha sido probado al probar 4.112 de la demostración de la Proposición 4.3.4.

■

Nota 4.3.3 *Sea E un espacio de Borel estándar, $\mathscr{E}$ su σ-álgebra de Borel, $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que satisface la condición D.*

Por **(b.1)**, $\Gamma_V : \mathscr{F} \times E^S \to \mathbb{R}$ satisfaciendo el Teorema 4.3.1 es única, $\forall V \subset S$. Luego, pondremos $\gamma_V = \Gamma_V, \forall V \subset S$. Diremos que $(\gamma_V)_{V \subset S}$ es la extensión de γ a todo $\mathscr{P}(S)$.

Ejemplo 4.3.1 *Continuación del Ejemplo 4.1.8.*

Sean E un espacio métrico separable y completo, $\mathscr{E}$ su σ-álgebra de Borel. S y $\mathscr{H}$ como en el Ejemplo 4.1.8.

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ se define $\partial\Lambda := \left(\bigcup_{s \in \Lambda} V_s^{\mathscr{H}}\right) \setminus \Lambda$, el entorno de Λ.

Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ que es $\mathbb{G}$-markoviana, donde $\mathbb{G} = (S, \mathscr{V}_{\mathscr{H}})$. Esto es:

$$A \in \mathscr{F}_\Lambda \Rightarrow \gamma_\Lambda(A|\cdot) \text{ es } \mathscr{F}_{\partial\Lambda} - \text{medible}$$

para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$.

Supongamos que $\mathscr{H}$ es localmente finita; esto es:

$$\Lambda \in \mathscr{S} \Rightarrow \partial\Lambda \in \mathscr{S} \tag{4.113}$$

Afirmación 4.3.4 γ *es quasi-local.*

Demostración:

Bastará ver que si $\Delta \in \mathscr{S}$, entonces:

$$f \in \mathscr{L} \Rightarrow \gamma_\Delta(f) \in \bar{\mathscr{L}}$$

Por la Proposición 2.2.1 será suficiente ver que:

$$O(\gamma_\Delta(f)) = 0 \tag{4.114}$$

Como f es local, $\exists\Lambda_1 \in \mathscr{S}$ y $\phi_1 : E^{\Lambda_1} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{E}^{\Lambda_1}$- medible tales que $f = \phi_1 \circ \sigma_{\Lambda_1}$

Por la ecuación 4.113 tenemos que $\partial\Delta \in \mathscr{S}$.

Luego, $\exists\Lambda \in \mathscr{S}$ tal que $(\Lambda_1 \cup \partial\Delta) \subset \Lambda$.

Sea $(x, x') \in T(\Lambda)$. Como para todo $A \in \mathscr{F}_\Delta$, $\gamma_\Delta(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}_{\partial\Delta}$-medible y $\partial\Delta \subset \Lambda$, tenemos que

$$\gamma^\circ_\Delta(B|x) = \gamma^\circ_\Delta(B|x'), \qquad \forall B \in \mathscr{E}^\Delta$$

(γ°_Δ como en Lema 4.2.1)

Luego

$$\begin{aligned}
\gamma_\Delta(f)(x) - \gamma_\Delta(f)(x') &= \int_{E^\Delta} \left(f(\xi x_{\Delta^c}) - f(\xi x'_{\Delta^c})\right)\gamma^\circ_\Delta(d\xi|x) \\
&= \int_{E^\Delta} \left((\phi_1 \circ \sigma_{\Lambda_1})(\xi x_{\Delta^c}) - (\phi_1 \circ \sigma_{\Lambda_1})(\xi x'_{\Delta^c})\right)\gamma^\circ_\Delta(d\xi|x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues $\sigma_{\Lambda_1}(\xi x_{\Delta^c}) = \sigma_{\Lambda_1}(\xi x'_{\Delta^c})$ pues $\Lambda_1 \subset \Lambda$ y $x_\Lambda = x'_\Lambda$.

Probamos así que $O_\Lambda(\gamma_\Delta f) = 0$ para todo $\Lambda \in \mathscr{S}$ tal que $(\Lambda_1 \cup \partial\Lambda) \subset \Lambda$. Luego

$$O(\gamma_\Delta f) = \inf_{\Lambda \in \mathscr{S}} O_\Lambda(\gamma_\Delta f) = 0,$$

lo que prueba la ecuación 4.114

■

Supongamos ahora que γ satisface la condición de Dobrushin.

Sea $\bar{\gamma} = (\gamma_V)_{V \in \mathscr{P}(S)}$ la extensión de γ a todo $\mathscr{P}(S)$.

Afirmación 4.3.5 *$\bar{\gamma}$ es $\mathbb{G}$-markoviana. Más precisamente $V \subset S, A \in \mathscr{F}_V \Rightarrow \gamma_V(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}_{\partial V}$-medible*

Demostración:

Sea $\xi \in E^V$.

Sea $\Lambda \in \mathscr{S}(V)$ y $A \in \mathscr{F}_\Lambda$.

Por el Teorema 4.3.1 tenemos que $\gamma_V(A|\cdot)$ es $\mathscr{F}_{V^c}$-medible. Por **(b.2)** del Teorema 4.3.1 tenemos que, para todo $x \in E^S$:

$$\gamma_V(A|x) = \gamma_V(A|\xi x_{V^c}) = \lim_{\Delta \in \mathscr{S}(V)} \gamma_\Delta(A|\xi x_{V^c})$$

Sea ahora $\Delta \in \mathscr{S}(V)$ tal que $\Lambda \subset \Delta \Rightarrow A \in \mathscr{F}_\Delta$ y por ser γ $\mathbb{G}$-markoviana, $\gamma_\Delta (A|\cdot)$ es $\mathscr{F}_{\partial\Delta}$-medible $\Rightarrow \exists \phi_A : E^{\partial\Delta} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{E}^{\partial\Delta}$-medible tal que:

$$\gamma_\Delta (A|\xi x_{V^c}) = \phi_A (\xi_{\partial\Delta\cap V} x_{\partial\Delta\cap V^c})$$

Ahora bien, como $\Delta \subset V$ es fácil de ver que $(\partial\Delta \cap V^c) \subset \partial V$.

Sea ahora $(x, x') \in T(\partial V)$. Entonces, para

$$\gamma_\Delta (A|\xi x_{V^c}) = \phi_A (\xi_{\partial\Delta\cap V} x_{\partial\Delta\cap V^c}) = \phi_A (\xi_{\partial\Delta\cap V} x'_{\partial\Delta\cap V^c}) = \gamma_\Delta (A|\xi x'_{V^c})$$

Luego,

$$\gamma_V (A|x) = \lim_{\Delta\in\mathscr{S}\cap V} \gamma_\Delta (A|\xi x_{V^c}) = \lim_{\Delta\in\mathscr{S}\cap V} \gamma_\Delta (A|\xi x'_{V^c}) = \gamma_V (A|x') \qquad , \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}\cap V$$

Hemos entonces probado que $\gamma_V (\cdot|x)$ y $\gamma_V (\cdot|x')$ coinciden, para todo x, x' en E^S tal que $x_{\partial V} = x'_{\partial V}$, sobre $\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}\cap V} F_\Lambda$ que es un álgebra generadora de la σ-álgebra $\mathscr{F}_V$, luego $\gamma_V(A|x) = \gamma_V(A|x'), \forall A \in \mathscr{F}_V$

La Afirmación 4.3.5 queda probada.

■

Notación 4.3.2 *Sea $(Y, \mathscr{Y})$ un espacio medible, $\mathscr{B} \subset \mathscr{Y}$ una σ-álgebra de Y. Sean $A \in \mathscr{Y}, \mu \in \mathscr{P}(Y, \mathscr{Y})$.*

Cuando $g : Y \to \mathbb{R}$ es una función, pondremos

$$g \in \mu (A|\mathscr{B})$$

si g es $\mathscr{B}$-medible y $\int_B g(x)\, d\mu(x) = \mu(A \cap B), \forall B \in \mathscr{B}$. Esto es, "$g$ es una versión de la probabilidad condicional de A dada $\mathscr{B}$ con respecto a μ".

Sabemos entonces que si g_1 y g_2 están en $\mu (A|\mathscr{B})$ entonces $g_1 = g_2 \quad \mu$.c.s.

Si $\mathscr{C}$ es otra σ-álgebra de $\mathscr{Y}$, pondremos $\mu (A|\mathscr{B}) \subset \mu (A|\mathscr{C})$ en el sentido de que si $g \in \mu (A|\mathscr{B})$ entonces $\exists h \in \mu (A|\mathscr{C})$ tal que $g = h \quad \mu$.c.s.

Diremos que $\mu (A|\mathscr{B}) = \mu (A|\mathscr{C})$ si y sólo si $\mu (A|\mathscr{B}) \subset \mu (A|\mathscr{C})$ y $\mu (A|\mathscr{C}) \subset \mu (A|\mathscr{B})$

Afirmación 4.3.6 *Sea $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$. Entonces, para todo $A \in \mathscr{F}_V$ y todo $V \subset S$ se cumple que*

$$\mu (A|\mathscr{F}_{V^c}) = \mu (A|\mathscr{F}_{\partial V})$$

Esto es, "μ satisface la propiedad de Markov global". (si se cumple sólo para todo $V \in \mathscr{S}$, se dice que μ satisface la propiedad de Markov local)

Demostración:

Por **(b.4)** del Teorema 4.3.1 tenemos que $\gamma_V(A|\cdot) \in \mu(A|\mathscr{F}_{V^c})$, luego si $g \in \mu(A|\mathscr{F}_{V^c})$, $g = \gamma_V(A|\cdot)$ $\mu.c.s.$, cualquiera sea $A \in \mathscr{E}^S$. Por la Afirmación 4.3.5, si $A \in \mathscr{F}_V$ tenemos que $\gamma_V(A|\cdot) \in \mu(A|\mathscr{F}_{\partial V})$. Luego $\mu(A|\mathscr{F}_{V^c}) \subset \mu(A|\mathscr{F}_{\partial V})$, para $A \in \mathscr{F}_V$.

Para $A \in \mathscr{F}_V$, sea $h \in \mu(A|\mathscr{F}_{\partial V})$, luego $h = \gamma_V(A|\cdot)$ $\mu.c.s.$. Sea $D = \{x/h(x) \neq \gamma_V(A|x)\}$. Dado $B \in \mathscr{F}_{V^c}$, se cumple :

$$\begin{aligned}
\int_B h(x)\, d\mu(x) &= \int_{B\cap D^c} h(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{B\cap D^c} \gamma_V(A|x)\, d\mu(x) \\
&= \int_B \gamma_V(A|x)\, d\mu(x) \\
&= \mu(A\cap B).
\end{aligned}$$

Como además h es $\mathscr{F}_{\partial V}$-medible, es $\mathscr{F}_{V^c}$-medible, entonces $h \in \mu(A|\mathscr{F}_{V^c})$. Luego $\mu(A|\mathscr{F}_{\partial V}) \subset \mu(A|\mathscr{F}_{V^c})$, para $A \in \mathscr{F}_V$.

La Afirmación 4.3.6 queda probada.

■

Proposición 4.3.5 *Sea $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Sea $s : S\times S \to \mathbb{R}$ una pseudométrica sobre S. Sea*

$$c_s(\gamma) := \sup_{i\in S} \sum_{j\in S} \gamma_{i,j} e^{s(i,j)}$$

Supongamos:

$$c_s(\gamma) < 1 \tag{4.115}$$

Entonces, para todo $(\Lambda, \Delta) \in \mathscr{S}\times\mathscr{S}$ se cumple:

$$\mathscr{D}(\Lambda,\Delta,\gamma) := \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S\setminus\Delta} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \leq \#(\Lambda)\left(1 - c_s(\gamma)\right)^{-1} \exp\left(-s(\Lambda, S\setminus\Delta)\right)$$

Demostración:

Supongamos cierta la siguiente:

Afirmación 4.3.7 *Se cumple:*

$$\sup_{i\in S}\sum_{j\in S} e^{s(i,j)} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \leq \frac{1}{1 - c_s(\gamma)} \tag{4.116}$$

Sea entonces $(\Lambda, \Delta) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}$. Usando 4.116 tenemos:

$$\begin{aligned}
e^{s(\Lambda, S\setminus\Delta)}\mathscr{D}(\Lambda,\Delta,\gamma) &= e^{s(\Lambda,S\setminus\Delta)}\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S\setminus\Delta} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S\setminus\Delta} e^{s(\Lambda,S\setminus\Delta)} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \\
&\leq \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S\setminus\Delta} e^{s(i,j)} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \\
&\leq \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S} e^{s(i,j)} D_{\Gamma(\gamma)}(i,j) \\
&\leq \sum_{i\in\Lambda}\frac{1}{1-c_s(\gamma)} \\
&= \#(\Lambda)\left(1-c_s(\gamma)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

que prueba la Proposición 4.3.5

■

Demostración: de la Afirmación 4.3.7.
Sea $i_0 \in S$ cualquiera.

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S} e^{s(i_0,j)} D_{\Gamma(\gamma)}(i_0,j) &= \sum_{j\in S}\sum_{n=0}^{\infty} e^{s(i_0,j)}\Gamma(\gamma)^n(i_0,j) \qquad (4.117)\\
&= \sum_{j\in S} e^{s(i_0,j)}\Gamma(\gamma)^0(i_0,j) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in S} e^{s(i_0,j)}\Gamma(\gamma)^n(i_0,j)
\end{aligned}$$

Ahora, sea $u \in S, v \in S, k \geq 2$, entonces:

$$\begin{aligned}
e^{s(u,v)}\Gamma(\gamma)^k(u,v) &= \sum_{t\in S} e^{s(u,v)}\Gamma(\gamma)^{k-1}(u,t)\,\Gamma(\gamma)(t,v) \\
&\leq \sum_{t\in S} e^{s(u,t)+s(t,v)}\Gamma(\gamma)^{k-1}(u,t)\,\Gamma(\gamma)(t,v) \quad \text{pues } s \text{ es pseudométrica.} \\
&= \sum_{t\in S} e^{s(u,t)}\Gamma(\gamma)^{k-1}(u,t)\, e^{s(t,v)}\Gamma(\gamma)(t,v) \qquad (4.118)
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación 4.118 reiteradas veces en forma conveniente, tenemos para todo $n \geq 1$:

$$\sum_{j\in S} e^{s(i_0,j)}\Gamma^n(\gamma)(i_0,j) \leq \sum_{i_1\in S}\sum_{i_2\in S}\cdots\sum_{i_n\in S}\prod_{k=1}^{n} e^{s(i_{k-1},i_k)}\Gamma(\gamma)(i_{k-1},i_k) \quad (4.119)$$

Luego, de la ecuación 4.117

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S} e^{s(i_0,j)}D_{\Gamma(\gamma)}(i_0,j) &\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1\in S}\sum_{i_2\in S}\cdots\sum_{i_n\in S}\prod_{k=1}^{n} e^{s(i_{k-1},i_k)}\\ &\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1\in S}\sum_{i_2\in S}\cdots\sum_{i_{n-1}\in S}\prod_{k=1}^{n-1} e^{s(i_{k-1},i_k)}c_s(\gamma)\\ &\leq \ldots \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_s(\gamma)^n = \frac{1}{1-c_s(\gamma)}.\end{aligned}$$

La Afirmación 4.3.7 está probada.

■

Proposición 4.3.6 *Sean: $s: S\times S\to\mathbb{R}$ una pseudométrica, $\lambda\in\mathscr{M}(E,\mathscr{E}),\Phi=(\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial λ-admisible. Supongamos que:*

$$\sup_{i\in S}\sum_{A\in\mathscr{S}\cap i} e^{s(A)}(\#(A)-1)\,\delta(\Phi_A) < 2. \quad (4.120)$$

donde $s(A) := \max(\{s(i,j)/i,j\in A\})$.

Entonces

$$c_s\left(\gamma^\Phi\right) < 1$$

Luego, por la Proposición 4.3.5, tenemos:

$$\mathscr{D}\left(\Lambda,\Delta,\gamma^\Phi\right) \leq \#(\Lambda)\left(1-c_s\left(\gamma^\Phi\right)\right)^{-1}\exp\left(-s(\Lambda,S\setminus\Delta)\right)$$

Demostración:

Por lo visto en la prueba de la Proposición 4.1.8, particularmente la Afirmación 4.1.8, tenemos que:

$$\gamma^\Phi_{i,j} := \sup\left(\left\{d_U\left(\gamma^0_i(\cdot|x),\gamma^0_i(\cdot|x')\right)/(x,x')\in T(\{j\}^c)\right\}\right) \leq \frac{1}{2}\sum_{A\supset\{i,j\}}\delta(\Phi_A)$$

siendo $i\neq j$ en S. Luego, para cada $i\in S$:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}\gamma^{\Phi}_{i,j}e^{s(i,j)} &\leq \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}\sum_{A\supset\{i,j\}} e^{s(i,j)}\delta\left(\Phi_A\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{A\in\mathscr{S}\cap i}\sum_{\substack{j\in A\\ j\neq i}} e^{s(i,j)}\delta\left(\Phi_A\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{A\in\mathscr{S}\cap i} e^{s(A)}\left(\#\left(A\right)-1\right)\delta\left(\Phi_A\right)\end{aligned}$$

Aplicando entonces la ecuación 4.115, probamos que $c_s\left(\gamma^{\Phi}\right)<1$.

$\blacksquare$

Definición 4.3.1 *Sean:* $S=\mathbb{Z}^2;\gamma=\left(\gamma_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$*; para cada* $i\in\mathscr{S}$ *sea* $\Theta_i:E^S\to E^S$ *como en el Ejemplo 2.1.5, es decir:*

$$\Theta_i\left(x\right)\left(j\right)=x\left(j-i\right),\qquad \forall j\in S,\forall x\in E^S.$$

Se dice que γ *es invariante por traslaciones si:*

$$\gamma_{\Lambda+j}\left(\Theta_j\left(A\right)|\Theta_j\left(x\right)\right)=\gamma_\Lambda\left(A|x\right),\ \forall\Lambda\in\mathscr{S},\ j\in S, A\in\mathscr{F}\ \text{y}\ x\in E^S.$$

Proposición 4.3.7 *Sean:* $S=\mathbb{Z}^2;d:S\times S\to\mathbb{R}$ *la métrica euclídea;* $\gamma=\left(\gamma_\Lambda\right)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ *invariante por traslaciones que satisface la condición D. Supongamos que:*

$$\exists\, t>0\ \text{ tal que } \sum_{j\in S}e^{t|j|}\gamma_{0,j}<\infty \qquad (4.121)$$

($0=(0,0)\in S$*). Entonces existen* $0<c,C<\infty$ *tales que para todo* $(\Lambda,\Delta)\in\mathscr{S}\times\mathscr{S}$ *se cumple:*

$$\mathscr{D}\left(\Lambda,\Delta,\gamma\right)\leq C\#\left(\Lambda\right)\exp\left(-c\,d\left(\Lambda,S\setminus\Delta\right)\right)$$

Luego: $\mathscr{D}\left(\Lambda,\Delta,\gamma\right)\underset{\Delta\uparrow S}{\longrightarrow}0,\forall\Lambda\in\mathscr{S}$.

Demostración:

Afirmación 4.3.8 $\gamma^0_i\left(A|x\right)=\gamma^0_0\left(A|\Theta_{-i}\left(x\right)\right)$ *para todo* $i\in S, A\in\mathscr{E}$ *y* $x\in E^S$.

Demostración:

Una cuenta fácil prueba que

$$\Theta_{-i}\left(\sigma_i^{-1}(A)\right) = \sigma_0^{-1}(A).$$

Luego, por ser γ invariante por traslaciones:

$$\begin{aligned}
\gamma_i^0(A|x) &= \gamma_i\left(\sigma_i^{-1}(A)|x\right) \\
&= \gamma_0\left(\Theta_{-i}\left(\sigma_i^{-1}(A)\right)|\Theta_{-i}(x)\right) \\
&= \gamma_0\left(\sigma_0^{-1}(A)|\Theta_{-i}(x)\right) \\
&= \gamma_0^0(A|\Theta_{-i}(x))
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Afirmación 4.3.9 *$(x,x') \in T(\{j\}^c) \Leftrightarrow (\Theta_{-i}(x), \Theta_{-i}(x')) \in T(\{\Theta_i(j)\}^c)$, donde $\Theta_i(j) = j - i$.*

Demostración:

$(x,x') \in T(\{j\}^c) \Leftrightarrow x(k) = x'(k),\ \forall k \neq j \Leftrightarrow x(k+i) = x'(k+i),\ \forall k + i \neq j \Leftrightarrow \Theta_{-i}(x)(k) = \Theta_{-i}(x')(k),\ \forall k \neq j - i \Leftrightarrow, \forall k \neq \Theta_i(j)$.

De las Afirmaciones 4.3.8 y 4.3.9 tenemos:

$d_U(\gamma_i^0(A|x), \gamma_i^0(A|x')) = d_U(\gamma_0^0(A|\Theta_{-i}(x)), \gamma_0^0(A|\Theta_{-i}(x')))$ y $(x,x') \in T(\{j\}^c) \Leftrightarrow (\Theta_{-i}(x), \Theta_{-i}(x')) \in T(\{\Theta_i(j)\}^c)$.

Luego:

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{0,\Theta_i(j)}$$

De donde, teniendo en cuenta que Θ_i es una biyección de S sobre si mismo, tenemos:

$$\sum_{j\in S}\gamma_{i,j} = \sum_{j\in S}\gamma_{0,j}$$

Por lo tanto:

$$\alpha(\gamma) = \sup_{i\in S}\sum_{j\in S}\gamma_{i,j} = \sum_{j\in S}\gamma_{0,j}$$

Como γ cumple la condición D, se tiene entonces

$$\sum_{j\in S}\gamma_{0,j} < 1 \tag{4.122}$$

Por la ecuación 4.121 tenemos, $\forall 0 < c < t$:

$$\sum_{j\in S} e^{c|j|}\gamma_{0,j} = \sum_{j\in S} e^{\frac{c}{t}t|j|}\gamma_{0,j} \leq \sum_{j\in S} e^{t|j|}\gamma_{0,j} < \infty$$

y como $e^{c|j|}\gamma_{0,j} \underset{c\to 0}{\longrightarrow} \gamma_{0,j}$, $\forall j \in S$, por el Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada

$$\sum_{j\in S} e^{c|j|}\gamma_{0,j} \underset{c\downarrow 0}{\longrightarrow} \sum_{j\in S}\gamma_{0,j}.$$

Por la ecuación 4.122, tenemos entonces que $\exists 0 < c < t$ tal que

$$c = \left(1 - \sum_{j\in S} e^{c|j|}\gamma_{0,j}\right)^{-1} > 0$$

Sea ahora $s : S \times S$ dada por:

$$s\,(i,j) = c\,|i-j|\,.$$

Entonces s es una métrica sobre S y

$$c_s\,(\gamma) = \sup_{i\in S}\sum_{j\in S} e^{s(i,j)}\gamma_{i,j} = \sum_{j\in S} e^{c|j|}\gamma_{0,j} < 1$$

Luego, por la Proposición 4.3.5 tenemos:

$$\mathscr{D}\,(\Lambda,\Delta,\gamma) \leq \#\,(\Lambda)\,C\exp\left(-c\,d\,(\Lambda, S\setminus\Delta)\right)$$

■

Definición 4.3.2 *Sean: $S = \mathbb{Z}^2, \gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$. Se dice que γ es de rango finito si para cada $i \in S, \exists\Lambda_i \in \mathscr{S}$ tal que $i \in \Lambda_i$ y $\gamma_{i,j} = 0$ si $j \notin \Lambda_i$.*

Nota 4.3.4 *Sean: $S = \mathbb{Z}^2, \gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ una especificación sobre $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ invariante por traslaciones que satisface la condición D y es de rango finito entonces es inmediato que la satisface la ecuación 4.121 de la Proposición 4.3.7 para cualquier $t > 0$.*

Proposición 4.3.8 *Sean: $S = \mathbb{Z}, \lambda \in \mathscr{M}\,(E,\mathscr{E})\,, \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ un potencial λ-admisible invariante por traslaciones (esto es: $\Phi_{\Lambda+j}\circ\Theta_j = \Phi_\Lambda\,, \forall\Lambda \in \mathscr{S}, \forall j \in S$).*

Entonces γ^Φ es una especificación sobre $\left(E^S,\mathscr{F}\right)$ invariante por traslaciones.

Demostración:
Sean $A \in \mathscr{F}, x \in E^S$.
Debemos probar

$$\gamma_{\Lambda+j}^{\Phi}\left(\Theta_j\left(A\right)|\Theta_j\left(x\right)\right) = \gamma_{\Lambda}^{\Phi}\left(A|x\right), \ \forall \Lambda \in \mathscr{S}, \forall j \in S \tag{4.123}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \gamma_{\Lambda+j}^{\Phi}\left(\Theta_j\left(A\right)|\Theta_j\left(x\right)\right) &= \int_{E^S} 1_{\Theta_j(A)}\left(w\right)\gamma_{\Lambda+j}^{\Phi}\left(dw|\Theta_j\left(x\right)\right) &(4.124)\\ &= \int_{E^{\Lambda+j}} 1_{\Theta_j(A)}\left(\xi\left(\Theta_j\left(x\right)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right) &(4.125)\\ &\qquad \rho_{\Lambda+j}^{\Phi}\left(\xi\left(\Theta_j\left(x\right)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right)\lambda^{\Lambda+j}\left(d\xi\right) \end{aligned}$$

Usando resultados bien conocidos de Teoría de la Medida se puede ver que:

$g : E^{\Lambda+j} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{E}^{\Lambda+j}$-medible y $\lambda^{\Lambda+j}$-integrable entonces $g \circ I_{\Lambda,j}$ es $\mathscr{E}^{\Lambda}$-medible y λ^{Λ}-integrable, donde $I_{\Lambda,j} : E^{\Lambda} \to E^{\Lambda+j}$ es definida por

$$I_{\Lambda,j}\left(\varsigma\right)\left(i+j\right) = \varsigma\left(i\right), \qquad \forall i \in \Lambda, \forall \varsigma \in E^{\Lambda}$$

Además

$$\int_{E^{\Lambda+j}} g\left(\xi\right)\lambda^{\Lambda+j}\left(d\xi\right) = \int_{E^{\Lambda}} g\left(I_{\Lambda,j}\left(\varsigma\right)\right)\lambda^{\Lambda}\left(d\varsigma\right) \tag{4.126}$$

Luego:
La ecuación 4.124

$$= \int_{E^{\Lambda}} 1_{\Theta_j(A)}\left(I_{\Lambda,j}\left(\varsigma\right)\left(\Theta_j\left(x\right)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right)\rho_{\Lambda+j}^{\Phi}\left(I_{\Lambda,j}\left(\varsigma\right)\left(\Theta_j\left(x\right)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right)\lambda^{\Lambda}\left(d\varsigma\right) \tag{4.127}$$

Ahora:
Sea $z = I_{\Lambda,j}\left(\varsigma\right)\left(\Theta_j\left(x\right)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}$ con $\varsigma \in E^{\Lambda}$, entonces

$$z \in \Theta_j\left(A\right) \Leftrightarrow \Theta_{-j}\left(z\right) \in A \tag{4.128}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} i \in \Lambda &\Rightarrow \Theta_{-j}\left(z\right)\left(i\right) = z\left(i+j\right) = I_{\Lambda,j}\left(\varsigma\right)\left(i+j\right) = \varsigma\left(i\right)\\ i \notin \Lambda &\Rightarrow \Theta_{-j}\left(z\right)\left(i\right) = z\left(i+j\right) = \Theta_j\left(x\right)\left(i+j\right) = x\left(i+j-j\right) = x\left(i\right) \end{aligned}$$

Luego, por la expresión 4.128:

$$I_{\Lambda,j}(\varsigma)\left(\Theta_j(x)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)} \in \Theta_j(A) \Leftrightarrow \varsigma x_{S\setminus\Lambda} \in A$$

Por lo tanto

$$1_{\Theta_j(A)}\left(I_{\Lambda,j}(\varsigma)\left(\Theta_j(x)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right) = 1_A\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right), \qquad \varsigma \in E^{\Lambda}. \tag{4.129}$$

Por otra parte:

$$\rho^{\Phi}_{\Lambda+j}\left(I_{\Lambda,j}(\varsigma)\left(\Theta_j(x)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right) = \rho^{\Phi}_{\Lambda+j}(z) = \frac{h^{\Phi}_{\Lambda+j}(z)}{Z^{\Phi}_{\Lambda+j}(z)} \tag{4.130}$$

Ahora:
$h^{\Phi}_{\Lambda+j}(z) = \exp\left(-H^{\Phi}_{\Lambda+j}(z)\right)$, y

$$\begin{aligned}
H^{\Phi}_{\Lambda+j}(z) &= \sum_{\Delta\in\mathscr{S}\cap(\Lambda+j)} \Phi_{\Delta}(z) \\
&= \sum_{(\Delta-j)\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_{\Delta}(z) \\
&= \sum_{(\Delta-j)\in\mathscr{S}\cap\Lambda} \Phi_{\Delta-j}\left(\Theta_{-j}(z)\right) \\
&= H^{\Phi}_{\Lambda}\left(\Theta_{-j}(z)\right) \\
&= H^{\Phi}_{\Lambda}\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right)
\end{aligned}$$

Luego (usando nuevamente la ecuación 4.126), de la ecuación 4.130:

$$\frac{h^{\Phi}_{\Lambda}(z)}{Z^{\Phi}_{\Lambda}(z)} = \frac{h^{\Phi}_{\Lambda}\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right)}{Z^{\Phi}_{\Lambda}\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right)} = \rho^{\Phi}_{\Lambda}\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right)$$

Esto es:

$$\rho^{\Phi}_{\Lambda+j}\left(I_{\Lambda,j}(\varsigma)\left(\Theta_j(x)\right)_{S\setminus(\Lambda+j)}\right) \equiv \rho^{\Phi}_{\Lambda}\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right) \qquad \varsigma \in E^{\Lambda}$$

De aquí y por la ecuación 4.129, tenemos:
la ecuación 4.127 $= \int_{E^{\Lambda}} 1_A\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right)\rho^{\Phi}_{\Lambda}\left(\varsigma x_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^{\Lambda}(d\varsigma)$
La ecuación 4.123 queda probado.

■

Proposición 4.3.9 *Sean: $S = \mathbb{Z}^2; d : S \times S \to \mathbb{R}$ la métrica euclídea, $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial λ-admisible sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ invariante por traslaciones y tal que γ^Φ satisface la condición D. Supongamos que:*

$$\exists t > 0 \text{ tal que } \sum_{A \in \mathscr{S} \cap 0} e^{t\, diam(A)} \left(\#(A) - 1\right) \delta(\Phi_A) < \infty \tag{4.131}$$

Entonces $\exists 0 < c, C < \infty$ tales que $\forall (\Lambda, \Delta) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}$ se cumple:

$$\mathscr{D}\left(\Lambda, \Delta, \gamma^\Phi\right) \leq C\#(\Lambda) \exp\left(-c\, d(\Lambda, S \setminus \Delta)\right)$$

Demostración:

Por la Proposición 4.3.8, γ^Φ es invariante por traslaciones. Luego, bastará probar que se cumple la ecuación 4.121 de la Proposición 4.3.7.

Por lo visto en la demostración de la Proposición 4.3.6 tenemos:

$$\gamma^\Phi_{0,j} \leq \frac{1}{2} \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} \delta(\Phi_A), \qquad \forall j \in S \setminus \{0\}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} e^{t|j|} \gamma^\Phi_{0,j} &\leq \frac{1}{2} \sum_{j \in S \setminus 0} \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} e^{t|j|} \delta(\Phi_A) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j \in S \setminus 0} \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} e^{t\, diam(A)} \delta(\Phi_A) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{A \in \mathscr{S} \cap 0} e^{t\, diam(A)} \left(\#(A) - 1\right) \delta(\Phi_A) < \infty \end{aligned}$$

por la ecuación 4.131 de esta Proposición.

■

Proposición 4.3.10 *Sean: $S = \mathbb{Z}^2; \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ con potencial sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ de rango finito (esto es: para cada $s \in S, \Lambda_s \in \mathscr{S}$ tal que: $A \in \mathscr{S}, s \in A, A \cap \Lambda_s^c \neq \emptyset \Rightarrow \Phi_A \equiv 0$), λ-admisible, donde $\lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E})$. Entonces γ^Φ es una especificación de rango finito.*

Demostración:

Sea $i \in S$. Para cada $j \in S, j \neq i$ tenemos:

$$\gamma^\Phi_{i,j} = \sup\left(\left\{d_U\left(\left(\gamma^\Phi_i\right)^\circ(\cdot, x), \left(\gamma^\Phi_i\right)^\circ(\cdot, x')\right) / (x, x') \in T\left(\{j\}^c\right)\right\}\right)$$

Ahora. Sea $A \in \mathscr{E}$ entonces

$$\begin{aligned} \left(\gamma_i^\Phi\right)^\circ (A|x) &= \gamma_i^\Phi \left(\sigma_i^{-1}(A)\,|x\right) = \int_E 1_{\sigma_i^{-1}(A)} \left(\xi x_{S\setminus\{i\}}\right) \rho_i^\Phi \left(\xi x_{S\setminus\{i\}}\right) \lambda(d\xi) \qquad \text{y} \\ \left(\gamma_i^\Phi\right)^\circ (A|x') &= \gamma_i^\Phi \left(\sigma_i^{-1}(A)\,|x'\right) = \int_E 1_{\sigma_i^{-1}(A)} \left(\xi x'_{S\setminus\{i\}}\right) \rho_i^\Phi \left(\xi x'_{S\setminus\{i\}}\right) \lambda(d\xi) \end{aligned} \tag{4.132}$$

Como $A \in \mathscr{E}$, es claro que

$$1_{\sigma_i^{-1}(A)} \left(\xi x_{S\setminus\{i\}}\right) = 1_{\sigma_i^{-1}(A)} \left(\xi x'_{S\setminus\{i\}}\right), \qquad \forall \xi \in E. \tag{4.133}$$

Por otra parte: $\forall z \in E^S$

$$\begin{aligned} \rho_i^\Phi(z) &= \frac{h_i^\Phi(z)}{Z_i^\Phi(z)}, \\ h_i^\Phi(z) &= \exp\left(-H_i^\Phi(z)\right) \text{ y} \\ H_i^\Phi(z) &= \sum_{\Delta \in \mathscr{S} \cap i} \Phi_\Delta(z) = \sum_{\substack{\Delta \in \mathscr{S} \cap i \\ \Delta \subset \Lambda_i}} \Phi_\Delta(z) \end{aligned}$$

Ahora bien, $\forall \Delta \subset \Lambda_i, \Phi_\Delta$ es $\mathscr{F}_{\Lambda_i}$-medible pues es $\mathscr{F}_\Delta$-medible. Luego

$$j \notin \Lambda_i \Rightarrow \left(\xi x_{S\setminus\{i\}}\right)(s) = \left(\xi x'_{S\setminus\{i\}}\right)(s) \qquad , \forall s \in \Lambda_i$$

Entonces

$$H_i^\Phi \left(\xi x_{S\setminus\{i\}}\right) = H_i^\Phi \left(\xi x'_{S\setminus\{i\}}\right).$$

Luego: $\rho_i^\Phi \left(\xi x_{S\setminus\{i\}}\right) = \rho_i^\Phi \left(\xi x'_{S\setminus\{i\}}\right)$.
De aquí, por las ecuaciones 4.132 y 4.133 tenemos entonces:

$$j \notin \Lambda_i \Rightarrow \left(\gamma_i^\Phi\right)^\circ (A|x) = \left(\gamma_i^\Phi\right)^\circ (A|x'), \qquad \forall (x, x') \in T\left(\{j\}^c\right)$$

Luego:

$$j \notin \Lambda_i \Rightarrow \gamma_{i,j}^\Phi = 0$$

■

Corolario 4.3.2 *Sean: $S = \mathbb{Z}^2, \lambda \in \mathscr{M}(E, \mathscr{E}), \Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ un potencial sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$, λ-admisible invariante por traslaciones de rango finito tal que γ^Φ satisface la condición D. Entonces se cumple la ecuación 4.121 de la Proposición 4.3.7 para todo $t > 0$*

Notación 4.3.3 *Coeficientes de la condición uniforme (Uniform mixing cofficients). .*
Sean: $\Lambda \in \mathscr{S}, \Delta \in \mathscr{S}, \mu \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. *Definimos*

$$\phi(\Lambda, \Delta, \mu) := \sup\left(\left\{\left|\mu(A|B) - \mu(A)\right| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, B \in \mathscr{T}_\Delta, \mu(B) > 0\right\}\right)$$

Proposición 4.3.11 *Sean:* $S \subset \mathbb{Z}^2$ *infinito;* γ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *que satisface la condición D. Supongamos que* $\mathscr{G}(\gamma) = \{\mu\}$. *Entonces, para cada* $(\Lambda, \Delta) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}$ *se cumple:*

$$\phi(\Lambda, \Delta, \mu) \leq \mathscr{D}(\Lambda, \Delta, \gamma)$$

Demostración:
Sea $(\Lambda, \Delta) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}$ cualquiera.
Sean $A \in \mathscr{F}_\Lambda$ y $B \in \mathscr{T}_\Delta$. Como $\mu \in \mathscr{G}(\gamma)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mu(A|B) &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B \gamma_\Delta(A|x)\, \mu(dx) \\ \mu(A) &= \gamma_S(A|x') = \frac{1}{\mu(B)} \int_B \gamma_S(A|x)\, \mu(dx) \qquad \left(\forall x' \in E^S\right). \end{aligned} \tag{4.134}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left|\mu(A|B) - \mu(A)\right| &= \left|\frac{\int_B \gamma_\Delta(A|x)\, \mu(dx)}{\mu(B)} - \frac{\int_B \gamma_S(A|x)\, \mu(dx)}{\mu(B)}\right| \\ &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \left|\gamma_\Delta(A|x) - \gamma_S(A|x)\right| \mu(dx) \\ &\leq \frac{1}{\mu(B)} \mu(B) \sup\left(\left\{\left|\gamma_\Delta(A^*|x^*) - \gamma_S(A^*|x^*)\right| / A^* \in \mathscr{F}_\Lambda, x^* \in E^S\right\}\right) \\ &\leq \mathscr{D}(\Lambda, \Delta, \gamma) \end{aligned}$$

por **(b.2)** del Teorema 4.3.1.

■

Proposición 4.3.12 *Sean:* $S \subset \mathbb{Z}^2$ *infinito;* $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una especificación sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$ *que satisface la condición D. Supongamos que* $\mathscr{G}(\gamma) = \{\mu\}$. *Entonces para toda* f *y* g *en* $\bar{\mathscr{L}}$ *se cumple:*

$$\left|\mu(fg) - \mu(f)\, \mu(g)\right| \leq \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in S \times S} \delta_i(f)\, D_{\Gamma(\gamma)}(i,j)\, \delta_j(g)$$

Demostración:

Caso 1: $g(x) > 0$, $\forall x \in E^S$ y $\mu(g) = 1$.

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea $h_\Lambda : E^S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h_\Lambda(x) = \frac{g(x)}{\gamma_\Lambda(g)(x)}$$

Sea $\widetilde{\gamma}_\Lambda : \mathscr{F} \times E^S \to [0,1]$ dada por

$$\widetilde{\gamma}_\Lambda(A|x) = (h_\Lambda \gamma_\Lambda)(A|x)$$

Afirmación 4.3.10 *$\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ es una especificación sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.*

Demostración:

Sean $A \in \mathscr{F}, x \in E^S \Rightarrow \widetilde{\gamma}_\Lambda(A|x) = \int_A h_\Lambda(w)\, \gamma_\Lambda(dw|x) \Rightarrow \widetilde{\gamma}_\Lambda(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

Por otra parte, $\forall A \in \mathscr{F}, \widetilde{\gamma}_\Lambda(A|x) = \int 1_A(w)\, h_\Lambda(w)\, \gamma_\Lambda(dw|x)$. Luego $\widetilde{\gamma}_\Lambda(\cdot|x)$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-medible por ser γ_Λ un núcleo de probabilidad de $\left(E^S, \mathscr{T}_\Lambda\right)$ a $\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. Sea $B \in \mathscr{T}_\Lambda \Rightarrow \exists C \in \mathscr{E}^{S \setminus \Lambda}$ tal que $B = \sigma^{-1}_{S \setminus \Lambda}(C) \Rightarrow \widetilde{\gamma}_\Lambda(B|x) = \gamma_\Lambda(1_B h_\Lambda|x) = 1_B(x)\, \gamma_\Lambda(h_\Lambda|x) = 1_B(x)$, luego, $\widetilde{\gamma}_\Lambda$ es $\mathscr{T}_\Lambda$-propio.

Por último, veamos que

$$\widetilde{\gamma}_\Delta \widetilde{\gamma}_\Lambda = \widetilde{\gamma}_\Delta$$

si $\Lambda \subset \Delta$ ambos en $\mathscr{S}$.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_\Delta \widetilde{\gamma}_\Lambda (A|x) &= \widetilde{\gamma}_\Delta \left(\widetilde{\gamma}_\Lambda (1_A) |x \right) \\
&= \widetilde{\gamma}_\Delta \left(\gamma_\Lambda (h_\Lambda 1_A) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(h_\Delta \gamma_\Lambda (h_\Lambda 1_A) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\gamma_\Lambda \left(h_\Delta \gamma_\Lambda (h_\Lambda 1_A) \right) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\gamma_\Lambda (h_\Lambda 1_A) \gamma_\Lambda (h_\Delta) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\gamma_\Lambda \left(\frac{g}{\gamma_\Lambda (g)} 1_A \right) \gamma_\Lambda (h_\Delta) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\frac{1}{\gamma_\Lambda (g)} \gamma_\Lambda (g 1_A) \gamma_\Lambda \left(\frac{g}{\gamma_\Delta (g)} \right) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\frac{1}{\gamma_\Lambda (g)} \gamma_\Lambda (g 1_A) \frac{\gamma_\Lambda (g)}{\gamma_\Delta (g)} |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\frac{1}{\gamma_\Delta (g)} \gamma_\Lambda (g 1_A) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\gamma_\Lambda \left(\frac{g}{\gamma_\Delta (g)} 1_A \right) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(\gamma_\Lambda (h_\Delta 1_A) |x \right) \\
&= \gamma_\Delta \left(h_\Delta 1_A |x \right) \\
&= \widetilde{\gamma}_\Delta (A|x)
\end{aligned}
$$

■

Sea ahora $\widetilde{\mu} = g\mu$.

Afirmación 4.3.11 $\widetilde{\mu} \in \mathscr{G}(\widetilde{\gamma})$.

Demostración:

Sea $A \in \mathscr{F}, \Lambda \in \mathscr{S}$ entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\widetilde{\gamma}_\Lambda (A) &= \int \widetilde{\gamma}_\Lambda (1_A)(x)\, \widetilde{\mu}(dx) \\
&= \int \gamma_\Lambda (h_\Lambda 1_A)(x)\, g(x)\, \mu(dx) \\
&= \int \gamma_\Lambda (\gamma_\Lambda (h_\Lambda 1_A)\, g)(x)\, \mu(dx) \quad \text{pues } \mu \in \mathscr{G}(\gamma) \\
&= \int \gamma_\Lambda \left(\frac{g}{\gamma_\Lambda (g)} 1_A \right)(x)\, \gamma_\Lambda (g)(x)\, \mu(dx) \\
&= \int \frac{1}{\gamma_\Lambda (g)(x)} \gamma_\Lambda (g 1_A)(x)\, \gamma_\Lambda (g)(x)\, \mu(dx) \\
&= \int \gamma_\Lambda (g 1_A)(x)\, \mu(dx) \\
&= \int g(x)\, 1_A(x)\, \mu(dx) \\
&= \int 1_A(x)\, \widetilde{\mu}(dx) \\
&= \widetilde{\mu}(A).
\end{aligned}$$

■

Para cada $i \in S$ sea $b_i : E^S \to [0, +\infty)$ dada por:

$$b_i(x) = \frac{\delta_i(g)}{4\gamma_{\{i\}}(g)(x)}$$

Afirmación 4.3.12

$$d_U\left(\gamma^0_{\{i\}}(\cdot|x), \widetilde{\gamma}^0_{\{i\}}(\cdot|x)\right) \leq b_i(x) \qquad , \forall i \in S, x \in E^S$$

Demostración: (Más adelante)
Supongamos probada esta Afirmación 4.3.12.
Por el Teorema 4.2.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
|\mu(fg) - \mu(f)\mu(g)| &= |\mu(fg) - \mu(f)| \\
&= |\widetilde{\mu}(f) - \mu(f)| \\
&\leq \sum_{(i,j) \in S \times S} \delta_i(f)\, D_{\Gamma(\gamma)}(i,j)\, \widetilde{\mu}(b_j) \qquad (4.135)
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\left(b_j\right) &= \frac{\delta_j\left(g\right)}{4}\int \frac{1}{\gamma_{\{j\}}\left(g\right)\left(x\right)}\widetilde{\mu}\left(dx\right) \\
&= \frac{\delta_j\left(g\right)}{4}\int \frac{g\left(x\right)}{\gamma_{\{j\}}\left(g\right)\left(x\right)}\mu\left(dx\right) \\
&= \frac{\delta_j\left(g\right)}{4}\int \gamma_{\{j\}}\left(\frac{g}{\gamma_{\{j\}}\left(g\right)}\right)\left(x\right)\mu\left(dx\right) \qquad \mu\gamma_{\{j\}} = \mu \text{ pues } \mu \in \mathscr{G}\left(\gamma\right) \\
&= \frac{\delta_j\left(g\right)}{4} \qquad (4.136)
\end{aligned}$$

Luego, por la ecuación 4.135 tenemos:

$$\left|\mu\left(fg\right) - \mu\left(f\right)\mu\left(g\right)\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in S\times S}\delta_i\left(f\right)D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)\delta_j\left(g\right)$$

Lo que prueba la Proposición 4.3.12 (para este **Caso 1**)
Demostración: de la Afirmación 4.3.12
Sea $u : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u(x) = \frac{g_{i,x}(\xi)}{\gamma_{\{i\}}(g)(x)} = \frac{g\left(\xi x_{S\setminus i}\right)}{\gamma_{\{i\}}(g)(x)}$$

Probemos ahora:

$$\widetilde{\gamma}^0_{\{i\}}\left(\cdot|x\right) = \left(u\gamma^0_{\{i\}}\right)\left(\cdot|x\right) \qquad (4.137)$$

Sea $A \in \mathscr{E}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}^0_{\{i\}}\left(A|x\right) &= \widetilde{\gamma}_{\{i\}}\left(\sigma_i^{-1}\left(A\right)|x\right) \\
&= \widetilde{\gamma}_{\{i\}}\left(1_{\sigma_i^{-1}(A)}|x\right) \\
&= \gamma_{\{i\}}\left(h_{\{i\}}1_{\sigma_i^{-1}(A)}\right)\left(x\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_{\{i\}}\left(g\right)\left(x\right)}\gamma_{\{i\}}\left(g1_{\sigma_i^{-1}(A)}\right)\left(x\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_{\{i\}}\left(g\right)\left(x\right)}\gamma^0_{\{i\}}\left(\left(g1_{\sigma_i^{-1}(A)}\right)_{i,x}|x\right) \qquad \text{Lema 4.2.1} \\
&= \frac{1}{\gamma_{\{i\}}\left(g\right)\left(x\right)}\gamma^0_{\{i\}}\left(g_{i,x}1_A|x\right) \\
&= \gamma^0_{\{i\}}\left(u1_A|x\right) \\
&= \left(u\gamma^0_{\{i\}}\right)\left(A|x\right)
\end{aligned}$$

Lo que prueba la ecuación 4.137.

Pongamos ahora para abreviar la notación:

$$\alpha = \gamma^0_{\{i\}}\left(\cdot|x\right) \Rightarrow \widetilde{\gamma}^0_{\{i\}}\left(\cdot|x\right) = u\alpha \tag{4.138}$$

Una cuenta inmediata prueba que:
$g_1 = \frac{1}{1+u}$ es la densidad de α con respecto a $\alpha + u\alpha$
$g_2 = \frac{u}{1+u}$ es la densidad de $u\alpha$ con respecto a $\alpha + u\alpha$
Luego, por la Proposición 4.1.4 y por la ecuación 4.138 tenemos:

$$\begin{aligned} d_U\left(\gamma^0_{\{i\}}\left(\cdot|x\right), \widetilde{\gamma}^0_{\{i\}}\left(\cdot|x\right)\right) &= d_U\left(\alpha, u\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \left|g_1 - g_2\right| d\left(\alpha + u\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \left|\frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u}\right| \left(1+u\right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int \left|1-u\right| d\alpha \end{aligned} \tag{4.139}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \alpha\left(u\right) &= \gamma^0_{\{i\}}\left(u|x\right) \\ &= \gamma^0_{\{i\}}\left(\frac{g_{i,x}}{\gamma_{\{i\}(g)(x)}}|x\right) \\ &= \gamma_{\{i\}}\left(\frac{g}{\gamma_{\{i\}(g)(x)}}|x\right) = 1 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación 4.139

$$= \frac{1}{2}\int \left|u - \alpha\left(u\right)\right| d\alpha \leq \frac{1}{2}\left(\int \left(u - \alpha\left(u\right)\right)^2 d\alpha\right)^{1/2} \tag{4.140}$$

Como $\int \left(u - \alpha\left(u\right)\right)^2 d\alpha = \alpha\left(\left(u - \alpha\left(u\right)\right)^2\right)$ es la varianza de u con respecto a la probabilidad α se tiene que, la expresión 4.140

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int \left(u - m\left(u\right)\right)^2 d\alpha\right)^{1/2} \tag{4.141}$$

donde $m\left(u\right) = \frac{\sup(u)+\text{ínf}(u)}{2}$. Luego, la expresión 4.141

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\left\|u-m(u)\right\|_{\infty} \\
&= \frac{\delta(u)}{4} \qquad \text{Proposición 4.1.3} \\
&= \frac{1}{4}\delta\left(\frac{g_{i,x}}{\gamma_{\{i\}(g)(x)}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_{\{i\}(g)(x)}}\delta\left(g_{i,x}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_{\{i\}(g)(x)}}\delta_i\left(g\right) \qquad \text{Proposición 4.2.1} \\
&= b_i\left(x\right)
\end{aligned}$$

■

Caso 2: $g(x) > 0$.
Sea $g_1 = \frac{1}{\mu(g)}g \Rightarrow \mu(g_1) = 1$. Luego, por el **Caso 1**, tenemos

$$\left|\mu\left(fg_1\right)-\mu\left(f\right)\mu\left(g_1\right)\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in S\times S}\delta_i\left(f\right)D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)\delta_j\left(g_1\right) \qquad (4.142)$$

Ahora:

$$\mu\left(fg_1\right)-\mu\left(f\right)\mu\left(g_1\right) = \mu\left(fg_1\right)-\mu\left(f\right)\frac{\mu\left(g\right)}{\mu\left(g\right)} = \frac{\mu\left(fg\right)}{\mu\left(g\right)}-\frac{\mu\left(f\right)\mu\left(g\right)}{\mu\left(g\right)} \text{ y } \delta_j\left(g_1\right) = \frac{1}{\mu\left(g\right)}\delta_j\left(g\right)$$

De aquí y por la ecuación 4.142 resulta:

$$\left|\mu\left(fg\right)-\mu\left(f\right)\mu\left(g\right)\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in S\times S}\delta_i\left(f\right)D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)\delta_j\left(g\right)$$

Caso 3 (final): $g \in \mathscr{L}^{\infty}\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$ cualquiera.
Como g es acotada $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) - k > 0 \quad , \forall x \in E^S$.
Aplicando el **Caso 2** a $g_1(x) = g(x) - k$, $\forall x$, tenemos:

$$\left|\mu\left(fg_1\right)-\mu\left(f\right)\mu\left(g_1\right)\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in S\times S}\delta_i\left(f\right)D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)\delta_j\left(g_1\right)$$

Pero $\mu(fg_1) - \mu(f)\mu(g_1) = \mu(fg) - k\mu(f) - \mu(f)\mu(g) + k\mu(f) = \mu(fg) - \mu(f)\mu(g)$.
También: $\delta_j(g_1) = \delta_j(g)$ por definición de δ_j (Definición 4.2.1).
Luego, la Proposición 4.3.12 está completamente demostrada.

■

Proposición 4.3.13 *Sean:* $S \subset \mathbb{Z}^2$; $\underline{s} : S \times S \to \mathbb{R}$ *una pseudométrica tal que*

$$\underline{s}\,(i+k, j+k) = \underline{s}\,(i,j)\,, \qquad \forall i,j,k \in S$$

$\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ *una especificación quasilocal tal que*

$$c_{\underline{s}}\,(\gamma) := \sup_{i \in S} \sum_{j \in S} e^{\underline{s}(i,j)} \gamma_{i,j} < 1.$$

Supongamos que $\mathscr{G}\,(\gamma) = \{\mu\}$.
Entonces, para toda f *y* g *en* $\bar{\mathscr{L}}$ *se cumple:*

$$\sum_{i \in S} \left|\mu\,(f\,(g \circ \Theta_i)) - \mu\,(f)\,\mu\,(g \circ \Theta_i)\right| e^{\underline{s}(0,i)} \leq \frac{\delta_{\underline{s}}\,(f)\,\delta_{\underline{s}}\,(g)}{4\,(1 - c_{\underline{s}}\,(\gamma))}$$

donde, para cada $h \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$ *se define:*

$$\delta_{\underline{s}}\,(h) := \sum_{i \in S} e^{\underline{s}(0,i)} \delta_i\,(h)\,.$$

Demostración:
Veamos que es cierta la siguiente desigualdad:

$$\underline{s}\,(0,k) = \underline{s}\,(0,-k) \leq \underline{s}\,(0,i) + \underline{s}\,(i,j) + \underline{s}\,(0,j+k) \tag{4.143}$$

cualquiera sean i, j, k en S
En efecto:

$$\begin{aligned}
\underline{s}\,(0,k) &= \underline{s}\,(-k, k-k) \\
&= \underline{s}\,(0,-k) \\
&\leq \underline{s}\,(0,i) + \underline{s}\,(i,-k) \\
&\leq \underline{s}\,(0,i) + \underline{s}\,(i,j) + \underline{s}\,(j,-k) \\
&= \underline{s}\,(0,i) + \underline{s}\,(i,j) + \underline{s}\,(j+k, -k+k) \\
&= \underline{s}\,(0,i) + \underline{s}\,(i,j) + \underline{s}\,(0,j+k)
\end{aligned}$$

Ahora, como γ es q.l. y

$$\alpha\,(\gamma) = \sup_{i \in S} \sum_{j \in S} \gamma_{i,j} \leq \sup_{i \in S} \sum_{j \in S} e^{\underline{s}(i,j)} \gamma_{i,j} < 1,$$

se tiene que γ satisface la condición D.

Por la Proposición 4.3.12, tenemos:

$$\sum_{k\in S}\left|\mu\left(f\left(g\circ\Theta_k\right)\right)-\mu\left(f\right)\mu\left(g\circ\Theta_k\right)\right|e^{\underline{s}(0,k)}\leq\frac{1}{4}\sum_{k\in S}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i\left(f\right)D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)\delta_j\left(g\circ\Theta_k\right)e^{\underline{s}(0,k)} \tag{4.144}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\delta_j\left(g\circ\Theta_k\right) &= \sup\left(\left\{\left|\left(g\circ\Theta_k\right)(x)-\left(g\circ\Theta_k\right)(x')\right|/\left(x,x'\right)\in T\left(\{j\}^c\right)\right\}\right)\\ &= \sup\left(\left\{\left|g\left(y\right)-g\left(y'\right)\right|/\left(y,y'\right)\in T\left(\{j+k\}^c\right)\right\}\right)\\ &= \delta_{j+k}\left(g\right).\end{aligned}$$

Por esto y por la ecuación 4.143 tenemos:

la expresión 4.144

$$\begin{aligned}&\leq \frac{1}{4}\sum_{k\in S}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i\left(f\right)e^{\underline{s}(0,i)}D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)e^{\underline{s}(i,j)}\delta_{j+k}\left(g\right)e^{\underline{s}(0,j+k)}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\sum_{k\in S}\delta_i\left(f\right)e^{\underline{s}(0,i)}D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)e^{\underline{s}(i,j)}\delta_{j+k}\left(g\right)e^{\underline{s}(0,j+k)} \quad (4.145)\end{aligned}$$

Ahora, $\forall j\in S$ tenemos:

$$\sum_{k\in S}\delta_{j+k}\left(g\right)e^{\underline{s}(0,j+k)}=\delta_{\underline{s}}\left(g\right) \tag{4.146}$$

Por la Afirmación 4.3.7 de la demostración de la Proposición 4.3.5 tenemos:

$$\sum_{j\in S}D_{\Gamma(\gamma)}\left(i,j\right)e^{\underline{s}(i,j)}\leq\frac{1}{1-c_{\underline{s}}\left(\gamma\right)},\qquad\forall i\in S \tag{4.147}$$

Luego, de la ecuación 4.145 por las ecuaciones 4.146, 4.147 y definición de $\delta_{\underline{s}}\left(f\right)$ se termina la prueba de la Proposición 4.3.13.

$\blacksquare$

4.4. Regularidad bajo condiciones de unicidad.

Recordemos algunas notaciones y resultados del Capítulo 2. Sean:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_A &:= \left\{\Phi/\Phi \text{ es un potencial acotado, esto es, } \Phi_\Lambda \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right), \forall \Lambda \in \mathscr{S}\right\}. \\
\mathscr{P}_S &:= \{\Phi/\Phi \text{ es un potencial sumable } \} \\
\mathscr{P}_I &:= \{\Phi/\Phi \text{ es un potencial invariante por traslaciones } \} \\
\mathscr{P}_{SI} &:= \mathscr{P}_S \cap \mathscr{P}_I.
\end{aligned}$$

Notación 4.4.1 *Sea $\Phi \in \mathscr{P}_A \cap \mathscr{P}_I$. Ponemos:*

$$|||\Phi||| := \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap 0} \#\left(\Lambda\right) \|\Phi_\Lambda\|_\infty$$

Proposición 4.4.1 *Sea $\mathscr{P}_\infty := \{\Phi/\Phi \in \mathscr{P}_A \cap \mathscr{P}_I$ y $|||\Phi||| < \infty\}$.*
$(\mathscr{P}_\infty, |||\,|||)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Ejercicio.
Notemos que $\mathscr{P}_\infty \subset \mathscr{P}_I$. Sea

$$\mathscr{P}_1 = \{\Phi \in \mathscr{P}_\infty / \ |||\Phi||| < 1\}$$

Nota 4.4.1 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}\left(E, \mathscr{E}\right)$ finita. Recordemos que por la Proposición 2.1.2, si $\Phi \in \mathscr{P}_S$, entonces Φ es λ-admisible. Además, si $\Phi \in \mathscr{P}_1$ entonces:*

$$\sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap 0} \left(\#\left(\Lambda\right) - 1\right) \delta\left(\Phi_\Lambda\right) < 2 \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap 0} \#\left(\Lambda\right) \|\Phi_\Lambda\|_\infty = 2\,|||\Phi||| < 2.$$

Luego, por la Proposición 4.1.8, γ^Φ satisface la condición de Dobrushin. Por el Corolario 4.2.3 se tiene que $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)\right) \leq 1$. Por el Corolario 4.3.1, si $(E, \mathscr{E})$ es un espacio de Borel estándar, entonces $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)\right) = 1$.

De ahora en adelante, en esta Sección supondremos que $(E, \mathscr{E})$ es un espacio de Borel estándar, aunque quizá sea sólo suficiente suponer que $\#\left(\mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right)\right) = 1, \forall \Phi \in \mathscr{P}_1$.

Pongamos $\{\mu_\Phi\} := \mathscr{G}\left(\gamma^\Phi\right), \forall \Phi \in \mathscr{P}_1$

El principal objetivo de esta Sección es probar el siguiente:

Teorema 4.4.1 *Sea $\lambda \in \mathscr{M}(E,\mathscr{E})$ finita. Sean $\Phi \in \mathscr{P}_1, \Psi \in \mathscr{P}_\infty$. Sea $t_0 > 0$ tal que*

$$|||\Phi + t\Psi||| \leq |||\Phi||| + |t|\, |||\Psi||| < 1, \qquad \forall\, |t| \leq t_0$$

Para cada t con $|t| \leq t_0$ pongamos $\Psi_t := \Phi + t\Psi$.

Sea $g \in \bar{\mathscr{L}}$ tal que $\sum_{i\in S} \delta_i(g) < \infty$.

Sea $F : [-t_0, t_0] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(t) := \mu_{\Phi+t\Psi}(g)$$

Sea $f_\Psi : E^S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f_\Psi(x) := \sum_{A\in\mathscr{S}\cap 0} \frac{1}{\#(A)} \Psi_A(x), \qquad \forall x \in E^S$$

Entonces:

(a) $\sum_{j\in S} \delta_j(f_\Psi) < \infty$.

(b) $\alpha := \sup_{i\in S} \sum_{j\in S} \sup_{|t|\leq t_0} \gamma_{i,j}^{\Psi_t} < 1$.

(c) *Para cada $i \in S, j \in S$ sea $\mathscr{D}_{i,j} := \sup_{|t|\leq t_0} D_{\Gamma\left(\gamma^{\Psi_t}\right)}(i,j)$. Entonces*

$$\sup_{i\in S} \sum_{j\in S} \mathscr{D}_{i,j} < \infty.$$

(d) $\sum_{k\in S} \sum_{i\in S} \sum_{j\in S} \delta_i(g)\, \mathscr{D}_{i,j} \delta_j(f_\Psi \circ \Theta_k) < \infty$.

(e) *Para cada $|t| \leq t_0$, existe:*

$$G(t) := -\sum_{k\in S} \left(\mu_{\Psi_t}(g(f_\Psi \circ \Theta_k))) - \mu_{\Psi_t}(g)\, \mu_{\Psi_t}(f_\Psi \circ \Theta_k)\right)$$

(f) *F es diferenciable en $(-t_0, t_0)$ y $F'(t) = G(t), \forall t \in (-t_0, t_0)$. En particular:*

$$F'(0) = -\sum_{k\in S} \left(\mu_\Phi(g(f_\Psi \circ \Theta_k)) - \mu_\Phi(g)\, \mu_\Phi(f_\Psi \circ \Theta_k)\right)$$

Antes de proceder a la demostración del Teorema, veremos un Lema técnico de uso en la prueba del Teorema.

Lema 4.4.1 *Para cada* $|t| \leq t_0$ *sea* $\mu^t \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$. *Para cada* $|t| \leq t_0$ *y cada* $\Delta \in \mathscr{S}$ *sea* $\mu^t_\Delta \in \mathscr{P}\left(E^S, \mathscr{F}\right)$.

Si para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$:

$$\sup_{|t|\leq t_0} \sup_{A\in\mathscr{F}_\Lambda} \left|\mu^t_\Delta(A) - \mu^t(A)\right| \underset{\Delta\uparrow S}{\longrightarrow} 0;$$

entonces, para cada $h \in \bar{\mathscr{L}}$,

$$\sup_{|t|\leq t_0} \left|\mu^t_\Delta(h) - \mu^t(h)\right| \underset{\Delta\uparrow S}{\longrightarrow} 0.$$

Demostración:

Sea $0 \leq \epsilon < 1$. Como $h \in \bar{\mathscr{L}}, \exists \Lambda \in \mathscr{S}$ y $f \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda, \mathbb{R}\right)$ tal que $\|f - h\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.

Luego, $\forall\, |t| \leq t_0, \forall \Delta \in \mathscr{S}$:

$$\left|\mu^t_\Delta(h) - \mu^t(h)\right| \leq \left|\mu^t_\Delta(f) - \mu^t(f)\right| + \epsilon$$

Por la Proposición 4.1.4 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\mu^t_\Delta(f) - \mu^t(f)\right| &\leq \sup_{A\in\mathscr{F}_\Lambda} \left|\mu^t_\Delta(A) - \mu^t(A)\right| \delta(f) \\
&\leq 2 \sup_{A\in\mathscr{F}_\Lambda} \left|\mu^t_\Delta(A) - \mu^t(A)\right| \|f\|_\infty \\
&\leq 2 \sup_{A\in\mathscr{F}_\Lambda} \left|\mu^t_\Delta(A) - \mu^t(A)\right| \left(\|h\|_\infty + 1\right)
\end{aligned}$$

Luego:

$$\sup_{|t|\leq t_0} \left|\mu^t_\Delta(h) - \mu^t(h)\right| \leq 2 \sup_{|t|\leq t_0} \sup_{A\in\mathscr{F}_\Lambda} \left|\mu^t_\Delta(A) - \mu^t(A)\right| \left(\|h\|_\infty + 1\right) + \epsilon$$

Luego

$$\overline{\lim_{\Delta\uparrow S}} \sup_{|t|\leq t_0} \left|\mu^t_\Delta(h) - \mu^t(h)\right| \leq \epsilon$$

La arbitrariedad de ϵ prueba entonces el Lema.

■

Demostración: del Teorema 4.4.1
Prueba de **(a)**. Sean: $j \in S, \xi$ y ξ' en $E, x \in E^S$.

$$\begin{aligned}
\left| f_\Psi \left(\xi x_{S\setminus\{j\}} \right) - f_\Psi \left(\xi' x_{S\setminus\{j\}} \right) \right| &\leq \sum_{A \in \mathscr{S} \cap 0} \frac{1}{\#(A)} \left| \Psi_A \left(\xi x_{S\setminus\{j\}} \right) - \Psi_A \left(\xi' x_{S\setminus\{j\}} \right) \right| \\
&= \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} \frac{1}{\#(A)} \left| \Psi_A \left(\xi x_{S\setminus\{j\}} \right) - \Psi_A \left(\xi' x_{S\setminus\{j\}} \right) \right| \\
&\leq 2 \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} \frac{1}{\#(A)} \left\| \Psi_A \right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Luego:

$$\delta_j \left(f_\Psi \right) \leq 2 \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} \frac{1}{\#(A)} \left\| \Psi_A \right\|_\infty .$$

De allí:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} \delta_j \left(f_\Psi \right) &\leq 2 \sum_{j \in S} \sum_{A \in \mathscr{S} \cap \{0,j\}} \frac{1}{\#(A)} \left\| \Psi_A \right\|_\infty \\
&= 2 \sum_{A \in \mathscr{S} \cap 0} \frac{\#(A)}{\#(A)} \left\| \Psi_A \right\|_\infty \\
&= 2 \sum_{A \in \mathscr{S} \cap 0} \left\| \Psi_A \right\|_\infty \\
&= 2 \left\| \Psi \right\|_0 .
\end{aligned}$$

Prueba de **(b)**. Sea $t \in [-t_0, t_0]$. Por lo visto en la prueba de la Proposición 4.1.8, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sup_i \sum_{j \in S} \gamma_{i,j}^{\Psi_t} &\leq \sup_{i \in S} \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap i} \frac{1}{2} \left(\#(\Lambda) - 1 \right) \delta \left(\left(\Psi^t \right)_\Lambda \right) \\
&\leq \sup_{i \in S} \sum_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap i} \left(\#(\Lambda) - 1 \right) \left\| \Psi_\Lambda^t \right\|_\infty \\
&\leq \sup_{\Lambda \in \mathscr{S} \cap 0} \#(\Lambda) \left\| \Psi_\Lambda^t \right\|_\infty \\
&= |||\Phi + t\Psi||| \\
&\leq |||\Phi||| + t_0 \, |||\Psi||| < 1
\end{aligned}$$

Luego: $\alpha \leq |||\Phi||| + t_0 \, |||\Psi||| < 1$.

Prueba de **(c)**. Por lo visto en la prueba de la Afirmación 4.2.4 del Teorema 4.2.1 tenemos, $\forall\,|t|\leq t_0, i\in S$:

$$\sum_{j\in S} D_{\Gamma\left(\gamma^{\Psi_t}\right)}(i,j)\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha\left(\gamma^{\Psi_t}\right)\right)^n\leq\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}$$

De aquí se deduce **(c)** inmediatamente.

Prueba de **(d)**. Observemos que

$$h:E^S\to\mathbb{R}, j\in S, k\in S\Rightarrow\delta_j\left(h\circ\Theta_k\right)=\delta_{j-k}(h)\tag{4.148}$$

Entonces, por **(a)**:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in S}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\delta_j\left(f_\Psi\circ\Theta_k\right) &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\sum_{k\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\delta_j\left(f_\Psi\circ\Theta_k\right)\\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\sum_{k\in S}\delta_{j-k}\left(f_\Psi\right)\\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\sum_{k\in S}\delta_{k}\left(f_\Psi\right)\\ &\leq \left(\sup_i\sum_{j\in S}\mathscr{D}_{i,j}\right)\left(\sum_{i\in S}\delta_i(g)\right)\left(\sum_{k\in S}\delta_k\left(f_\Psi\right)\right)<\infty.\end{aligned}$$

Prueba de **(e)**. Como g y f_Ψ están en $\bar{\mathscr{L}}$, por la Proposición 4.3.12 y por **(d)** tenemos, para $|t|\leq t_0$

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in S}\left|\mu_{\Psi_t}\left(g\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\right)-\mu_{\Psi_t}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\mu_{\Psi_0}(g)\right| \leq\\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{k\in S}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,D_{\Gamma\left(\gamma^{\Psi_t}\right)}(i,j)\,\delta_j\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{k\in S}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\delta_j\left(f_\Psi\circ\Theta_k\right)<\infty\end{aligned}$$

Prueba de **(f)**. Para abreviar la notación, para cada $h\in\mathscr{L}^\infty\left(E^S,\mathscr{F},\mathbb{R}\right)$, para cada $w\in E^S,\Lambda\in\mathscr{S}$ y $|t|\leq t_0$:

$$\begin{aligned}\langle h,g\rangle_\Lambda^t(w) &:= \gamma_\Lambda^{\Psi_t}(hg|w)-\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(h|w)\,\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)\,.\\ \langle h,g\rangle_S^t &:= \mu_{\Psi_t}(hg)-\mu_{\Psi_t}(h)\,\mu_{\Psi_t}(g)\,.\end{aligned}$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ y cada $w \in E^S$ sea $F_{\Lambda,w} : [-t_0, t_0] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_{\Lambda,w}(t) = \gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)$$

Afirmación 4.4.1 *$F_{\Lambda,w}$ es diferenciable en $(-t_0, t_0)$ y*

$$F'_{\Lambda,w}(t) = -\left\langle H_\Lambda^\Psi, g\right\rangle_\Lambda^t(w)$$

Demostración:
Sea $h \in \mathscr{L}^\infty\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$ cualquiera. Para cada $|t| \leq t_0$ y cada $\xi \in E^\Lambda$ pongamos

$$G(t, \xi; h) = h\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)$$

También, para cada $|t| \leq t_0$ sea

$$I(t; h) = \int_{E^\Lambda} G(t, \xi; h)\, \lambda^\Lambda(d\xi)$$

Notemos que $\forall \xi \in E^\Lambda$:

$$\begin{aligned}
\rho_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) &= \frac{h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)}{Z_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)} \\
&= \frac{h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)}{\int_{E^\Lambda} h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\Theta w_{S\setminus\Lambda}\right) \lambda^\Lambda(d\Theta)} \\
&= \frac{h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)}{I(t; 1)}
\end{aligned}$$

(1 es la función $x \to 1, \forall x \in E^S$).
Luego:

$$\begin{aligned}
\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(h|w) &= \int_{E^\Lambda} h\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) \rho_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) \lambda^\Lambda(d\xi) \\
&= \frac{\int_{E^\Lambda} h\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) \lambda^\Lambda(d\xi)}{I(t; 1)} \\
&= \frac{I(t; h)}{I(t; 1)}
\end{aligned}$$

Luego:

$$F_{\Lambda,w}(t) = \frac{I(t; g)}{I(t; 1)} \tag{4.149}$$

Afirmación 4.4.2 *Sea* $h \in \mathscr{L}^{\infty}\left(E^S, \mathscr{F}, \mathbb{R}\right)$. *Entonces* $t \mapsto I(t,h)$ *es diferenciable en* $(-t_0, t_0)$ *y* $I'(t;h) = -I\left(t; hH_{\Lambda}^{\Psi}\right)$

Demostración:
Una cuenta inmediata prueba que:

$$\mathscr{D}_1 G(t,\xi;h) = -h\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) H_{\Lambda}^{\Psi}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) h_{\Lambda}^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)$$

Entonces

$$|\mathscr{D}_1 G(t,\xi;h)| \leq \|h\|_{\infty} \left\|H_{\Lambda}^{\Psi}\right\|_{\infty} \left\|h_{\Lambda}^{\Psi_t}\right\|_{\infty} \tag{4.150}$$

Una cuenta directa prueba que

$$\left\|h_{\Lambda}^{\Psi_t}\right\|_{\infty} \leq \exp\left(\#(\Lambda)\|\Phi\|_0\right)\exp\left(t_0\#(\Lambda)\|\Psi\|_0\right) \tag{4.151}$$

Lema 4.4.2 *de Teorema de la Medida.*
Sea (Ω, d, μ) *e.p.,* $t_0 > 0$, $G^* : (-t_0, t_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

(i) $G^*(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$, $\forall t \in (-t_0, t_0)$.

(ii) $G^*(\cdot, \xi)$ *es diferenciable en* $(-t_0, t_0)$, $\forall \xi \in \Omega$.

(iii) $|\mathscr{D}_1 G^*(t,\xi)| \leq M < \infty$, $\forall t \in (-t_0, t_0)$, $\forall \xi \in \Omega$.

Sea $I^*(t) = \int_{\Omega} G^*(t,\xi)\,\mu(d\xi)$. *Entonces* I^* *es diferenciable en* $(-t_0, t_0)$ *y*

$$\frac{d}{dt} I^*(t) = \int_{\Omega} \mathscr{D}_1 G^*(t,\xi)\,\mu(d\xi)$$

Demostración:
Sea $t \in (-t_0, t_0)$. Sea $\delta_0 = \delta_0(t)$ tal que $(t - \delta_0, t + \delta_0) \subset (-t_0, t_0)$. Para cada $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ sea

$$F_{\delta}(\xi) = \frac{G^*(t+\delta,\xi) - G^*(t,\xi)}{\delta}$$

Por el Teorema del Valor Medio, $\exists\, |\Theta| \leq 1$ tal que $|F_{\delta}(\xi)| = |\mathscr{D}_1 G(t + \Theta\delta, \xi)| \leq M, \forall \delta$

Además

$$F_{\delta}(\xi) \xrightarrow[\Delta\uparrow 0]{} \mathscr{D}_1 G^*(t,\xi),$$

Por el Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada:

$$\frac{I^*(t+\delta) - I^*(\delta)}{\delta} = \int_{\Omega} F_{\delta}(\xi)\,\mu(d\xi) \xrightarrow[\Delta\uparrow 0]{} \int \mathscr{D}_1 G^*(t,\xi)\,\mu(d\xi)$$

■

De las ecuaciones 4.150 y 4.151 y por este Lema 4.4.2 tenemos: $t \mapsto I(t,h)$ es diferenciable en $(-t_0, t_0)$ y

$$\begin{aligned} I'(t,h) &= \int \mathscr{D}_1 G^*(t,\xi;h)\,\lambda^\Lambda(d\xi) \\ &= -\int h\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) H_\Lambda^\Psi\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right) h_\Lambda^{\Psi_t}\left(\xi w_{S\setminus\Lambda}\right)\lambda^\Lambda(d\xi) \\ &= -I\left(t, hH_\Lambda^\Psi\right) \end{aligned}$$

■

Por la Afirmación 4.4.2 y por la ecuación 4.149, tenemos que $F_{\Lambda,w}$ es diferenciable en $(-t_0, t_0)$.

Además:

$$\begin{aligned} F'_{\Lambda,w}(t) &= \frac{I'(t;g)\,I(t;1) - I(t;g)\,I'(t;1)}{(I(t;1))^2} \\ &= -\frac{I\left(t;gH_\Lambda^\Psi\right)I(t;1) - I(t;g)\,I\left(t;H_\Lambda^\Psi\right)}{(I(t;1))^2} \\ &= -\left(\frac{I\left(t;gH_\Lambda^\Psi\right)}{(I(t;1))} - \frac{I(t;g)}{I(t;1)}\frac{I\left(t;H_\Lambda^\Psi\right)}{I(t;1)}\right) \\ &= -\left(\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left(gH_\Lambda^\Psi|w\right) - \gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)\,\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left(H_\Lambda^\Psi|w\right)\right) \\ &= -\left\langle H_\Lambda^\Psi, g\right\rangle_\Lambda^t(w) \end{aligned}$$

La afirmación 4.4.1 está probada.

■

Afirmación 4.4.3 *Sea $w \in E^S$. Se cumple:*

$$\sup_{|t|\le t_0}\left|\left\langle H_\Lambda^\Psi, g\right\rangle_\Lambda^t - \sum_{i\in S}\left\langle f_\Psi \circ \Theta_i\right\rangle_S^t\right| \xrightarrow[\Lambda\uparrow S]{} 0$$

Afirmación 4.4.4 $\sup_{|t|\le t_0}\left|F_{\Lambda,w}(t) - F(t)\right| \xrightarrow[\Lambda\uparrow S]{} 0$ *cualquiera sea $w \in E^S$.*

Supongamos probadas estas dos afirmaciones. Luego, $\left(F'_{\Lambda,w}\right)_{\Lambda}$ converge uniformemente sobre $[-t_0, t_0]$ a G. Luego, por resultado clásico del Análisis, F es diferenciable en (t_0, t_0) y $F'(t) = G(t) = -\sum_{i\in S} \langle f_\Psi \circ \Theta_i, g\rangle_S^t$, $\forall t \in [-t_0, t_0]$. Luego, **(f)** está probada y con ello el Teorema.

■

Demostración: de la Afirmación 4.4.4.

Por **(c)** de la Proposición 4.3.1 tenemos que para cada $(\Lambda, \Delta) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}$ se cumple:

$$\begin{aligned}\sup_{|t|\le t_0} \sup \left\{\left|\gamma_\Delta^{\Psi_t}(A|w) - \mu_{\Psi_t}(A)\right| / A \in \mathscr{F}_\Lambda, w \in E^S\right\} &\le \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S\setminus\Delta} D_{\Gamma\left(\gamma^{\Psi_t}\right)}(i,j) \\ &\le \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S\setminus\Delta} \mathscr{D}_{i,j} \\ &\xrightarrow[\Delta\uparrow S]{} 0 \qquad (4.152)\end{aligned}$$

(por **(c)** de este Teorema).

Por el Lema 4.4.1 $\sup_{|t|\le t_0} \left|\gamma_\Delta^{\Psi_t}(g|w) - \mu_{\Psi_t}(g)\right| \xrightarrow[\Delta\uparrow S]{} 0$

La prueba de la Afirmación 4.4.4 se completa, teniendo presente que:

$$F_{\Lambda,w}(t) - F(t) = \gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w) - \mu_{\Psi_t}(g)$$

■

Demostración: de la Afirmación 4.4.3.

Sean: $t \in [-t_0, t_0]$, $w \in E^S$, $\Lambda \in \mathscr{S}$, $\Delta \in \mathscr{S}$ con $\Delta \subset \Lambda$.

$$\begin{aligned}\left|\left\langle H_\Lambda^\Psi, g\right\rangle_\Lambda^t(w) - \sum_{i\in S}\langle f_\Psi\circ\Theta_i, g\rangle_S^t\right| &\le \left|\left\langle H_\Lambda^\Psi, g\right\rangle_\Lambda^t(w) - \sum_{k\in\Lambda}\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k}, g\rangle_\Lambda^t(w)\right| \\ &+ \left|\sum_{k\in\Delta}\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k}, g\rangle_\Lambda^t(w) - \sum_{k\in\Delta}\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k}, g\rangle_S^t\right| \\ &+ \left|\sum_{k\in\Lambda\setminus\Delta}\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k}, g\rangle_\Lambda^t(w) - \sum_{k\in S\setminus\Delta}\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k}, g\rangle_S^t\right| \\ &\le T_1(t,w,\Lambda) + T_2(t,w,\Lambda,\Delta) + T_3(t,w,\Delta) \ (4.153)\end{aligned}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
T_1(t,w,\Lambda) &:= \left| \left\langle H_\Lambda^\Psi, g\right\rangle_\Lambda^t(w) - \sum_{k\in\Lambda} \left\langle f_\Psi \circ \Theta_{-k}, g\right\rangle_\Lambda^t(w) \right| \\
T_2(t,w,\Lambda,\Delta) &:= \left| \sum_{k\in\Delta} \left\langle f_\Psi \circ \Theta_{-k}, g\right\rangle_\Lambda^t(w) - \sum_{k\in\Delta} \left\langle f_\Psi \circ \Theta_{-k}, g\right\rangle_S^t \right| \\
T_3(t,w,\Delta) &:= 2 \sup_{\substack{\Lambda\in\mathscr{S}\cup\{S\}\\ \Delta\subset\Lambda}} \sum_{k\in\Lambda\setminus\Delta} \left| \left\langle f_\Psi \circ \Theta_{-k}, g\right\rangle_\Lambda^t(w) \right|
\end{aligned}
$$

Afirmación 4.4.5 **(a)** $\sup_{|t|\leq t_0} T_1(t,w,\Lambda) \underset{\Lambda\uparrow S}{\longrightarrow} 0.$

(b) *Para cada* $\Delta\in\mathscr{S}, \sup_{|t|\leq t_0} T_2(t,w,\Lambda,\Delta) \underset{\Lambda\uparrow S}{\longrightarrow} 0.$

(c) $\sup_{|t|\leq t_0} T_3(t,w,\Delta) \underset{\Delta\uparrow S}{\longrightarrow} 0.$

Supongamos probada esta Afirmación.
Sea $\epsilon > 0$. Por **(c)** de la Afirmación 4.4.5, $\exists\Delta_0 \in\mathscr{S}$ tal que

$$\sup_{|t|\leq t_0} T_3(t,w,\Delta) < \frac{\epsilon}{3}, \forall \Delta_0\subset\Delta$$

Por **(b)** de la Afirmación 4.4.5, $\exists\Lambda_1 \in\mathscr{S}$ tal que $\Lambda_1\subset\Lambda\in\mathscr{S} \Rightarrow \sup_{|t|\leq t_0} T_2(t,w,\Lambda,\Delta) < \frac{\epsilon}{3}$.
Por **(a)** de la Afirmación 4.4.5, $\exists\Lambda_2 \in\mathscr{S}$ tal que $\Lambda_2\subset\Lambda\in\mathscr{S} \Rightarrow \sup_{|t|\leq t_0} T_1(t,w,\Lambda) < \frac{\epsilon}{3}$.
Tomando $\Delta = \Delta_0$ y $\Lambda = \Lambda_1\cup\Lambda_2$ tenemos:
la ecuación 4.153 $< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.
La Afirmación 4.4.3 está probada.

■

Demostración: de la Afirmación 4.4.5.
Veamos primeramente la siguiente

Afirmación 4.4.6 *Sea:* $h\in\bar{\mathscr{L}}$ *tal que* $\sum_{i\in S}\delta_i(h) < \infty$.
Entonces, para todo $w\in E^S$ *se cumple:*

$$\sup_{|t|\leq t_0} \left|\langle h, g\rangle_\Lambda^t(w)\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\delta_j(h)$$

cualquiera sea $\Lambda\in\mathscr{S}$.

Demostración:

Consideremos el Lema 4.3.2 con las siguientes especificaciones: $\gamma = \gamma^{\Psi_t}, V = \Lambda, x = w$.

Como γ satisface la condición D, $\gamma^{(\Lambda,w)}$ también (por **(d)** y **(e)** del Lema 4.3.2). Como $\Lambda \in \mathscr{S}$, por **(c)**, $\gamma_\Lambda(\cdot|w) \in \mathscr{G}\left(\gamma^{(\Lambda,w)}\right)$, esto es: $\mathscr{G}\left(\gamma^{(\Lambda,w)}\right) = \{\gamma_\Lambda(\cdot|w)\}$. Aplicando la Proposición 4.3.12 concluimos la prueba de la Afirmación 4.4.6.

■

Prueba de **(a)** de la Afirmación 4.4.5

Por la Afirmación 4.4.6 tenemos:

$$\sup_{|t|\le t_0}\left|\left\langle H_\Lambda^\Psi - \sum_{k\in\Lambda}(f_\Psi\circ\Theta_{-k}), g\right\rangle_\Lambda^t (w)\right| \le \frac{1}{4}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\delta_j\left(H_\Lambda^\Psi - \sum_{k\in\Lambda}(f_\Psi\circ\Theta_{-k})\right) \tag{4.154}$$

Ahora, sean: $j \in S, x \in E^S, \xi$ y ξ' en E. Entonces:

$$\left|H_\Lambda^\Psi\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \sum_{k\in\Lambda}(f_\Psi\circ\Theta_{-k})\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \left(H_\Lambda^\Psi\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right) - \sum_{k\in\Lambda}(f_\Psi\circ\Theta_{-k})\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda}\Psi_A\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \sum_{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda}\Psi_A\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right) + \sum_{k\in\Lambda}\sum_{A\in\mathscr{S}(0)}\frac{1}{\#(A)}\Psi_{A+k}\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{k\in\Lambda}\sum_{A\in\mathscr{S}(0)}\frac{1}{\#(A)}\Psi_{A+k}\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right)\right| \tag{4.155}$$

Ahora bien. Sea $j \notin A \Rightarrow$

$$\Psi_A\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \Psi_A\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right) = 0$$

pues Ψ_A es $\mathscr{F}_A$-medible.

Además, fijados $k \in \Lambda$ y $A \in \mathscr{S}(0)$, tenemos

$$j \notin A + k \Rightarrow \Psi_{A+k}\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right) - \Psi_{A+k}\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) = 0$$

porque Ψ_{A+k} es $\mathscr{F}_{A+k}$-medible.

Luego,

la ecuación 4.155

$$= \left| \sum_{\substack{A\in S\cap\Lambda \\ j\in A}} \left[\Psi_A\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \Psi_A\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right)\right] - \sum_{k\in\Lambda} \sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\{k\} \\ j\in A}} \frac{1}{\#\left(A\right)} \left[\Psi_A\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \Psi_A\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right)\right] \right| \tag{4.156}$$

Sea ahora A tal que $A\cap\Lambda \neq \emptyset$. Digamos $A\cap\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_J\}$. En la suma $\sum_{A\in\mathscr{S}\cap\{k\}}$, A está exactamente una vez cuando $k=\lambda_1, \ldots, k=\lambda_J$. Luego en $\sum_{k\in\Lambda}\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\{k\} \\ j\in B}}$ el A aparece $\#\left(A\cap\Lambda\right)$ veces.

Luego en $\sum_{\substack{B\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ j\in B}} - \sum_{k\in\Lambda}\sum_{\substack{B\in\mathscr{S}\cap\{k\} \\ j\in B}}$, A aparece una vez en el 1º sumando y $\#\left(A\setminus\Lambda\right)$ veces en el segundo, luego:

la ecuación 4.156

$$= \left| \sum_{\substack{B\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ j\in B}} \frac{\#\left(B\right) - \#\left(B\setminus\Lambda\right)}{\#\left(B\right)} \left[\Psi_B\left(\xi x_{S\setminus\{j\}}\right) - \Psi_B\left(\xi' x_{S\setminus\{j\}}\right)\right] \right|$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\delta_j\left(H_\Lambda^\Psi - \sum_{k\in\Lambda}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\right) &= \delta_j\left(\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ j\in A}} \frac{\#\left(A\setminus\Lambda\right)}{\#\left(A\right)}\Psi_A\right) \\
&= \delta_j\left(\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}\cap\Lambda \\ A\cap\Lambda^c\neq\emptyset, j\in A}} \frac{\#\left(A\setminus\Lambda\right)}{\#\left(A\right)}\Psi_A\right) \\
&\leq 2\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(j) \\ A\cap\Lambda^c\neq\emptyset}} \left\|\Psi_A\right\|_\infty
\end{aligned}$$

Luego:

la ecuación 4.154

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta_i\left(g\right)\mathscr{D}_{i,j}\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(j) \\ A\cap\Lambda^c\neq\emptyset}} \left\|\Psi_A\right\|_\infty \tag{4.157}$$

Ahora bien. Sean $i\in S, j\in S$. Tenemos

$$\delta_i\left(g\right)\mathscr{D}_{i,j}\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(j) \\ A\cap\Lambda^c\neq\emptyset}} \left\|\Psi_A\right\|_\infty = \delta_i\left(g\right)\mathscr{D}_{i,j}\sum_{\substack{B\in\mathscr{S}(0) \\ B\cap(A-j)^c\neq\emptyset}} \left\|\Psi_B\right\|_\infty \xrightarrow[\Lambda\uparrow S]{} 0.$$

Además

$$\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\sum_{\substack{A\in\mathscr{S}(j)\\ A\cap\Lambda^c\neq\emptyset}}\|\Psi_A\|_\infty \leq \delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}\sum_{A\in\mathscr{S}(0)}\|\Psi_A\|_\infty = \|\Psi\|_0\,\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}$$

También:

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\|\Psi\|_0\,\delta_i(g)\,\mathscr{D}_{i,j}<\infty.$$

Luego, por el Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada
la ecuación 4.157

$$\xrightarrow[\Lambda\uparrow S]{} 0.$$

Así, **(a)** de la Afirmación 4.4.5 está probada.
Prueba de la parte **(b)** de Afirmación 4.4.5
Sean: $\Delta\in\mathscr{S},\Lambda\in\mathscr{S},\Delta\subset\Lambda$:

$$\begin{aligned}
\sup_{|t|\leq t_0} T_2(t,w,\Lambda,\Delta) &\leq \sup_{|t|\leq t_0}\sum_{k\in\Delta}\left|\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k},g\rangle_w^t(w)-\langle f_\Psi\circ\Theta_{-k},g\rangle_S^t\right|\\
&\leq \sup_{|t|\leq t_0}\sum_{k\in\Delta}\Big[\Big|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left((f_\Psi\circ\Theta_{-k})\,g|w\right)-\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}|w\right)\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)\\
&\qquad -\mu_{\Psi_t}\left((f_\Psi\circ\Theta_{-k})\,g\right)+\mu_{\Psi_t}(f_\Psi)\,\mu_{\Psi_t}(g)\Big|\Big]\\
&\leq \sup_{|t|\leq t_0}\sum_{k\in\Delta}\Big[\Big|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left((f_\Psi\circ\Theta_{-k})\,g|w\right)-\mu_{\Psi_t}\left((f_\Psi\circ\Theta_{-k})\,g\right)\Big|\\
&\qquad +\left|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}|w\right)-\mu_{\Psi_t}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\right|\left|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)\right|\\
&\qquad +\left|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)-\mu_{\Psi_t}(g)\right|\left|\mu_\Psi\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\right|\Big]\\
&\leq \sup_{|t|\leq t_0}\sum_{k\in\Delta}\Big[\Big|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left((f_\Psi\circ\Theta_{-k})\,g|w\right)-\mu_{\Psi_t}\left((f_\Psi\circ\Theta_{-k})\,g\right)\Big|\\
&\qquad +\left|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}|w\right)-\mu_{\Psi_t}\left(f_\Psi\circ\Theta_{-k}\right)\right|\|g\|_\infty\\
&\qquad +\left|\gamma_\Lambda^{\Psi_t}(g|w)-\mu_{\Psi_t}(g)\right|\|f_\Psi\|_\infty\Big]\\
&= (***) \qquad\qquad (4.158)
\end{aligned}$$

Por lo que vimos al inicio de la prueba de la Afirmación 4.4.6, esto es, la ecuación 4.152, y por el Lema 4.4.1, teniendo en cuenta que $\#(\Delta)<\infty$, dado $\epsilon>0,\exists\Lambda_0=\Lambda_0(\Delta,f_\Psi,g,\epsilon)$ tal que por la ecuación 4.158: $\Lambda_0\subset\Lambda\in\mathscr{S}\Rightarrow\sup_{|t|\leq t_0}T_2(t,w,\Lambda,\Delta)\leq(***)\leq\epsilon$
Prueba de **(c)** de la Afirmación 4.4.5

Por la Afirmación 4.4.6, tenemos para cada $\Delta \in \mathscr{S}$:

$$
\begin{aligned}
\sup_{|t| \leq t_0} T_3(t, w, \Delta) &\leq \frac{1}{2} \sum_{k \in S \setminus \Delta} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \delta_i(g) \mathscr{D}_{i,j} \delta_j(f_\Psi \circ \Theta_{-k}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \delta_i(g) \mathscr{D}_{i,j} \sum_{k \in S \setminus \Delta} \delta_{j-k}(f_\Psi) \qquad (4.159)
\end{aligned}
$$

Ahora, como para cada $j \in S$, $\sum_{k \in S \setminus \Delta} \delta_{j-k}(f_\Psi) \xrightarrow[\Delta \uparrow S]{} 0$, por un argumento similar el usado para probar la ecuación 4.157 $\xrightarrow[\Lambda \uparrow S]{} 0$, probamos que la ecuación 4.159$\xrightarrow[\Delta \uparrow S]{} 0$

La parte **(c)** de la Afirmación 4.4.5 queda probada.

$\blacksquare$

Apéndice A

Revisión de Medida y Probabilidad.

En este Apéndice recordaremos los principales conceptos y resultados (sin demostraciones) de Medida y Probabilidad que necesitamos para el estudio de las distribuciones de Gibbs. Los textos en los que nos basamos son: [Hal66] [Dur10]

A.1. Conjuntos y clases

Sea Ω un conjunto

Definición A.1.1 *Diremos que una familia no vacia,$\mathscr{R}$, de subconjuntos de Ω es un álgebra de Ω si:*

(a) $A \in \mathscr{R}, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{R}$.

(b) $A \in \mathscr{R} \Rightarrow A^c$ *(complemento de A en Ω) está en $\mathscr{R}$.*

Definición A.1.2 *Diremos que una familia no vacia,$\mathscr{F}$, de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra de Ω si:*

(a) $(A_i)_{i=1,2,\ldots}$ *en* $\mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

(b) $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$.

Proposición A.1.1 *Sea $\mathscr{G}$ una familia no vacía de subconjuntos de Ω, entonces existen $a(\mathscr{G})$ y $\sigma(\mathscr{G})$ tales que:*

(a) $a(\mathscr{G})$ *es un álgebra que contiene a $\mathscr{G}$.*

(b) *$\sigma(\mathscr{G})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{G}$.*

(c) *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra que contiene a $\mathscr{G}$, entonces $a(\mathscr{G}) \subset \mathscr{A}$.*

(d) *Si $\mathscr{H}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{G}$, entonces $\sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{H}$.*

Al álgebra $a(\mathscr{G})$ la llamaremos "álgebra generada por $\mathscr{G}$".
A la σ-álgebra $\sigma(\mathscr{G})$ la llamaremos "σ-álgebra generada por $\mathscr{G}$".

Proposición A.1.2 *Sea $\mathscr{G}$ una clase no vacía de subconjuntos de Ω. Entonces:*

$$A \in \sigma(\mathscr{G}) \Rightarrow \exists \mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G} \text{ numerable tal que } A \in \sigma(\mathscr{G}_1).$$

Notación A.1.1 *Sean: $A \subset \Omega, \mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Pondremos: $\mathscr{G} \cap A := \{G \cap A / G \in \mathscr{G}\}$.*

Teorema A.1.1 *Sean: $A \subset \Omega$ no vacío; $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ no vacía. Entonces:*

$$\sigma_A(\mathscr{G} \cap A) = \sigma_\Omega(\mathscr{G}) \cap A,$$

donde: $\sigma_A(\mathscr{G} \cap A)$ significa σ-álgebra de A generada por $\mathscr{G} \cap A$ y $\sigma_\Omega(\mathscr{G})$ significa σ-álgebra de Ω generada por $\mathscr{G}$.

Definición A.1.3 *Sea $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ no vacía. Diremos que $\mathscr{M}$ es clase monótona si:*

$$\begin{aligned} M_1 \subset M_2 \subset \ldots \text{ con } M_i \in \mathscr{M}, \forall i &\Rightarrow \bigcup M_i \in \mathscr{M}. \\ M_1 \supset M_2 \supset \ldots \text{ con } M_i \in \mathscr{M}, \forall i &\Rightarrow \bigcap M_i \in \mathscr{M}. \end{aligned}$$

Proposición A.1.3 *Sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ no vacía. Entonces $\exists m(\mathscr{G})$ tal que:*

(a) *$m(\mathscr{G})$ es una clase monótona y $\mathscr{G} \subset m(\mathscr{G})$.*

(b) *Si $\mathscr{M}$ es una clase monótona que contiene a $\mathscr{G}$ entonces $m(\mathscr{G}) \subset \mathscr{M}$.*

A $m(\mathscr{G})$ la llamaremos "clase monótona generada por $\mathscr{G}$".

Teorema A.1.2 **(a)** *Si $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra de Ω, entonces $\mathscr{F}$ es una clase monótona.*

(b) *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Ω y una clase monótona entonces $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra de Ω.*

Teorema A.1.3 *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Ω, entonces $m(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A})$.*

A.1.1. Sistemas π y λ

Definición A.1.4 *Sea $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Diremos que $\mathscr{P}$ es un sistema π si*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \text{ en } \mathscr{P} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} P_i \in \mathscr{P}.$$

Definición A.1.5 *Sea $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Diremos que $\mathscr{L}$ es un sistema λ (de Ω) si*

(i) $\Omega \in \mathscr{L}$

(ii) $L_1 \in \mathscr{L}, L_2 \in \mathscr{L}, L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_2 \setminus L_1 \in \mathscr{L}$.

(iii) $L_1, L_2, \ldots$ *en* $\mathscr{L}$ *con* $L_i \cap L_j = \emptyset$ *si* $i \neq j \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} L_i \in \mathscr{L}$.

Proposición A.1.4 *Sea $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Si $\mathscr{D}$ es un sistema π y un sistema λ, entonces $\mathscr{D}$ es una σ-álgebra de Ω.*

Proposición A.1.5 *Sea $(L_i)_{i \in I}$ una familia (no vacía) de sistemas λ de un mismo Ω. Entonces*

$$\mathscr{L} := \bigcap_{i \in I} \mathscr{L}_i$$

es un sistema λ de Ω.

Corolario A.1.1 *Sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ no vacía. Entonces $\exists l(\mathscr{G})$ tal que:*

(a) *$l(\mathscr{G})$ es un sistema λ que contiene a $\mathscr{G}$.*

(b) *Si $\mathscr{L}$ es otro sistema λ (de Ω) que contiene a $\mathscr{G}$, entonces $l(\mathscr{G}) \subset \mathscr{L}$.*

A $l(\mathscr{G})$ lo llamaremos "sistema λ de Ω generado por $\mathscr{G}$".

Proposición A.1.6 *Sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ no vacía. Si $\mathscr{G}$ es un sistema π, entonces $l(\mathscr{G})$ es un sistema π y un sistema λ.*

Corolario A.1.2 *Sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ no vacía. Si $\mathscr{G}$ es un sistema π, entonces $\sigma(\mathscr{G}) \subset l(\mathscr{G})$.*

A.2. Medidas

Sea $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
Por definición: $a < +\infty$ y $-\infty < a, \forall a \in \mathbb{R}$.
Sean: Ω un conjunto y $\mathscr{A}$ un álgebra de Ω.

Definición A.2.1 *Diremos que $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^*$ es una medida sobre $\mathscr{A}$ si:*

(a) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{A}$.

(b) $(A_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{A}$ *con* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *y* $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$

(c) $\mu(\emptyset) < +\infty$.

Se dice que μ es una medida σ-finita sobre Ω, si existe $(A_n)_{n\geq 1}$ en $\mathscr{A}$ de Ω.

Si $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^*$ es una medida, diremos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida (e. de m.).

Definición A.2.2 *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ es completa si: $(E \in \mathscr{A}, F \subset E, \mu(E) = 0) \Rightarrow F \in \mathscr{A}$.*

Nota A.2.1 *Topología y σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$.*
Sea $\tau_{\mathbb{R}}$ la topología usual de $\mathbb{R}$.
Sea $\mathscr{G}_{\mathbb{R}^*} := \{A \subset \mathbb{R}^* / \exists a \in \mathbb{R}$ con $(a, +\infty] \subset A\} \cup \{A \subset \mathbb{R}^* / \exists a \in \mathbb{R}$ con $[-\infty, a) \subset A\} \cup \tau_{\mathbb{R}}$

Con $\tau_{\mathbb{R}^*}$ denotamos a la topología de $\mathbb{R}^*$ generada por $\mathscr{G}_{\mathbb{R}^*}$ y la llamaremos topología usual de $\mathbb{R}^*$.

Llamaremos σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y la denotaremos por $\mathscr{B}_1$ a la σ-álgebra de $\mathbb{R}$ generada por $\tau_{\mathbb{R}}$.

Análogamente se define la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^*$ que denotamos por $\mathscr{B}_1^*$.

Proposición A.2.1 *Propiedades de las medidas.*
Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida siendo $\mathscr{A}$ un álgebra de Ω. Se cumple:

(a) $(E \in \mathscr{A}, F \in \mathscr{A}, E \subset F, \mu(E) < \infty) \Rightarrow \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, *siendo* $F \setminus E := F \cap E^c$.

(b) $\left(E \in \mathscr{A}, (E_n)_{n\geq 1} \text{ en } \mathscr{A}, E \subset \bigcup_n E_n\right) \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.

(c) $\left(E \in \mathscr{A}, (E_n)_{n\geq 1} \text{ en } \mathscr{A} \text{ con } E_n \cap E_m = \emptyset \text{ si } n \neq m, \bigcup_n E_n \subset E\right) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \mu(E_n) \leq \mu(E)$.

(d) *μ es continua desde abajo. Esto es:* $(E_1 \subset E_2 \subset \dots$ *en* $\mathscr{A}, E = \bigcup_n E_n \in A) \Rightarrow \mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$

(e) *μ es continua desde arriba en $E \in \mathscr{A}$. Esto es:*

$(E_1 \supset E_2 \supset \dots$ *en* $\mathscr{A}, E = \bigcap_n E_n \in A$ *y* $\exists m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mu(E_m) < \infty) \Rightarrow \mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$

Proposición A.2.2 *Sean: Ω un conjunto no vacío; $\mathscr{A}$ un álgebra de $\Omega; \mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ una función tal que:*

(i) $0 \leq \mu < \infty, \forall A \in \mathscr{A}$.

(ii) $(A_1, \dots, A_n$ *en* $\mathscr{A}$ *con* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

Si se cumplen además una de las dos siguientes propiedades, entonces μ es una medida sobre $(\Omega, \mathscr{A})$

(iii) $(E_n)_{n\geq 1}$ *con* $(E_1 \subset E_2 \subset \dots$ *en* $\mathscr{A}, E = \bigcup_n E_n \in A) \Rightarrow \mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$

(iii') $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ *en* $\mathscr{A}$, *con* $\bigcap_{n\geq 1} E_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

A.3. Extensión y completamiento de medidas

Teorema A.3.1 *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, siendo $\mathscr{A}$ un álgebra de Ω.*

Si μ es σ-finita, entonces $\exists! \bar{\mu} : \sigma(\mathscr{A}) \to [0, +\infty]$ tal que:

(i) $\bar{\mu}(A) = \mu(A), \forall A \in \mathscr{A}$.

(ii) *$\bar{\mu}$ es una medida σ-finita sobre $(\Omega, \sigma(\mathscr{A}))$.*

Teorema A.3.2 *Sean: $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espacio de medida, siendo $\mathscr{F}$ una σ-álgebra de Ω.*

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(\mathscr{F}, \mu) &:= \{N \subset \Omega / \exists N_1 \in \mathscr{F} \text{ con } N \subset N_1 \text{ y } \mu(N_1) = 0\} \\ \mathscr{F} &:= \{F \Delta N / F \in \mathscr{F} \text{ y } N \in \mathscr{N}(\mathscr{F}, \mu)\} \end{aligned}$$

Entonces:

(a) *$\mathscr{F}(\mu)$ es una σ-álgebra de Ω y $\mathscr{F} \subset \bar{\mathscr{F}}(\mu)$.*

(b) *Sean F_1, F_2 en $\mathscr{F}, N_1$ y N_2 en $\mathscr{N}(\mathscr{F}, \mu)$. Si $F_1 \Delta N_1 = F_2 \Delta N_2$, entonces $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.*

(c) *Sea* $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{F}}(\mu) \to [0, +\infty]$ *dada por*

$$\bar{\mu}(F) = \mu(F_1),$$

Si $F_1 \in \mathscr{F}$ *y* $F \Delta F_1 \in \mathscr{N}(\mathscr{F}, \mu)$.

Entonces $\left(\Omega, \bar{\mathscr{F}}(\mu), \bar{\mu}\right)$ *es un espacio de medida completa y* $\bar{\mu}(F) = \mu(F), \forall F \in \mathscr{F}$.

A $\left(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu}\right)$ *se lo llama completamiento de* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.

Teorema A.3.3 *Sean:* Ω *un conjunto;* $\mathscr{A}$ *un álgebra de* Ω*;* μ *una medida* σ*-finita sobre* $(\Omega, \sigma(\mathscr{A}))$.

Si $E \in \sigma(\mathscr{A})$ *y* $\mu(E) < \infty$*, entonces, para todo* $\epsilon > 0 \exists E_\epsilon \in \mathscr{A}$ *tal que* $\mu(E \Delta E_\epsilon) < \epsilon$.

A.4. Funciones medibles

Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un e. m. siendo $\mathscr{F}$ una σ-álgebra de Ω.

Definición A.4.1 *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$*. Se dice que* f *es* $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_1^*)$*-medible o simplemente que* f *es medible si* $f^{-1}(M) \in \mathscr{F}, \forall M \in \mathscr{B}_1^*$.

Notación A.4.1 *Pondremos:*

$F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^* / f \text{ es } (\mathscr{F}, \mathscr{B}_1^*) - \text{medible}\}$ *y* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ *será* $\{f : \Omega \to \mathbb{R} / f \text{ es } (\mathscr{F}, \mathscr{B}_1^*) - \text{medible}\}$.

Notemos que: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible si y sólo si* $f^{-1}(M) \in \mathscr{F}, \forall M \in \mathscr{B}_1$.

Convención: Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ *y* $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$.

Sea $\Omega_1' := \{x \in \Omega / f(x) = +\infty \wedge g(x) = -\infty\} \cup \{x \in \Omega / f(x) = -\infty \wedge g(x) = +\infty\}$. $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_1'$.

La función $f + g$ *se considera definida por sobre* Ω_1 *por:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Notemos que si f *y* g *son medibles, entonces* Ω_1 *es* $\mathscr{F}$*-medible.*

Proposición A.4.1 *Sean:* f *y* $g \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$*. Entonces* $f + g$ *es medible sobre* Ω_1*.* $f \cdot g \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$.

Proposición A.4.2 *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible si y sólo si,* $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathscr{F}, \forall c \in \mathbb{R}$.

Proposición A.4.3 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Definimos $f^+ : \Omega \to \mathbb{R}^*$ y $f^- : \Omega \to \mathbb{R}^*$ dadas por:*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

(parte positiva de f)

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

(parte negativa de f)

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

(valor absoluto de f)

Si $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ entonces f^+, f^- y $|f|$ son $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_1^*)$-medibles.

Proposición A.4.4 *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ en $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$. Sean h_1, h_2, h_3 y h_4 funciones definidas sobre Ω con valores en $\mathbb{R}^*$, por:*

$$\begin{aligned} h_1(x) &:= \sup_n f_n(x) \\ h_2(x) &:= \inf_n f_n(x) \\ h_3(x) &:= \overline{\lim}_n f_n(x) \\ h_4(x) &:= \underline{\lim}_n f_n(x) \end{aligned}$$

Entonces h_1, h_2, h_3 y h_4 son medibles.

Definición A.4.2 *Sea $s : \Omega \to \mathbb{R}$. Se dice que s es simple si $\#(s(\Omega)) < \infty$.*

Teorema A.4.1 (a) *Sea $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$. Entonces $\exists (s_n)_{n\geq 1}$ en $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ tales que s_n es simple $\forall n$ y $f(x) = \lim_n s_n(x), \forall x \in \Omega$.*

(b) *Sea $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$. Entonces $\exists (s_n)_{n\geq 1}$ en $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ tales que*

(b.1) *s_n es simple $\forall n$.*

(b.2) $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x), \forall x \in \Omega, \forall n = 1, 2, \ldots$

(b.3) $f(x) = \lim_n s_n(x), \forall x \in \Omega$.

Notación A.4.2 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un espacio de medida, siendo* $\mathscr{F}$ *una* σ*-álgebra de* Ω*. Para cada* $x \in \Omega$ *sea* $P(x)$ *una afirmación sobre una propiedad de* x*.*

Diremos que P *es cierta* μ *c. s. (*μ *casi seguramente) sobre* Ω *si*

(i) $\{x \in \Omega / P(x) \text{ no es cierta}\}$ *es medible.*

(ii) $\mu(\{x \in \Omega / P(x) \text{ no es cierta}\}) = 0.$

Notación A.4.3 *Si* Ω *es un conjunto no vacío, pondremos:*

$$\mathscr{L}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} / \exists M < \infty \text{ satisfaciendo } |f(x)| \leq M, \forall x \in \Omega\}$$

Si $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un espacio de medida, pondremos:*
$\mathscr{L}^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) :=$
$\{f : \Omega \to \mathbb{R} / f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*) \text{ y } \exists M < \infty \text{ tal que } \mu(\{x \in \Omega / |f(x)| > M\}) = 0\}$

Definición A.4.3 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un espacio de medida;* $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$; $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$*.*

Se dice que $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge a* f μ*-casi seguramente (en símbolos:* $f_n \to f, \mu$ *c. s.) si* $\exists E_0 \in \mathscr{F}$ *con* $\mu(E_0) = 0$ *tal que* $x \notin E_0 \Rightarrow$ *dado* $\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x)$ *tal que:*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \begin{array}{ll} f_n(x) < -\frac{1}{\epsilon} & \text{si } f(x) = -\infty \\ f(x) > \frac{1}{\epsilon} & \text{si } f(x) = +\infty \\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon & \text{si } f(x) \in \mathbb{R}, \end{array}$$

Definición A.4.4 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un espacio de medida;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*.*

Diremos que $(f_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental* μ*.c.s. si* $\exists E_0 \in \mathscr{F}$ *con* $\mu(E_0) = 0$ *tal que* $x \notin E_0 \Rightarrow$ *dado* $\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \epsilon)$ *tal que* $m \geq n_0, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$*.*

Proposición A.4.5 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un espacio de medida;* $(f_n)_{n\geq 1}$*,* f *y* g *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*.*

(a) *Sea* $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Se dice que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformemente a* f μ*.c.s. (*$f_n \rightrightarrows f \mu$*.c.s.) si* $E_0 \in \mathscr{F}$ *con* $\mu(E_0) = 0$ *tal que:*

dado $\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ *satisfaciendo:*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad x \notin E_0.$$

(b) *Se dice que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *es uniformemente fundamental* μ*.c.s. si* $\exists E_0 \in \mathscr{F}$ *con* $\mu(E_0) = 0$ *tal que: dado* $\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ *satisfaciendo:*

$$n \geq n_0, m \geq m_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \qquad x \notin E_0.$$

Proposición A.4.6 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces son equivalentes:*

(a) $\exists f \in (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ *tal que* $f_n \rightrightarrows f \mu.c.s.$

(b) $(f_n)_{n\geq 1}$ *es uniformemente fundamental* μ *c. s.*

Definición A.4.5 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}), f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*.*

Se dice que $(f_n)_{n\geq 1}$ *es aproximadamente* μ*-uniformemente convergente a* f *si: dado* $\epsilon > 0, \exists F \in \mathscr{F}$ *tal que* $\mu(F) < \epsilon$ *y dado* $\eta > 0, \exists n_0 = n_0(\eta)$ *tal que* $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \eta, \forall x \notin F$*.*

Teorema A.4.2 *Teorema de Egoroff y su recíproca.*

Sean: $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m. con* $\mu(\Omega) < \infty$*;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces:* $f_n \to f \mu.c.s. \Leftrightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ *es aproximadamente* μ*-uniformemente convergente a* f*.*

Teorema A.4.3 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m. con* $\mu(\Omega) < \infty$*;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*.*

Dados $\epsilon > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, definimos:*

$$E_n(\epsilon) := \{x \in \Omega / |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$

Entonces:

$$f_n \to f \mu.c.s. \Leftrightarrow \lim_n \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\epsilon)\right) = 0, \forall \epsilon > 0.$$

Definición A.4.6 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*.*

(a) *Se dice que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental en* μ*-medida si:*

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega / |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \underset{(n,m)\to(\infty,\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

(b) *Se dice que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge a* f *en* μ*-medida (*$f_n \overset{\mu}{\to} f$*, en símbolos) si:*

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega / |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Teorema A.4.4 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces* $(f_n)_{n\geq 1}$ *aproximadamente* μ*-uniformemente convergente a* $f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} f$*.*

Teorema A.4.5 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces:*

(a) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ $(f_n)_{n\geq 1}$ *aproximadamente* μ*-uniformemente convergente a* f

(b) *Sea* $g \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Si* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *y* $g_n \xrightarrow{\mu} f$*, entonces* $f \to g$ μ*.c.s.*

Definición A.4.7 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Se dice que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *es aproximadamente* μ*-uniformemente fundamental si: dado* $\epsilon > 0, \exists F \in \mathscr{F}$ *tal que* $\mu(F) < \epsilon$ *y* $\eta > 0, \exists n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \eta \qquad , \forall x \notin F.$$

Teorema A.4.6 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces:*

$(f_n)_{n\geq 1}$ *fundamental en* μ*-medida* $\Rightarrow \exists I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente tal que* $\left(f_{I(n)}\right)_{n\geq 1}$ *es aproximadamente* μ*-uniformemente fundamental.*

Proposición A.4.7 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces:*

$(f_n)_{n\geq 1}$ *aproximadamente* μ*-uniformemente fundamental* $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental* μ*.c.s.*

Teorema A.4.7 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*. Entonces:*

$(f_n)_{n\geq 1}$ *fundamental en* μ*-medida* $\Rightarrow \exists f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ *tal que* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Nota A.4.1 *Ha quedado probado el siguiente resultado:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$*.* $f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow \exists I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente tal que* $f_{I(n)} \to f$ μ*.c.s.*

A.5. Integración

A lo largo de esta sección: $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ es un e. de m.. Se dará una definición de μ-integrable de manera constructiva.

Notación A.5.1 *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$*.*

Diremos que f *es* μ*-integrable y pondremos:* $\int f d\mu := 0$*.*

También pondremos: $S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}) := \{s : \Omega \to \mathbb{R}$ *es simple y medible*$\}$*.*

Finalmente, si $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$*, ponemos* $N(f) := \{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}$*.*

Definición A.5.1 *Sea $s \in S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$. Diremos que $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (E_1, \ldots, E_n))$ con $n \geq 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ y $E_i \in \mathscr{F}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ es una representación de s si: $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}$, donde 1_A es la función indicadora de A .*

Si además $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ entonces diremos que $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (E_1, \ldots, E_n))$ es la representación canónica de s.

Proposición A.5.1 *Sea $s \in S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ con $\mu(N(s)) < \infty$.*

Sean $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (E_1, \ldots, E_n))$ y $((\beta_1, \ldots, \beta_n), (F_1, \ldots, F_m))$ dos representaciones de s. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{m} \beta_j \mu(F_j)$$

Definición A.5.2 *Sea $s \in S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ con $\mu(N(s)) < \infty$. Diremos que s es μ-integrable y llamamos integral de s con respecto a μ:*

$$\int s d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i),$$

si $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (E_1, \ldots, E_n))$ es la representación canónica de s.

Nota A.5.1 *Sea $s \in S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$. Entonces s es μ-integrable si y sólo si $|s|$ es μ-integrable.*

Definición A.5.3 *Sea $s \in S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$, μ-integrable; $E \in \mathscr{F}$. Pondremos:*

$$\mu_f(E) := \int_E f d\mu := \int f 1_E d\mu.$$

Notación A.5.2 *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un e. de m.*

$$S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}, \mu) := \{s \in S(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}) / s \text{ es } \mu\text{-integrable}\}.$$

Definición A.5.4 *Sean: $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un e. de m. ; $(s_n)_{n\geq 1}$ en $S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}, \mu)$. Se dice que $(s_n)_{n\geq 1}$ es fundamental en μ-media si: dado $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow \int |s_n - s_m| d\mu < \epsilon$.*

Teorema A.5.1 *Sean: $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un e. de m. ; $(s_n)_{n\geq 1}$ en $S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}, \mu)$. Entonces:*

$$(s_n)_{n\geq 1} \text{ fundamental en } \mu\text{-media} \Rightarrow (s_n)_{n\geq 1} \text{ fundamental en } \mu\text{-medida}.$$

Definición A.5.5 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$. *Se dice que* f *es* μ*-integrable (y pondremos* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*) si existe* $(s_n)_{n\geq 1}$ *en* $S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *tal que:*

(i) $(s_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental en* μ*-media.*

(ii) $s_n \xrightarrow{\mu} f$.

En este caso, llamaremos integral de f *con respecto a* μ *al número:*

$$\int f d\mu := \lim_n \int s_n d\mu$$

Se puede ver que si $(s_n^*)_{n\geq 1}$ *es otra sucesión en* $S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *tal que es fundamental en* μ*-media y* $s_n^* \xrightarrow{\mu} f$*, entonces*

$$\lim_n \int s_n^* d\mu = \int f d\mu.$$

Definición A.5.6 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m. ;* $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$.

Se dice que ν *es* μ*-absolutamente continua (*μ*-a. c.) si dado* $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que:* $\mu(E) < \delta \Rightarrow |\nu(E)| < \epsilon$.

Proposición A.5.2 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.. Entonces:*

(a) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \Rightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *y* $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

(b) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R} \Rightarrow af \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *y*

$$\int (af) d\mu = a \int f d\mu.$$

(c) f *y* g *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$, a *y* b *en* $\mathbb{R} \Rightarrow (af + bg) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

(d) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \Rightarrow f^+$ *y* f^- *están en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$

Proposición A.5.3 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.. Entonces:* $E \in \mathscr{F}, f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \Rightarrow 1_E f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *y ponemos:*

$$\int_E f d\mu := \int (1_E f) d\mu$$

Proposición A.5.4 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.. Entonces:*

(a) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *y* $f \geq 0$ μ*.c.s.* $\Rightarrow \int f d\mu \geq 0$

(b) f *y* g *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *y* $f \leq g\mu$*.c.s.* $\Rightarrow \int f d\mu \geq \int g d\mu$.

(c) f *y* g *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \Rightarrow \int |f+g|\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu$

(d) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}), E \in \mathscr{F}$ *con* $\mu(E) < \infty$*,* a *y* b *en* $\mathbb{R}$*. Entonces:*

$$a \leq f \leq b\mu \text{ c.s. sobre } E \Rightarrow a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E).$$

Definición A.5.7 *Sea* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*. Se llama* μ*-integral indefinida de* f *a* $\mu_f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu \qquad , \forall E \in \mathscr{F}$$

Proposición A.5.5 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.;* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$.

(a) $f \geq 0\mu$*.c.s.* $\Rightarrow \mu_f$ *es monótona.*

(b) μ_f *es* μ*- a. c.*

(c) $(E_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{F}$ *con* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m \Rightarrow \mu_f\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu_f(E_n)$.

Proposición A.5.6 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m. Sea* $\rho_\mu : \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ *dada por:*

$$\rho_\mu(f, g) := \int |f - g|\, d\mu$$

Entonces ρ_μ *es una pseudométrica sobre* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$. $(\rho_\mu(f, g) = 0 \Rightarrow f = g\mu - c.s.)$

Definición A.5.8 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m. Sea* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*. Se dice que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental en* $\mathscr{L}^1$ *si:*

dado $\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ *tal que:*

$$n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow \rho_\mu(f_n, f_m) < \epsilon.$$

Proposición A.5.7 *Sea* $(f_n)_{n\geq 1}$ *fundamental en* $\mathscr{L}^1 \Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental en* μ*-medida.*

Proposición A.5.8 *Sea* $(f_n)_{n\geq 1}$ *fundamental en* $\mathscr{L}^1 \Rightarrow \left(\mu_{|f_n|}\right)_{n\geq 1}$ *es uniformemente* μ*-absolutamente continua (es decir: dado* $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que* $E \in \mathscr{F}, \mu(E) < \delta \Rightarrow \mu_{|f_n|}(E) < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$*)*

Teorema A.5.2 *Sean:* $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*. Si* $\rho_\mu(f_n, f) \to 0$ *(*$f_n \to f\mu - \mathscr{L}^1$*, en símbolos)* $\Rightarrow f_n \stackrel{\mu}{\to} f$ *.*

Teorema A.5.3 *Sea* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*.*
Si $f \geq 0\mu$ *c. s., entonces*

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0\mu \ c.s.$$

Corolario A.5.1 *Sean:* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*;* $E \in \mathscr{F}$*. Entonces:*

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

Teorema A.5.4 *Sean:* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*;* $E \in \mathscr{F}$*. Entonces*

(i) $\mu(E \cap \{x \in \Omega / f(x) \leq 0\}) = 0$

(ii) $\int_E f d\mu = 0$.

Entonces $\mu(E) = 0$*.*

Teorema A.5.5 *Sea* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*. Entonces:*

$$\int_E f d\mu = 0 \ + E \in \mathscr{F} \Rightarrow f = 0\mu \ c.s.$$

Teorema A.5.6 *Sea* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*. Entonces:*

$$N(f) := \{x \in \Omega / f(x) \neq 0\} \text{ es de } \mu\text{-medida } \sigma\text{-finita.}$$

Definición A.5.9 *Sea* $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*.*
Si $f \geq 0$ μ*.c.s y* $f \notin \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *entonces definimos*

$$\int f d\mu = +\infty$$

y diremos que f *es* μ*-integrable en "sentido amplio".*

Teorema A.5.7 **(a)** *Sean:* $(s_n)_{n\geq 1}$ *en* $S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*;* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$*.*
Entonces: $(s_n)_{n\geq 1}$ *fundamental en* μ*-media,* $s_n \stackrel{\mu}{\to} f \Rightarrow s_n \to f \ \mu - \mathscr{L}^1$*.*

(b) *Sean:* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})\,; \epsilon > 0$. *Entonces*

$$\exists g \in S^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \text{ tal que } \rho_\mu(f, g) < \epsilon$$

Teorema A.5.8 *Sea* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$. *Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *es fundamental en* μ*-media, entonces:*

$$\exists f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \text{ tal que } f_n \to f \ \mu - \mathscr{L}^1.$$

Definición A.5.10 *Sea* $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *no vacía;*

(a) $\nu : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$. *Se dice que* ν *es "continua por arriba en* $\emptyset$*" si*

$$\left(E_1 \supset E_2 \supset \ldots \text{ en } \mathscr{E} \text{ y } \bigcap_{n\geq 1} E_n = \emptyset\right) \Rightarrow \nu(E_n) \to 0.$$

Sea $\mathscr{M}_0(\mathscr{E}) := \{\nu : \mathscr{E} \to \mathbb{R}/\nu \text{ es continua por arriba en } \emptyset\}$

(b) *Sea* $(\nu_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{M}_0(\mathscr{E})$. *Se dice que* $(\nu_n)_{n\geq 1}$ *es "equicontinua por arriba en* $\emptyset$*" si:*

$\left(E_1 \supset E_2 \supset \ldots \text{ en } \mathscr{E} \text{ y } \bigcap_{m\geq 1} E_m = \emptyset; \epsilon > 0\right) \Rightarrow \exists m_0 = m_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \geq m_0 \Rightarrow |\nu_n(E_m)| < \epsilon$, $\forall n$.

Teorema A.5.9 *Sea* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$.

(a) *Si existe* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *tal que* $f_n \to f \ \mu - \mathscr{L}^1$*; entonces se cumplen:*

(a.1) $f \xrightarrow{\mu} f$.

(a.2) $\left(\mu_{|f_n|}\right)_{n\geq 1}$ *es uniformemente* μ*-absolutamente continua.*

(a.3) $\mu_{|f_n|} \in \mathscr{M}_0(\mathscr{F}), \forall n = 1, 2, \ldots$.

(a.4) $\left(\mu_{|f_n|}\right)_{n\geq 1}$ *es equicontinua por arriba en* $\emptyset$.

(b) *Recíprocamente. Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *satisfacen* ***(a.2)***, ***(a.3)*** *y* ***(a.4)***, *entonces* $\exists f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *tal que* $f_n \to f\mu - \mathscr{L}^1$.

Teorema A.5.10 *Teorema de Lebesgue de la Convergencia dominada.*
Sean: $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})\,; f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$.
Supongamos que:

(i) $f \xrightarrow{\mu} f$ *(o* $f_n \to f$ μ*.c.s.).*

(ii) $\exists g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})\,; f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$
tal que $|f_n| \leq |g|$ μ*.c.s.*$\forall n$.

Entonces: $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$ *y* $f_n \to f$ μ*.c.s.. Luego:*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

Teorema A.5.11 *Sean:* $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ *y* $g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$. *Entonces:*

$$|f| \leq |g|\, \mu.c.s. \Rightarrow f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})\,.$$

Teorema A.5.12 *Teorema de la convergencia monótona.*
Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ *y* f *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ *tales que* $f_n \geq 0$ μ *c.s.* $\forall n = 1, 2, \ldots$ *y* $f \geq 0$ μ*c.s.. Si*

(i) $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$

(ii) $f_n \to f$ μ*.c.s.. Entonces:* $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

Teorema A.5.13 *Sea* $f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$. *Entonces:*

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}) \Leftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})$$

Teorema A.5.14 *Lema de Fatou.*
Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ *en* $F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^*)$ *tales que:*

(i) $f_n \geq 0$ μ*.c.s.* $\forall n$.

(ii) $f_n \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R})\,, \forall n$.

(iii) $\underline{\text{lím}}_n \int f_n d\mu < \infty$.

Sea $f := \underline{\text{lím}}_n f_n$.
Entonces $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \mathbb{R}^*)$ *y* $\int f d\mu \leq \underline{\text{lím}}_n \int f_n d\mu$.

A.6. Medidas con signo

Definición A.6.1 *Sea* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e.m.. Diremos que* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *es una medida con signo si:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $A_1, A_2, \ldots$ *en* $\mathscr{F}$ *con* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$.

(iii) $\mu(\mathscr{F}) \subset (-\infty, +\infty]$ *entonces* $\mu(\mathscr{F}) \subset [-\infty, +\infty)$.

Definición A.6.2 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo. Definimos:*

(a) μ *es finita si* $|\mu(E)| < \infty \ \forall E \in \mathscr{F}$.

(b) μ *es* σ*-finita si para cada* $E \in \mathscr{F}$ *existen* $(E_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{F}$ *con* $|\mu(E_n)| < \infty$ *y* $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$.

Teorema A.6.1 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo. Se cumplen:*

(a) $E \in \mathscr{F}, F \in \mathscr{F}, E \subset F, |\mu(E)| < \infty$.

(b) $(E_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathscr{F}$ *con* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$. *Entonces*

$$\left|\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\right| < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} |\mu(A_n)| < \infty.$$

Teorema A.6.2 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo. Entonces:*

(a) $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ *en* $\mathscr{F} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i\geq 1} E_i\right) = \lim_n \mu(E_n)$.

(b) $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ *en* $\mathscr{F}$ *con* $|\mu(E_i)| < \infty$ *para algún* $i \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{i\geq 1} E_i\right) = \lim_n \mu(E_n)$.

Definición A.6.3 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo.*

(a) *Se dice que* $E \subset \Omega$ *es* μ*-positivo si* $F \in \mathscr{F} \Rightarrow E \cap F \in \mathscr{F}$ *y* $\mu(E \cap F) \geq 0$.

(b) *Se dice que* $E \subset \Omega$ *es* μ*-negativo si* $F \in \mathscr{F} \Rightarrow E \cap F \in \mathscr{F}$ *y* $\mu(E \cap F) \leq 0$.

Pondremos:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_+(\Omega, \mathscr{F}, \mu) & := & \{E \subset \Omega / E \text{ es } \mu\text{-positivo}\} \\ \mathscr{P}_-(\Omega, \mathscr{F}, \mu) & := & \{E \subset \Omega / E \text{ es } \mu\text{-negativo}\} \end{array}$$

Se dice que (A^+, A^-) *es una* μ*-descomposición de Hahn de* Ω *si:*

$$A^+ \in \mathscr{P}_+(\Omega, \mathscr{F}, \mu), A^- \in \mathscr{P}_-(\Omega, \mathscr{F}, \mu) \text{ y } \Omega = A^+ \cup A^-.$$

Teorema A.6.3 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo. Entonces* $\exists (A^+, A^-)$ *que es una* μ*-descomposición de Hahn de* Ω*.*

Definición A.6.4 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo;* (A, B) *una* μ*-descomposición de Hahn de* Ω *con* A μ*-positivo y* B μ*-negativo Sean* $\mu^+ : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *y* $\mu^- : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *dadas por:*

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &:= \mu(E \cap A), E \in \mathscr{F} \\ \mu^-(E) &:= -\mu(E \cap B), E \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

Sea $|\mu| : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *dada por:*

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

A μ^+ *se la llama variación positiva de* μ*, a* μ^- *se la llama variación negativa de* μ *y a* $|\mu|$ *se la llama variación total de* μ *.*

Se puede ver que μ^+*,*μ^- *y* $|\mu|$ *son invariantes con respecto a la particular* μ*-descomposición de Hahn que se considere. A* (μ^+, μ^-) *se la llama* μ*-descomposición de Jordan.*

Teorema A.6.4 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo;* (μ^+, μ^-) *la* μ*-descomposición de Jordan. Entonces:*

(a) $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E), \qquad E \in \mathscr{F}.$

(b) μ^+*,*μ^- *y* $|\mu|$ *son medidas sobre* $(\Omega, \mathscr{F})$*.*

(c) *Si* μ *es finita (*σ*-finita) entonces* μ^+ *y* μ^- *son finitas (*σ*-finitas).*

(d) μ^+ *es finita o* μ^- *es finita.*

A.7. El Teorema de Radon-Nikodym

Definición A.7.1 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *y* $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medidas con signo. Diremos que* ν *es absolutamente continua en sentido fuerte con respecto a* μ *(*$\nu \ll \mu$*, en símbolos) si:*

$$E \in \mathscr{F}, |\mu|(E) = 0 \Rightarrow |\nu|(E) = 0.$$

Teorema A.7.1 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F})$ *un e. m.;* $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *y* $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medidas con signo. Son equivalentes:*

(a) $\nu \ll \mu$.

(b) $\nu^+ \ll \mu$ *y* $\nu^- \ll \mu$.

(c) $|\nu| \ll |\mu|$.

Teorema A.7.2 *Sean:* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *un e. de m.,* σ*-finito,* $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^*$ *una medida con signo* σ*-finita.*

Si $\nu \ll \mu$*, entonces:*

(a) $\exists f \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ *tal que* $\nu(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathscr{F}$.

(b) *Si* $g \in F(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$ *satisface* $\nu(E) = \int_E g d\mu, \forall E \in \mathscr{F}$ *entonces* $f = g$ μ *c.s.*

A.8. Espacios medibles y de medida producto

Sean: I un conjunto con 2 ó más elementos (podría ser infinito); para cada $i \in I$, sea E_i un conjunto. Definimos:

$$\prod_{i \in I} E_i := \left\{ x : I \to \bigcup_{i \in I} E_i / x(i) \in E_i \ \forall i \in I \right\}$$

Si $E_i = E \ \forall i \in I$, ponemos:

$$E^I := \prod_{i \in I} E_i$$

Si $\emptyset \neq V_1 \subset V_2 \subset I$, definimos $\sigma_{V_2,V_1} : \prod_{i \in V_2} E_i \to \prod_{i \in V_1} E_i$ por:

$$\sigma_{V_2,V_1}(x)(i) = x(i), \ i \in V_1, x \in \prod_{i \in V_2} E_i$$

Si $V_2 = I$, ponemos σ_{V_1} en lugar de σ_{I,V_1} .

Si $V_1 = \{i\}$ ponemos $\sigma_{V_2,i}$ en lugar de $\sigma_{V_2,\{i\}}$ y σ_i en lugar de $\sigma_{I,\{i\}}$.

A.8.1. Producto de dos espacios medibles.

Sea $I = \{1, 2\}$. Usando la notación clásica pondremos

$$E_1 \times E_2 = \prod_{i \in I} E_i$$

Si $x \in \prod_{i\in I} E_i$, identificaremos a x con el par ordenado (ξ, η) donde $\xi = \sigma_1(x)$ y $\eta = \sigma_2(x)$.

Sean $V_1 \subset E_1$ y $V_2 \subset E_2$ no vacías, pondremos:

$$V_1 \times V_2 := \sigma_1^{-1}(V_1) \cap \sigma_2^{-1}(V_2) = \{(\xi,\eta) \in E_1 \times E_2 / \xi \in V_1 \wedge \eta \in V_2\}$$

Si $\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{P}(E_1)$ y $\mathscr{E}_2 \subset \mathscr{P}(E_2)$ no vacías, definimos

$$\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2 := \{V_1 \times V_2 / V_1 \in \mathscr{E}_1 \wedge V_2 \in \mathscr{E}_2\}$$

Proposición A.8.1 *Para cada* $i = 1, 2$ *sea* $\mathscr{A}_i$ *un álgebra de* E_i*. Sea:*

$$\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2 := \{R \subset E_1 \times E_2 / \exists n \in \mathbb{N}; R_1, \ldots, R_n \text{ en } \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$$
$$\text{con } R = \bigcup_{i=1}^n R_i \text{ y } R_i \cap R_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j\}$$

Entonces:

$$\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2 = \sigma(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$$

Esto es: $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2$ *es el álgebra de* $E_1 \times E_2$ *generada por* $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$*.*

Notación A.8.1 *Para cada* $i = 1, 2$*, sea* $\mathscr{E}_i$ *un* σ*-álgebra de* E_i*. Pondremos*

$$\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 := \sigma(\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2)$$

Esto es: $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$ *será la* σ*-álgebra de* $E_1 \times E_2$ *generada por* $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$*, llamada* σ*-álgebra producto.*

Nota A.8.1 *Importante:* $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 = \sigma(\mathscr{E}_1 * \mathscr{E}_2)$

Notación A.8.2 **(a)** *Sean:* $A \subset E_1 \times E_2; \xi \in E_1; \eta \in E_2$*. Pondremos:*

$$\begin{aligned} A_{1,\xi} &:= \{\eta' \in E_2 / (\xi, \eta') \in A\} \\ A_{2,\eta} &:= \{\eta' \in E_1 / (\xi', \eta) \in A\} \end{aligned}$$

(b) *Sean:* $A \subset E_1 \times E_2; \xi \in E_1; \eta \in E_2$*;* $f : A \to \mathbb{R}$*.*

Pondremos:

$f_{1,\xi} : A_{1,\xi} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_{1,\xi}(\eta') = f(\xi, \eta'), \ \eta' \in A_{1,\xi}$$

$f_{2,\eta} : A_{2,\eta} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_{2,\eta}(\xi') = f(\xi', \eta), \ \xi' \in A_{2,\eta}$$

Teorema A.8.1 *Sean* $(E_1, \mathscr{E}_1)$ *y* $(E_2, \mathscr{E}_2)$ *espacios medibles*

(a) $A \in \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \Rightarrow A_{1,\xi} \in$ *y* $A_{2,\eta} \in \ \forall \xi \in E_1, \eta \in E_2$.

(b) $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$, $(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)$*-medible, entonces* $f_{1,\xi} : E_2 \to \mathbb{R}$ *es* $\mathscr{E}_2$*-medible* $\forall \xi \in E_1$ *y* $f_{2,\eta} : E_1 \to \mathbb{R}$ *es* $\mathscr{E}_1$*-medible* $\forall \eta \in E_2$.

Teorema A.8.2 *Sean:* $(E_1, \mathscr{E}_1, \mu_1)$ *y* $(E_2, \mathscr{E}_2, \mu_2)$ *espacios de medida* σ*-finita;* $E \in \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$. *Entonces:*

(a) $\xi \mapsto \int_{E_2} 1_E(\xi, \eta)\, \mu_2(d\eta)$ *es* $\mathscr{E}_1$*-medible.*

(b) $\eta \mapsto \int_{E_1} 1_E(\xi, \eta)\, \mu_1(d\xi)$ *es* $\mathscr{E}_2$*-medible.*

(c) $\int_{E_1} \left[\int_{E_2} 1_E(\xi, \eta)\, \mu_2(d\eta)\right] \mu_1(d\xi) = \int_{E_2} \left[\int_{E_1} 1_E(\xi, \eta)\, \mu_1(d\eta)\right] \mu_2(d\xi)$

Teorema A.8.3 *Sean:* $(E_1, \mathscr{E}_1, \mu_1)$ *y* $(E_2, \mathscr{E}_2, \mu_2)$ *espacios de medida* σ*-finita.*

(a) *Sea* $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\begin{aligned} \mu_1 \otimes \mu_2(E) &= \int_{E_1} \left[\int_{E_2} 1_E(\xi, \eta)\, \mu_2(d\eta)\right] \mu_1(d\xi) \\ &= \int_{E_2} \left[\int_{E_1} 1_E(\xi, \eta)\, \mu_1(d\eta)\right] \mu_2(d\xi), \ \forall E \in \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \end{aligned}$$

Entonces $\mu_1 \otimes \mu_2$ *es una medida* σ*-finita sobre* $(E_1 \times E_2, \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)$ *que se llama medida producto entre* μ_1 *y* μ_2.

(b) *Sea* $\lambda : \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \to \mathbb{R}$ *otra medida tal que:*

$$\lambda\left(\sigma_1^{-1}(R_1) \cap \sigma_2^{-1}(R_2)\right) = \mu_1(R_1)\, \mu_2(R_2)$$

cualesquiera sean $R_1 \in \mathscr{E}_1$ *y* $R_2 \in \mathscr{E}_2$. *Entonces:*

$$\lambda = \mu_1 \otimes \mu_2.$$

Teorema A.8.4 *Teorema de Fubini*

Sean: $(E_1, \mathscr{E}_1, \mu_1)$ *y* $(E_2, \mathscr{E}_2, \mu_2)$ *espacios de medida* σ*-finita;*

$h \in \mathscr{L}^1(E_1 \times E_2, \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$*;* $h_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ *dada por* $h_1(x) := \int h(x, y)\, \mu_2(dy)$*;* $h_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $h_2(x) := \int h(x, y)\, \mu_1(dx)$. *Entonces:*

$h_1 \in \mathscr{L}^1(E_1, \mathscr{E}_1, \mu_1)$, $h_2 \in \mathscr{L}^1(E_2, \mathscr{E}_2, \mu_2)$ *y*

$\int hd(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int h_1 d\mu_1 = \int h_2 d\mu_2$

A.8.2. Producto de un número finito de espacios medibles

Por lo visto en la subsección anterior y por inducción es inmediato deducir la prueba del siguiente resultado.

Teorema A.8.5 *Sean: $n \in \mathbb{N}, (n \geq 3)$; para cada $i = 1, \ldots, n$ sea $(E_i, \mathscr{E}_i, \mu_i)$ un e. de m. σ-finita. Entonces existe una única medida σ-finita, λ, sobre $\left(\prod_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{E}_i\right)$ tal que*

$$\lambda\left(\bigcap_{i=1}^n \sigma_i^{-1}(R_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mu_i(R_i)$$

cualesquiera sean $R_i \in \mathscr{E}_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

$\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{E}_i$ es la σ-álgebra de $\prod_{i=1}^n E_i$ generada por:

$$\prod_{i=1}^n (\mathscr{E}_i) := \left\{\bigcap_{i=1}^n \sigma_i^{-1}(R_i) / R_i \in \mathscr{E}_i, 1 \leq i \leq n\right\}$$

Pondremos: $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i := \lambda$.

Definición A.8.1 *Sean $(E, \mathscr{E})$ y $(F, \mathscr{F})$ dos e. m. . Diremos que $I : E \to F$ es un isomorfismo de espacios medibles si:*

(i) *I es biyectiva.*

(ii) *$I(A) \in \mathscr{F}, \forall A \in \mathscr{E}$.*

(iii) *$I^{-1}(B) \in \mathscr{E}, \forall B \in \mathscr{F}$.*

Si existe un isomorfismo de espacios medibles entre $(E, \mathscr{E})$ y $(F, \mathscr{F})$ pondremos:

$$(E, \mathscr{E}) \doteq (F, \mathscr{F})$$

Nota A.8.2 *Sean $(E_1, \mathscr{E}_1, \mu_1)$, $(E_2, \mathscr{E}_2, \mu_2)$ y $(E_3, \mathscr{E}_3, \mu_3)$ e. de m. σ-finita. Entonces:*

(a) $(E_1 \times E_2, \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \doteq (E_2 \times E_1, \mathscr{E}_2 \otimes \mathscr{E}_1, \mu_2 \otimes \mu_1)$

(b) $((E_1 \times E_2) \times E_3, (\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2) \otimes \mathscr{E}_3, (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3) \doteq$

$(E_1 \times (E_2 \times E_3), \mathscr{E}_1 \otimes (\mathscr{E}_2 \otimes \mathscr{E}_3), \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3))$

A.8.3. Producto de una familia infinita numerable de espacios medibles

Sean: S un conjunto infinito numerable; $\mathscr{S} := \{\Lambda \subset S/1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}$
Para cada $s \in S$, sea $(E_s, \mathscr{E}_s)$ un e. m.. Sea

$$E_S := \prod_{s \in S} E_s$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$, si $\Lambda = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ($n \geq 1$ entero) pondremos:

$$\mathscr{E}_\Lambda := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{E}_{s_i};$$

$\sigma_\Lambda : E_S \to E_\Lambda$ definida por

$$\sigma_\Lambda (x) (s) = x (s) \qquad \text{si } s \in \Lambda, x \in E_s.$$

Para simplificar la notación, a veces pondremos:

$$\begin{array}{rcl} x_\Lambda & := & \sigma_\Lambda (x) \text{ si } x \in E_S \text{ y } \Lambda \subset S, \Lambda \neq \emptyset \\ x_s & := & x_{\{s\}} = \sigma_{\{s\}} (x) =: \sigma_\Lambda (x), s \in S, x \in E_S. \end{array}$$

Para cada $\Lambda \in \mathscr{S}$ sea $\mathscr{F}_\Lambda$ la σ-álgebra de E^S dada por:

$$\mathscr{F}_\Lambda := \left\{\sigma_\Lambda^{-1} (B) / B \in \mathscr{E}_\Lambda\right\}$$

Sea

$$\mathscr{F}_0 = \bigcup_{\Lambda \in \mathscr{S}} \mathscr{F}_\Lambda$$

Es inmediato ver que:

$$\mathscr{F}_0 \text{ es un álgebra de } E_S.$$

Pondremos $\mathscr{E}_S := \sigma (\mathscr{F}_0)$
Esto es: $\mathscr{E}_S$ es la σ-álgebra de E_S generada por $\mathscr{F}_0$.
Sea ahora, para cada $s \in S, \mu_s$ una medida σ-finita sobre $(E_s, \mathscr{E}_s)$.

Nota A.8.3 *Sean:* $\Lambda \in \mathscr{S}, B_1$ *y* B_2 *en* $\mathscr{E}_\Lambda$ *tal que* $\sigma_\Lambda^{-1} (B_1) = \sigma_\Lambda^{-1} (B_2)$. *Entonces* $B_1 = B_2$.

Proposición A.8.2 *Sea* $\Lambda = \{s_1, \ldots, s_n\} \in \mathscr{S}$. *Sea* $\mu_\Lambda : \mathscr{F}_\Lambda \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\mu_\Lambda (A) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_{s_i}\right) (B) \;\; si \; \sigma_\Lambda^{-1} (B) = A$$

Entonces μ_Λ *es una medida sobre* $\left(E^S, \mathscr{F}_\Lambda\right)$ σ*-finita.*

Nota A.8.4 *Por el Teorema de Kolmogorov se puede ver que* $\exists!\mu : \mathscr{E}_S \to \mathbb{R}$ *que es una medida* σ*-finita y tal que*

$$\mu(A) = \mu_\Lambda(A), \qquad \forall A \in \mathscr{F}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathscr{S}$$

A μ *la llamaremos medida producto sobre* $(E_S, \mathscr{E}_s)$ *inducida por la familia* $\{(E_s, \mathscr{E}_s, \mu_s) / s \in S\}$.

A.9. Transformaciones entre espacios de medidas

Sean $(E, \mathscr{E})$ y $(E, \mathscr{F})$ dos espacios medibles.

Definición A.9.1 *Diremos que* $T : E \to F$ *es* $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$*-medible, o simplemente que* T *es medible, si* $T^{-1}(B) \in \mathscr{E}$, $\forall B \in \mathscr{F}$.

Proposición A.9.1 *Sean:* $(E, \mathscr{E}, \mu)$ *un espacio de medida;* $(F, \mathscr{F})$ *un espacio medible;* $T : E \to F$ *una transformación medible. Sea* $\mu_T : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\mu_T(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right) \qquad B \in \mathscr{F}$$

Entonces:

(a) μ_T *es una medida sobre* $(F, \mathscr{F})$*, que llamremos "medida de distribución de* T *sobre* F *inducida por* μ*".*

(b) μ_T σ*-finita* $\Rightarrow$ μ *es* σ*-finita.*

Teorema A.9.1 *Sean:* $(E, \mathscr{E})$ *y* $(E, \mathscr{F})$ *espacios medibles,* $T : E \to F$ $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$*-medible;* $g : F \to \mathbb{R}^*$ *medible. Entonces* $g \circ T$ *es medible sobre* $(E, T^{-1}(\mathscr{F}))$.

Teorema A.9.2 *Sean:* $(E, \mathscr{E}, \mu)$ *un espacio de medida* $(F, \mathscr{F})$ *un espacio medible;* $g : F \to \mathbb{R}^*$ *medible. Entonces:*

$$\int_F g d(\mu_T) = \int_E (g \circ T) d(\mu);$$

en el sentido que si existe una de las integrales la otra también existe y vale la igualdad.

A.10. Esperanza condicional

Sean: $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espacio de probabilidad; $\mathscr{G} \subset \mathscr{E}$ una σ-álgebra de E.

Definición A.10.1 *Sea $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$. Diremos que $g : E \to \mathbb{R}$ es una esperanza condicional de f dada $\mathscr{G}$ con respecto a μ ($g \in \mu(f|\mathscr{G})$ en símbolos) si:*

(i) *g es $\mathscr{G}$-medible.*

(ii) $\int_G g d\mu = \int_G g d\mu, \forall G \in \mathscr{G}$.

Nota A.10.1 *Sea $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$. Entonces:*

$$g_1 \text{ y } g_2 \text{ en } \mu(f|\mathscr{G}) \Rightarrow g_1 = g_2 \mu c.s.$$

Proposición A.10.1 *Sean: f_1 y f_2 en $\mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$; $B \in \mathscr{G}$; $g_1 \in \mu(f_1|\mathscr{G})$ y $g_2 \in \mu(f_2|\mathscr{G})$. Entonces:*

$$\mu(\{f_1 \neq f_2\} \cap B) = 0 \Rightarrow \mu(\{g_1 \neq g_2\} \cap B) = 0.$$

Proposición A.10.2 *Sea $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$ tal que:*

$$\mu\left(f^{-1}(B) \cap G\right) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)\mu(G) \qquad , \forall B \in \mathscr{B}_1, \forall G \in \mathscr{G}.$$

Si $g(x) = \int f d\mu \forall x \in E$, entonces $g \in \mu(f|\mathscr{G})$.

Proposición A.10.3 *Sean: f_1 y f_2 en $\mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$; $a \in \mathbb{R}$; $g_1 \in \mu(f_1|\mathscr{G})$, $g_2 \in \mu(f_2|\mathscr{G}) \Rightarrow (ag_1 + g_2) \in \mu(af_1 + f_2|\mathscr{G})$.*

Proposición A.10.4 *Sean: f_1 y f_2 en $\mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$;$g_1 \in \mu(f_1|\mathscr{G})$, $g_2 \in \mu(f_2|\mathscr{G})$. Entonces:*

$$f_1 \leq f_2 \, \mu c.s. \Rightarrow g_1 \leq g_2 \, \mu c.s.$$

Proposición A.10.5 *Sean: $f_1 \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$; $a > 0$; $f_2 : E \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & si\ |f_1(x)| \leq a \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

$g_1 \in \mu(f_1^2|\mathscr{G})$, $g_2 \in \mu(f_2|\mathscr{G})$ Entonces

$$g_2 \leq \frac{1}{a^2} g_1 \qquad \mu c.s.$$

(En símbolos: $\mu((|f_1| \geq a)|\mathscr{G}) \leq \frac{1}{a^2}\mu(f_1^2|\mathscr{G})$, Desigualdad de Tchebychev).

Notación A.10.1 *Sea $A \in \mathscr{E}$ (luego $1_A \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$). Diremos que g es una probabilidad condicional de A dada $\mathscr{G}$ con respecto a μ ($g \in \mu(A|\mathscr{G})$, en símbolos) si $g \in \mu(1_A|\mathscr{G})$.*

Proposición A.10.6 *Desigualdad de Jensen.*

Sean: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa; $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$ tal que $\phi \circ f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$ Sean: $g_1 \in \mu(f|\mathscr{G}), g_2 \in \mu(g \circ f|\mathscr{G})$. Entonces:

$$\phi \circ g_1 \leq g_2 \qquad \mu.c.s.$$

(En símbolos: $\phi(\mu(f|\mathscr{G})) \leq \mu(\phi \circ f|\mathscr{G}))$.

Proposición A.10.7 *Desigualdad de Cauchy Schwartz.*

Sean: f_1 y f_2 en $\mathscr{L}^2(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$ (luego como μ es una probabilidad sobre $(E, \mathscr{E})$ sabemos que: f_1^2, f_2^2 y $f_1 f_2$ están en $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$). Sean: $g_1 \in \mu(f_1^2|\mathscr{G}), g_2 \in \mu(f_2^2|\mathscr{G})$ y $g_3 \in \mu(f_1 f_2|\mathscr{G})$. Entonces:

$$g_3^2 \leq g_1 g_2 \qquad \mu.c.s.$$

(En símbolos: $(\mu(f_1 f_2|\mathscr{G}))^2 \leq \mu(f_1^2|\mathscr{G})\,\mu(f_2^2|\mathscr{G})$)

Proposición A.10.8 *Sean: $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \subset \mathscr{E}$ todas σ-álgebreas de E; $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$. Entonces*

(a)

$$\left.\begin{array}{l} g \in \mu(f|\mathscr{G}_1) \\ h \in \mu(g|\mathscr{G}_2) \\ g_1 \in \mu(f|\mathscr{G}_1) \end{array}\right\} \Rightarrow h = g_1 \qquad \mu.c.s.$$

(b) $(g_2 \in \mu(f|\mathscr{G}_2), h \in \mu(g_2|\mathscr{G}_1)) \Rightarrow h \in \mu(f|\mathscr{G}_1)$

Recíprocamente:

$(h \in \mu(f|\mathscr{G}_1), g_2 \in \mu(f|\mathscr{G}_2)) \Rightarrow h \in \mu(g_2|\mathscr{G}_1)$.

Proposición A.10.9 *Sean: $g : E \to \mathbb{R}$ $\mathscr{G}$-medible; $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$; $gf \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R})$; $f_1 \in \mu(f|\mathscr{G})$. Entonces $gf_1 \in \mu(gf|\mathscr{G})$. (En símbolos: $\mu(gf|\mathscr{G}) = g\mu(f|\mathscr{G})$ $\mu.c.s.$)*

Proposición A.10.10 *Sean: $f \in \mathscr{L}^2(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R}), g \in \mu(f|\mathscr{G}), h \in \mu(f^2|\mathscr{G})$. Entonces:*

$$Var(f) := \mu\left((f - \mu(f))^2\right) = \mu\left(\left(h - g^2\right) + \mu\left((g - \mu(g))^2\right)\right)$$

(En símbolos: $Var(f) = \mu(Var(f|\mathscr{G})) + Var(\mu(f|\mathscr{G}))$, definiendo: $Var(f|\mathscr{G}) := \mu(f^2|\mathscr{G}) - (\mu(f|\mathscr{G}))^2$).

Proposición A.10.11 *Sean: $f \in \mathscr{L}^{-1}(E, \mathscr{E}, \mu, \mathbb{R}), g \in \mu(f|\mathscr{G})$. Si $\mu(f^2) = \mu(g^2)$, entonces $f = g$ μ c.s.*

A.11. Distribuciones condicionales regulares

Sean: $(E, \mathscr{E})$ un espacio medible; $\mathscr{G} \subset \mathscr{E}$ una σ-álgebra de E. Pondremos:

$$\mathscr{P}(E, \mathscr{E}) := \{\nu : \mathscr{E} \to \mathbb{R} / \text{ es una probabilidad sobre } (E, \mathscr{E})\}$$

Sea $\mu \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$

Definición A.11.1 *Diremos que $\Pi : \mathscr{E} \times E \to \mathbb{R}$ es una distribución condicional regular sobre $(E, \mathscr{E})$ con respecto a μ dada $\mathscr{G}$ (también diremos que Φ es un μ-núcleo de probabilidad sobre $(E, \mathscr{E})$ dada $\mathscr{G}$):*

(i) *Para cada $x \in E$, $A \mapsto \Pi(A|x) \in \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$.*

(ii) *Para cada $A \in \mathscr{E}$, $\Pi(A|\cdot) \in \mu(A|\mathscr{G})$.*

Definición A.11.2 *Diremos que $(E, \mathscr{E})$ es un espacio de Borel si existe $\phi : E \to \mathbb{R}$ tal que:*

(i) $\phi(E) = E_1 \in \mathscr{B}_1$.

(ii) *$\phi : E \to E_1$ es biyectiva y bimedible.*

(ϕ es un isomorfismo de espacios medibles entre $(E, \mathscr{E})$ y $(E_1, \mathscr{B}_1 \cap E_1)$).

Teorema A.11.1 *Si $(E, \mathscr{E})$ es un espacio de Borel, entonces existe un μ-núcleo de probabilidad sobre $(E, \mathscr{E})$ dada $\mathscr{G}$.*

Bibliografía

[Dur10] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

[Geo88] H.O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions.* Number v. 9 in De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter, 1988.

[Guy95] X. Guyon. *Random Fields on a Network: Modeling, Statistics and Applications.* Springer, 1995.

[Hal50] P. R. Halmos. *Measure Theory.* The University series in higher mathematics. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1950.

[Hal66] P.R. Halmos. *Measure Theory.* The university series in higher mathematics. Van Nostrand, 1966.

[Par67] K. R. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces.* Probability and mathematical statistics, a series of monographs and textbooks. Academic Press, New York, 1967.

[Rul14] V. Rulloni. Uniqueness condition for an auto-logistic model. *Statistics and Probability Letters*, 87:1–6, 2014.

[Win95] G Winkler. *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods : A Mathematical Introduction (Stochastic Modelling and Applied Probability).* Springer, 1995.

Índice alfabético