INTRODUCCIÓN

A LA

FÍSICA

Alberto E. Wolfenson

Laura M. Buteler
Olga Nasello
Enrique Coleoni

Entendemos que uno de los inconvenientes de la materia Introducción a la Física es que no hay textos cuyo contenido se ajuste al temario contemplado en el plan de estudios de la FaMAF. Por esto, nos pareció que podría ser útil para los estudiantes editar un apunte que cubra el temario de la materia Introducción a la Física del plan de estudio de la carrera de Licenciatura en Física.

La escritura de este apunte se ha basado en nuestra experiencia docente en la materia y nuestras notas de clase, las cuales fueron inspiradas en las notas de clase de Oscar Villagra que a su vez fueron inspiradas en las notas de clase de anteriores responsables de la materia. Se ha tratado de hacer un desarrollo conciso de los temas, seleccionando las demostraciones que se consideran más simples para la comprensión de los estudiantes y se han incorporado muchas ilustraciones que intentan clarificar lo expresado en el texto. Este apunte incluye no sólo temas específicos de física, sino también se incluyen temas de matemática que son necesarios para el adecuado desarrollo de los conceptos de física a desarrollar.

Agradecemos a los Dres. Clemar Schurrer y Jorge Trincavelli por la lectura de estos apuntes y sugerencias realizadas para que sea lo más claro posible para los estudiantes.

Indice:

Capítulo 1

Consideraciones generales

No es simple dar una definición de que es la física y en la literatura existen muchos intentos de definición, por ejemplo:

- La física es una ciencia que tiene como objetivo medir y relacionar los resultados de estas medidas entre sí y con otras magnitudes que no son directamente medibles, y deducir de estas relaciones leyes cuantitativas que puedan ser comprobadas posteriormente mediante nuevas medidas.
- Ciencia que estudia las propiedades de la materia y de la energía, que pueden ser medidas, y de las leyes que no modifican la estructura íntima de los cuerpos.

Nosotros sólo diremos que la física es la ciencia que estudia, analiza y describe eventos que ocurren en la naturaleza y no involucran los procesos de la vida.

La física es una ciencia experimental, es decir que toda afirmación que se haga en física debe estar verificada por la experiencia. De la experimentación nacen las leyes de la física. Estas leyes sintetizan los resultados de las experiencias pues han sido deducidas de estos mismos experimentos. Las leyes además permiten predecir nuevos eventos físicos que deben ser verificados experimentalmente.

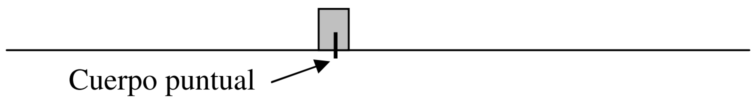
Si deseamos estudiar física, o sea realizar una descripción de la naturaleza, lo podemos hacer de una manera cualitativa. Sin embargo, para hacer una descripción más precisa, es decir si deseamos cuantificar esta descripción, vamos a necesitar de un idioma que represente los conceptos con la precisión requerida. El idioma de la física es la matemática. Los conceptos de la física son representados mediante expresiones matemáticas. Por esta razón en este curso desarrollaremos la matemática que necesitamos para expresar los conceptos de la física.

En este curso de física iniciaremos el estudio de lo que se denomina *Mecánica Elemental*, y en particular comenzaremos estudiando la *cinemática*. Por cinemática entendemos el estudio del movimiento de los cuerpos respondiendo a la pregunta *¿cómo se mueven?*, sin interesarnos la causa por la cuál se mueven. El análisis sobre qué hace que los cuerpos se muevan de determinada forma lo abordaremos más adelante cuando estudiemos la *dinámica* de los cuerpos. Comenzaremos estudiando el movimiento de cuerpos, es decir trataremos de describir qué posiciones del espacio van ocupando a medida que transcurre el tiempo.

Para simplificar esta descripción inicialmente consideraremos a estos cuerpos como puntos materiales (cuerpos puntuales, sin dimensiones). Por lo tanto analizaremos sus movimientos de traslación sin considerar rotaciones alrededor de ejes propios. Por ejemplo la tierra para nosotros es un punto que gira alrededor del sol y no tendremos en cuenta la rotación alrededor de su propio eje.

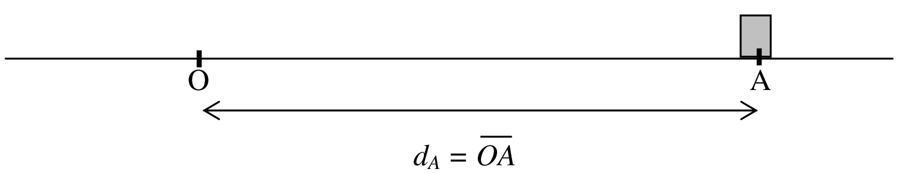
Movimiento de un cuerpo en la recta

Para abordar el estudio del movimiento de traslación de un cuerpo, comenzamos analizando los casos más sencillos. Por esta razón comenzaremos a estudiar el movimiento de cuerpos que se mueven sobre una recta. En este tipo de movimiento la recta es el universo para el cuerpo y en ella se mueve. Toda vez que la posición de un cuerpo se pueda describir por medio de un punto diremos que ese cuerpo es un cuerpo puntual.

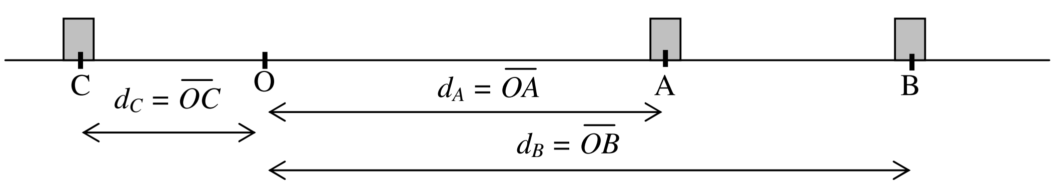


Como nuestro objetivo es analizar el movimiento del cuerpo necesitamos poder determinar la ubicación o posición del cuerpo sobre la recta. Para ello fijamos un punto sobre la recta, respecto del cual referiremos la posición del cuerpo. A ese punto lo llamaremos origen.

Una posibilidad para determinar la posición del cuerpo es dar la distancia que existe entre el cuerpo y el origen, es decir dar la longitud del segmento de recta que se extiende desde el punto elegido como origen y el punto que corresponde a la posición del cuerpo. Lo que debemos analizar es si de esa manera queda identificada de manera unívoca la posición del cuerpo.



El problema es que con esta manera de definir la posición del cuerpo se nos presenta una ambigüedad. Si damos la posición del cuerpo mediante la distancia d_A estamos ante dos posibilidades, una es que esté a la derecha de O y la otra es que esté a la izquierda de O. Entonces vemos que de esta forma no podemos definir de manera unívoca la posición del cuerpo y por lo tanto debemos encontrar un modo de eliminar esta dualidad. La forma más simple y directa es agregar si el cuerpo está a la derecha o a la izquierda del origen.



Para indicar la posición de estos cuerpos, utilizando la modificación en la definición, nosotros diríamos:

A está a una distancia d_A y a la derecha de O
B está a una distancia d_B y a la derecha de O
C está a una distancia d_C y a la izquierda de O

Lamentablemente esta manera de expresar la ubicación de los puntos tiene dos inconvenientes: a) la noción de derecha o izquierda de la recta no está unívocamente determinada, pues depende desde qué lado de la recta se está observando. b) Esta forma de especificar la posición de un cuerpo es complicada, muy extensa, no es operativa pues debería ser definida mediante un número.

Sistema de coordenadas

Para poder expresar de manera precisa la ubicación de los puntos (o cuerpos puntuales) en nuestro universo (recta) definimos dos entes:

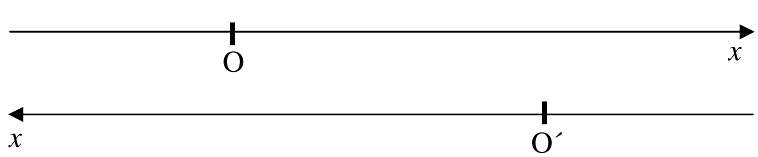
1) Sistema de coordenadas unidimensional.
2) Las coordenadas que estarán referidas al sistema definido en el punto 1).

1) El sistema de coordenadas unidimensional se define mediante:
a) Una recta sobre la que se desplaza el cuerpo cuyo movimiento queremos describir.
b) Un punto arbitrario elegido como origen de coordenadas.
c) Una unidad de medida de longitudes.
d) Una, y sólo una, punta de flecha que indica hacia dónde crecen las coordenadas.

2) La coordenada se define por medio de:
a) Un número que es la distancia desde el origen de coordenadas al punto
b) Un signo que indica si el punto se encuentra desde el origen hacia la flecha (+) o en sentido opuesto (-)

$x_B = -\overline{OB}$ $\qquad\qquad$ $x_A = +\overline{OA}$

Entonces, cuando deseamos describir el movimiento de un cuerpo que puede desplazarse sobre una recta debemos colocar el sistema de coordenadas sobre dicha recta. *El origen de coordenadas "O" y el sentido positivo es totalmente arbitrario.*



Estos son dos sistemas de coordenadas diferentes y podemos expresar las coordenadas del cuerpo en cualquiera de ellos. Lo importante es que elegido uno de ellos éste se mantenga mientras estemos efectuando la descripción del movimiento del cuerpo.

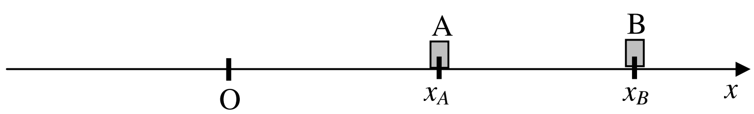
Por lo tanto la utilización de un sistema de coordenadas y de la coordenada del cuerpo en dicho sistema es la forma matemática de describir la posición del cuerpo en el espacio.

Distancia entre dos puntos

En el espacio usual, también denominado espacio euclidiano, la distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une. Es decir la distancia que hay que recorrer para ir directamente de un punto al otro. Por supuesto que la distancia, que es la longitud de un segmento de recta, es positiva (d > 0).

Veamos ahora cómo podemos calcular la distancia entre dos puntos en función de las coordenadas de ambos puntos.

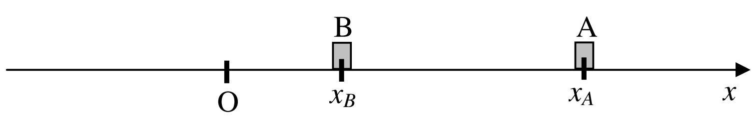
a)



$x_A = \overline{OA}$ $\qquad$ $x_B = \overline{OB}$

$$d_{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_B - x_A$$

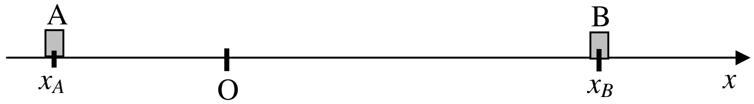
b)



$x_A = \overline{OA}$ $\qquad$ $x_B = \overline{OB}$

$$d_{AB} = \overline{OA} - \overline{OB} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_A - x_B$$

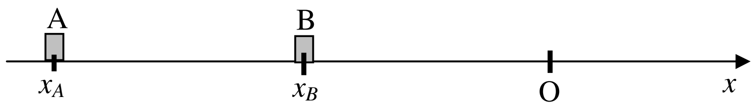
c)



$x_A = -\overline{OA}$ $\qquad$ $x_B = \overline{OB}$

$$d_{AB} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = -x_A + x_B \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_B - x_A$$

d)



$x_A = -\overline{OA}$ $\qquad\qquad$ $x_B = -\overline{OB}$

$$d_{AB} = \overline{OA} - \overline{OB} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = -x_A + x_B \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_B - x_A$$

De los casos analizados anteriormente vemos que la distancia depende de las coordenadas de los cuerpos *A* y *B* en el sistema de coordenadas. En ciertos casos la distancia es x_A-x_B y en otras x_B-x_A. Para no tener que analizar en cada caso en particular qué diferencia es la que debemos hacer, y teniendo en cuenta que la distancia es un número positivo, definimos

$$d_{AB} = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

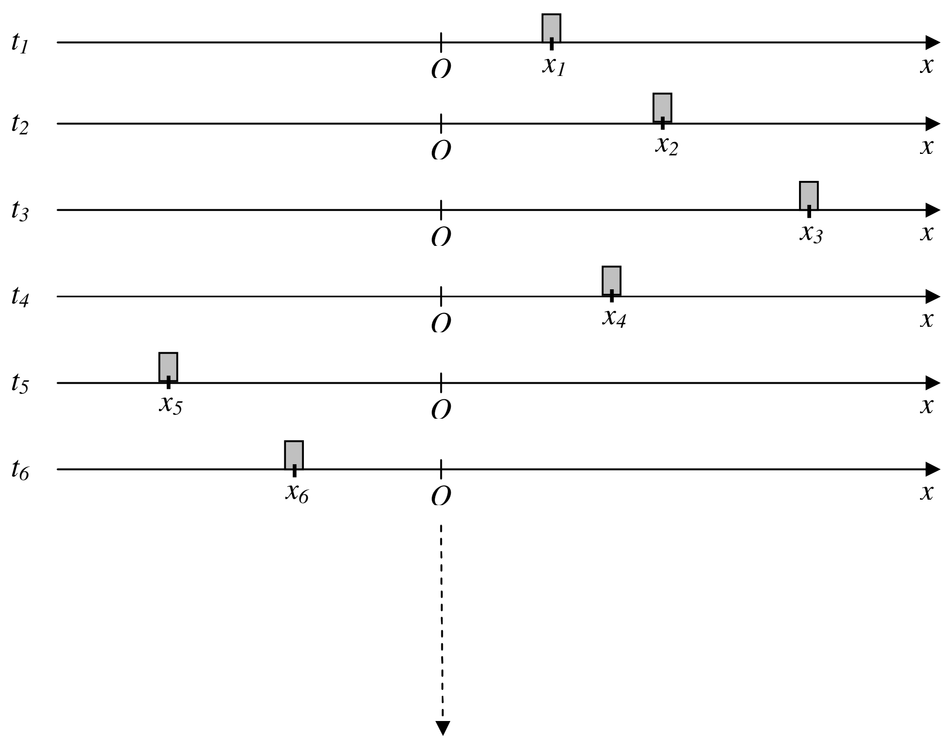
Es decir que en nuestro universo la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de ambos puntos.

Capítulo 2:

Relación entre posición y tiempo

Hemos dicho que vamos a describir el movimiento de los cuerpos que se mueven sobre una trayectoria rectilínea. Hasta ahora hemos desarrollado los elementos necesarios para dar su posición (sistema de coordenadas y coordenadas de los cuerpos) en la recta. Decir que estudiaremos cómo se mueven significa analizar cómo se modifica su posición a medida que transcurre el tiempo. Si bien el concepto de tiempo es algo difícil de definir, pensemos por ahora que el tiempo es simplemente aquello que medimos con un reloj y siempre aumenta.

Supongamos que tenemos un cuerpo que se desplaza sobre una recta. A esa recta le adosamos un sistema de coordenadas para poder dar su posición de manera precisa. Ahora saquemos fotos del sistema a distintos tiempos.



Entonces tenemos que las coordenadas son sucesivamente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, …… correspondientes a los tiempos t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, ……que son sucesivos y crecientes. A los t_i los llamamos instantes de tiempo y satisfacen que $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$….. Con estos valores de x y t podemos confeccionar una tabla

t	x
t_1	x_1
t_2	x_2
t_3	x_3
t_4	x_4
t_5	x_5
:	:

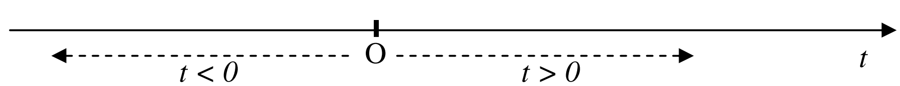
A las coordenadas x_i sabemos como medirlas, analicemos ahora cómo hacer con los valores de tiempo (t_i). Podríamos tomar para t la "hora civil" por ejemplo

t_1 = las 12 hs 35 m 48,3 s del 9 de marzo de 2007
t_1 = las 9 hs 28 m 15,2 s del 10 de octubre de 1993

Al hacer esto estamos aceptando una convención, pues estamos asignando a t el tiempo transcurrido a partir de cierto momento histórico que arbitrariamente se asignó como cero. En los ejemplos, el origen de la medición de los tiempos coincide con el nacimiento de Jesús y esto es lo que generalmente se tomó como eje temporal para narrar la historia de la humanidad en el hemisferio occidental. Y se toma como tiempos negativos a los que corresponden a instantes previos al tomado como cero (p.e. -59 años = 59 años AC). Este origen de los tiempos es arbitrario y puede ser significativo para los cristianos pero no para otras civilizaciones. Nosotros podemos hacer lo mismo que ya hemos hecho con el origen del sistema de coordenadas y elegir arbitrariamente el origen del tiempo que sea más conveniente para nuestra descripción del movimiento. Mantendremos las unidades (h,m,s) y el sentido será creciente hacia el futuro. Por lo tanto, elegimos el origen de los t en la tabla de manera que sea más cómodo y consideraremos que:

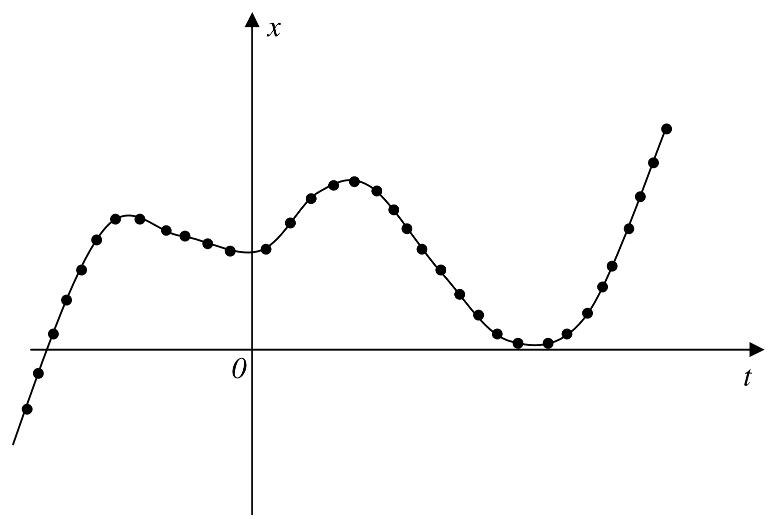
- El tiempo del origen es igual a 0
- Tiempos posteriores al origen son positivos ($t > 0$)
- Tiempos anteriores al origen son negativos ($t < 0$)

Con estos elementos podemos representar los valores de tiempo de manera similar a lo que hicimos con los de espacio. Es decir que tendremos un sistema de coordenadas temporales donde cada punto de la recta representa un instante de tiempo. La distancia entre dos puntos de este eje se denomina intervalo de tiempo.



Función de movimiento

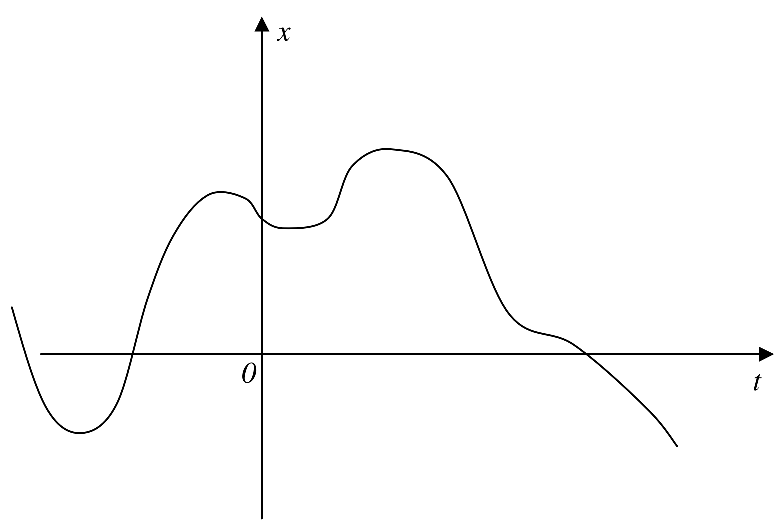
Por lo tanto, para describir el movimiento de los cuerpos tendremos coordenadas espaciales x y temporales t relacionadas. La relación está presente en la tabla que hemos confeccionado con los valores de x_i y t_i. Nosotros podemos graficar los valores de la tabla colocando en el eje de las abscisas los valores de t y en el de las ordenadas, los correspondientes de x. El conjunto de puntos que hemos graficado muestra la información experimental que disponemos sobre el movimiento del cuerpo. Con esta información podríamos, eventualmente, encontrar una función matemática $x = f(t)$ la cual, si la evaluamos en los instantes de tiempo de nuestra tabla, su valor nos da la coordenada del cuerpo en ese instante. Nosotros supondremos, hasta tener evidencia experimental en contrario, que esta función nos da la coordenada del cuerpo para todo tiempo t. A esta función se la llama *función de movimiento del cuerpo*. Esta relación matemática nos permite conocer cuál es la posición del cuerpo (su coordenada espacial) para cualquier instante de tiempo.



Veamos ahora cómo pueden ser las gráficas de las funciones de movimiento de un cuerpo:

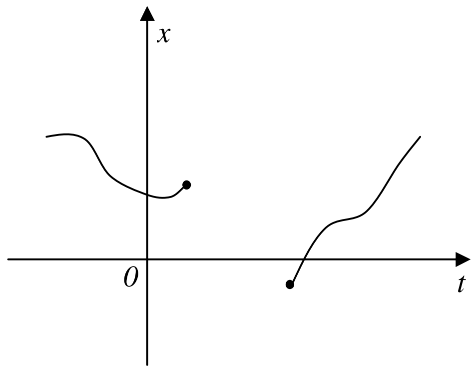
a)

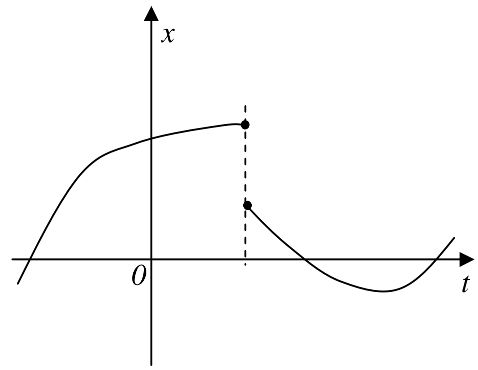
.



Esta es la gráfica de una posible función de movimiento, para cada instante de tiempo está determinada la posición del cuerpo, es decir su coordenada *x*.

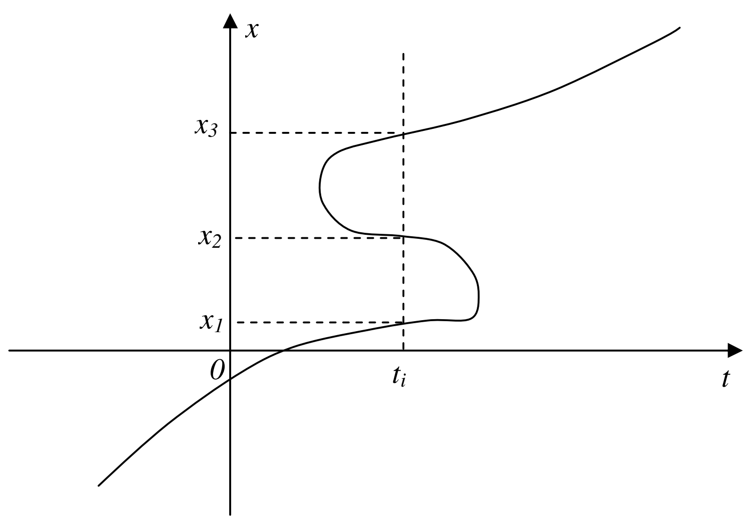
b)





Si bien estos gráficos representan a funciones, estas no pueden corresponder ser funciones de movimiento, es decir no pueden describir el movimiento de un cuerpo. Esto se debe a que si observamos que un cuerpo está en una determinada posición en un instante de tiempo no lo podremos encontrar, en un tiempo posterior, en otra posición sin que haya pasado por todas las otras posiciones que unen dichos puntos. Por lo tanto las funciones que describen el movimiento de cuerpos deben ser funciones continuas.

c)



Este gráfico no corresponde a una función y tampoco puede representar a la función de movimiento de un cuerpo pues para determinados instantes, t_i, el cuerpo se encuentra en varias posiciones diferentes.

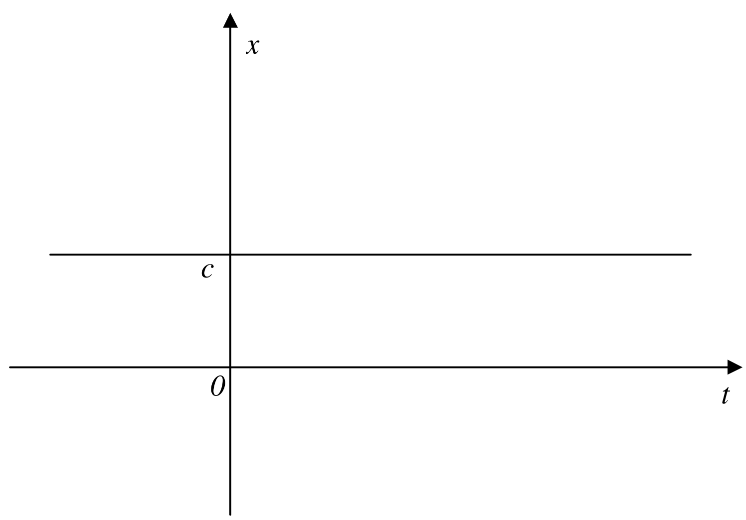
En resumen, las relaciones entre los valores de las coordenadas (x_i) y de los tiempos (t_i) para representar el movimiento de un cuerpo debe ser una función continua (es decir que su gráfica no puede tener saltos) y definida en todo el intervalo de interés. Más adelante veremos si es necesario imponer mayores condiciones a una función para que pueda representar a la función de movimiento de un cuerpo.

Ejemplos de funciones de movimiento

A continuación vamos a analizar algunas funciones matemáticas que pueden representar funciones de movimiento. El análisis de estas funciones se realizará de manera muy sucinta pues este tema ha sido estudiado en el curso de nivelación.

Función constante

$x = c \quad \forall t$ y $c \in \Re$ (veamos el caso particular en que $c > 0$)

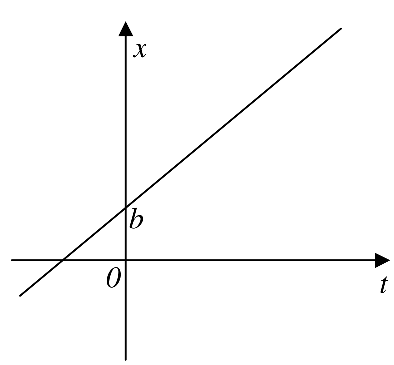


Este gráfico representa la función de movimiento de un cuerpo que está en reposo, para todo tiempo el cuerpo se encuentra en la misma posición.

Función lineal

$x = a\,t + b \quad \forall t$ y a y $b \in \Re$

Sabemos que el gráfico de esta función es una recta y que la constante a es la pendiente y b, la ordenada al origen. Al movimiento que representa esta función se lo denomina "Movimiento rectilíneo uniforme". Ya veremos más adelante a qué se debe esta denominación.



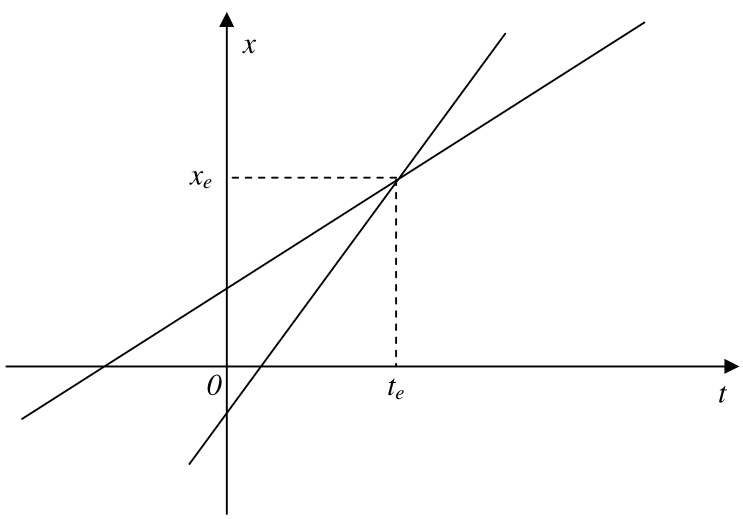
Si dos cuerpos poseen funciones de movimiento que son descriptas por funciones lineales y éstas corresponden a rectas no son paralelas, sus gráficas se cortarán en un punto. Físicamente entendemos esto cómo que en ese punto ambos cuerpos se encuentran, es decir los dos cuerpos estén en la misma posición espacial en el mismo instante de tiempo. Para resolver este problema debemos escribir las funciones de movimiento de ambos cuerpos

$$x^A = a\,t + b$$
$$x^B = \alpha\,t + \beta$$

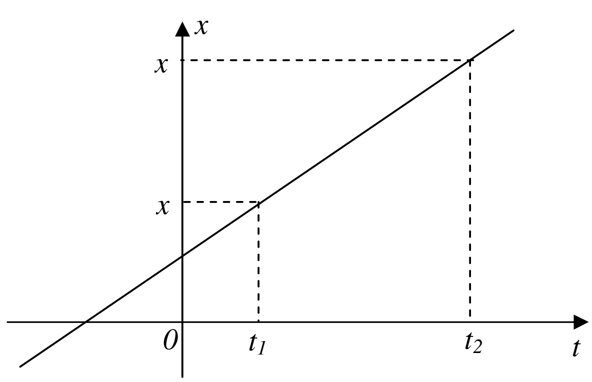
en el punto de encuentro los valores de t y x, que llamaremos t_e y x_e, satisfacen

$$x^A{}_e = a\,t_e + b$$
$$x^B{}_e = \alpha\,t_e + \beta$$

con $x^A{}_e = x^B{}_e$. Resolver el problema físico del encuentro de dos cuerpos se transforma en resolver el problema matemático de encontrar el punto de cruce de dos rectas, para lo cual debemos resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Otro problema físico que podemos plantear es encontrar la función de movimiento de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme, conociendo que en el instante de tiempo t_1 el cuerpo se encuentra en la posición x_1 y en el instante de tiempo t_2 está en la posición x_2. Saber que el cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme nos indica que la función de movimiento será una función lineal. Además sabemos que los pares ordenados (t_1 , x_1) y (t_2 , x_2) pertenecen a dicha recta. Por lo tanto el problema físico de encontrar la función de movimiento se reduce a resolver el problema matemático de encontrar la ecuación de la recta que pasa por los dos pares ordenados indicados.



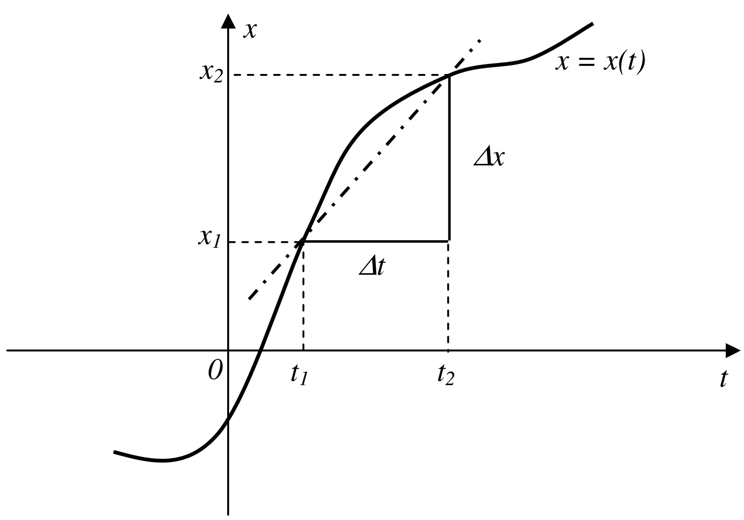
Capítulo 3:

Velocidad media

Con el propósito de describir el movimiento de un cuerpo que se mueve sobre una recta hemos ido incorporando algunos elementos esenciales para lograr dicho objetivo. En primer lugar definimos un sistema de coordenadas y las coordenadas y con ello quedó rigurosamente determinada la posición de los cuerpos en la recta. Luego definimos la función de movimiento del cuerpo ($x = f(t)$ ó $x = x(t)$) que nos da la coordenada del cuerpo en cada instante de tiempo.

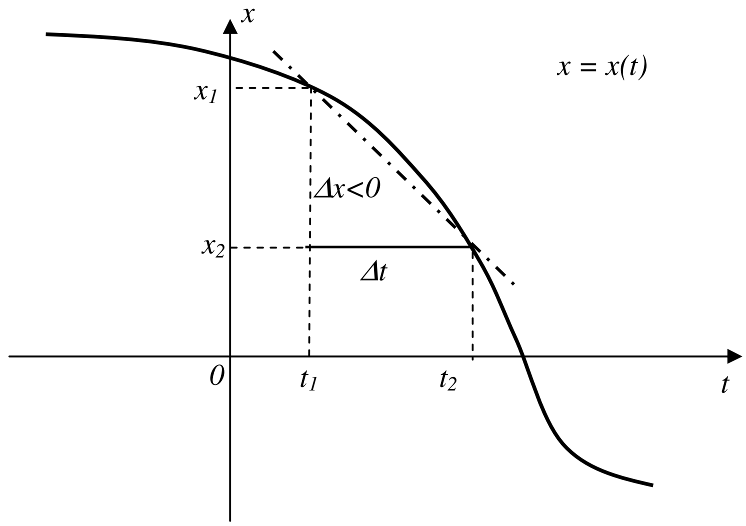
Ahora daremos otro elemento que aporta más información acerca del movimiento de los cuerpos. Definiremos la *velocidad media* que es una magnitud que da información acerca de la "rapidez" con que se desplazan los cuerpos. La velocidad media está definida como el cociente entre el desplazamiento que realiza el móvil y el tiempo que emplea en realizarlo.

$$\overline{V} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textit{donde} \quad x_1 = x(t_1) \quad y \quad x_2 = x(t_2)$$

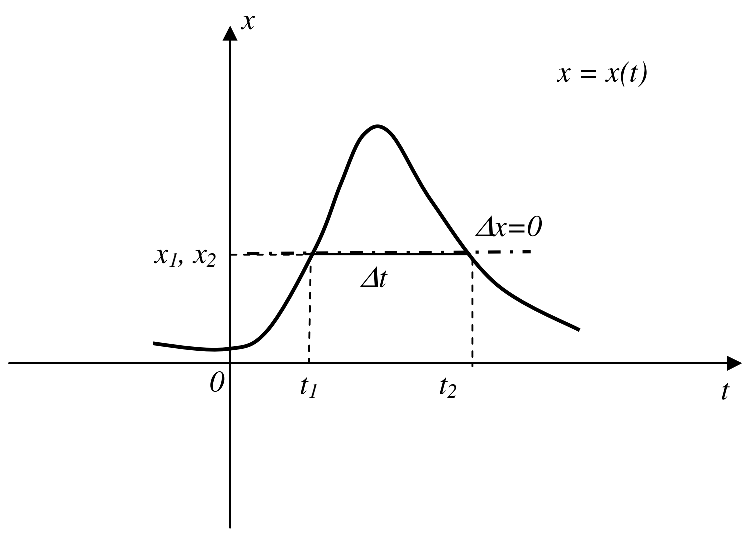


Vemos que el valor de la velocidad media coincide con el valor de la pendiente de la recta secante a la curva *x(t)* que pasa por los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

Cómo Δt es siempre positivo el signo de la *velocidad media* depende del signo de Δx. En el gráfico de arriba la *velocidad media* es positiva y podemos ver en que en el intervalo de tiempo Δt el cuerpo se ha movido hacia las coordenadas crecientes. En el gráfico de abajo la *velocidad media* es negativa y en este caso el cuerpo se ha movido hacia las coordenadas decrecientes en el intervalo de tiempo considerado. El signo de la *velocidad media* depende del sistema de coordenadas al cual se refiera el movimiento del cuerpo. Si hubiéramos elegido un sentido diferente para las coordenadas crecientes los signos en la *velocidad media* cambiaría en ambos casos.



Puede ocurrir que el cuerpo haya ido modificando su posición, pero que la velocidad media sea igual a cero si elegimos un intervalo de tiempo para el cual el cuerpo se encontraba en la misma posición en ambos extremos del mismo como se ve en el próximo gráfico.



Cómo vemos esta definición de la velocidad media nos da información de cuan rápidamente el cuerpo modifica su posición en el intervalo considerado y además el signo nos da información de hacia donde se está moviendo (hacia las coordenadas crecientes o en dirección inversa). Por lo tanto ya no utilizaremos la definición intuitiva de velocidad que traíamos del secundario según la cual $V = d/t$, donde d es la distancia recorrida por el cuerpo y t el tiempo utilizado para recorrer esa distancia. Pues en esta definición no hay referencia al sistema de coordenadas ni un signo que indique el sentido del movimiento.

Como las variaciones de posición las medimos en unidades de longitud (*[Δx]=L* en cm, m, km, etc.) y los intervalos de tiempo en unidades de tiempo (*[Δt]=t* en s, h, etc.) las unidades en que se mide la velocidad media son:

$$[\overline{V}] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{L}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{cm}{s};\frac{m}{s};\frac{km}{h}\cdots$$

Cálculo de la velocidad media para algunas funciones de movimiento

Analicemos ahora la velocidad media para algunas de las funciones de movimiento estudiadas en el capítulo 2. Pero antes de realizar este análisis definamos la notación que utilizaremos. Para calcular la velocidad media debemos realizar el siguiente cálculo:

$$\overline{V} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad donde \quad x_1 = x(t_1) \quad y \quad x_2 = x(t_2)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = t_1 + \Delta t$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)$$

Comencemos a calcular la velocidad media para algunos movimientos unidimensionales simples los cuales son descriptos por las funciones de movimiento analizadas previamente.

a) Función constante: $x(t) = a_0$

$$x(t_1) = a_0 \quad y \quad x(t_2) = a_0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{V} = \frac{a_0 - a_0}{t_2 - t_1} = 0 \quad \forall t$$

Vemos que independiente del intervalo de tiempo que tomemos la velocidad media es nula. Esto es compatible con el movimiento descrito por esta función de movimiento, la cual corresponde a un cuerpo en reposo.

b) Función lineal: $x(t) = a_1\ t + a_0$

$$x(t_1) = a_1 t_1 + a_0 \quad y \quad x(t_2) = a_1 t_2 + a_0$$
$$\overline{V} = \frac{(a_1 t_2 + a_0) - (a_1 t_1 + a_0)}{t_2 - t_1} = \frac{a_1 (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = cte \quad \forall t$$

Un cuerpo cuya función de movimiento es una función lineal tiene una velocidad media constante cuyo valor coincide con la pendiente de la recta. Ahora vemos que el movimiento descripto por esta función se denomina Movimiento Rectilíneo Uniforme pues el cuerpo se mueve sobre una recta y su velocidad media es constante independiente de los instantes t_1 y t_2 que elijamos para su cálculo.

En las dos funciones de movimiento en las cuales hemos calculado la velocidad media (función constante y función lineal) la velocidad media es constante, es decir independiente del intervalo de tiempo utilizado para su cálculo. En ambos casos la recta secante, que une los dos puntos tomados para el cálculo de la velocidad media, coincide con la función de movimiento.

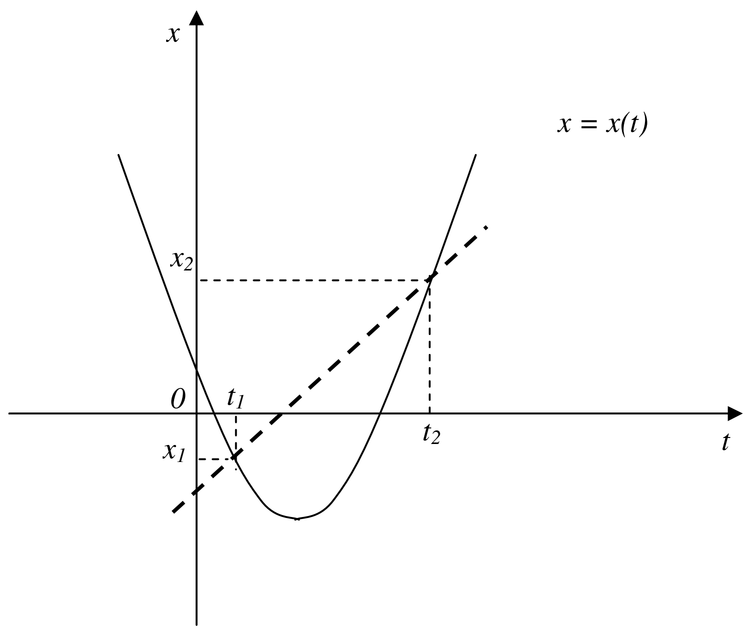
c) Polinomio de segundo grado: $x(t) = a_2\, t^2 + a_1\, t + a_0$

$$x(t_1) = a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0 \quad y \quad x(t_2) = a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0$$

$$\overline{V} = \frac{\left(a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0\right) - \left(a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0\right)}{t_2 - t_1}$$

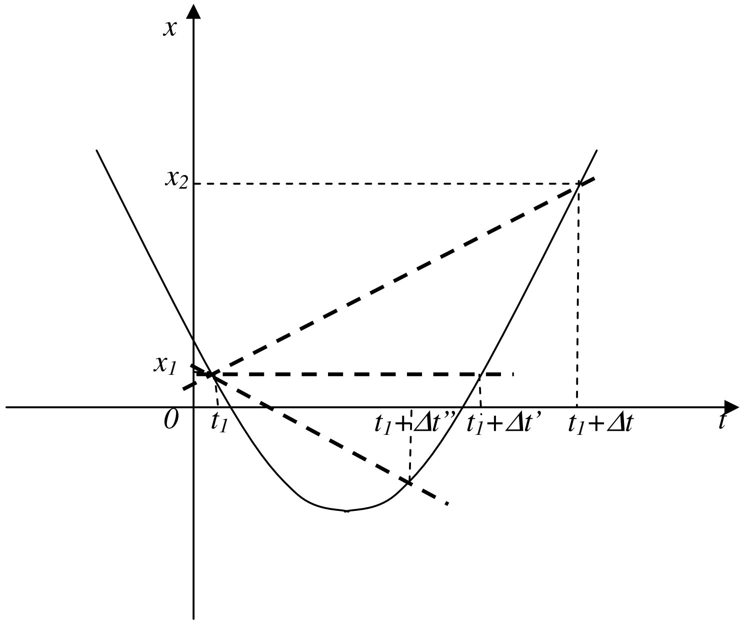
$$\overline{V} = \frac{a_2 (t_2^2 - t_1^2) + a_1 (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\overline{V} = a_2 (t_2 + t_1) + a_1 = a_2 (2t_1 + \Delta t) + a_1$$

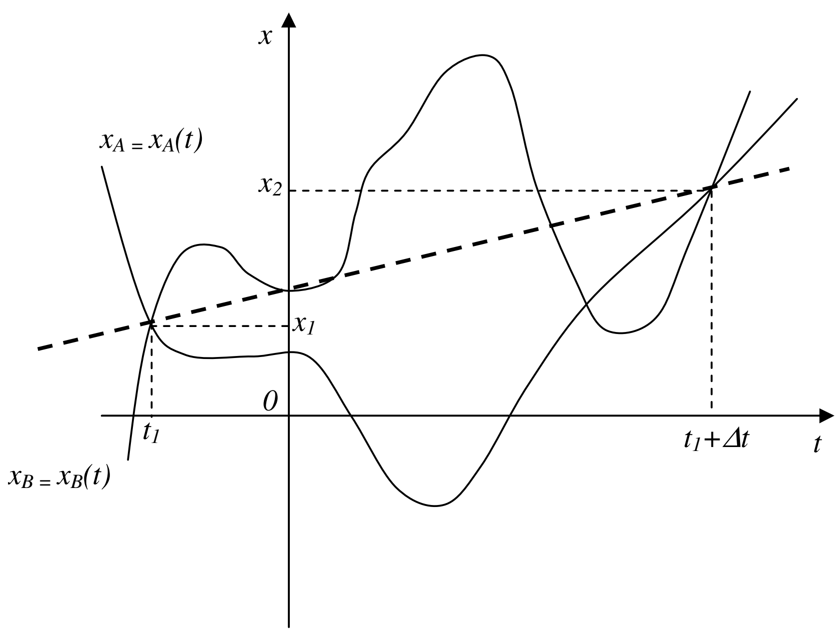


Cómo vemos, en el caso en que la función de movimiento del cuerpo sea un polinomio de segundo grado, la velocidad media ya no es constante y depende del valor de t_1 y del intervalo de tiempo Δt elegidos para su determinación. Es decir que aunque mantengamos t_1 constante la velocidad media variará al cambiar Δt, pudiendo llegar a ser cero.

Podríamos seguir analizando la velocidad media para otras funciones de movimiento tan o más complicadas que la anterior y encontraríamos que, salvo para la función lineal, en general la velocidad media depende de los valores elegidos para Δt y t_1. Como vemos en el gráfico de abajo, dependiendo el intervalo tomado, la velocidad media para la misma función de movimiento puede ser positiva, nula o negativa. Esto significa que la velocidad media da una información relacionada a todo el intervalo y por lo tanto puede variar dependiendo del intervalo de tiempo que consideremos.

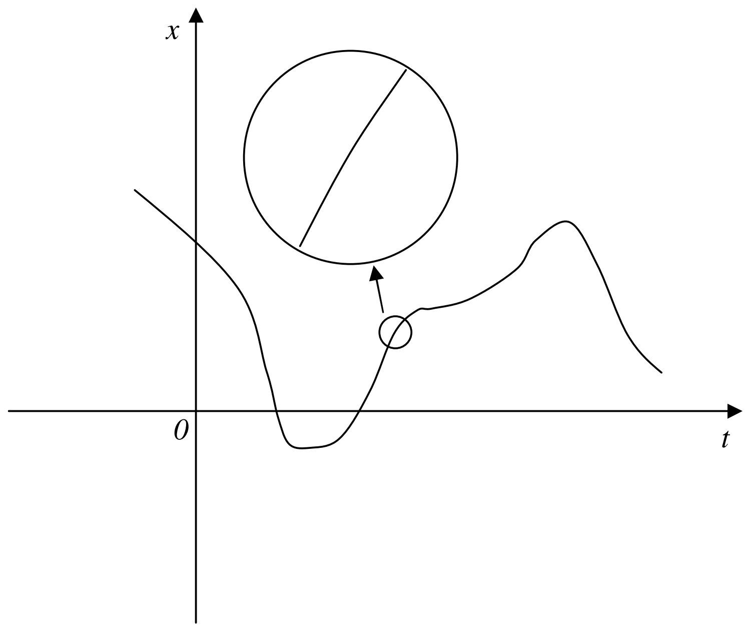


En particular podemos tener dos movimientos totalmente diferentes para los cuales la velocidad media sea la misma en el mismo intervalo de tiempo.



Como vemos, salvo cuando la función de movimiento es una función constante o una función lineal, el concepto de velocidad media no es un parámetro que permita caracterizar adecuadamente el movimiento del cuerpo. Por lo tanto debemos ver como podemos definir la velocidad de un cuerpo con el propósito de obtener un parámetro que nos sea más útil en la caracterización del movimiento de un cuerpo.

Como la velocidad media caracteriza correctamente el movimiento rectilíneo uniforme (la función de movimiento es lineal) lo que podemos hacer como primera opción es restringir el intervalo de tiempo en el cual vamos a calcular la velocidad media. Podemos elegir un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño de manera tal que en él el movimiento pueda ser considerado aproximadamente rectilíneo y uniforme.



Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo elegido para el cálculo de la velocidad media, el movimiento en dicho intervalo más se parecerá a un movimiento uniforme. En este intervalo la velocidad media que calculemos será constante y por lo tanto nos da información de cómo varía la posición del cuerpo en un dado instante de tiempo y un entorno reducido del mismo. El problema es que depende del comportamiento de la función de movimiento cuán pequeño debe ser el intervalo de tiempo de manera tal que podamos considerar el movimiento en él como uniforme. Para solucionar este problema lo que podemos hacer es tomar un intervalo de tiempo y luego analizar que ocurre con la velocidad media cuando hacemos a éste tan pequeño como queramos, es decir hacer tender el tamaño del intervalo de tiempo a cero ($\Delta t \to 0$). El posible inconveniente que se nos puede presentar es que en el cálculo de la velocidad media estamos haciendo tender a cero el denominador. Sin embargo cuando el intervalo de tiempo tiende a cero también tiende a cero la variación de la posición del cuerpo ($\Delta x \to 0$) y por lo tanto es de esperar que el cociente $\Delta x/\Delta t$ tienda a un valor finito cuando $\Delta t \to 0$.

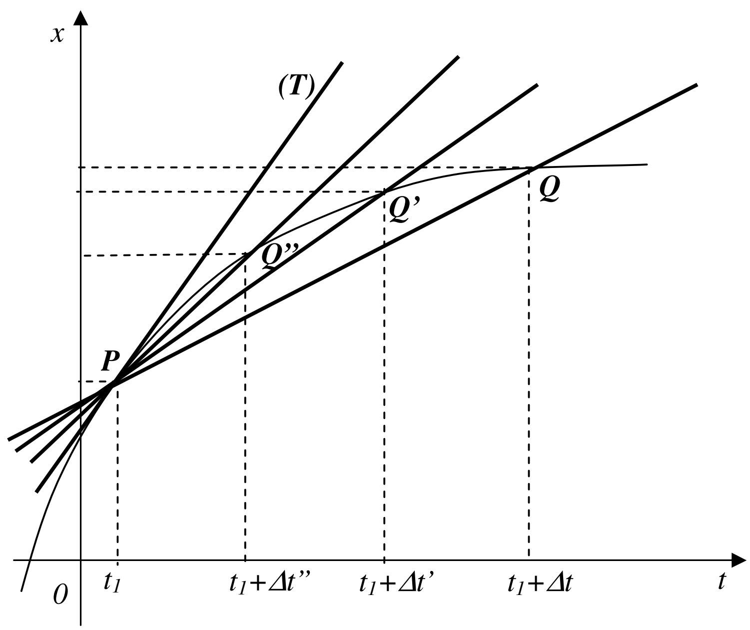
Si calculamos la velocidad media haciendo tender el intervalo a cero entonces la velocidad media no será una función del intervalo de tiempo sino del instante de tiempo en el cual estamos realizando el cálculo, por lo tanto estaremos obteniendo una información que es función de un determinado instante de tiempo (tal como es la función de movimiento), por lo tanto a este cálculo ya no nos dará la velocidad media del cuerpo sino la *velocidad instantánea*. Entonces definimos:

$$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

donde:

$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)$
$\Delta t = t_2 - t_1 = (t_1 + \Delta t) - t_1$

Analicemos geométricamente que es lo que estamos haciendo en este proceso. Cuando evaluábamos la velocidad media estábamos calculando la pendiente de la recta secante que unía los dos puntos utilizados para el cálculo.



Cuando hacemos tender el intervalo de tiempo a cero ($\Delta t \to 0$, $\Delta t > \Delta t' > \Delta t''$ ...) para la determinación de la velocidad media vamos calculando la pendiente de las distintas rectas secantes ($\overline{PQ}, \overline{PQ'}, \overline{PQ''}, ...$). En el límite cuando $\Delta t \to 0$ las rectas secantes van tendiendo a la recta tangente (***T***) a la función de movimiento en el punto (t_1, $x(t_1)$). Por lo tanto, el valor de la velocidad instantánea del cuerpo para un determinado instante de tiempo es la pendiente de la recta tangente a la función de movimiento en dicho instante de tiempo.

Al hacer tender a cero el intervalo de tiempo en el cual calculamos la velocidad media estamos realizando el cálculo de lo que denominamos velocidad del cuerpo (ó velocidad instantánea) y que está definida como:

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esta es, desde el punto de vista matemático, la definición de la derivada de la función *x(t)* respecto a *t*; por lo tanto, como la función de movimiento es continua, nosotros determinamos la velocidad instantánea de un cuerpo realizando su derivada respecto al tiempo.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Definición de derivada

Por un momento dejaremos de lado la física y nos concentraremos en desarrollar el concepto de la derivada de una función. Ya hemos visto el concepto geométrico de derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva. Supongamos que tenemos una función *y* de la variable independiente *x* (*y* = *y(x)*) de la cual queremos calcular su derivada. Para calcular la derivada de la función respecto a su variable independiente debemos hacer

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pero este cálculo implica realizar el límite de una función, concepto que aún no hemos definido. Nosotros vamos a realizar una definición muy simple y elemental del concepto de límite de una función. Vamos a decir que el límite de una función, cuando la variable independiente tiende a un determinado valor, es el valor al cual tiende la función, independiente de que la función esté definida o no en dicho punto. Analicemos algunos ejemplos simples.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

$\lim_{x \to a^-} \left(\frac{1}{x-a} \right) = -\infty$ (el símbolo a^- significa que *x* tiende a *a* por valores menores a *a*)

$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{1}{x-a} \right) = +\infty$ (el símbolo a^+ significa que *x* tiende a *a* por valores mayores a *a*)

Una definición más formal de límite sería que el límite de una función *y(x)*, cuando *x* tiende a *a*, es L

$$\lim_{x \to a} y(x) = L$$

si se verifica que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \textit{tal que si} \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |y(x) - L| < \varepsilon$$

__Reglas de derivación__

Analicemos a continuación algunas reglas de la derivada.

a) Derivada de una función multiplicada por una constante:

Supongamos que tenemos una función *y(x) = C f(x)* cuya derivada deseamos calcular. Aplicando la definición de derivada tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C\frac{df}{dx}$$

Por lo tanto la derivada de una función multiplicada por una constante es la constante por la derivada de la función.

b) Derivada de una suma de funciones:

Tenemos una función que es suma de dos funciones y deseamos calcular su derivada.

y(x) = f(x) + g(x)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Entonces la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

c) Derivada del producto de dos funciones:

Sea la función *y(x) = f(x) . g(x)*. Su derivada será:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

en el numerador sumo y resto $f(x).g(x+\Delta x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{dg}{dx}$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.

Derivadas de funciones simples

a) $y(x) = x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

entonces

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}=1$$

b) $y(x) = x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot(2x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^2}{dx}=2x$$

c) $y(x) = x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^3}{dx}=3x^2$$

d) $y(x) = x^n$ *con* $n \in \aleph$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+(n(n-1)/2)\cdot x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n-x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\left(nx^{n-1}+(n(n-1)/2)\cdot x^{n-2}\Delta x^1+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+(n(n-1)/2)\cdot x^{n-2}\Delta x^1+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)=n\cdot x^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=n\cdot x^{n-1}$$

e) $y(x) = 1/x = x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{x\cdot(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{(x^2+x\cdot\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^{-1}}{dx}=-x^{-2}$$

Basándonos en los resultados anteriores podemos generalizar diciendo que si

$$y(x) = x^k \quad k \in Z$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^k}{dx} = k \cdot x^{k-1}$$

f) $y(x) = x^{n/m}$ *con n y m* $\in \aleph$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{n/m} - x^{n/m}}{\Delta x}$$

$$y = x^{n/m} \quad \Rightarrow \quad y^m = x^n$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) \quad \Rightarrow \quad y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y = (x+\Delta x)^{n/m}$$

$$(y+\Delta y)^m = (x+\Delta x)^n$$

desarrollando el binomio en ambos miembros tenemos

$$y^m + m \cdot y^{m-1} \cdot \Delta y + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \cdot \Delta y^2 + \cdots + \Delta y^m =$$
$$x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n$$

eliminando y^m con x^n y sacando factores comunes Δy y Δx respectivamente nos queda:

$$m \cdot y^{m-1} \cdot \Delta y + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \cdot \Delta y^2 + \cdots + \Delta y^m =$$
$$n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n$$

$$\Delta y \cdot (m \cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \cdot \Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}) =$$
$$\Delta x \cdot (n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1})$$

$$\Delta y \cdot (m \cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \cdot \Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}) =$$
$$\Delta x \cdot (n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}}{m \cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \cdot \Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}}$$

tomando límite para $\Delta x \to 0$ en ambos miembros y recordando que cuando $\Delta x \to 0$ se verifica que $\Delta y \to 0$ queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}}{m \cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \cdot \Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot x^{n-1}}{m \cdot y^{m-1}}$$

$$y^{m-1} = \frac{y^m}{y} = \frac{x^n}{x^{\frac{n}{m}}} = x^{n-\frac{m}{m}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{x^{n-\frac{m}{m}}} = \frac{n}{m} x^{n-1-n+\frac{m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{m}{m}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{\frac{m}{m}}}{dx} = \frac{n}{m} x^{\frac{m}{m}-1}$$

Por lo tanto podemos decir que

$$y(x) = x^k \quad k \in \Re$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^k}{dx} = k \cdot x^{k-1}$$

Derivada de una función compuesta

Sea una función *z(x) = z[y(x)]*

$$\frac{dz[y(x)]}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z[y(x+\Delta x)] - z[y(x)]}{\Delta x}$$

multiplico y divido por $\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z[y(x+\Delta x)] - z[y(x)]}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{y(x + \Delta x) - y(x)}}{\mathrm{y(x + \Delta x) - y(x)}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z[y(x+\Delta x)] - z[y(x)]}{\mathrm{y(x + \Delta x) - y(x)}} \cdot \frac{\mathrm{y(x + \Delta x) - y(x)}}{\Delta \mathrm{x}}$$

$$\Delta z = z[y(x+\Delta x)] - z[y(x)]$$

$$\Delta y = \mathrm{y(x + \Delta x) - y(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta \mathrm{y}} \cdot \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$$

sabemos que cuando $\Delta x \to 0$ se verifica que $\Delta y \to 0$ podemos escribir

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

podemos generalizar para el caso de que tengamos más de una composición de funciones, es decir supongamos que tenemos una función *f = f(g(h(j(…….(y(x))))))*, la derivada será

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dj} \cdots\cdots \frac{dy}{dx}$$

Esta regla de derivación se denomina regla de la cadena.

Para una mejor comprensión analicemos un caso particular. Sea $z[y(x)] = 1/y(x)$, ó $z(x) = [y(x)]^{-1}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Podemos utilizar este resultado para deducir cuál es la derivada de un cociente de funciones. Sea $y(x) = f(x)/g(x)$

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

utilizando la expresión para la derivada de un producto de funciones tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{1}{g(x)} + f \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{1}{g(x)} + f \cdot \left[-\frac{1}{(g(x))^2}\right] \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g(x) - f \cdot \frac{dg}{dx}}{(g(x))^2}$$

Continuemos analizando la derivada de algunas funciones simples, calculemos ahora la derivada de la función $y = sen(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\left(x+\Delta x\right)-sen(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x)\cdot\cos(\Delta x)+\cos(x)\cdot\sin(\Delta x)-sen(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}+sen(x)\cdot\frac{(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}\right)$$

utilizando al relación trigonométrica que relaciona el seno del ángulo mitad con el coseno del ángulo tenemos

$$1-\cos(\alpha)=2\cdot sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

entonces

$$\cos(\Delta x)-1=-2\cdot sen^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

reemplazando nos queda

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}-2\cdot\frac{sen(x)}{\Delta x}\cdot sen^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right)$$

multiplicando y dividiendo por *Δx/4* el segundo término encerrado en el paréntesis no alteramos la expresión

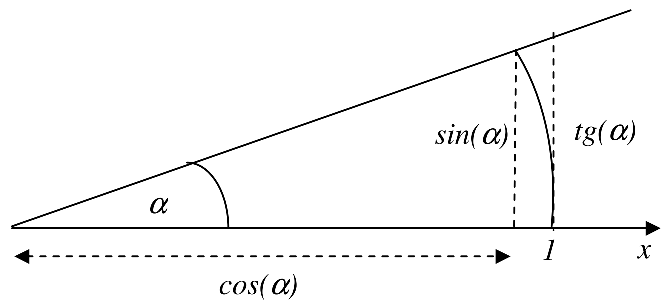
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}-2\cdot\frac{sen(x)}{\Delta x}\cdot\frac{sen^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{4}}\cdot\frac{\Delta x}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}-\frac{1}{2}\cdot sen(x)\cdot\frac{sen^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}\cdot\Delta x\right)$$

Para poder completar este cálculo debemos conocer a qué es igual el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right)\quad ó\quad \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{sen(\alpha)}{\alpha}\right)$$

analicemos el comportamiento de $\frac{sen(\alpha)}{\alpha}$



En la figura podemos distinguir tres figuras geométricas con áreas crecientes, un triángulo rectángulo cuyos catetos valen *cos(α)* y *sen(α)*, un sector circular de radio *1* y apertura angular α y finalmente otro triángulo rectángulo cuyos catetos valen *1* y *tg(α)*. Sabemos que el área de un triángulo es igual al producto de la base por la altura divido dos. Para calcular el área del sector circular recordemos que el área de un círculo de radio r es igual a $A = \pi.r^2$. Pero conociendo que el círculo completo corresponde a un sector circular cuya apertura angular es 2π podemos escribir el área como $A = 2\pi.r^2/2$. Si tuviéramos medio círculo entonces su área será $A = \pi.r^2/2$. Por lo tanto el área de un sector circular de radio r y apertura angular α será $S_\alpha = \alpha.r^2/2$.

Escribiendo la relación entre las áreas nos queda:

$$\frac{\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha)}{2} < \frac{\alpha \cdot 1^2}{2} < \frac{1 \cdot tg(\alpha)}{2}$$

multiplicando todo por 2 queda

$$\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha) < \alpha < tg(\alpha) \quad ó \quad \cos(\alpha)\cdot sen(\alpha) < \alpha < \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

como para ángulos pequeños *sen(α)* es positivo podemos dividir todo por *sen(α)* sin que se alteren las relaciones y nos queda

$$\cos(\alpha) < \frac{\alpha}{sen(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

cómo lo que necesitamos analizar es el cociente *sen(α)/α* cuando α tiende cero invertimos las expresiones y las relaciones entre ellas

$$\frac{1}{\cos(\alpha)} > \frac{sen(\alpha)}{\alpha} > \cos(\alpha)$$

analicemos el comportamiento de las dos funciones que acotan a *sen(α)/α* cuando α tiende cero

$$si\ \alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) \to 1^- \ \ y \ \frac{1}{\cos(\alpha)} \to 1^+$$

por lo tanto, como *sen(α)/α* está acotado por estos valores tenemos

$$\lim_{\alpha \to 0}\left(\frac{sen(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$

volviendo a nuestro cálculo de la derivada de la función *sen(x)* tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{2}\cdot sen(x)\cdot\left(\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\right)^2\cdot\Delta x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(sen(x))}{dx} = \cos(x)$$

Ahora calculemos la derivada de la función *y(x) = cos(x)*, para esto podemos hacerlo de diversas maneras. Una de ellas es utilizar relaciones entre funciones trigonométricas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = \frac{d\left(sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{dx} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -sen(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$$

otra forma es utilizar las propiedades de la derivada de funciones compuestas y las derivadas de las funciones simples que hemos estudiado hasta ahora.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = \frac{d\left(\left(1-sen^2(x)\right)^{1/2}\right)}{dx}$$

analicemos la función compuesta *f(g(y(x)))* que tenemos

$$y(f(g(x))) = \left(1-sen^2(x)\right)^{1/2}$$

identificando

$$y(f) = f^{1/2}$$

donde

$$f(g) = 1-g^2$$

con

$$g(x) = sen(x)$$

La derivada de esta función compuesta es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df}\cdot\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{dy}{df} = \frac{1}{2}\cdot f^{-1/2}\ ;\ \frac{df}{dg} = -2g\ ;\ \frac{dg}{dx} = \cos(x)$$

reemplazando obtenemos

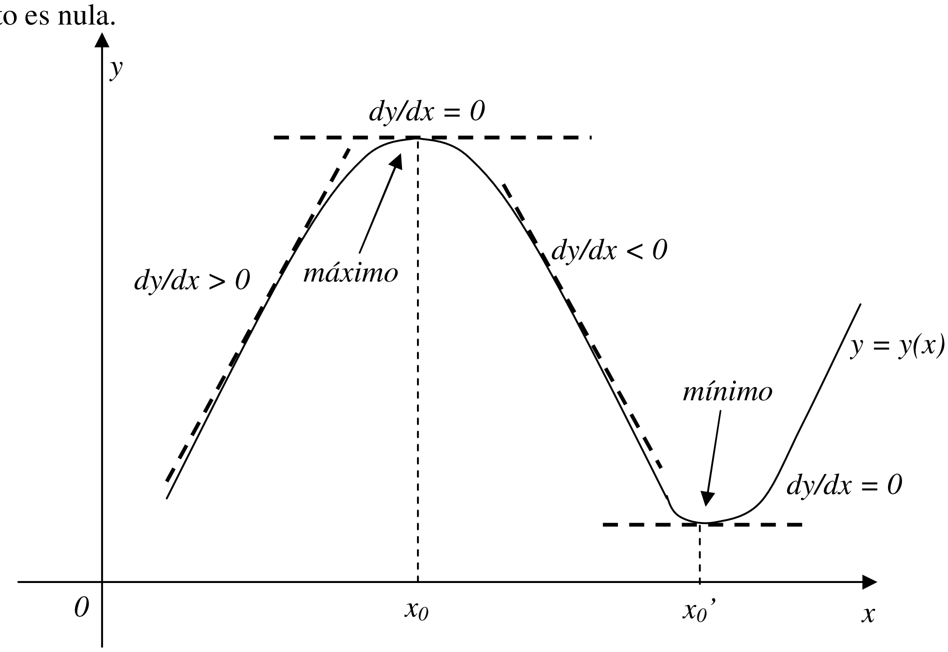
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (1 - sen^2(x))^{-1/2} \cdot (-2 \cdot sen(x)) \cdot \cos(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - sen^2(x))^{1/2}} \cdot (-2 \cdot sen(x)) \cdot \cos(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-2 \cdot sen(x)) \cdot \cos(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$$

A este conjunto de derivadas de funciones simples podemos agregar las siguientes derivadas:

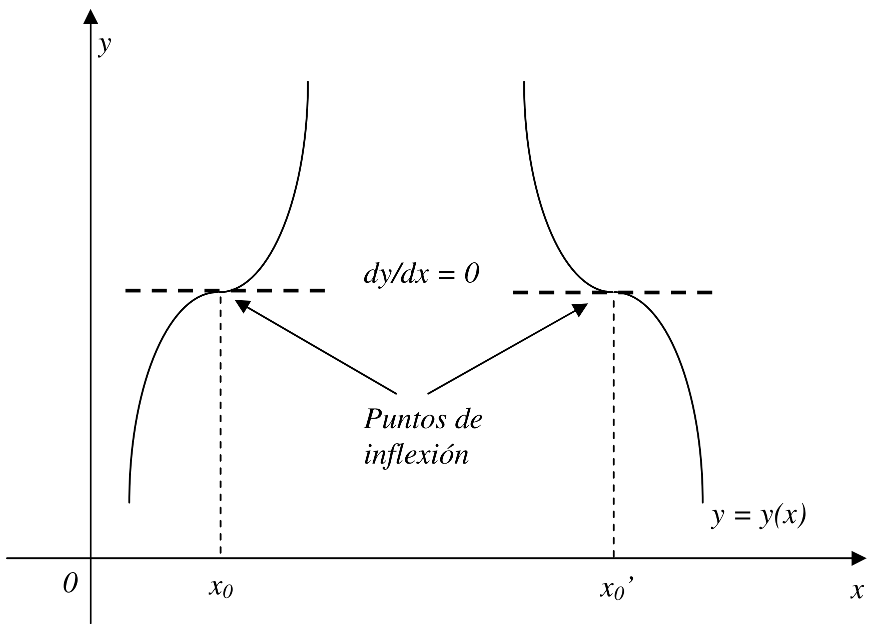
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

Utilización de la derivada para el análisis de funciones

Como se puede observar en la figura cuando en un intervalo la función es creciente el valor de la derivada de la función en dicho intervalo es positivo, cuando la función es decreciente en un dado intervalo la derivada es negativa en ese intervalo. Pero cuando la función tiene un máximo o un mínimo la pendiente de la recta tangente a dicho punto es nula.



Los valores de la variable x en los cuales la derivada de la función se anula se denominan puntos críticos. Los puntos críticos (x_0) pueden corresponder a las ordenadas de máximos ó mínimos de la función. Existen también otros puntos críticos donde la derivada de la función se anula y no corresponde a un máximo ó un mínimo, son puntos donde la función cambia de curvatura y se denominan puntos de inflexión.



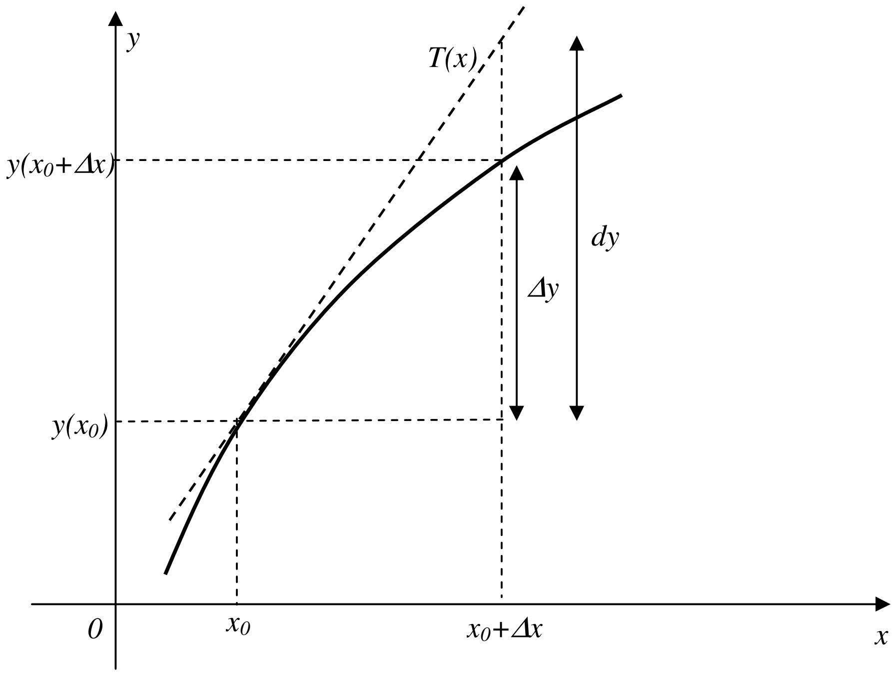
Para determinar si un punto crítico (derivada nula) corresponde a un máximo, mínimo o un punto de inflexión debemos analizar el comportamiento de la derivada de la función en un entorno del punto crítico x_0:

- Si la derivada cambia de signo en el punto crítico x_0 y pasa de ser positiva para valores menores a x_0 y negativa para valores mayores a x_0 entonces dicho punto crítico corresponde a un máximo relativo
- Si la derivada cambia de signo en x_0 y pasa de ser negativa para valores menores a x_0 y positiva para valores mayores a x_0 entonces dicho punto crítico corresponde a un mínimo relativo.
- Si la derivada no cambia de signo en el punto crítico x_0 entonces este punto crítico corresponde a un punto de inflexión.

Diferencial

Dada una función $y = y(x)$ se define como diferencial de la función (dy) para un dado valor de la variable independiente (x_0) al producto de la derivada de la función evaluada en x_0 (la cual debe existir) multiplicada por el incremento de la variable independiente. En el gráfico podemos ver que el diferencial de la función es igual a la variación de la recta tangente a la función en x_0 ($T(x)$) cuando la variable independiente se incrementa en una cantidad diferencial de x (dx).

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot dx$$



Como vemos en el gráfico, si la función tiene un comportamiento suave (su derivada no varía mucho), la variación de la función cuando la variable independiente cambia en Δx ($\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$) es similar a la variación que tiene la recta tangente a la curva (dy) es decir que $\Delta y \cong dy$. Es decir que podemos aproximar la variación de una función por la variación de la recta tangente.

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot dx = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \quad donde \quad \Delta x = dx$$

$$\Delta y \cong dy$$

Esto nos permite estudiar el comportamiento de una función alrededor de cierto valor x_0 de la variable independiente simplemente conociendo el valor de la función y su derivada en dicho punto. De esta manera podemos estimar los valores que va a tomar la función alrededor de dicho punto.

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \cong dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

entonces

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

Analicemos una aplicación particular del diferencial para la estimación de valores de una función. Supongamos que deseamos calcular los valores de la función seno para ángulos pequeños y no disponemos de una calculadora para realizar dicho cálculo. Nosotros sabemos que sen(0) = 0 y que la d[sen(x)]/dx = cos(x) y que evaluada en cero da 1. Entonces tenemos:

$$y(x) = sen(x)$$
$$sen(0) = 0$$
$$\left.\frac{d(sen(x))}{dx}\right|_{x=0} = \cos(0) = 1$$
$$y(0+\Delta x) \cong y(0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} \cdot \Delta x$$
$$sen(0+\Delta x) \cong 0 + 1 \cdot \Delta x$$
$$\Delta x = x - 0$$

entonces

$$sen(x) \cong x$$

donde el ángulo *x* está expresado en radianes. Veamos en la siguiente tabla para algunos valores del ángulo (expresado en radianes) la validez de esta aproximación.

x [º]	*x* [rad]	*sin(x)*	Error [%] (*)
0	0	0	-
1	0.0174533	0.0174524	-0.005
2	0.0349066	0.0348995	-0.020
3	0.0523599	0.0523360	-0.046
4	0.0698132	0.0697564	-0.081
5	0.0872665	0.0871557	-0.127
6	0.1047198	0.1045286	-0.183
7	0.1221731	0.1218693	-0.249
8	0.1396263	0.1391731	-0.325
9	0.1570796	0.1564345	-0.411
10	0.1745329	0.1736482	-0.507
12	0.2094395	0.2079117	-0.729
15	0.2617994	0.2588191	-1.138

(*) El error porcentual está calculado utilizando la expresión: *100 . (sin(x) – x)/sin(x)*

Capítulo 4:

Aceleración

Podemos seguir buscando otros parámetros que caractericen el movimiento de un cuerpo puntual. En primer lugar definimos la posición del cuerpo en el espacio mediante la utilización de un sistema de coordenadas. Referida a este sistema podemos tener la función de movimiento del cuerpo, la cual evaluada en un determinado instante de tiempo nos dará la coordenada en dicho instante y por lo tanto nos permita conocer la ubicación espacial del cuerpo. Después definimos velocidad del cuerpo que nos caracterizaba cómo el cuerpo variaba su posición con el tiempo. Hemos visto que la función velocidad se obtiene derivando la función de movimiento del cuerpo con respecto al tiempo. La función velocidad evaluada en un instante de tiempo nos dará información de cuán rápido cambia la coordenada del cuerpo y en qué dirección, en dicho instante.

Vamos ahora a definir un parámetro que caracteriza cómo un cuerpo varía su velocidad con el tiempo. Haciendo un análisis similar al realizado cuando queríamos definir la velocidad del cuerpo podemos definir la aceleración del cuerpo como la derivada de la función velocidad con respecto al tiempo.

$$a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Como sabemos que

$$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

entonces podemos expresar la aceleración como la derivada con respecto al tiempo de la derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

es decir que la aceleración es la derivada segunda de la función de movimiento con respecto al tiempo dos veces.

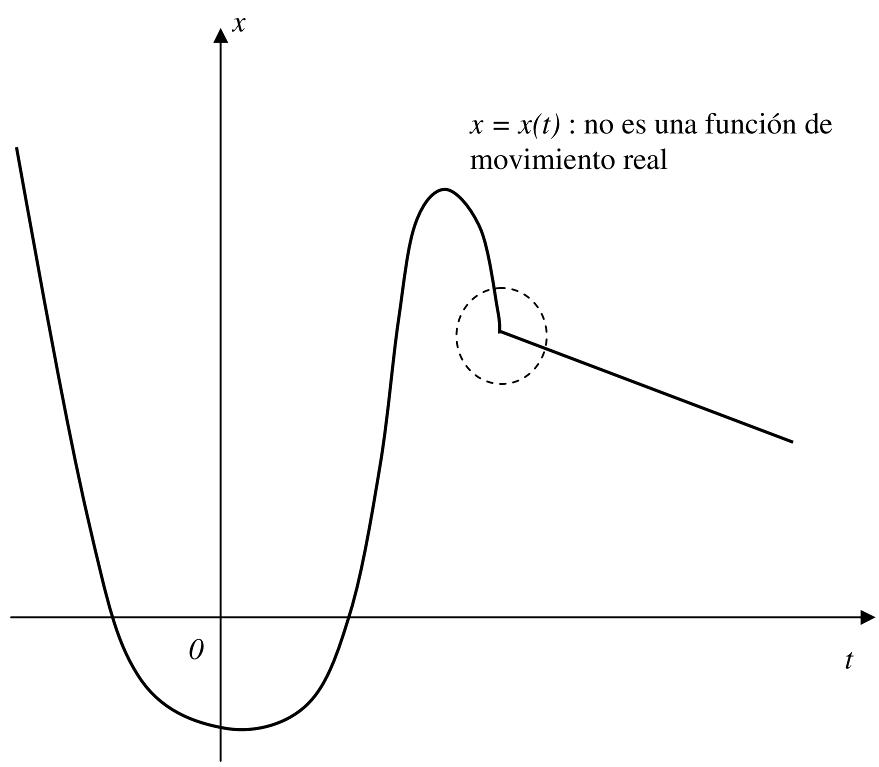
La función aceleración es una función del tiempo y podríamos estudiar qué información nos da su derivada con respecto al tiempo y así seguir analizando otras derivadas de orden superior. Desde el punto de vista matemático podemos seguir derivando estas funciones mientras sus derivadas existan y estas derivadas nos darán información sobre el comportamiento de las funciones. Sin embargo desde el punto de vista físico sólo nos interesa hasta la derivada segunda de la función posición, es decir que llegaremos hasta la aceleración. Cuando analicemos la dinámica del movimiento de los cuerpos veremos que las causas que determinan el movimiento de los cuerpos estarán relacionadas con la aceleración que adquiere el cuerpo.

__Condiciones sobre las funciones de movimiento, velocidad y aceleración__

Basándonos en la información experimental que poseemos, habíamos visto que la función de movimiento debía ser una función continua. En base a esa misma información experimental se sabe que la función velocidad también debe ser continua. Sin embargo la función aceleración puede ser discontinua. Para comprender esto último analicemos la siguiente situación, supongamos que estamos en reposo y sostenemos un cuerpo con nuestra mano. En este caso el cuerpo tiene una posición constante, una velocidad constante e igual a cero y por lo tanto también una aceleración nula. Si de pronto soltamos el cuerpo veremos que súbitamente su aceleración pasa de ser igual a cero a tener un valor constante pero distinto de cero, que coincidirá con lo que denominamos aceleración de la gravedad.

Por lo tanto, podemos concluir que las funciones que caracterizan el movimiento de un cuerpo deben satisfacer las siguientes condiciones:

- *Función posición:* debe estar definida en todo el intervalo de interés, ser continua y de derivada continua. Esto implica que el gráfico de esta función no debe presentar ningún punto anguloso pues en dicho punto su derivada sería discontinua y por lo tanto lo sería su velocidad. En el gráfico de más abajo podemos ver un ejemplo de una función que no cumple con estas condiciones.
- *Función velocidad:* debe ser una función continua definida en todo el intervalo de interés.
- *Función aceleración:* debe estar definida en todo el intervalo de interés y puede ser discontinua.



Análisis de funciones de movimiento simples

a) Función constante:

$$x(t) = a_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$$

Vemos que a esta función de movimiento, que describe un cuerpo en reposo, le corresponde una velocidad nula y una aceleración nula.

b) Función lineal:

$$x(t) = a_1 t + a_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = a_1$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$$

Una función lineal describe el movimiento de un cuerpo que se mueve con velocidad constante y aceleración nula. Este movimiento cuya velocidad es constante se denomina *movimiento rectilíneo uniforme*.

c) Polinomio de segundo grado:

$$x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot a_2 \cdot t + a_1$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2 \cdot a_2$$

Un polinomio de segundo grado describe el movimiento de un cuerpo cuya aceleración es constante y diferente de cero. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado*.

Relación entre aceleración, velocidad y función de movimiento

Si conocemos la función de movimiento de un cuerpo tenemos toda la información posible sobre el movimiento mismo. A partir de la función de movimiento podemos calcular la velocidad y la aceleración del cuerpo.

$$x = x(t) \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} v = v(t) \xrightarrow{\frac{dv}{dt}} a = a(t)$$

Pero pocas veces la información que poseemos del sistema es su función de movimiento. En general vamos a conocer la función aceleración o en algunos casos la función velocidad y a partir de esta información deberemos obtener la función de movimiento.

Si por ejemplo nos dan como dato la función velocidad del cuerpo, $v = v(t)$, nosotros sabemos que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

por lo tanto, para poder determinar la función de movimiento del cuerpo debemos resolver esta ecuación, lo que implica encontrar una función del tiempo, $x(t)$, que cuando se derive con respecto al tiempo nos dé como resultado la función velocidad que es dato.

Para resolver esta ecuación debemos realizar la operación inversa a la derivación, la cual se denomina integración.

Integración de funciones simples

Por un momento dejemos de lado la física y analicemos desde un punto de vista matemático muy elemental qué significa realizar la integral de una función. Dada una función f de una variable independiente x, se denomina realizar la integral de dicha función con respecto a la variable independiente, a encontrar una función $y = y(x)$ que satisfaga la siguiente relación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

la integral de la función $f(x)$ se representa como

$$y(x) = \int f(x) \cdot dx$$

a la función $y(x)$ se la denomina la primitiva de $f(x)$

Enumeremos algunas propiedades simples de la integración que se derivan de las propiedades de la derivación

1) La integral de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la integral de la función.

$$y(x) = \int C \cdot f(x) \cdot dx = C \cdot \int f(x) \cdot dx$$

2) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de las funciones.

$$y(x) = \int (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$$

Calculemos ahora la integral de algunas funciones simples:

a) f(x) = x^k

debemos encontrar una función y(x) que satisfaga la relación $\frac{dy}{dx} = x^k$. Como sabemos que la derivada de la variable independiente elevada a una potencia nos da como resultado la variable independiente elevada a la potencia reducida en 1, proponemos como solución *y(x) = A* x^p. *D*eterminemos cuánto debe valer *A* y p para que esta función sea primitiva de *f(x)*

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot p \cdot x^{p-1} = x^k$$

entonces debe ser

$$p - 1 = k \;\Rightarrow\; p = k + 1$$

$$A \cdot p = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{k+1}$$

por lo tanto

$$y(x) = \int x^k \cdot dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}$$

b) *f(x) = cos(x)*

$$y(x) = \int \cos(x) \cdot dx = sen(x)$$

pues

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(sen(x))}{dx} = \cos(x)$$

c) *f(x) = cos(x)*

$$y(x) = \int sen(x) \cdot dx = -\cos(x)$$

dado que $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$

a continuación detallaremos las integrales de algunas funciones simples, cuya validez ustedes pueden comprobar fácilmente:

d) $y(x) = \int \cos(kx) \cdot dx = \frac{1}{k} sen(kx)$

e) $y(x) = \int sen(kx) \cdot dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)$

f) $y(x) = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(x)$

g) $y(x) = \int e^{kx} \cdot dx = \frac{1}{k} e^{kx}$

Integración de las funciones de movimiento

Para tener una completa descripción del movimiento de un cuerpo es necesario conocer su función de movimiento. Ahora analizaremos como obtener la función de movimiento si conocemos la función velocidad o la función aceleración.

Si tenemos como dato la función velocidad del cuerpo, *v(t)*, y deseamos conocer la función de movimiento, *x(t)*, sabemos que entre ambas se verifica la relación

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

entonces la función de movimiento será la integral de la función velocidad.

$$x(t) = \int v(t) \cdot dt$$

sin embargo, si definimos otra función de movimiento que sea igual a la que obtenemos de la integral más una constante

$$x'(t) = x(t) + C \qquad C = cte$$

podemos ver que un cuerpo cuya función de movimiento esté descripta por *x'(t)* también tendrá la misma función velocidad.

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d(x(t)+C)}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

Es decir que cuando integramos la velocidad no podemos determinar de manera unívoca a qué función de movimiento corresponde, porque podemos encontrar infinitas funciones de movimiento, las cuales difieren una de otra en una constante

Para determinar de manera unívoca cuál es la función de movimiento del cuerpo necesitamos que se nos dé más información aparte de su función velocidad. Para ello necesitaremos que nos den como dato cuál es la posición del cuerpo para un determinado instante de tiempo y de esa manera podremos calcular el valor de la constante de nuestra función de movimiento. Analicemos el siguiente ejemplo:

$$sea \quad v(t) = 2\frac{m}{s^2} \cdot t + 3\frac{m}{s}$$

entonces

$$x(t) = \int \left(2\frac{m}{s^2} \cdot t + 3\frac{m}{s} \right) \cdot dt = 2\frac{m}{s^2} \cdot \int t \cdot dt + 3\frac{m}{s} \int dt$$

$$x(t) = 2\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2} t^2 + 3\frac{m}{s} \cdot t + C$$

$$x(t) = 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 3\frac{m}{s} \cdot t + C$$

si sabemos que en t = *1 s* el cuerpo se encontraba en la posición x = *-2 m*

entonces

$$x(1s) = 1\frac{m}{s^2} \cdot (1s)^2 + 3\frac{m}{s} \cdot 1s + C = -2m$$

$$x(1s) = 1m + 3m + C = -2m$$

entonces podemos determinar que C = *-6m* y la función de movimiento de nuestro cuerpo es

$$x(t) = 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 3\frac{m}{s} \cdot t - 6m$$

Si nos dan como dato la función aceleración del cuerpo, *a(t)*, y deseamos conocer la función de movimiento, debemos primero realizar un cálculo intermedio. Es decir que con la función aceleración primero debemos calcular la función velocidad y luego calcular la función de movimiento como hicimos en el ejemplo anterior. Nosotros sabemos que se verifica la relación

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

por lo tanto, podemos determinar la función velocidad del cuerpo realizando la integral de la función aceleración.

$$v(t) = \int a(t) \cdot dt$$

de igual manera a lo que ocurría cuando calculábamos la función posición a partir de la función velocidad, si definimos otra función velocidad que sea igual a la que obtenemos de la integral más una constante

$$v'(t) = v(t) + C \qquad C = cte\,,$$

se puede ver que a las funciones velocidad *v(t)* y *v'(t)* les corresponde la misma función aceleración.

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{d(v(t)+C)}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

Es decir que cuando integramos la función aceleración del cuerpo no podemos determinar de manera unívoca cuál es su función velocidad. Para poder determinar de manera unívoca cuál es la función velocidad del un cuerpo necesitamos que se nos dé más información aparte la función aceleración. Entonces, necesitaremos que nos den como dato cuál es la velocidad del cuerpo para un determinado instante de tiempo para calcular el valor de la constante de la función velocidad.

Una vez determinada la función velocidad podemos determinar la función de movimiento como se explicó antes.

Veamos mediante un ejemplo cómo calcular la función de movimiento a partir de la función aceleración del cuerpo.

$$sea \quad a(t) = 6\frac{m}{s^3}\cdot t - 2\frac{m}{s^2}$$

entonces

$$v(t) = \int\left(6\frac{m}{s^3}\cdot t - 2\frac{m}{s^2}\right)\cdot dt = 6\frac{m}{s^3}\cdot\int t\cdot dt - 2\frac{m}{s^2}\int dt$$

$$v(t) = 6\frac{m}{s^3}\cdot\frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t + C$$

$$v(t) = 3\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t + C$$

si nos dan como información que en *t = 0 s* el cuerpo tenía una velocidad *v = -2 m/s* entonces

$$v(0s) = 3\frac{m}{s^2}\cdot(0s)^2 - 2\frac{m}{s}\cdot 0s + C = -2\frac{m}{s}$$

$$v(0s) = C = -2\frac{m}{s}$$

habiendo determinado que *C = -2m/s* sabemos que la función que describe la velocidad de nuestro cuerpo es

$$v(t) = 3\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t - 2\frac{m}{s}$$

Conociendo la función velocidad podemos determinar la función de movimiento del cuerpo.

$$x(t) = \int\left(3\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t - 2\frac{m}{s}\right)\cdot dt = 3\frac{m}{s^3}\cdot\int t^2\cdot dt - 2\frac{m}{s^2}\int t\cdot dt - 2\frac{m}{s}\int dt$$

$$x(t) = 3\frac{m}{s^3}\cdot\frac{1}{3}t^3 - 2\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s}\cdot t + C'$$

$$x(t) = 1\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s}\cdot t + C'$$

si sabemos que en $t = 1\ s$ el cuerpo se encontraba en la posición $x = 3\ m$, entonces

$$x(1s) = 1\frac{m}{s^3}\cdot(1s)^3 - 1\frac{m}{s^2}\cdot(1s)^2 - 2\frac{m}{s}\cdot 1s + C' = 3m$$

$$x(0s) = C' = 5m$$

sabiendo que $C' = 5m$ la función de movimiento de nuestro cuerpo es

$$x(t) = 1\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s}\cdot t + 5m$$

Como vemos, si nos dan como dato la aceleración del cuerpo y deseamos determinar cuál es la función de movimiento del cuerpo es necesario realizar dos integraciones. La primera, integrando la función aceleración de manera de obtener la función velocidad, y luego integrar ésta para obtener la función de movimiento. Como vemos, cada vez que integramos aparece una constante de integración y requerimos de información adicional del movimiento para poder determinar su valor. Esta información adicional puede ser la velocidad y la posición del cuerpo en el mismo instante de tiempo o dos distintos, como en el ejemplo antes mencionado, o la posición para dos tiempo diferentes. En el caso en que nos den la posición en dos instantes de tiempo no podremos determinar el valor de la constante que se obtiene en la función velocidad en el primer paso, pero como sabemos que es una constante podemos realizar la integral para obtener la función de movimiento y allí determinar las dos constantes como se muestra a continuación.

$$sea \quad a(t) = 6\frac{m}{s^3}\cdot t - 2\frac{m}{s^2}$$

entonces

$$v(t) = \int\left(6\frac{m}{s^3}\cdot t - 2\frac{m}{s^2}\right)\cdot dt = 6\frac{m}{s^3}\cdot\int t\cdot dt - 2\frac{m}{s^2}\int dt$$

$$v(t) = 6\frac{m}{s^3}\cdot\frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t + C$$

$$v(t) = 3\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t + C$$

Conociendo la función velocidad podemos determinar la función de movimiento del cuerpo.

$$x(t) = \int \left(3\frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2} \cdot t - C \right) \cdot dt = 3\frac{m}{s^3} \cdot \int t^2 \cdot dt - 2\frac{m}{s^2} \int t \cdot dt + C \int dt$$

$$x(t) = 3\frac{m}{s^3} \cdot \frac{1}{3} t^3 - 2\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2} t^2 + C \cdot t + C'$$

$$x(t) = 1\frac{m}{s^3} \cdot t^3 - 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + C \cdot t + C'$$

si sabemos que en t = *-1 s* el cuerpo se encontraba en la posición x = *3 m*, y que en el instante t = *1s* la posición era x = *1m* entonces

$$x(0s) = 1\frac{m}{s^3} \cdot (0s)^3 - 1\frac{m}{s^2} \cdot (0s)^2 + C \cdot 0s + C' = 3m$$

$$x(1s) = 1\frac{m}{s^3} \cdot (1s)^3 - 1\frac{m}{s^2} \cdot (1s)^2 + C \cdot 1s + C' = 1m$$

con estas condiciones iniciales conformamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y cuya solución nos permite determinar el valor de las constantes *C* y *C'*.

$$C = -2\frac{m}{s}$$

$$C' = 3m$$

quedando entonces las funciones velocidad y de movimiento como:

$$v(t) = 3\frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2} t - 2\frac{m}{s}$$

$$x(t) = 1\frac{m}{s^3} \cdot t^3 - 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - 2\frac{m}{s} \cdot t + 3m$$

Otro caso de interés a resolver es cuando la información que tenemos sobre el sistema es la función aceleración, pero ésta no es una función continua, por ejemplo:

$$a(t) = \begin{cases} 0\frac{m}{s^2} & t \le 1s \\ 3\frac{m}{s^3} \cdot t & 1s < t \end{cases}$$

y para el instante t = *0s* la velocidad es *v(0) = 2 m/s* y la posición es *x(0) = 3 m*. Integrando la función aceleración podemos obtener la función velocidad

$$v(t) = \begin{cases} C_1 & t \le 1s \\ \frac{3}{2}\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + C_1' & 1s < t \end{cases}$$

Como el dato sobre la velocidad es para $t = 0s$ podemos determinar el valor de la constante C_1. Para determinar el valor de la constante C_1' hacemos uso de la continuidad de la función velocidad.

$$v(0s) = C_1 = 2\frac{m}{s}$$
$$v(1s) = \frac{3}{2}\frac{m}{s^3}\cdot(1s)^2 + C_1' = 2\frac{m}{s}$$
$$C_1' = \frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

La función velocidad resulta

$$v(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s} & t \le 1s \\ \frac{3}{2}\frac{m}{s^3}\cdot t^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{s} & 1s < t \end{cases}$$

Integrando esta función velocidad obtenemos la función de movimiento del cuerpo

$$x(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s}\cdot t + C_2 & t \le 1s \\ \frac{1}{2}\frac{m}{s^3}\cdot t^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{s}t + C_2' & 1s < t \end{cases}$$

Con la información de la posición del cuerpo en $t = 0s$ determinamos el valor de la constante C_2 y haciendo uso de la continuidad de la función de movimiento podemos calcular el valor de la constante C_2'.

$$x(0s) = C_2 = 3m$$
$$x(1s) = \frac{1}{2}\frac{m}{s^3}\cdot(1s)^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{s}1s + C_2' = 2\frac{m}{s}\cdot 1s + C_2$$
$$C_2' = 4m$$

Siendo entonces la función de movimiento:

$$x(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s}\cdot t + 3m & t \le 1s \\ \frac{1}{2}\frac{m}{s^3}\cdot t^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{s}t + 4m & 1s < t \end{cases}$$

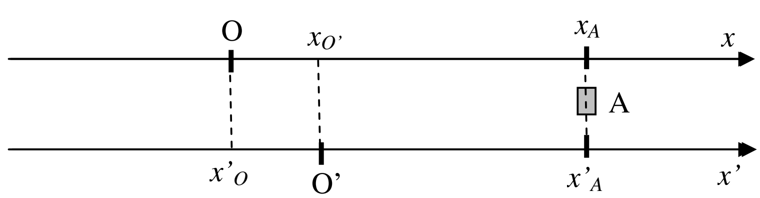
Capítulo 5

Cambio de coordenadas

Hemos visto que para describir el movimiento de un cuerpo es necesario referir su posición, o posiciones sucesivas, a un sistema de coordenadas. Como un sistema de coordenadas (unidimensional en nuestro caso) tiene un origen y un sentido positivo elegidos arbitrariamente, puede ocurrir que distintos observadores refieran el movimiento del mismo cuerpo a sistemas de coordenadas diferentes.

Muchas veces es necesario relacionar los valores que toman distintas magnitudes que describen el movimiento de un cuerpo respecto de dos sistemas diferentes. Por lo tanto es necesario saber cómo relacionar estos valores para conocer si ambos observadores están describiendo lo mismo.

Supongamos que tenemos las coordenadas *x* y *x'* de un mismo cuerpo con respecto a dos sistemas de coordenadas diferentes denominados *S* y *S'* respectivamente. Estos sistemas tienen sus correspondientes orígenes en *O* y *O'* y se encuentran en reposo relativo (por ejemplo, dos personas en una vereda).



Como vemos, las transformaciones entre ambos sistemas serán

$$x = x' - x'_0 \quad y \quad x' = x - x_{0'}$$

donde x'_0 es la posición de *O* respecto de *S'* y $x_{0'}$ es la posición de *O'* respecto de *S*. Si el cuerpo está en movimiento la relación será

$$x(t) = x'(t) - x'_0 \quad y \quad x'(t) = x(t) - x_{0'}$$

donde *x(t)* y *x'(t)* son las funciones de movimiento del cuerpo descriptas desde *S* y *S'* respectivamente. Como *S* está en reposo respecto de *S'*, de la ecuación anterior se deduce que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v'(t)$$

Por lo tanto, aunque las coordenadas no sean las mismas, la velocidad del cuerpo es la misma vista de *S* y *S'*. Si derivamos nuevamente tenemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a'(t)$$

Entonces la aceleración del cuerpo es la misma vista desde ambos sistemas.

Analicemos ahora el caso en que el sistema *S’* se mueve con respecto a *S* (una persona en la vereda y otra sobre un vehículo). Para nuestros sistemas se tiene que $x_{0'} = -x'_0$, o bien $x_{0'}(t) = -x'_0(t)$. Derivando obtenemos

$$\frac{dx_{0'}}{dt} = -\frac{dx'_0}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_{0'}(t) = -v'_0(t)$$

Es decir que la velocidad de *O’* respecto de *O* es igual en módulo pero de sentido opuesto a la velocidad de *O* respecto a *O’*.

Las expresiones que relacionan las coordenadas observadas por ambos sistemas son:

$$x'(t) = x(t) - x_{0'}(t) \text{ o bien } x(t) = x'(t) - x'_0(t)$$

Derivando obtenemos

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_{0'}}{dt} \quad \Rightarrow \quad v'(t) = v(t) - v_{0'}(t)$$

o

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} - \frac{dx'_0}{dt} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v'(t) - v'_0(t)$$

Es decir que para el observador en *S* la velocidad del cuerpo (v) es la observada por *S’* (v') más la velocidad que el sistema *S’* tiene respecto a *S* ($v_{O'}$).

Si derivamos nuevamente la relación obtenida entre las velocidades de los sistemas de referencia ($v_{0'}(t) = -v'_0(t)$) tenemos que:

$$\frac{dv_{0'}}{dt} = -\frac{dv'_0}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_{0'}(t) = -a'_0(t)$$

Como vemos, de manera similar a lo que ocurre con las velocidades, la aceleración de *O’* respecto de *O* es igual en módulo pero de sentido opuesto a la aceleración de *O* respecto de *O’*. Analicemos ahora qué relación existe entre las aceleraciones observadas por dos sistemas de referencia que se desplazan uno respecto del otro. Nosotros teníamos que la relación entre las velocidades es $v(t) = v'(t) - v'_0(t)$ o $v'(t) = v(t) - v_{0'}(t)$, derivando nuevamente obtenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} - \frac{dv'_0}{dt} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a'(t) - a'_0(t)$$

o

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv_{0'}}{dt} \quad \Rightarrow \quad a'(t) = a(t) - a_{0'}(t)$$

Por lo tanto para el observador en *S* la aceleración del cuerpo (a) es la observada por *S’* (a') más la aceleración que el sistema *S’* tiene respecto a *S* ($a_{O'}$).

Distancia entre dos puntos

Estudiemos ahora qué ocurre con la distancia entre dos puntos del espacio cuando esta es medida en dos sistemas de referencia diferentes que pueden desplazarse uno respecto del otro.

La distancia entre dos puntos *A* y *B* referidos al sistema de coordenadas *S* será

$$d_{AB} = | x_B - x_A | \quad ó \quad d_{AB} = | x_B(t) - x_A(t) |$$

y referidas al sistema *S'* es:

$$d'_{AB} = | x'_B - x'_A | \quad ó \quad d'_{AB} = | x'_B(t) - x'_A(t) |$$

Utilizando la relación existente entre las coordenadas de ambos sistemas, tenemos que

$$x_A(t) = x'_A(t) - x'_0(t)$$

y

$$x_B(t) = x'_B(t) - x'_0(t)$$

Restando y tomando valor absoluto tenemos:

$$\begin{aligned}
|x_B - x_A| &= |[x'_B(t) - x'_0(t)] - [x'_A(t) - x'_0(t)]| \\
|x_B - x_A| &= |x'_B(t) - x'_0(t) - x'_A(t) + x'_0(t)| \\
|x_B - x_A| &= |x'_B(t) - x'_A(t)| \\
d_{AB} &= d'_{AB}
\end{aligned}$$

Es decir que la distancia entre dos puntos es la misma vista desde cualquier sistema de coordenadas.

Transformación de Galileo

La transformación de Galileo es un caso particular de cambio de coordenadas. En este caso suponemos que los sistemas *S* y *S'* se mueven uno respecto del otro pero con una velocidad constante, es decir $v_{0'} = -v'_0 = cte$. Entonces la relación entre las velocidades observadas en ambos sistemas es $v(t) = v'(t) - v'_0$ y la relación entre las aceleraciones será $a(t) = a'(t)$. Por lo tanto ambos sistemas observarán la misma aceleración para el cuerpo.

La transformación de coordenadas será $x(t) = x'(t) - x'_0(t)$, pero como $v'_0 = cte$ podemos integrar la velocidad y encontrar cuál es la función de movimiento para el origen del sistema *S* descrito por el sistema *S'*. Entonces obtenemos

$$x'_0(t) = v'_0 \cdot t + x'_{0i}$$

donde x'_{0i} es la coordenada de *O* respecto de *S'* para *t = 0 s*. Reemplazando obtenemos

$$x(t) = x'(t) - v'_0 \cdot t - x'_{0i}$$

Esta última expresión, conocida como transformación de Galileo, relaciona las coordenadas de un cuerpo visto por dos sistemas que se mueven uno respecto del otro con velocidad constante.

Derivando la transformación de Galileo se deduce que

$$v(t) = v'(t) - v'_0$$

y, derivando nuevamente

$$a(t) = a'(t)$$

Capítulo 6

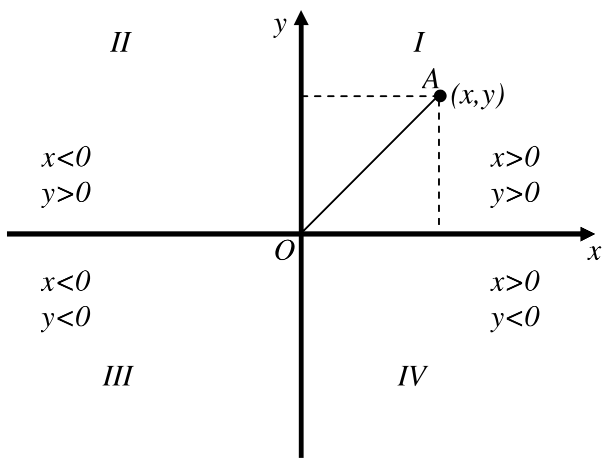
Localización de un punto en el plano

Hasta ahora hemos descrito el movimiento unidimensional (1-D) de cuerpos puntuales, es decir que se mueven sobre rectas. Sin embargo nos interesa poder describir movimientos algo más complejos que los rectilíneos. Para ir incrementando de manera gradual la dificultad en la descripción de otros tipos de movimiento ahora estudiaremos el movimiento de cuerpos en dos dimensiones (2-D), es decir cuerpos que se mueven en el plano.

De igual manera que hicimos en la descripción de movimientos unidimensionales, lo primero que debemos hacer es ver como vamos a determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en este universo plano en el cual se mueve.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Este sistema está conformado por dos ejes cartesianos, como los utilizados en la descripción de movimientos unidimensionales, perpendiculares entre sí. Ambos ejes representan coordenadas espaciales.

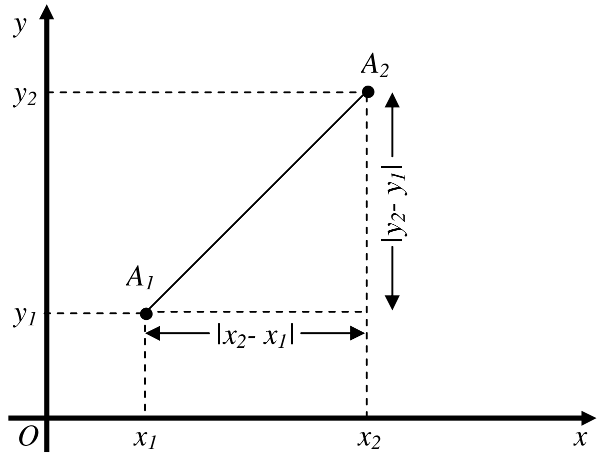


Todos los puntos del plano quedan definidos por un par de números referidos al sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo, el punto *A* tiene una posición en el plano que queda determinada por medio de las coordenadas espaciales *(x,y)*.

La distancia que existe entre un punto del plano de coordenadas *(x,y)* y el origen, d_{AO}, está dada por la expresión:

$$d_{AO} = \overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

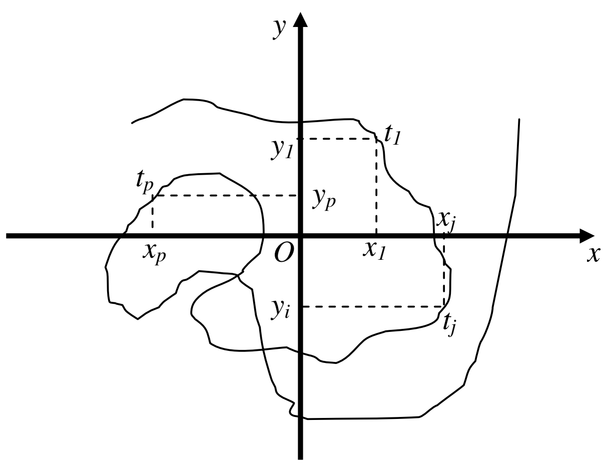
Dados dos puntos del plano A_1 y A_2, de coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) respectivamente, la distancia entre ellos *d* es la longitud del segmento $\overline{A_1A_2}$ y está dada por la expresión:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Trayectoria y Funciones de Movimiento

Si marcamos todos los puntos del plano que el cuerpo ocupa sucesivamente en su movimiento tendremos una gráfica, la cual se denomina *trayectoria*, como la que se muestra en la figura.



Por lo tanto *trayectoria* se denomina a la gráfica del camino, o recorrido, que realiza el cuerpo a medida que realiza su movimiento.

Si para cada tiempo t_i nos fijamos cuáles eran las coordenadas (x_i , y_i) del punto del plano donde estaba ubicado el cuerpo, podemos construir una tabla con dichos valores

t	x	y
t_1	x_1	y_1
t_2	x_2	y_2
:	:	:
:	:	:
t_j	x_j	y_j
:	:	:
:	:	:

Vemos que a partir de esta tabla podemos construir dos funciones de movimiento

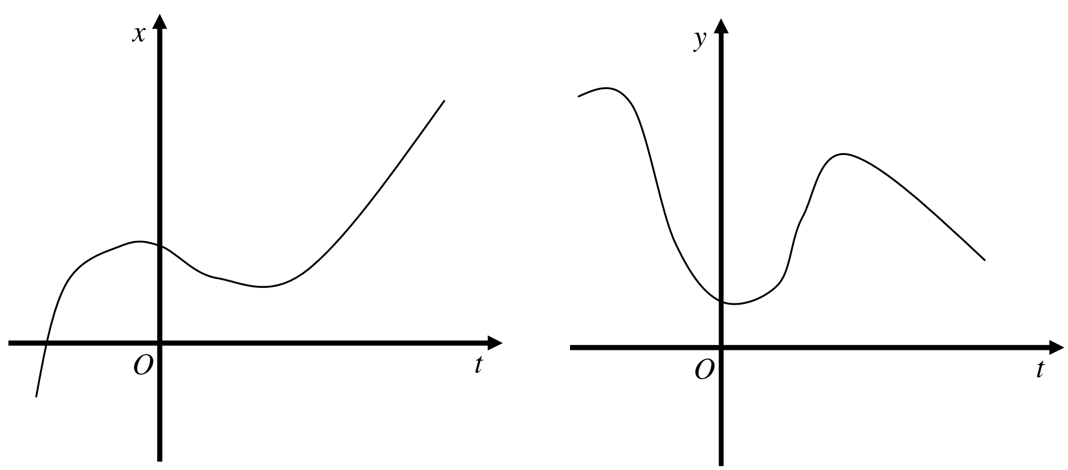
t	x
t_1	x_1
t_2	x_2
:	:
:	:
t_j	x_j
:	:
:	:

$\Rightarrow x = x(t)$

t	y
t_1	y_1
t_2	y_2
:	:
:	:
t_j	y_j
:	:
:	:

$\Rightarrow y = y(t)$

las cuales podemos graficar



Las funciones $x(t)$ e $y(t)$ se denominan *funciones de movimiento* y nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo en el plano a través de sus coordenadas para cada instante de tiempo.

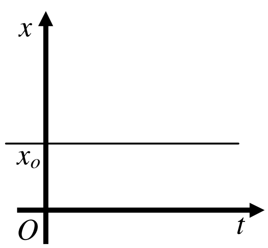
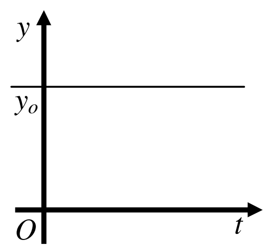
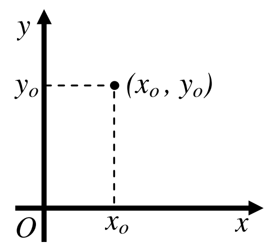
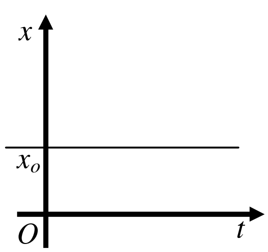
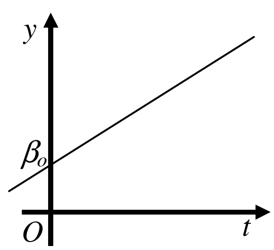
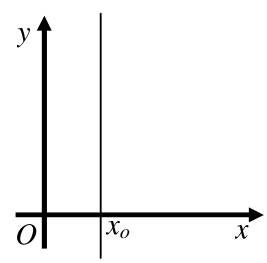
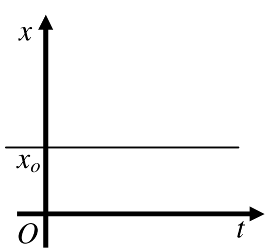
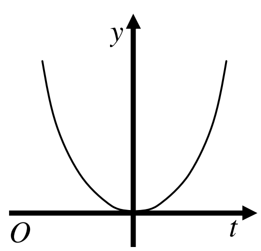
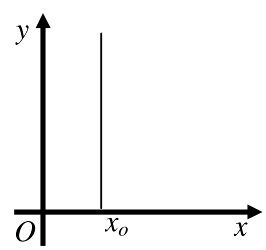
Por otra parte, la expresión matemática de la trayectoria estará dada por una relación $y = f(x)$. Esta expresión puede deducirse a partir de las funciones de movimiento del cuerpo. Como veremos en algunos ejemplos más adelante todos los puntos de la trayectoria pertenecen a la función $f(x)$, sin embargo no todos los puntos de la función $f(x)$ pertenecen a la trayectoria.

La forma más general de obtener la expresión $y = f(x)$ es eliminando la variable t de las funciones de movimiento $x(t)$ e $y(t)$. Las dos formas más simples de realizar esto son:

1) Se despeja la variable *t* de una de las funciones de movimiento, por ejemplo *x(t)*, y luego se reemplaza esta expresión en la otra función de movimiento, por ejemplo *y(t)*, obteniendo *y[t(x)]*.
2) Se despeja la variable *t* de ambas funciones de movimiento, obteniendo $t = g(x)$ y $t = h(y)$. Se igualan ambas expresiones eliminando el parámetro *t*, $g(x) = h(y)$, y de esta igualdad se puede obtener $x = l(y)$ ó $y = f(x)$.

Sin embargo, dado que *x(t)* e *y(t)* nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo para cada instante de tiempo nos están definiendo cuál es la trayectoria del cuerpo. En este caso decimos que *x(t)* e *y(t)* describen la *trayectoria* en forma paramétrica donde el parámetro es *t*.

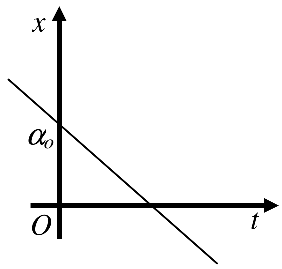
Analicemos a continuación algunos ejemplos de cómo obtener la expresión para la trayectoria a partir de las funciones de movimiento del cuerpo.

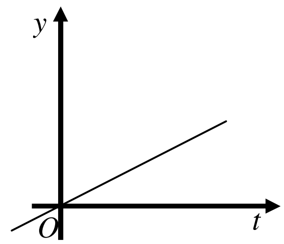
$x = x(t)$	$y = y(t)$	$y = y(x)$
a) $x = x_o = cte$ 	$y = y_o = cte$ 	$x = x_o$, $y = y_o$ 
b) $x = x_o = cte$ 	$y = \beta_o + \beta_1 . t$ 	$x = x_o$, $y = \beta_o + \beta_1 . t$ 
c) $x = x_o = cte$ 	$y = \beta . t^2$ 	$x = x_o$, $y = \beta . t^2$ 

El ejemplo a) describe un cuerpo en reposo y los ejemplos b) y c) corresponden a movimientos rectilíneos. En estos dos últimos casos, si hubiésemos hecho coincidir uno de los ejes del sistema de coordenadas con la trayectoria, los podríamos haber descripto como movimientos unidimensionales.

Analicemos otros ejemplos:

d) $x(t) = \alpha_o + \alpha_1 t \quad [\alpha_o > 0 \text{ y } \alpha_1 < 0]$ $\qquad y(t) = \beta t \quad [\beta > 0]$

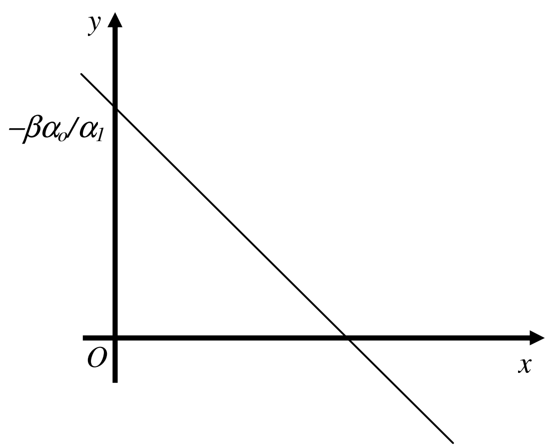




$$t = \frac{x}{\alpha_1} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{\beta}{\alpha_1} x - \frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1}$$

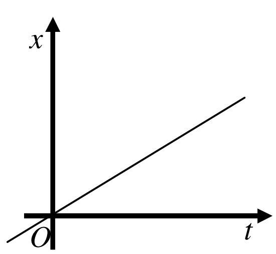
$$\frac{\beta}{\alpha_1} < 0 \qquad \frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1} < 0 \quad \therefore \quad -\frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1} > 0$$

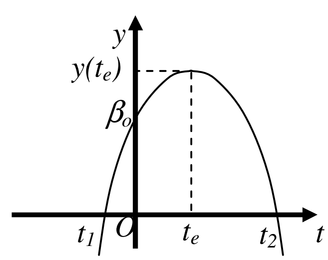
En este caso particular la ecuación de la trayectoria corresponde a una función lineal la cual se grafica abajo.



Si hubiésemos elegido el sistema de coordenadas de manera tal que uno de los ejes coincidiera con la trayectoria, el movimiento del cuerpo podría haber sido descripto como un movimiento unidimensional.

e) $x(t) = \alpha t \quad [\alpha > 0]$ $\qquad y(t) = \beta_o + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \quad [\beta_o>0, \beta_1>0 \text{ y } \beta_2<0]$





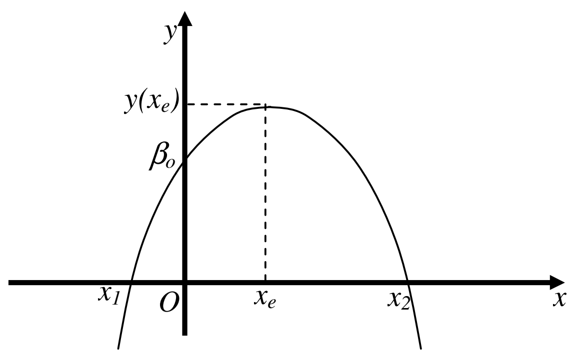
$$t_1 = \frac{-\beta_1 - \sqrt{\beta_1^{\,2} - 4\beta_2\,\beta_0}}{2\beta_2} \quad , \quad t_2 = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^{\,2} - 4\beta_2\,\beta_0}}{2\beta_2}$$

$$t_e = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} > 0 \quad , \quad y(t_e) = \beta_0 - \frac{\beta_1^{\,2}}{4\beta_2} > 0$$

para encontrar la ecuación de la trayectoria debemos despejar el parámetro t de la función de movimiento $x(t)$ y luego reemplazar el parámetro t en la ecuación de movimiento $y(t)$

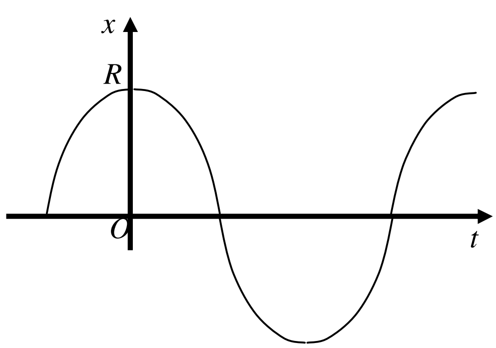
$$t = \frac{x}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{\alpha}x + \frac{\beta_2}{\alpha^2}x^2$$

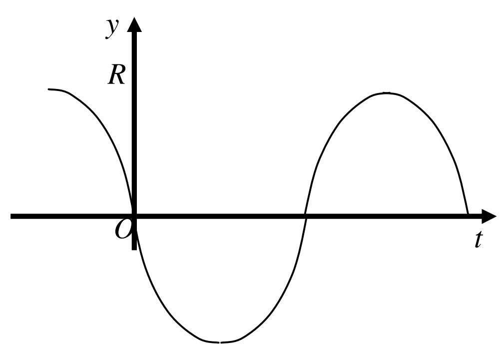
Como vemos la trayectoria es una parábola cuyo gráfico es el mostrado abajo:



donde $x_1 = \alpha\, t_1$; $x_2 = \alpha\, t_2$ y $x_e = \alpha\, t_e$

f) $x(t) = R\cos(k\,t)$ $\qquad$ $y(t) = R\,sen(k\,t)$ $\qquad$ [$k > 0$]





En este caso si utilizamos el mismo método que en los ejemplos anteriores para encontrar la trayectoria tenemos que al despejar t de una de las ecuaciones de movimiento, por ejemplo de $x = x(t)$ obtenemos

$$t = \frac{1}{k} \cdot \arccos\left(\frac{x}{R}\right)$$

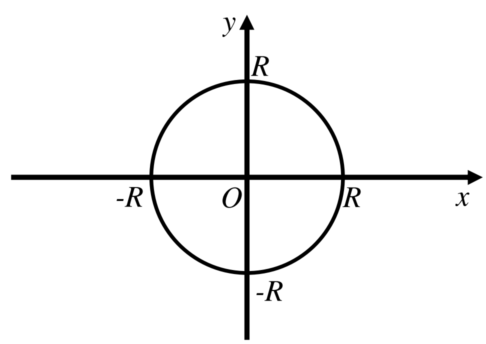
si ahora reemplazamos t en ecuación de movimiento $y = y(t)$ la expresión de la trayectoria resulta

$$y(x) = R.sen\left[\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right]$$

Resulta evidente que a partir de esta expresión no podemos determinar fácilmente cuál será el gráfico de la trayectoria. Sin embargo, si elevamos al cuadrado las funciones de movimiento y luego las sumamos obtenemos.

$$x^2 + y^2 = R^2\,[cos^2(k\,t) + sen^2(k\,t)] \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = R^2$$

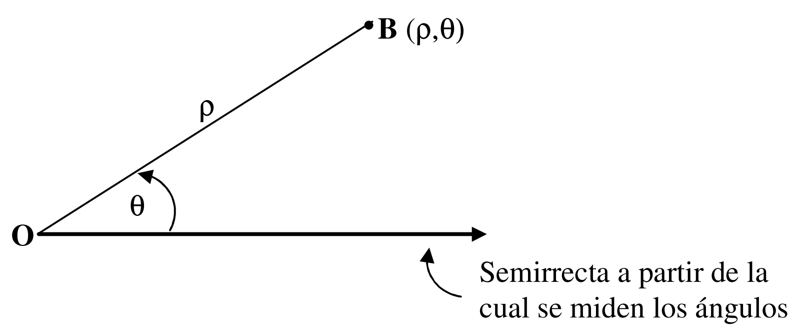
por lo tanto el gráfico de la trayectoria es un círculo de radio R



Notemos que no siempre es posible expresar a los puntos del plano que pertenecen a la trayectoria como una función cómo es evidente en este último ejemplo que hemos analizado.

Sistema de coordenadas polares

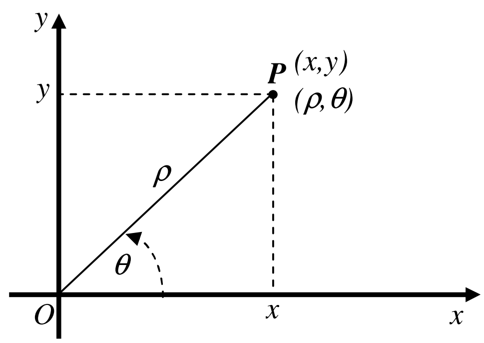
Hasta ahora para definir la localización de un punto en el plano hemos utilizado un sistema de coordenadas cartesianas. Sin embargo también es posible determinar un punto del plano utilizando otro tipo de coordenadas, por ejemplo las coordenadas polares.



Como vemos en el dibujo la posición del punto **B** se puede fijar dando los valores de ρ y θ, donde:

- ρ es la longitud del segmento $\overline{OB}$ $\therefore$ $\rho > 0$
- θ es el ángulo subtendido por el segmento $\overline{OB}$ y la semirrecta horizontal. Por convención, si el ángulo se genera rotando dicho segmento en sentido antihorario el signo del ángulo será positivo, pero si se genera rotando el segmento en sentido horario el signo del ángulo será negativo.

Con estas dos coordenadas (ρ,θ) se determina unívocamente la posición de un punto en el plano. Como vemos hasta ahora todo lo concerniente a las coordenadas polares es completamente análogo a las coordenadas cartesianas.



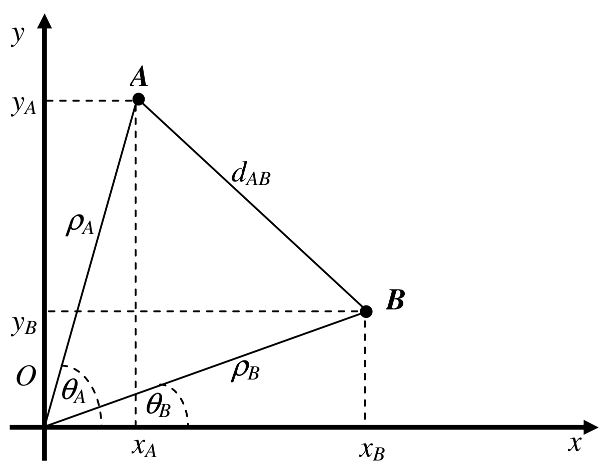
Las coordenadas cartesianas y polares están relacionadas por las siguientes expresiones:

$$x = \rho \cos(\theta)$$
$$y = \rho \; sen(\theta)$$

Además

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg(\theta) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

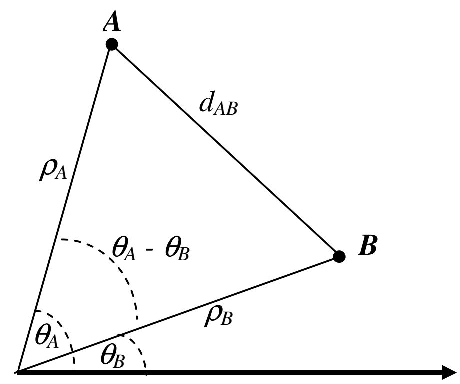
Distancia entre dos puntos del plano en coordenadas polares



La distancia entre los puntos ***A*** y ***B*** en función de sus coordenadas cartesianas está dada por la expresión

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Si analizamos la figura, vemos que queda definido un triángulo cuyos lados son ρ_A, ρ_B y d_{AB}. En este triángulo el ángulo entre los lados ρ_A y ρ_B es $(\theta_A - \theta_B)$.



Haciendo uso del teorema del coseno podemos determinar que:

$$d_{AB} = \sqrt{\rho_B{}^2 + \rho_A{}^2 - 2\,\rho_A\,\rho_B \cos(\theta_A - \theta_B)}$$

Analicemos si son equivalentes las expresiones obtenidas en coordenadas cartesianas y polares para la distancia entre los puntos ***A*** y ***B***. Sabemos que

$$\begin{aligned} x_A &= \rho_A \cos(\theta_A) \\ y_A &= \rho_A\ sen(\theta_A) \\ x_B &= \rho_B \cos(\theta_B) \\ y_B &= \rho_B\ sen(\theta_B) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \rho_A{}^2 &= x_A{}^2 + y_A{}^2 \\ \rho_B{}^2 &= x_B{}^2 + y_B{}^2 \end{aligned}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{x_B{}^2 - 2\,x_A\,x_B + x_A{}^2 + y_B{}^2 - 2\,y_A\,y_B + y_A{}^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{x_B{}^2 + y_B{}^2 + x_A{}^2 + y_A{}^2 - 2(x_A\,x_B + y_A\,y_B)}$$

utilizando las relaciones entre coordenadas cartesianas y polares se obtiene

$$d_{AB} = \sqrt{\rho_B^{\ 2} + \rho_A^{\ 2} - 2\,\rho_A\,\rho_B\left[\cos(\theta_A)\cos(\theta_B) + sen(\theta_A)\,sen(\theta_B)\right]}$$

$$d_{AB} = \sqrt{\rho_B^{\ 2} + \rho_A^{\ 2} - 2\,\rho_A\,\rho_B\cos(\theta_A - \theta_B)}$$

Como vemos las dos expresiones son equivalentes, ya que la distancia entre dos puntos debe ser independiente del sistema de coordenadas que se use para calcularla. La distancia entre dos puntos debe ser invariante ante transformaciones de coordenadas.

Descripción de movimientos en coordenadas polares

Para dar la posición de un cuerpo que está en movimiento por medio de coordenadas polares, podemos construir una tabla

t	ρ	θ
t_1	ρ_1	θ_1
t_2	ρ_2	θ_2
:	:	:
:	:	:
t_j	ρ_j	θ_j
:	:	:
:	:	:

y de igual manera que en coordenadas cartesianas, tendremos dos funciones de movimiento

t	ρ
t_1	ρ_1
t_2	ρ_2
:	:
:	:
t_j	ρ_j
:	:
:	:

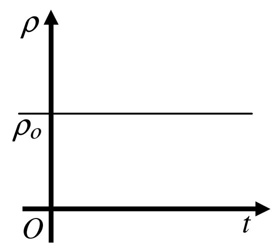
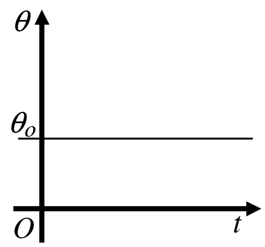
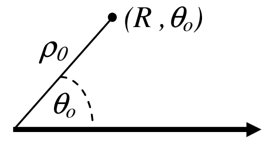
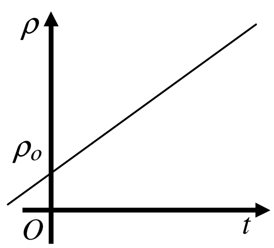
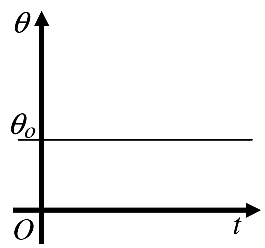
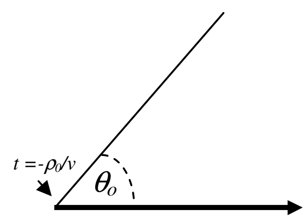
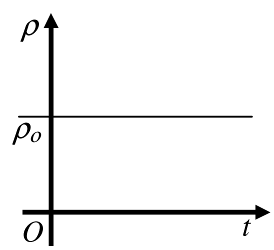
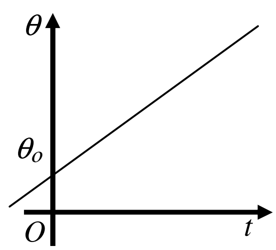
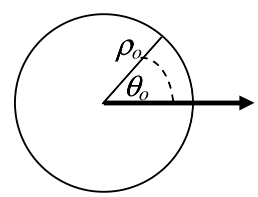
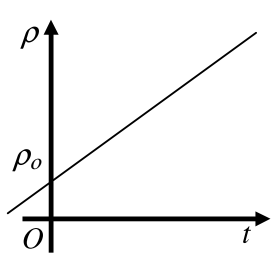
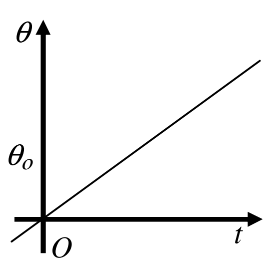
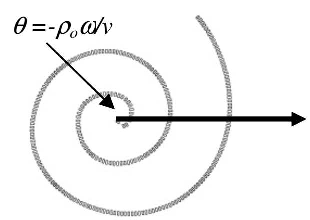
$\Rightarrow \rho = \rho\,(t)$

t	θ
t_1	θ_1
t_2	θ_2
:	:
:	:
t_j	θ_j
:	:
:	:

$\Rightarrow \theta = \theta\,(t)$

La trayectoria estará dada en forma paramétrica con parámetro t por las expresiones de las funciones de movimiento $\rho\,(t)$ *y* $\theta\,(t)$ o por una relación entre las coordenadas polares ρ y θ, es decir $\rho = \rho(\theta)$, la cual se obtiene eliminando t en las funciones de movimiento.

Analicemos a continuación algunos ejemplos de movimientos en el plano descriptos en coordenadas polares.

$\rho = \rho(t)$	$\theta = \theta(t)$	$\rho = \rho(\theta)$
a) $\rho = \rho_o = cte$ 	$\theta = \theta_o = cte$ 	$\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_o$ 
b) $\rho = \rho_o + v\, t$ (*) 	$\theta = \theta_o = cte$ 	$\rho = \rho_o + v\, t,\ \theta = \theta_o$ (*) 
c) $\rho = \rho_o = cte$ 	$\theta = \theta_o + \omega t$ 	$\rho = \rho_o,\ \theta = \theta_o + \omega t$ 
d) $\rho = \rho_o + v\, t$ (*) 	$\theta = \omega t$ 	$\rho = \rho_o + v\theta / \omega$ 

(*) Debido a que $\rho > 0$ estas funciones de movimiento son válidas sólo para $t \geq -\rho_o / v$.

Capítulo 7

Vectores

Existen magnitudes físicas que no son escalares, es decir no quedan completamente definidas dando su valor y la correspondiente unidad. Hay muchas magnitudes físicas que para poder definirlas es necesario dar más información, es necesario definirlas mediante la utilización de vectores, estas magnitudes reciben el nombre de magnitudes vectoriales.

Existen diversas definiciones para los vectores:

- Un vector es un segmento de una cierta longitud (denominada módulo del vector), al cual se le asignan propiedades adicionales como la dirección y sentido. El punto de origen en el espacio se denomina punto de aplicación.
- Un vector es la representación geométrica de una magnitud que necesita orientación espacial, punto de aplicación, dirección y sentido para quedar definida.
- Un vector es un segmento de recta orientado que va desde un punto P hasta un punto Q.

y así podríamos seguir enumerando muchas otras definiciones de un vector. Sin embargo vemos que en todas coinciden en cuales son sus elementos característicos

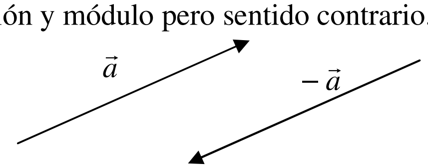
i) una dirección
ii) un sentido
iii) una magnitud o módulo.

A un vector lo representaremos gráficamente por una flecha

y en el texto denotaremos que *r* es un vector mediante la letra que lo identifica, que puede ser minúscula o mayúscula, escrita en negrita (**r**), o la letra que lo identifica con una flecha encima ($\vec{r}$). Para denotar el módulo de un vector se encierra el símbolo utilizado para el vector entre dos barras verticales (|**r**| ó $|\vec{r}|$) o simplemente por la letra que lo identifica sin que aparezca la flecha encima ($|\vec{r}| = r$). El módulo de un vector es una magnitud escalar, es decir que queda totalmente definido por un número y eventualmente por una unidad.

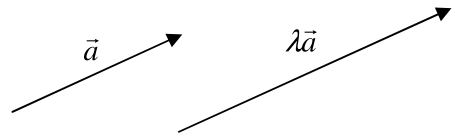
Cuando multiplicamos un vector por un escalar obtenemos otro vector con las siguientes propiedades:

- $\lambda\vec{a} = \overrightarrow{\lambda a}$
- $\vec{a}$ y $\overrightarrow{\lambda a}$ tienen la misma dirección
- el módulo del producto es igual al producto de los módulos; $|\lambda\vec{a}| = \left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- Si λ = 0 entonces $\lambda\vec{a} = 0$ lo que implica que es un vector nulo.
- Si λ = -1 entonces $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$ y es el vector opuesto a $\vec{a}$ lo que implica que tiene la misma dirección y módulo pero sentido contrario.

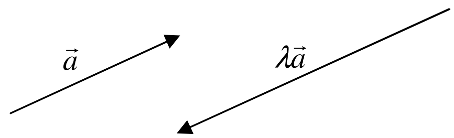


- En general si |λ| > 1 $|\lambda\vec{a}| = |\overrightarrow{\lambda a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}|$

si λ >0

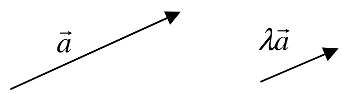


si λ <0

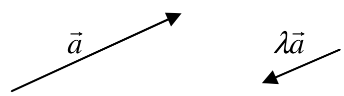


cuando |λ| < 1 $|\lambda\vec{a}| = |\overrightarrow{\lambda a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}|$

si λ >0



si λ <0



Un caso particular es cuando $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|} > 0$; entonces $\lambda\vec{a} = \overrightarrow{\lambda a} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ y el módulo de este vector es $|\lambda\vec{a}| = |\overrightarrow{\lambda a}| = \dfrac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$. En este caso obtenemos un vector paralelo a $\vec{a}$ y de módulo 1. Este tipo de vectores reciben el nombre particular de versores y los denotaremos por el símbolo â. Entonces tenemos que $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ es un vector de módulo 1. Los versores nos permiten definir una dirección y un sentido en el espacio.

Podemos definir distintos tipos de vectores:

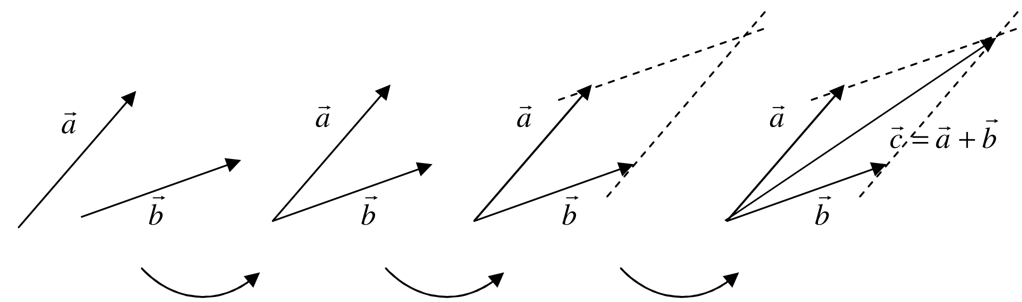
- Vectores libres: no tienen su extremo inicial, u origen, fijado en ningún punto en particular.
- Vectores fijos: tienen su extremo inicial, u origen, fijado en algún punto en particular.
- Vectores equipolentes: son vectores que presentan iguales módulos, direcciones y sentidos.
- Vectores deslizantes: son vectores equipolentes que actúan sobre una misma recta.
- Vectores concurrentes: comparten el mismo extremo inicial u origen.
- Vectores unitarios: vectores de módulo igual a uno también denominados versores.
- Vectores colineales: aquéllos cuyas direcciones coinciden.

__Suma de vectores__

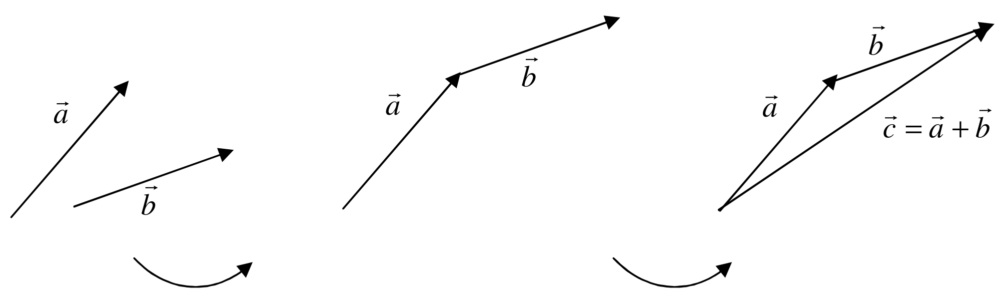
La suma de dos vectores da como resultado otro vector y esta operación, entre otras, posee las propiedades conmutativa y asociativa.

a) Propiedad conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
b) Propiedad asociativa: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

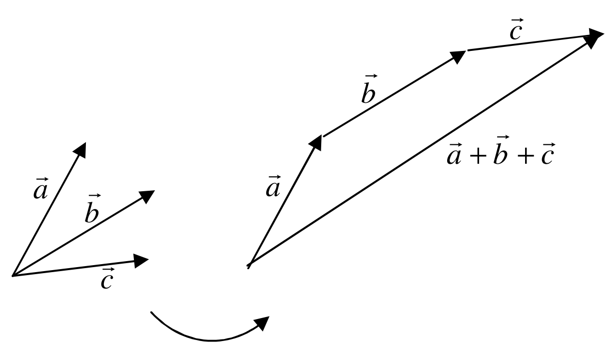
El vector suma se puede obtener gráficamente por la regla del paralelogramo.



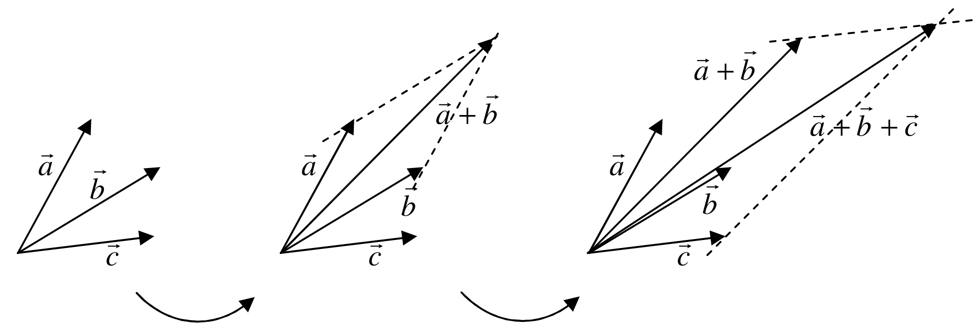
para ello hay que trasladar los dos vectores al mismo punto de aplicación, luego se forma un paralelogramo como se muestra en la figura y el vector suma queda definido por la diagonal del paralelogramo que contiene al punto común de aplicación de los vectores. Otra forma es trasladar el segundo vector al extremo del primero y el vector suma será el que una el origen del primero con el extremo del segundo.



Para sumar más de dos vectores se puede utilizar este último método o aplicar la propiedad asociativa.



ó

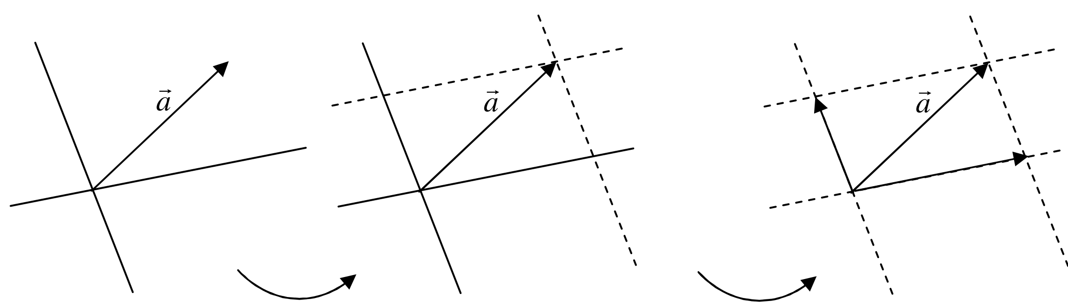


Un caso particular es cuando los dos vectores que sumamos son colineales. En este caso el vector suma tendrá la misma dirección que los dos vectores, el sentido del mayor de los vectores y su módulo será la suma de ambos módulos si ambos vectores tienen el mismo sentido o la diferencia si ambos tienen diferentes sentidos.

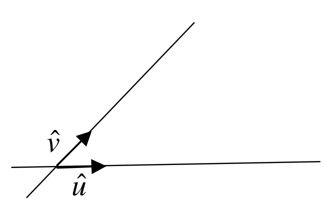
Al vector resta de dos vectores, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ lo podemos pensar como el vector suma de dos vectores $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$, donde entendemos al vector $(-\vec{b})$ como uno con la misma dirección y módulo pero sentido contrario al del vector $\vec{b}$.

Descomposición de vectores

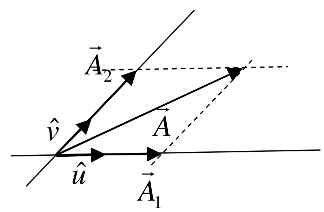
Un vector $\vec{a}$ puede ser expresado como la suma de dos vectores que estén en dos direcciones predeterminadas. Encontrar cuáles son esos vectores se denomina hacer la descomposición del vector $\vec{a}$ en dichas direcciones. Para ello se trazan, por el extremo del vector $\vec{a}$, dos paralelas a cada una de las direcciones predeterminadas; donde estas rectas cortan a las direcciones dadas determinan el extremo de cada uno de los vectores en los cuales hemos descompuesto al vector $\vec{a}$.



Los versores pueden definir las direcciones a lo largo de las cuales queremos descomponer un vector. Al conjunto de versores que definen estas direcciones se les llama *base vectorial*.



Por ejemplo, consideremos los versores $\hat{u}$ y $\hat{v}$ que definen una base y las direcciones según las cuales se pueden descomponer vectores.



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ son los vectores componentes de $\vec{A}$ según las direcciones $\hat{u}$ y $\hat{v}$. Como $\vec{A}_1$ y $\hat{u}$ son vectores paralelos, al igual que $\vec{A}_2$ y $\hat{v}$, podemos escribir:

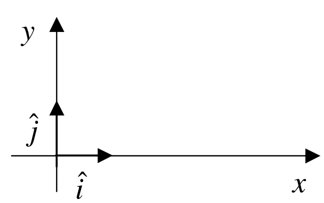
$$\vec{A}_1 = A_u \cdot \hat{u}$$
$$\vec{A}_2 = A_v \cdot \hat{v}$$

con lo cual

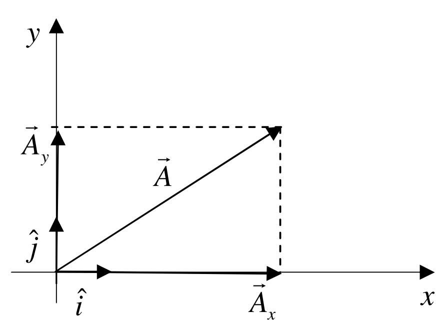
$$\vec{A} = A_u \cdot \hat{u} + A_v \cdot \hat{v}$$

donde A_u y A_v son dos cantidades escalares que se denominan componentes del vector $\vec{A}$ en las direcciones de $\hat{u}$ y $\hat{v}$ respectivamente.

Una base vectorial muy usada, y que utilizaremos habitualmente, es la ortonormal en la cual los versores que la definen son perpendiculares entre sí. Cada uno de los versores se encuentra sobre uno de los ejes del sistema cartesiano ortogonal que utilizamos para describir el movimiento de los cuerpos. El versor que determina la dirección del eje x se denomina $\hat{i}$ y el que determina la dirección del eje y se denomina $\hat{j}$.



Las componentes de un vector según estas direcciones perpendiculares se llaman componentes ortogonales.



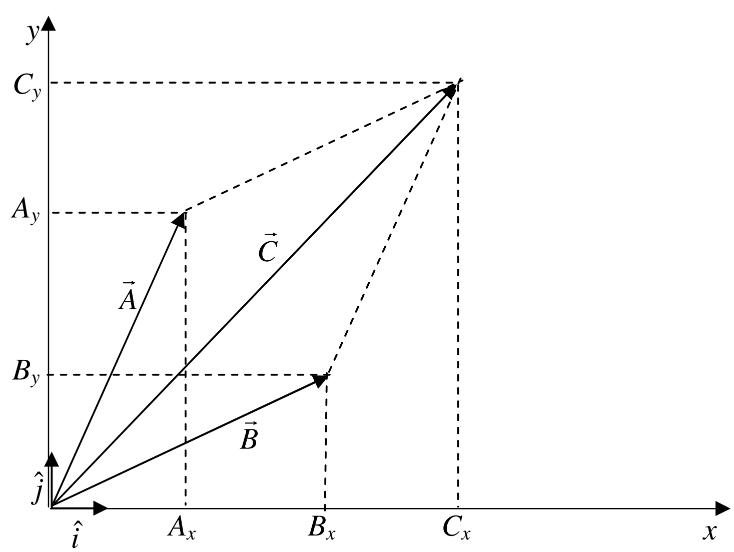
$\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ son las componentes *vectoriales* del vector $\vec{A}$ según las direcciones de los ejes *x* e *y* respectivamente. Podemos escribir

$$\vec{A}_x = A_x \cdot \hat{i}$$
$$\vec{A}_y = A_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j}$$

A_x y A_y son las componentes del vector $\vec{A}$ y son magnitudes escalares. Podemos calcular el módulo del vector utilizando el teorema de Pitágoras en función de estas componentes; $\left|\vec{A}\right|^2 = A_x^2 + A_y^2$. Las componentes de los vectores pueden ser positivas, nulas o negativas.

Suma de dos vectores en una base ortogonal

Supongamos que deseamos determinar el vector suma de dos vectores $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



$$\vec{A} = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x \cdot \hat{i} + B_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{C} = C_x \cdot \hat{i} + C_y \cdot \hat{j}$$

pero

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{C} = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j} + B_x \cdot \hat{i} + B_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{C} = (A_x + B_x) \cdot \hat{i} + (A_y + B_y) \cdot \hat{j}$$

podemos identificar

$$C_x = (A_x + B_x)$$
$$C_y = (A_y + B_y)$$

entonces vemos que la suma de dos vectores es igual a un vector cuya componente en un determinado eje es la suma de las componentes de cada uno de los vectores en dicho eje.

Resta de dos vectores en una base ortogonal

Para realizar la resta de dos vectores, $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, procedemos de manera similar a la suma, pues podemos pensar a la resta como la suma de dos vectores $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ donde

$$\vec{A} = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x \cdot \hat{i} + B_y \cdot \hat{j}$$
$$-\vec{B} = -B_x \cdot \hat{i} - B_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{C} = C_x \cdot \hat{i} + C_y \cdot \hat{j}$$

por lo tanto

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$\vec{C} = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j} - B_x \cdot \hat{i} - B_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{C} = (A_x - B_x) \cdot \hat{i} + (A_y - B_y) \cdot \hat{j}$$

con

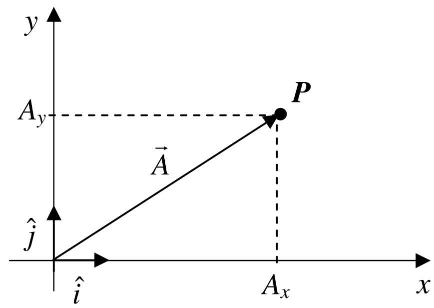
$$C_x = (A_x - B_x)$$
$$C_y = (A_y - B_y)$$

por lo tanto la resta de dos vectores es igual a un vector cuya componente en un determinado eje es la resta de las componentes de cada uno de los vectores en dicho eje.

Capítulo 8

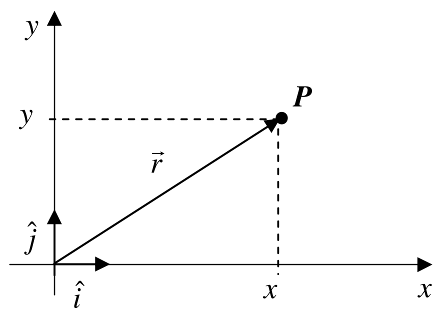
Vector posición

Podemos identificar un punto ***P*** del plano, de coordenadas *(x,y)*, mediante un vector $\vec{A}$ que tenga su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en dicho punto.



Las componentes de $\vec{A}$ son las coordenadas cartesianas de ***P***; es decir $A_x = x$ y $A_y = y$. Por lo tanto al punto ***P*** y al vector $\vec{A}$ lo podemos definir por $\vec{A} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$.

Cuando identificamos con un vector el punto del plano donde se encuentra ubicado el cuerpo cuyo movimiento estamos describiendo, a este vector lo denominamos *vector posición* y lo denotamos generalmente con la letra $\vec{r}$ ó $\vec{R}$.

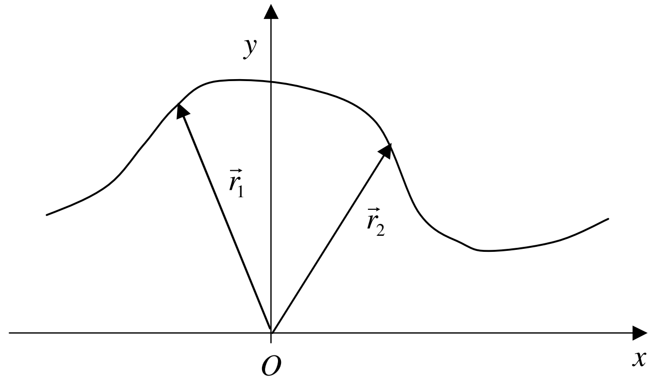


$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ y $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

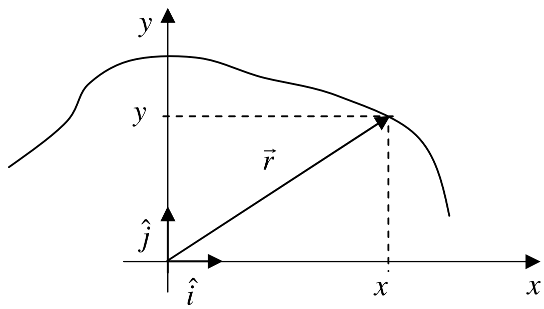
Función vectorial de movimiento

Hemos visto que la posición de un punto en el plano puede ser dada por un vector denominado "*vector posición del punto*". Si el cuerpo se mueve sobre el plano *su vector posición variará con el tiempo* y en cada instante de tiempo tendremos un vector posición.

t	x	y	$\vec{r}$
t_1	x_1	y_1	$\vec{r}_1$
t_2	x_2	y_2	$\vec{r}_2$
t_3	x_3	y_3	$\vec{r}_3$
t_4	x_4	y_4	$\vec{r}_4$
t_5	x_5	y_5	$\vec{r}_5$
.	.	.	.
.	.	.	.



Lo que tenemos es un vector que es función del tiempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Si referimos el vector posición a una base ortogonal coincidente con el sistema de coordenadas cartesiano ortogonal tendremos, como habíamos visto, $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$



donde *x(t)* e *y(t)* son las funciones de movimiento del cuerpo en coordenadas cartesianas. Por lo tanto tenemos forma de referir el movimiento de un cuerpo en el plano por medio de la "*función vectorial de movimiento*" $\vec{r}(t)$.

Velocidad media

Con la función vectorial de movimiento tenemos la posición del cuerpo para todo instante de tiempo, pero podemos complementar esta información dando, además, la dirección, sentido y rapidez del movimiento. Para tratar de dar esta información vamos a definir la *velocidad media* como:

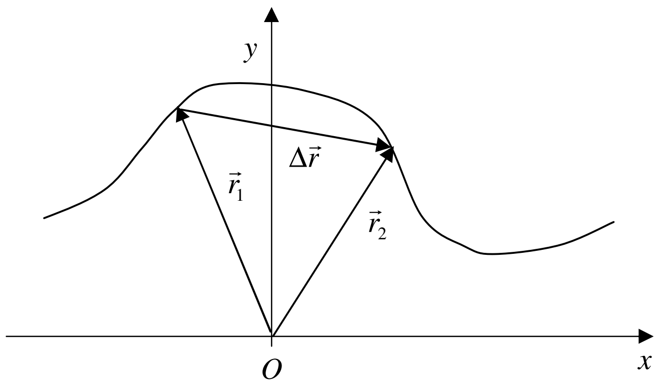
$$\bar{\vec{V}} \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

donde $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. Como $t_2 = t_1 + \Delta t$ podemos escribir

$$\bar{\vec{V}} \equiv \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t}$$

o escribiendo de manera mas genérica para cualquier t_1, es decir $t_1 = t$

$$\overline{\vec{V}} \equiv \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$\overline{\vec{V}}$ es un vector que tiene la dirección y sentido del vector $\Delta\vec{r}$ y su módulo igual a $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$.

Calculemos ahora la $\overline{\vec{V}}$ para algunas funciones vectoriales de movimiento:

a) $x(t) = c_1\, t \quad e \quad y(t) = c_2\, t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = c_1\, t\; \hat{i} + c_2\, t^2\; \hat{j} \qquad (c_1 = cte > 0,\, c_2 = cte > 0)$

$\Delta t = t_2 - t_1$, entonces $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_1+\Delta t) - \vec{r}(t_1$$

$$\Delta\vec{r} = c_1(t_1+\Delta t)\,\hat{i} + c_2(t_1+\Delta t)^2\;\hat{j} - c_1\; t_1\;\hat{i} - c_2\; t_1^{\;2}\;\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1(t_1+\Delta t - t_1)\,\hat{i} + c_2\left[(t_1+\Delta t)^2 - t_1^2\right]\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1\;\Delta t\;\hat{i} + c_2\left[t_1^2 + 2\,t_1\;\Delta t + \Delta t^2 - t_1^2\right]\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1\;\Delta t\;\hat{i} + c_2(2\,t_1\;\Delta t + \Delta t^2)\;\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1\;\Delta t\;\hat{i} + c_2\;\Delta t\;(2\,t_1 + \Delta t)\;\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta t\;\left[c_1\;\hat{i} + c_2\;(2\,t_1+\Delta t)\;\hat{j}\right]$$

$$\overline{\vec{V}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta t\;\left[c_1\;\hat{i} + c_2\;(2\,t_1+\Delta t)\;\hat{j}\right]}{\Delta t}$$

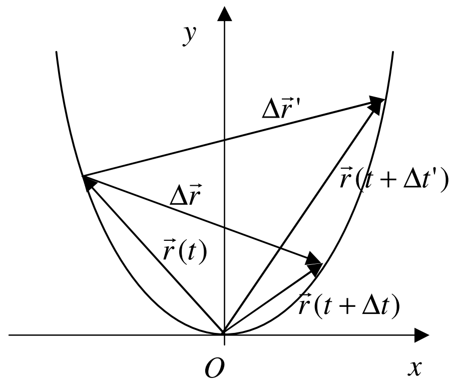
$$\overline{\vec{V}} = c_1\;\hat{i} + c_2\;(2\,t_1+\Delta t)\;\hat{j}$$

Como se puede ver $\overline{\vec{V}}$ depende de *Δt*. Esto también es evidente si analizamos su módulo; $\left|\overline{\vec{V}}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2(2\,t_1+\Delta t)^2}$. La variabilidad de $\overline{\vec{V}}$ también se evidencia si analizamos la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento.

$$x(t) = c_1\, t \quad e \quad y(t) = c_2\, t^2$$

$$t = \frac{x}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_2\,\frac{x^2}{c_1^2}$$

$\vec{r}(t) = c_1\, t\, \hat{i} + c_2\, t^2\, \hat{j}$



Como se puede ver, dependiendo del Δt elegido puede variar notablemente la dirección de $\bar{\vec{V}}$, la cual se corresponde con la dirección de $\Delta\vec{r}$.

b) Consideremos las siguientes funciones de movimiento

$x(t) = b_1 + b_2\, t \quad e \quad y(t) = b_3 + b_4\, t \quad (b_i = cte > 0)$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

$\Delta\vec{r} = \left[b_1 + b_2\,(t+\Delta t)\right]\hat{i} + \left[b_3 + b_4\,(t+\Delta t)\right]\hat{j} - (b_1 + b_2\, t)\,\hat{i} - (b_3 + b_4\, t)\,\hat{j}$

$\Delta\vec{r} = (b_1 + b_2\, t + b_2\,\Delta t - b_1 - b_2\, t)\,\hat{i} + (b_3 + b_4\, t + b_4\,\Delta t - b_3 - b_4\, t)\,\hat{j}$

$\Delta\vec{r} = b_2\,\Delta t\,\hat{i} + b_4\,\Delta t\,\hat{j}$

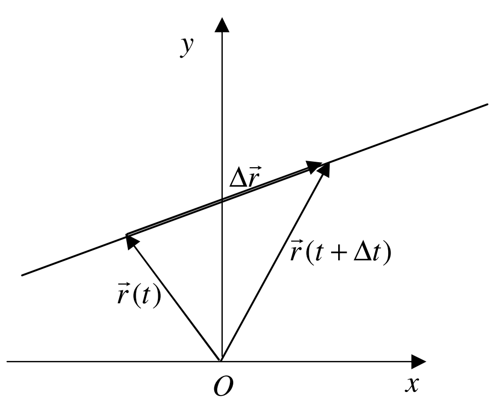
$\bar{\vec{V}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = b_2\,\hat{i} + b_4\,\hat{j}$

cómo vemos, $\bar{\vec{V}}$ es un vector constante. Analicemos cómo es la trayectoria del cuerpo cuando sus funciones de movimiento son las dadas en este ejemplo

$x(t) = b_1 + b_2\, t \quad e \quad y(t) = b_3 + b_4\, t$

$t = \dfrac{x - b_1}{b_2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{b_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot b_4}{b_2} + \dfrac{b_4}{b_2}\, x$

La ecuación de la trayectoria es una recta



y sin importar cuánto valga t y Δt el cálculo del $\bar{\vec{V}}$ nos dará el mismo resultado. Este movimiento es el que se denomina *Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).*

Veamos un último ejemplo

c)

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\, t^2 + b_3 \quad (b_1 \ y\ b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta\vec{r} = b_1 (t+\Delta t)^2\ \hat{i} + \left[b_2\ (t+\Delta t)^2 + b_3\right]\hat{j} - b_1 t^2\ \hat{i} - (b_2\, t^2 + b_3)\ \hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = b_1 (t^2 + 2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2)\,\hat{i} + \left[b_2\ (t^2 + 2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2) + b_3\right]\hat{j} - b_1 t^2\ \hat{i} - (b_2\, t^2 + b_3)\ \hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta t\cdot\left[b_1 (2\cdot t + \Delta t)\,\hat{i} + b_2\ (2\cdot t + \Delta t)\ \hat{j}\right]$$

$$\bar{\vec{V}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = b_1 (2\cdot t + \Delta t)\,\hat{i} + b_2\ (2\cdot t + \Delta t)\ \hat{j}$$

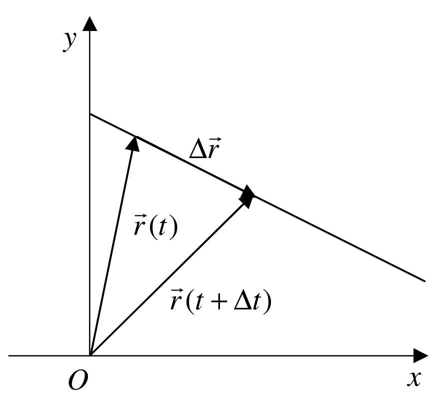
$$\bar{\vec{V}} = b_1 (2\cdot t + \Delta t)\,\hat{i} + b_2\ (2\cdot t + \Delta t)\ \hat{j}$$

$$\bar{\vec{V}} = (2\cdot t + \Delta t)\cdot(b_1\ \hat{i} + b_2)\ \hat{j}$$

vemos que este vector $\bar{\vec{V}}$ es un vector constante multiplicado por un escalar que depende de t y Δt, es decir es un vector que siempre está sobre la misma dirección y que sólo puede modificar su módulo y sentido. Analicemos la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\, t^2 + b_3 \quad (b_1 \ y\ b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$$

$$t^2 = \frac{x}{b_1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b_2}{b_1} x + b_3 \quad (x > 0)$$



Aunque es un movimiento rectilíneo $\bar{\vec{V}}$ depende de t y Δt.

En los ejemplos anteriores hemos visto que $\bar{\vec{V}}$ tiene la dirección y sentido de $\Delta\vec{r}$, y en algunos casos, modificando Δt se modifica $\bar{\vec{V}}$. Esto indica que $\bar{\vec{V}}$ no es un buen indicador de la forma en que se mueve el cuerpo. Lo que queremos, de manera similar a lo buscado en los movimientos unidimensionales, es una cantidad que sólo dependa del punto donde se encuentra el cuerpo o del instante de tiempo de que se trate. Para ello definiremos lo que llamamos *velocidad instantánea* o simplemente, *velocidad.*

Velocidad

Definimos la velocidad

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\vec{V}}$$

como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero.

En general, si tenemos un vector $\vec{A}$ que depende de una variable z, es decir $\vec{A} = \vec{A}(z)$, se define la derivada del vector $\vec{A}(z)$ con respecto a z como

$$\frac{d\vec{A}(z)}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(z+\Delta z) - \vec{A}(z)}{\Delta z}$$

Entonces podemos escribir la derivada del vector posición respecto al tiempo como

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Analicemos como podemos hacer esta derivada pues hasta ahora sólo sabemos derivar funciones escalares. Si el vector posición está dado en términos de sus componentes cartesianas como $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[x(t+\Delta t)\,\hat{i} + y(t+\Delta t)\,\hat{j}\right] - \left[x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}\right]}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)\,\hat{i} + y(t+\Delta t)\,\hat{j} - x(t)\,\hat{i} - y(t)\,\hat{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]\hat{i} + \left[y(t+\Delta t) - y(t)\right]\hat{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right]\hat{i} + \left[\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right]\hat{j} \right\}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] \hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right] \hat{j}$$

por lo tanto

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

Podemos escribir el vector velocidad en sus componentes cartesianas

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\, \hat{i} + v_y(t)\, \hat{j}$$

donde identificamos

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad y \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

Como vemos, al igual que el vector posición, el vector velocidad es una función vectorial del tiempo. Notemos que en el proceso de derivación los versores $\hat{i}$ y $\hat{j}$ no se derivan pues ellos son constantes en el tiempo, es decir no modifican ni su módulo ni dirección.

Analicemos algunos ejemplos

a) Supongamos que tenemos las siguientes funciones de movimiento

$x(t) = c_1\, t \quad y \quad y(t) = c_2\, t^2$

La trayectoria que describen estas funciones de movimiento es

$t = \dfrac{x}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \dfrac{c_2}{c_1^{\;2}} x^2$; o sea una parábola.

El vector posición es $\vec{r}(t) = c_1\, t\, \hat{i} + c_2\, t^2\, \hat{j}$ y derivando obtenemos $\vec{v}(t) = c_1\, \hat{i} + 2c_2\, t\, \hat{j}$.

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}(t)| = \sqrt{c_1^{\;2} + 4\, c_2^{\;2}\, t^2}$

En este caso particular el vector velocidad es una función del tiempo y su módulo no es constante.

b) Consideremos las siguientes funciones de movimiento

$x(t) = b_1 + b_2\, t \quad e \quad y(t) = b_3 + b_4\, t \quad (b_i = cte > 0)$

$\vec{r} = (b_1 + b_2\, t)\, \hat{i} + (b_3 + b_4\, t)\, \hat{j}$

derivando el vector posición obtenemos

$\vec{v} = b_2 \hat{i} + b_4 \hat{j}$

y el módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \sqrt{b_2^{\,2} + b_4^{\,2}}$

Para estas funciones de movimiento el vector velocidad resulta igual al vector velocidad media. Este es el único caso en que ocurre y es debido a que la velocidad es constante, y como vimos antes, estas funciones de movimiento se corresponden a una trayectoria rectilínea, en particular, a un movimiento rectilíneo uniforme.

c) Analicemos un último ejemplo

$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2 t^2 + b_3 \quad (b_1 \ y \ b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$

$\vec{r} = b_1 t^2 \hat{i} + (b_2 t^2 + b_3) \hat{j}$

$\vec{v}(t) = 2 b_1 t \hat{i} + 2 b_2 t \hat{j}$

$\vec{v}(t) = 2t (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j})$

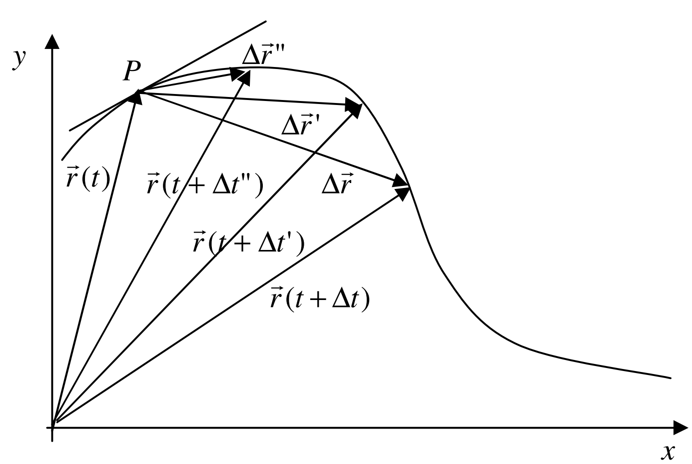
este vector velocidad es un vector constante multiplicado por un escalar que depende del tiempo. Por lo tanto este vector cambia su módulo pero no su dirección. Si recordamos la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento es $y(t) = \frac{b_2}{b_1} x + b_3 \quad (x > 0)$. Por lo tanto corresponde a un movimiento rectilíneo.

Significado del módulo, dirección y sentido de $\vec{v}$

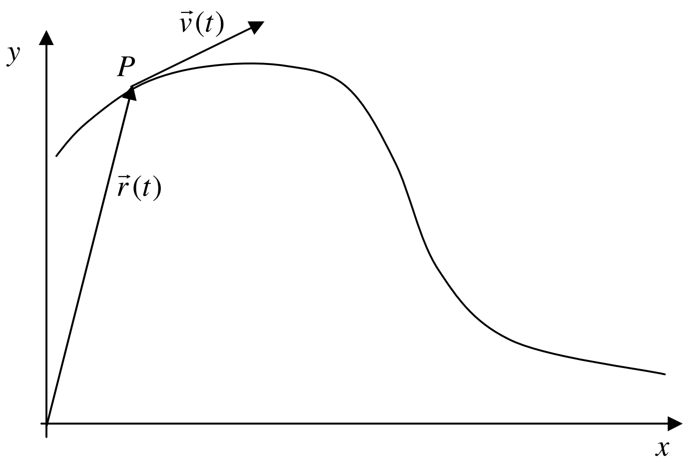
El vector velocidad lo hemos definido como

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\vec{V}}$$

Analicemos, desde un punto de vista geométrico, qué ocurre con $\bar{\vec{V}}$ a medida que hacemos $\Delta t \to 0$



A medida que $\Delta t \to 0$ se ve que $\vec{r}(t+\Delta t) \to \vec{r}(t)$ y la dirección de $\Delta\vec{r}(t)$ tiende a alinearse con la de la recta tangente a la trayectoria en el punto *P*. Como $\bar{\vec{V}}$ tiene la misma dirección que $\Delta\vec{r}(t)$ y $\bar{\vec{V}} \to \vec{v}$ cuando $\Delta t \to 0$ entonces se puede deducir que ***la dirección del vector velocidad en un punto de la trayectoria es el de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto***.



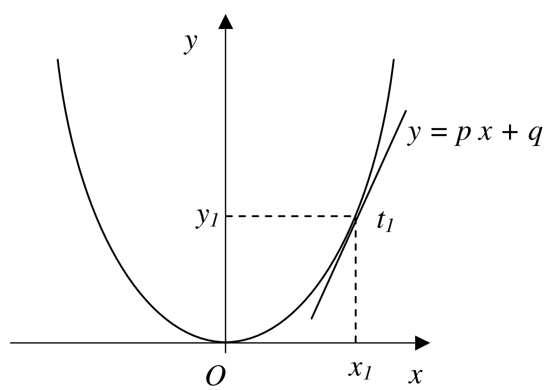
Veamos esta última afirmación en uno de los ejemplos que habíamos analizado. Si las funciones de movimiento son:

$x(t) = c_1\, t \quad y \quad y(t) = c_2\, t^2$

La trayectoria que describen estas funciones de movimiento es

$t = \dfrac{x}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \dfrac{c_2}{c_1^{\,2}}\, x^2$; o sea una parábola.

El vector posición es $\vec{r}(t) = c_1\, t\, \hat{i} + c_2\, t^2\, \hat{j}$ y derivando obtenemos $\vec{v}(t) = c_1\, \hat{i} + 2c_2\, t\, \hat{j}$. Si el móvil se encontraba en la posición *(x_1 , y_1)* cuando $t = t_1$



tenemos que $t_1 = x_1/c_1$; entonces $\vec{v}(t_1) = c_1\,\hat{i} + 2\dfrac{c_2}{c_1}\,x_1\,\hat{j}$ y la pendiente de la recta que contiene al vector velocidad es:

$$m = \frac{v_x}{v_y} = 2\,\frac{c_2}{c_1^{\,2}}\,x_1$$

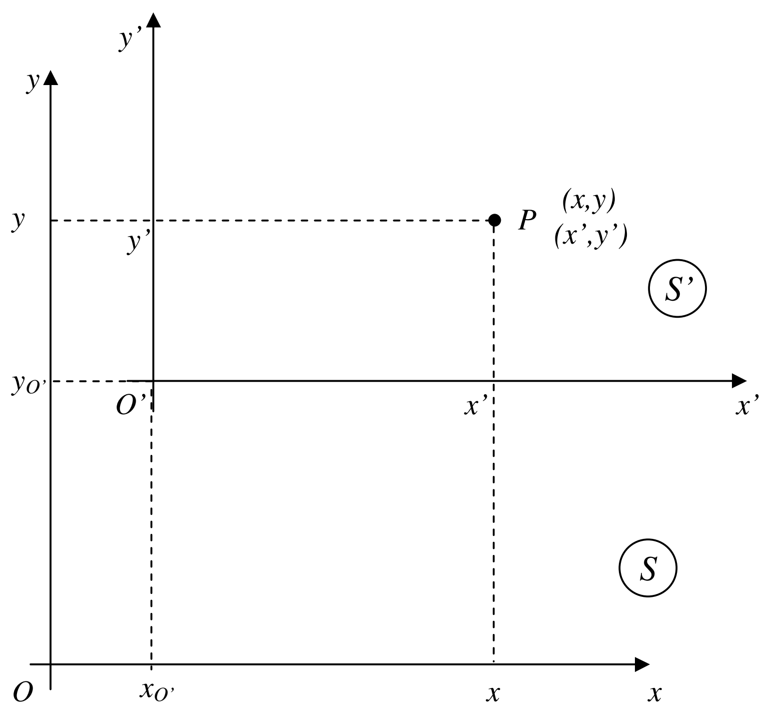
Por otro lado podemos calcular la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x_1\,,\,y_1)$ mediante la derivada de la función que define la trayectoria

$$p = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_1} = 2\,\frac{c_2}{c_1^{\,2}}\,x_1 \quad \therefore \quad m = p$$

Como vemos la pendiente de la recta que contiene a la velocidad y la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto son iguales, por lo tanto podemos ver que se verifica que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

Cambio de coordenadas

Analicemos qué relación existe entre las coordenadas correspondientes a dos sistemas de referencia diferentes denominados *S* y *S'*. Sólo analizaremos el caso en que los sistemas de referencia son ortogonales y tienen sus ejes paralelos entre sí. La coordenada de un punto *P* del plano en los dos sistemas será *(x,y)* y *(x',y')*, respectivamente.



El origen del sistema *S'*, visto por el sistema *S*, tiene coordendas $(x_{O'}, y_{O'})$; mientras que el origen del sistema *S* respecto al sistema *S'* tiene coordenadas (x'_O, y'_O). A partir de la gráfica se desprende que se verifican las siguientes relaciones entre las coordenadas de los sistemas *S* y *S'*.

$$x_{O'} = -x'_O \qquad y_{O'} = -y'_O$$
$$x = x' + x_{O'} \qquad y = y' + y_{O'}$$
$$x' = x - x_{O'} \qquad y' = y - y_{O'}$$
$$x = x' - x'_O \qquad y = y' - y'_O$$

De esta manera quedan dadas las relaciones entre las coordenadas de un punto medidas desde ambos sistemas.

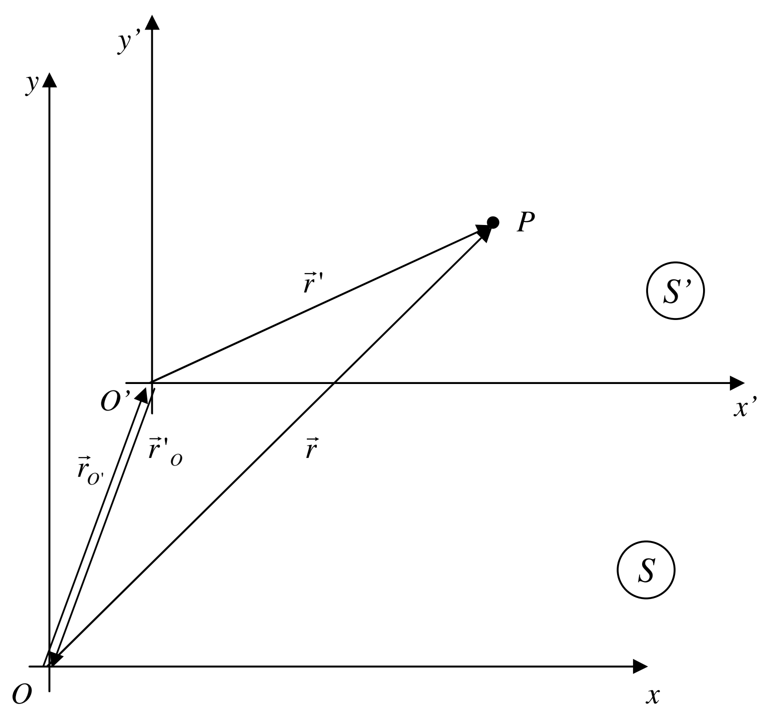
Analicemos esto mismo pero usando vectores posición. Denominemos:

$\vec{r}$: vector posición del punto *P* respecto a *O*;

$\vec{r}\,'$: vector posición del punto *P* respecto a *O'*;

$\vec{r}_{O'}$: vector posición de *O'* respecto de *O*;

$\vec{r}\,'_O$: vector posición de *O* respecto a *O'* ($\vec{r}\,'_O = -\vec{r}_{O'}$).



Del gráfico se ve que se verifica la siguiente relación vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'} \qquad \text{o bien} \qquad \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_O$$

de aquí resulta:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{O'} \qquad \text{o} \qquad \vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}\,'_O$$

Si el cuerpo, cuyas coordenadas estamos indicando, está en movimiento con respecto a los sistemas *O* y *O'* las funciones vectoriales de movimiento serán $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$.

Analicemos los siguientes casos:

1) Supongamos que el sistema *O* no se mueve respecto de *O'*. Entonces las relaciones son:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'} \qquad \text{o} \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) - \vec{r}'_{O}$$

y a la velocidad del cuerpo vista desde ambos sistemas la podemos obtener derivando el vector posición

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}'_{O}}{dt}$$

pero como $\vec{r}_{O'} = -\vec{r}'_{O} = cte$ tenemos que $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \frac{d\vec{r}'_{O}}{dt} = 0$, entonces resulta

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t)$$

Como vemos en este caso la velocidad del cuerpo con respecto a *O* es la misma que respecto a *O'*.

2) Supongamos ahora que el sistema *O* está en movimiento respecto de *O'*. En este caso tendremos

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t) \qquad \text{o} \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) - \vec{r}'_{O}(t)$$

y la velocidad será

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}'_{O}}{dt}$$

como $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$, $\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \vec{v}'(t)$, $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}_{O'}$ y $\frac{d\vec{r}'_{O}}{dt} = \vec{v}'_{O}$ tenemos

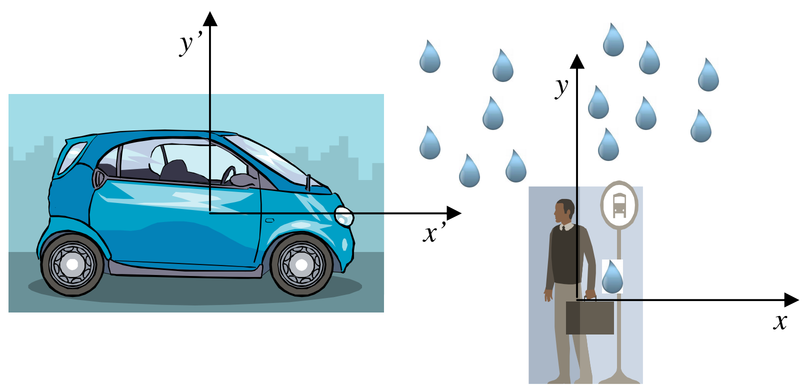
$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'} \qquad \text{o} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) - \vec{v}'_{O}$$

Estas relaciones vinculan las velocidades de un cuerpo observadas por dos sistemas diferentes que se mueven uno respecto del otro. La relación entre las velocidades suele denominarse *Teorema de adición de velocidades*.

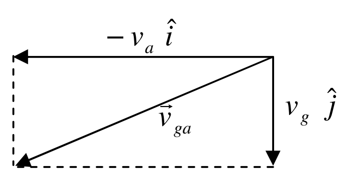
Estas transformaciones incluyen a las *transformaciones de Galileo* que ya hemos analizado cuando estudiamos movimientos unidimensionales. Recordemos que en este tipo de transformaciones se suponía que la velocidad relativa entre ambos sistemas era constante, es decir $\vec{v}_{O'} = -\vec{v}'_{O} = cte$; por lo tanto $\vec{r}_{O'} = \vec{v}_{O'}\, t + \vec{r}_{O'}(0)$ con lo cual la relación entre las coordenadas será

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}_{0'}\; t - \vec{r}_{0'}(0)$$

Analicemos un ejemplo de aplicación. Supongamos que en una ciudad está lloviendo y no hay viento a nivel de superficie. Una persona que está en una parada de ómnibus verá que las gotas caen verticalmente, pero ¿cómo las verá caer otra persona que viaja en un automóvil?



Los dos sistemas de referencia son la persona en la parada de ómnibus (*S*) y la persona que viaja en el automóvil (*S’*). La velocidad de la gota vista por el sistema *S* será $\vec{v} = \vec{v}_g = v_g\ \hat{j}$ (de acuerdo al sistema de coordenadas graficado $v_g < 0$), mientras que la velocidad del auto respecto del sistema *S* será $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_a = v_a\ \hat{i}$ (en nuestro caso será $v_a>0$). Utilizando la expresión que relaciona la velocidad vista por ambos sistemas ($\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'}$) podemos obtener cuál es la velocidad de la gota vista por la persona que viaja en el auto, la cual resulta $\vec{v}\,' = \vec{v}_{ga} = v_g\ \hat{j} - v_a\ \hat{i}$. Realicemos un diagrama vectorial cualitativo para ilustrar mejor cómo es la dirección en la que el conductor del auto ve caer las gotas el conductor del auto.

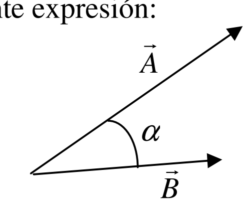


Producto escalar

En numerosos problemas nos interesa conocer la componente de un vector en una determinada dirección. Para tratar esto vamos a definir el producto escalar entre dos vectores. Este producto también se lo suele denominar producto interno o producto punto. Como su nombre lo indica es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar y está definido de la siguiente manera:

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, que subtienden entre sí un ángulo α, el producto escalar entre ambos está dado por la siguiente expresión:

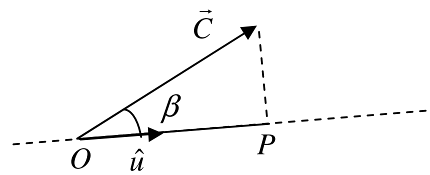
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos(\alpha)$$



Como vemos el producto escalar entre dos vectores ($\vec{A}\cdot\vec{B}$) da cómo resultado un escalar el cual puede ser positivo (si $0 < \theta < \pi/2$) o negativo (si $\pi/2 < \theta < \pi$). De la definición del producto escalar es claro que posee la propiedad conmutativa ($\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$).

Supongamos que uno de los vectores que operan sea un versor, por ejemplo $\hat{u}$. Entonces el producto escalar entre un vector $\vec{C}$ y el versor $\hat{u}$ será

$$\vec{C}\cdot\hat{u}=\left|\vec{C}\right|\cdot\left|\hat{u}\right|\cdot\cos(\beta)=C\cdot\cos(\beta)$$



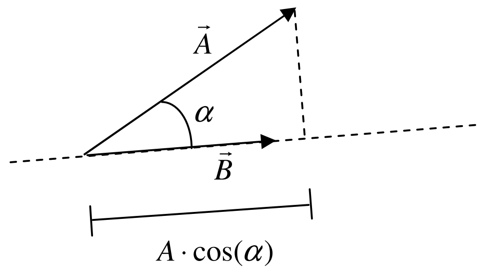
Como se puede ver en la figura $\vec{C}\cdot\hat{u}=C\cdot\cos(\beta)=\overline{OP}$ es la proyección del vector $\vec{C}$ sobre la dirección definida por $\hat{u}$. Por lo tanto el producto escalar de un vector por un versor nos permite calcular la componente (o proyección) del vector según al dirección definida por el versor.

Si tenemos dos vectores, por ejemplo $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y deseamos calcular la componente, o proyección, de uno de ellos, supongamos el vector $\vec{A}$, a lo largo de la dirección del otro vector, o sea el vector $\vec{B}$, debemos hacer el producto escalar del vector $\vec{A}$ con un versor con la misma dirección y sentido del vector $\vec{B}$. Podemos definir un versor en la dirección del vector $\vec{B}$ de la siguiente forma

$$\hat{B}=\frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}=\frac{\vec{B}}{B}$$

de esta manera

$$\vec{A}\cdot\hat{B}=\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B}=A\cdot\frac{B}{B}\cdot\cos(\alpha)=A\cdot\cos(\alpha)$$



A partir de la definición del producto escalar es posible determinar cual es el ángulo entre dos vectores

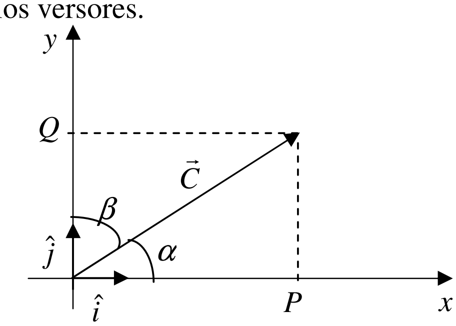
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A}}{A} \cdot \frac{\vec{B}}{B}$$
$$\cos(\alpha) = \hat{A} \cdot \hat{B}$$

Analicemos algunas propiedades del producto escalar:

- $\vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cdot \cos(0) = A^2$
  El producto escalar de un vector por si mismos da como resultado el módulo del vector elevado al cuadrado. Como consecuencia de esto se verifica que el producto interno de un versor por si mismo es uno ($\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ y $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$).

- Si dos vectores son no nulos ($\vec{A} \neq 0$ y $\vec{B} \neq 0$) y el producto escalar entre ambos da cero ($\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$) entonces ambos vectores son perpendiculares entre sí ($\vec{A} \perp \vec{B}$). Por lo tanto el producto interno entre los versores que definen la base cartesiana ortogonal será cero ($\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$).

Podemos encontrar las componentes de un vector, por ejemplo $\vec{C}$, en dos direcciones dadas por los versores que definen una base ortogonal haciendo el producto escalar de $\vec{C}$ con cada uno de los versores.

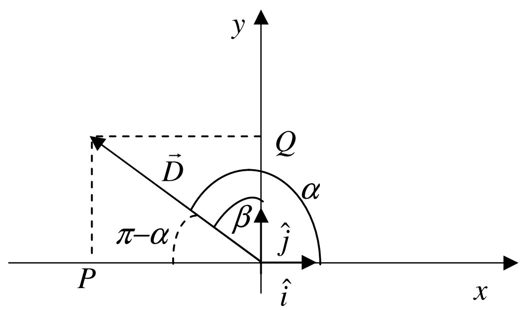


$$\vec{C} \cdot \hat{i} = C.\cos(\alpha) = \overline{OP}$$
$$\vec{C} \cdot \hat{j} = C.\cos(\beta) = \overline{OQ}$$

pero $\overline{OP}$ coincide con la magnitud y signo de la componente de $\vec{C}$ en la dirección x (C_x) y $\overline{OQ}$ coincide con la magnitud y signo de la componente de $\vec{C}$ en la dirección y (C_y). Por lo tanto

$$\vec{C} \cdot \hat{i} = C_x$$
$$\vec{C} \cdot \hat{j} = C_y$$

Supongamos ahora que tenemos un vector $\vec{D}$ como el que se muestra en la figura



$$\vec{D} \cdot \hat{i} = D.\cos(\alpha) = -D.\cos(\pi - \alpha) = -\overline{OP} = D_x$$
$$\vec{D} \cdot \hat{j} = D.\cos(\beta) = \overline{OQ} = D_y$$

Si repetimos el cálculo con vectores en cualquiera de los cuadrantes veríamos que el resultado sería el mismo, es decir que si tengo un vector $\vec{A}$ podemos encontrar sus componentes en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal haciendo el producto de este vector por los versores que definen la base.

$$\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x$$
$$\vec{A} \cdot \hat{j} = A_y$$

En el caso particular que del vector posición, $\vec{r} = x.\hat{i} + y.\hat{j}$, entonces

$$x = \vec{r}.\hat{i}$$
$$y = \vec{r}.\hat{j}$$

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, dados en sus componentes cartesianas, el producto escalar entre ambos resulta:

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x.\hat{\imath} + A_y.\hat{\jmath}).(B_x.\hat{\imath} + B_y.\hat{\jmath})$$

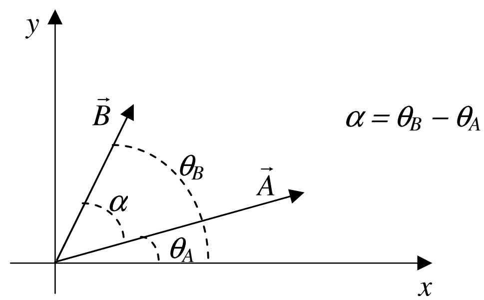
aplicando la propiedad distributiva tenemos

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x.(\hat{\imath}.\hat{\imath}) + A_x.B_y.(\hat{\imath}.\hat{\jmath}) + A_y.B_x.(\hat{\jmath}.\hat{\imath}) + A_y.B_y.(\hat{\jmath}.\hat{\jmath})$$

teniendo en cuenta que $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = 1$ y $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{\imath} = 0$ resulta

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la primera definición que dimos para el producto escalar. Si tenemos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestra en el gráfico



$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos(\alpha) = A.B.\cos(\theta_B - \theta_A)$$

desarrollando el coseno de la diferencia de ángulos

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\left[\cos(\theta_A).\cos(\theta_{B)}) + sen(\theta_A).sen(\theta_{B)})\right]$$

distribuyendo obtenemos

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos(\theta_A).\cos(\theta_{B)}) + A.B.sen(\theta_A).sen(\theta_{B)})$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A.\cos(\theta_A).B.\cos(\theta_{B)}) + A.sen(\theta_A).B.sen(\theta_{B)})$$

podemos identificar en esta expresión a las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$A_x = A.\cos(\theta_A) \quad ; \quad A_y = A.sen(\theta_A)$$

$$B_x = B.\cos(\theta_B) \quad ; \quad B_y = B.sen(\theta_B)$$

resultando entonces

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y$$

que es la misma expresión obtenida antes para el producto escalar entre dos vectores en término de sus componentes cartesianas.

Con esta forma de calcular el producto escalar resulta fácil verificar que $\vec{r}.\vec{r} = r^2 = x^2 + y^2$.

También es posible calcular el ángulo entre dos vectores en término de sus componentes cartesianas

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{A_x.B_x + A_y.B_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2}}$$

Aceleración

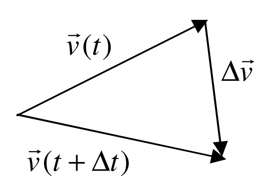
De igual manera que cuando analizamos el caso del movimiento unidimensional, queremos que la aceleración nos dé información acerca de cómo cambia la velocidad en el tiempo. En el caso unidimensional teníamos que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

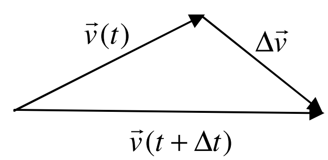
Ahora, la velocidad es un vector y por lo tanto el cambio de la velocidad en el tiempo será el cambio de un vector en el tiempo. Un vector, y de manera particular el vector velocidad $\vec{v}$, puede cambiar de diversas maneras:

1) Cambiando solamente el módulo y/o sentido sin modificar su dirección

2) Cambiando solamente de dirección



3) Modificando módulo y dirección simultáneamente



Definamos el vector aceleración para el caso del movimiento en el plano como

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

como vemos el vector aceleración tiene la dirección y sentido del vector $\Delta\vec{v}$. Como $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ podemos escribir

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si el vector posición $\vec{r}$ está expresado en término de sus coordenadas cartesianas, $\vec{r} = x.\hat{i} + y.\hat{j}$, resulta

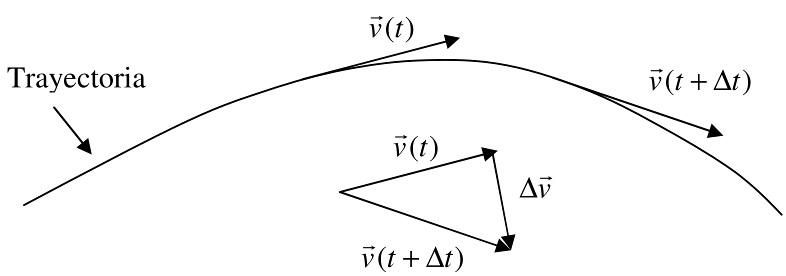
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}.\hat{i} + \frac{dy}{dt}.\hat{j}\right] = \frac{dv_x}{dt}.\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}.\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\hat{j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x.\hat{i} + a_y.\hat{j}$$

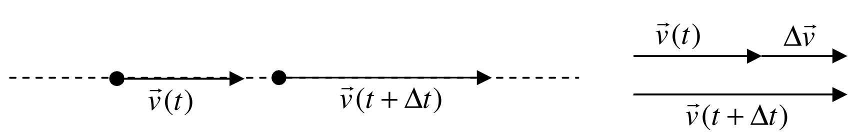
Analicemos la expresión que hemos obtenido para el vector aceleración. Sobre una trayectoria tenemos la velocidad del cuerpo en el instante *t* y *t+Δt* como se muestra en la figura,



por lo tanto es necesario analizar la evolución de $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$ para estudiar el comportamiento del vector aceleración.

Para una mejor comprensión del tema analicemos primero algunos casos simples:

1) Supongamos una trayectoria lineal, por lo tanto el vector velocidad sólo puede cambiar de módulo y/o sentido.



Sabemos que

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

y que a un vector lo podemos escribir como un escalar multiplicado por un versor en la misma dirección. En el caso del vector velocidad podemos definir un versor velocidad que es tangente a la trayectoria, por lo tanto escribimos

$$\vec{v}(t+\Delta t) = v(t+\Delta t).\hat{v}(t+\Delta t)$$
$$\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$$

En el caso que estamos analizando, como la trayectoria es rectilínea, se verifica que $\hat{v}(t+\Delta t) = \hat{v}(t) = \hat{v}$. Por lo tanto

$$\Delta\vec{v} = v(t+\Delta t).\hat{v} - v(t).\hat{v}$$
$$\Delta\vec{v} = [v(t+\Delta t) - v(t)].\hat{v}$$
$$\Delta\vec{v} = \Delta v.\hat{v}$$

Entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.\hat{v}$$

como $\hat{v}$ no depende del tiempo resulta

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\hat{v}$$

es decir una aceleración que está en la misma dirección que la velocidad, es decir que $\vec{a} \,//\, \vec{v}$, y es la misma aceleración que ya conocíamos en el caso del movimiento unidimensional. A esta aceleración, paralela a la velocidad la llamaremos *aceleración tangencial* ($\vec{a}_{//}$ ó $\vec{a}_t$) pues es tangente a la trayectoria.

$$\vec{a}_{//} = \frac{dv}{dt}.\hat{v}$$

Como vemos la *aceleración tangencial* es la responsable de modificar el módulo de la velocidad sin afectar la dirección de la misma.

Veamos un ejemplo. Supongamos que las funciones de movimiento de un cuerpo están dadas por

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\, t^2 + b_3 \quad (b_1 \; y \; b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$$
$$\vec{r}(t) = b_1 t^2\; \hat{i} + (b_2\, t^2 + b_3)\; \hat{j}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2.b_1 t\; \hat{i} + 2.b_2\, t\; \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = 2.t.(b_1\ \hat{i} + b_2\ \hat{j})$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2.(b_1\ \hat{i} + b_2\ \hat{j})$$

la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento es

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\, t^2 + b_3 \quad (b_1\ y\ b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$$
$$t^2 = \frac{x}{b_1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b_2}{b_1} x + b_3 \quad (x > 0)$$

como vemos en este caso la trayectoria es rectilínea y como vemos $\vec{a}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son el mismo vector ($(b_1\ \hat{i} + b_2\ \hat{j})$) pero multiplicado por diferentes escalares. Por lo tanto $\vec{a} \mathbin{//} \vec{v}$.

2) Supongamos ahora una trayectoria no rectilínea, pero que es recorrida con módulo de velocidad constante. Nuevamente tenemos que

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

y que podemos escribir

$$\vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t).\hat{v}(t + \Delta t)$$
$$\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$$

En este caso particular tenemos que $v(t + \Delta t) = v(t) = v$; entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v.\frac{\hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t)}{\Delta t}$$

como v no depende del tiempo resulta

$$\vec{a} = v.\frac{d\hat{v}}{dt}$$

En este caso particular no resulta evidente cual es la dirección de la aceleración a partir de la expresión obtenida. Intentemos realizar un análisis más minucioso. Sabemos que

$$\hat{v} \mathbin{//} \vec{v} \quad y \quad \vec{a} \mathbin{//} \frac{d\hat{v}}{dt}$$

además, al ser $\hat{v}$ un versor se verifica que

$$\hat{v}.\hat{v} = 1$$

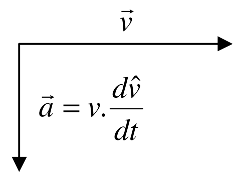
si derivamos ambos lados de esta igualdad respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\hat{v}.\hat{v}) = \frac{d}{dt}1$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt}.\hat{v} + \hat{v}.\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$$

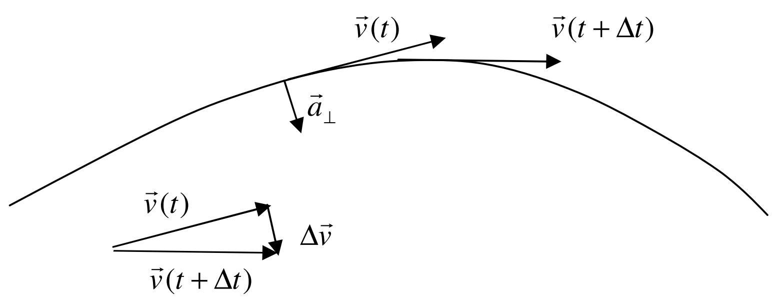
$$2.\hat{v}.\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$$

de esta última expresión se deduce que $\hat{v}.\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$, por lo tanto $\hat{v} \perp \frac{d\hat{v}}{dt}$. Esto último implica que cuando un cuerpo se mueve de manera tal que el módulo de su velocidad es constante la aceleración es perpendicular a la velocidad ($\vec{a} \perp \vec{v}$).



Esta aceleración que resulta perpendicular a la velocidad la llamaremos *aceleración normal* ($\vec{a}_\perp$ ó $\vec{a}_n$)

$$\vec{a}_\perp = v.\frac{d\hat{v}}{dt}$$



Como vemos la aceleración normal apunta hacia la parte cóncava de la trayectoria. Analicemos un ejemplo de este último caso en el cual un cuerpo se mueve sobre una trayectoria con módulo de velocidad constante ($|\vec{v}| = v = cte$). La *aceleración normal* es la responsable de modificar la dirección de la velocidad sin afectar al módulo.

$$\vec{v}(t) = v.\left[\cos(\omega.t)\ \hat{i} + sen(\omega.t)\ \hat{j}\right] \quad (\omega = cte)$$

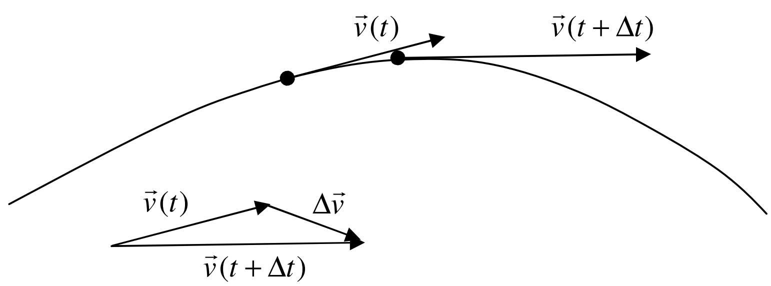
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = v.\omega.\left[-\,sen(\omega.t)\ \hat{i} + \cos(\omega.t)\ \hat{j}\right]$$

Para ver si se verifica que $\vec{a} \perp \vec{v}$ debemos hacer el producto escalar entre ambos vectores ($\vec{a}.\vec{v}$)

$$\vec{a}(t).\vec{v}(t) = v.\omega.\left[-sen(\omega.t)\ \hat{i} + \cos(\omega.t)\ \hat{j}\right].v.\left[\cos(\omega.t)\ \hat{i} + sen(\omega.t)\ \hat{j}\right]$$
$$\vec{a}(t).\vec{v}(t) = v^2.\omega.\left[-sen(\omega.t).\cos(\omega.t) + \cos(\omega.t).sen(\omega.t)\ \hat{j}\right]$$
$$\vec{a}(t).\vec{v}(t) = 0$$

Como vemos cuando $|\vec{v}| = v = cte$ la aceleración es perpendicular a la velocidad ($\vec{a}.\vec{v} = 0$).

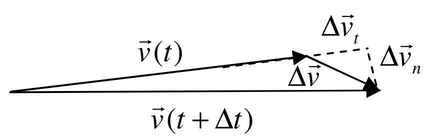
3) Calculemos la aceleración cuando varía el módulo ($|\vec{v}| = v$) y la dirección ($\hat{v}$) del vector velocidad. En la trayectoria tenemos



Determinaremos $\vec{a}$ en el instante *t*, es decir en el punto donde el cuerpo tiene velocidad $\vec{v}(t)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Como vamos a hacer que $\Delta t \to 0$, haremos un dibujo de $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t+\Delta t)$ para un Δt "muy pequeño".



Se puede descomponer a $\Delta\vec{v}$ en dos vectores, uno que llamaremos *t* (o tangencial), el cual tiene la misma dirección que $\vec{v}(t)$, y otro que denominaremos *n* (o normal) que es perpendicular a $\vec{v}(t)$; es decir podemos escribir $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t$. Por lo tanto, si calculamos la aceleración tenemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t)}{\Delta t}$$
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t}$$
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

Como se ve podemos expresar a la aceleración como la suma de dos componentes, una que es perpendicular a la velocidad ($\vec{a}_n$) y otra paralela a la velocidad ($\vec{a}_t$). Como vimos, la componente de la aceleración paralela a la velocidad sólo es responsable de modificar el módulo de la velocidad, mientras que la componente de la aceleración perpendicular a la velocidad será la responsable de modificar la dirección de la velocidad.

Veamos ahora si podemos encontrar una expresión para estas componentes de la aceleración. Sabemos que podemos expresar a un vector como un escalar multiplicado por un versor, y en el caso particular de la velocidad podemos escribir $\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$. Si tanto el módulo como la dirección de la velocidad pueden variar con el tiempo tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t).\hat{v}(t))$$
$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t) + v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Vemos que esta expresión de la aceleración contiene las dos componentes que ya hemos identificado en los casos particulares que hemos analizado.

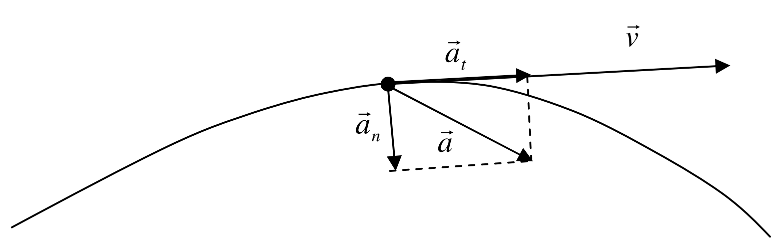
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$
$$\vec{a}_t(t) = \vec{a}_{//}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t)$$
$$\vec{a}_n(t) = \vec{a}_{\perp}(t) = v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Entonces podemos descomponer al vector aceleración en dos componentes cuyos efectos sobre el vector velocidad están bien diferenciados.

Aceleración tangencial ($\vec{a}_t$): Es la responsable de modificar el módulo del vector velocidad.

Aceleración normal ($\vec{a}_n$): Es la responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Ahora analizaremos cómo, a partir del vector aceleración dado en coordenadas cartesianas, expresamos las componentes tangencial y normal de la aceleración. Vemos en el gráfico que lo que deseamos es obtener la componente de la aceleración en la dirección tangente a la trayectoria. Hemos analizado que para obtener la componente de un vector en una determinada dirección debemos hacer el producto escalar de dicho vector por un versor en la dirección deseada.



Por lo antes descrito debemos definir un versor $\hat{\tau}$ cuya dirección sea tangente a la trayectoria. Como el vector velocidad es tangente a la trayectoria podemos utilizarlo para definir dicho versor.

$$\hat{\tau} = \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

Entonces podemos calcular la proyección, o componente, del vector aceleración en la dirección tangente a la trayectoria realizando el producto escalar entre el vector aceleración con el versor $\hat{v}$

$$a_t = \vec{a}.\hat{v} = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{v}$$

y podemos escribir *el vector aceleración tangencial* como

$$\vec{a}_t = a_t.\hat{v}$$
$$\vec{a}_t = (\vec{a}.\hat{v}).\hat{v}$$
$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{v}.\hat{v}$$
$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{v^2}.\vec{v}$$

Determinar la componente normal del vector aceleración es una tarea más simple. Sabiendo que al vector aceleración lo podemos escribir como $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$, y conociendo la expresión del vector aceleración tangencia tenemos

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$
$$\vec{a}_n = \vec{a} - \frac{\vec{a}.\vec{v}}{v^2}.\vec{v}$$

Determinación del vector posición ($\vec{r}$) a partir del vector aceleración ($\vec{a}$)

Cuando analizábamos el movimiento unidimensional vimos como obtener la función de movimiento *x(t)* a partir de la aceleración *a(t)* del móvil. Si la información con la que contamos es la función aceleración *a(t)* y nuestro objetivo es obtener la función de movimiento del cuerpo *x(t)* sabemos que están relacionadas por la siguiente expresión

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

entonces debemos primero encontrar una función $v(t) = v^+(t) + C$ ($C = cte.$) tal que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv^+}{dt} = a(t)$$

y luego una función $x(t) = x^{+}(t) + C.t + D$ (D = *cte.*) que verifique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^{+}}{dt} + C = v(t)$$

A las constantes de integración C y D las determinamos a partir de dos datos extras que nos tienen que proveer y que pueden ser la velocidad y posición para un determinado tiempo ($x(t_0)$ y $v(t_1)$ pudiendo ser $t_0 = t_1$) o la posición para dos tiempo diferentes ($x(t_0)$ y $x(t_1)$).

Ahora, para el caso de un movimiento en dos dimensiones, lo que tenemos como dato es el vector aceleración $\vec{a}$ y debemos encontrar la función vectorial de movimiento $\vec{r}$. Si el vector aceleración está dado en sus componentes cartesianas, $\vec{a} = a_x.\hat{\imath} + a_y.\hat{\jmath}$, el problema será encontrar el vector posición dado en componentes cartesianas. El problema que ahora tenemos es idéntico al resuelto para una dimensión pero para cada una de las componentes cartesianas.

Dado a_x debemos encontrar una función $v_x(t) = v_x^{+}(t) + C_x$ (C_x = *cte.*) tal que

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x^{+}}{dt} = a_x(t)$$

y luego una función $x(t) = x^{+}(t) + C_x.t + D_x$ (D = *cte.*) que verifique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^{+}}{dt} + C_x = v_x(t)$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x^{+}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x^{+}}{dt} = a_x$$

De igual manera, dado a_y debemos encontrar una función $v_y(t) = v_y^{+}(t) + C_y$ (C_y = *cte.*) tal que

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y^{+}}{dt} = a_y(t)$$

y luego una función $y(t) = y^{+}(t) + C_y.t + D_y$ (D = *cte.*) que verifique

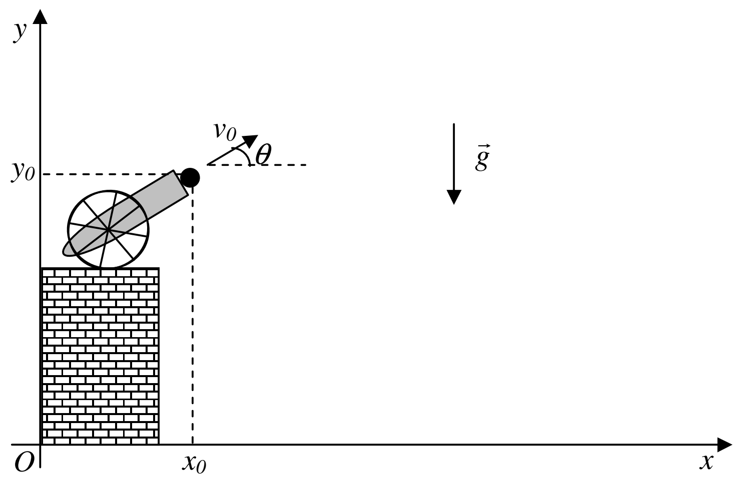
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy^{+}}{dt} + C_y = v_y(t)$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y^{+}}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y^{+}}{dt} = a_y$$

de esta forma podemos escribir los vectores velocidad $\vec{v}(t) = v_x(t).\hat{\imath} + v_y(t).\hat{\jmath}$ y posición $\vec{r}(t) = x(t).\hat{\imath} + y(t).\hat{\jmath}$, pero para que queden unívocamente determinados estos vectores es necesario encontrar los valores para las constantes de integración C_x, C_y, D_x y D_y. Para esto, al igual que en el caso unidimensional, es necesario que nos provean datos extras aparte del vector aceleración, como por ejemplo los vectores velocidad y posición para un determinado tiempo ($\vec{r}(t_0)$ y $\vec{v}(t_1)$ pudiendo ser $t_0 = t_1$) o el vector posición para dos tiempo diferentes ($\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}(t_1)$).

Veamos un ejemplo: Supongamos que un cañón, ubicado sobre una plataforma, dispara un proyectil con una velocidad inicial de módulo v_0 que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura. Suponiendo que la aceleración del proyectil es la de la gravedad, deseamos encontrar cual es la función de movimiento del mismo a partir del instante que salen por el extremo del cañón.



Para describir el movimiento de los proyectiles utilizaremos el sistema de coordenadas mostrado en la figura y tomaremos como $t = 0\ s$ al instante en que el proyectil abandona el tubo del cañón. Entonces, tomando en cuenta el sistema de coordenadas graficado nosotros tenemos que:

$$\vec{a}(t) = -g.\hat{\jmath}$$
$$\vec{r}(0s) = x_0.\hat{\imath} + y_0.\hat{\jmath}$$
$$\vec{v}(0s) = v_0.\cos(\theta).\hat{\imath} + v_0.sen(\theta).\hat{\jmath}$$

Si analizamos cada una de las componentes tenemos:

Componente x	Componente y
$a_x(t) = 0$	$a_y(t) = -g$
$x(0s) = x_0$	$y(0s) = y_0$
$v_x(0s) = v_0.\cos(\theta)$	$v_y(0s) = v_0.sen(\theta)$

Integrando podemos obtener las componentes de la velocidad

$$v_x(t) = C_x$$
$$v_x(0s) = C_x = v_0.\cos(\theta)$$
$$v_x(t) = v_0.\cos(\theta)$$

$$v_y(t) = -g.t + C_y$$
$$v_y(0s) = C_y = v_0.sen(\theta)$$
$$v_y(t) = -g.t + v_0.sen(\theta)$$

Con estas componentes podemos escribir el vector velocidad del proyectil

$$\vec{v}(t) = v_0.\cos(\theta).\hat{i} + [-g.t + v_0.sen(\theta)].\hat{j}$$

Integrando nuevamente obtenemos las funciones de movimiento para las coordenadas

$$x(t) = v_0.\cos(\theta).t + D_x$$
$$x(0s) = D_x = x_0$$
$$x(t) = v_0.\cos(\theta).t + x_0$$

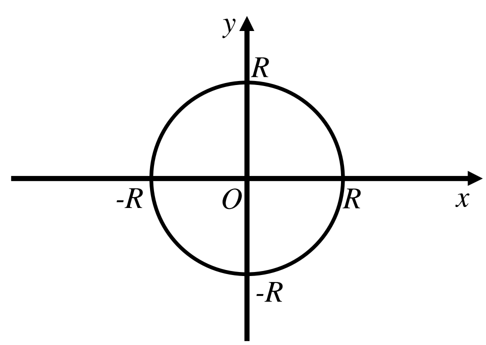
$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.sen(\theta).t + D_y$$
$$y(0s) = D_y = y_0$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.sen(\theta).t + y_0$$

Por lo tanto el vector posición del proyectil es

$$\vec{r}(t) = [v_0.\cos(\theta).t + x_0].\hat{i} + \left[-\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.sen(\theta).t + y_0\right].\hat{j}$$

Movimiento circular

El movimiento circular es un caso particular de un movimiento en el plano. La trayectoria es una circunferencia, o parte de ella, y puede ser descripta en coordenadas cartesianas por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, mientras que en coordenadas polares por $\rho = R$ y $\theta = \theta(t)$.



El vector posición de una partícula que realiza un movimiento circular expresado en coordenadas cartesianas es

$$\vec{r}(t) = R.[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}]$$

derivando obtenemos la velocidad del cuerpo

$$\vec{v}(t) = R.\left[-sen(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} + \cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}\right]$$
$$\vec{v}(t) = R.\frac{d\theta}{dt}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

la derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento angular la denominamos velocidad angular y la denotamos por $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; entonces

$$\vec{v}(t) = R.\omega.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Derivando el vector velocidad para obtener el vector aceleración del cuerpo

$$\vec{a}(t) = R.\frac{d\omega}{dt}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right] + R.\omega.\left[-\cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} - sen(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}\right]$$

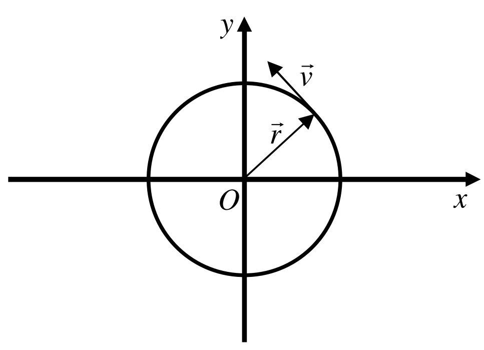
la derivada respecto al tiempo de la velocidad angular es la aceleración angular $\gamma = \frac{d\omega}{dt}$ y podemos escribir el vector aceleración como

$$\vec{a}(t) = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right] - R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Podríamos escribir este vector de manera que aparezca una única componente en la dirección x y una única componente en la dirección y

$$\vec{a}(t) = -R.\left[\gamma.sen(\theta(t)) + \omega^2.\cos(\theta(t))\right]\hat{i} + R.\left[\gamma.\cos(\theta(t)) - \omega^2.sen(\theta(t))\right]\hat{j}$$

Sin embargo veremos que la primera forma en que fue escrita la aceleración es más interesante.



Si realizamos el producto escalar entre el vector posición y el vector velocidad vemos que $\vec{r}(t).\vec{v}(t) = 0$ lo que implica que en un movimiento circular el vector posición es siempre perpendicular al vector velocidad ($\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$). Si la componente tangencial de la aceleración tiene la dirección de la velocidad entonces la componente normal de la aceleración tendrá la dirección del vector posición. Si analizamos la expresión de la aceleración vemos que está escrita como una suma de vectores, donde cada uno de estos vectores es un escalar por un vector. La parte vectorial del primer término es idéntica a la parte vectorial de la velocidad y por lo tanto podemos identificar este término con la aceleración tangencial.

$$\vec{a}_t(t) = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Mientras que la parte vectorial del segundo término es igual a la parte vectorial del vector posición, entonces podemos identificar a la componente normal de la aceleración con este segundo término.

$$\vec{a}_n(t) = -R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Sin embargo, podemos calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración mediante las expresiones $\vec{a}_t = (\vec{a}.\hat{v}).\hat{v}$ y $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$. Para este caso particular el versor velocidad ($\hat{v}$) es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\omega}{|\,\omega\,|}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

$$a_t = \vec{a}.\hat{v} = \vec{a}.\frac{\vec{v}}{v} = R.\gamma.\frac{\omega}{|\,\omega\,|}$$

entonces

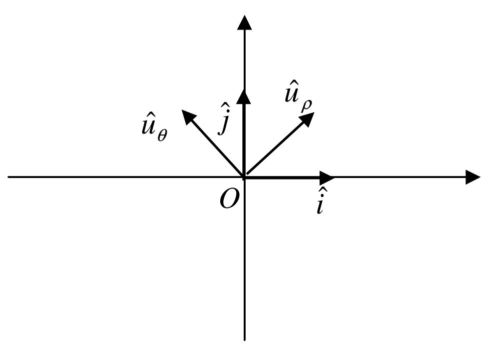
$$\vec{a}_t = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

y

$$\vec{a}_n(t) = \vec{a} - \vec{a}_t = -R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Como vemos las expresiones para la aceleración tangencial y normal son las mismas que habíamos deducido anteriormente.

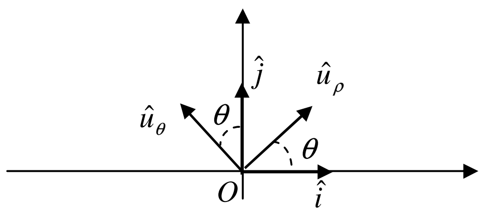
Ahora describiremos el movimiento circular utilizando coordenadas polares. Los versores en coordenadas polares son $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$.



El vector posición escrito en coordenadas polares es $\vec{r}(t) = \rho(t).\hat{u}_\rho$, y en el caso particular del movimiento circular resulta $\vec{r}(t) = R.\hat{u}_\rho$. Para calcular la velocidad debemos derivar el vector posición respecto del tiempo. Hasta ahora habíamos derivado vectores cuyas componentes están escritos en coordenadas cartesianas, donde los versores son constantes en módulo y dirección y por lo tanto su derivada respecto al tiempo es cero. Sin embargo en un sistema de coordenadas polares los versores modifican su dirección cuando cambia la posición del cuerpo cuyo movimiento describimos. Esto implica que los versores $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$ son funciones del tiempo y hay que tenerlo en cuenta cuando efectuemos la derivada.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\hat{u}_\rho) = R.\frac{d\hat{u}_\rho}{dt}$$

Veamos a que es igual la derivada de los versores polares respecto al tiempo. Para ello escribiremos los versores polares en términos de los versores de un sistema de coordenadas cartesianos.



$$\hat{u}_\rho = \cos(\theta).\hat{i} + sen(\theta).\hat{j}$$
$$\hat{u}_\theta = -sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}$$

En estas expresiones lo que es función del tiempo es el ángulo θ. Si derivamos respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = -sen(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} + \cos(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}$$
$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \omega.\left[-sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}\right]$$
$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \omega.\hat{u}_\theta$$

y

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} - sen(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}$$
$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega.\left[\cos(\theta).\hat{i} + sen(\theta).\hat{j}\right]$$
$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega.\hat{u}_\rho$$

Aplicando estos resultados, la velocidad de un cuerpo que realiza un movimiento circular es

$$\vec{v} = R.\omega.\hat{u}_\theta$$

Es evidente, a partir de esta expresión de la velocidad, que $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$. Para calcular la aceleración debemos derivar la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\omega.\hat{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = R.\frac{d\omega}{dt}.\hat{u}_\theta + R.\omega.\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\omega^2.\hat{u}_\rho$$

En esta expresión de la aceleración es claro que la componente en la dirección del versor $\hat{u}_\theta$ es paralela a la velocidad y la componente en la dirección $\hat{u}_\rho$ es normal a la velocidad, por lo tanto.

$$\vec{a}_t = R.\gamma.\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}_n = -R.\omega^2.\hat{u}_\rho$$

La componente normal de la aceleración tiene la dirección $-\hat{u}_\rho$, es decir que apunta hacia el centro del círculo. Esta componente de la aceleración que es la responsable de la modificación de la dirección de la velocidad recibe el nombre de *aceleración centrípeta*.

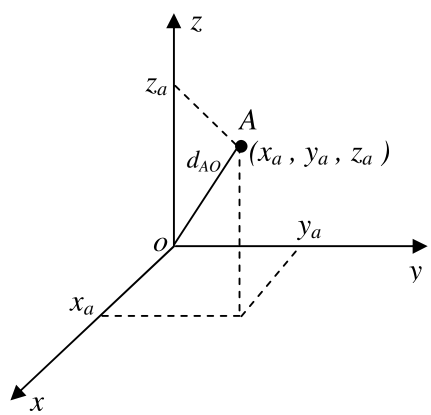
Capítulo 10

Localización de un punto en el espacio tridimensional

Hemos descrito el movimiento unidimensional (1-D) y bidimensional (2-D) de cuerpos puntuales, es decir que se mueven sobre rectas o en un plano. Ahora estamos interesados en describir el movimiento de cuerpos en el espacio tridimensional (3-D). De manera similar a lo que hicimos en la descripción de los movimientos 1-D y 2-D, lo primero que debemos hacer es determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en el espacio tridimensional.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Este sistema es similar al que utilizamos para definir la posición de un cuerpo en el plano, sólo que agregaremos un nuevo eje, que es perpendicular a los dos anteriores, en el cual se especifica la altura a la que se encuentra el cuerpo respecto al plano de referencia. Esta nueva coordenada la llamaremos z. Por lo tanto para definir la posición de un punto en el espacio tridimensional deberemos especificar una terna de valores que corresponden a las tres coordenadas del cuerpo en el espacio como se observa en la figura.



La distancia que existe entre un punto en el espacio, de coordenadas (x_a ,y_a ,z_a), y el origen O (d_{AO}) está dada por la expresión:

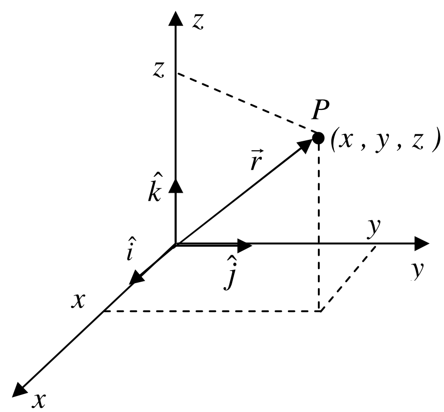
$$d_{AO} = \overline{OA} = \sqrt{x_a^{\ 2} + y_a^{\ 2} + z_a^{\ 2}}$$

Dados dos puntos en el espacio A_1 y A_2, de coordenadas (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) respectivamente, la distancia d entre ellos es la longitud del segmento $\overline{A_1A_2}$ que une ambos puntos y está dada por la expresión:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vector posición

También podemos identificar un punto ***P*** del espacio tridimensional, de coordenadas *(x,y,z)*, mediante un vector $\vec{r}$ que tenga su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en ***P***.



Las componentes de este vector $\vec{r}$ son las coordenadas cartesianas de ***P***; es decir $r_x = x$, $r_y = y$ y $r_z = z$ .Por lo tanto al punto ***P*** y al vector $\vec{r}$ lo podemos definir por $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$, donde $\hat{k}$ es un versor en la dirección del eje z. Cuando identificamos con este vector $\vec{r}$ el punto del espacio donde se encuentra ubicado el cuerpo, cuyo movimiento estamos describiendo, a este vector lo denominamos *vector posición*.

Función vectorial de movimiento

Como hemos visto la posición de un punto en el espacio puede ser dada por un vector denominado "*vector posición del punto*"; si el cuerpo se mueve *su vector posición variará con el tiempo* y, por lo tanto, en cada instante de tiempo tendremos un vector posición. Es decir que el vector posición será una función del tiempo $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Si referimos el vector posición a una base ortogonal coincidente con el sistema de coordenadas cartesiano ortogonal podemos escribir $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$, donde *x(t)*, *y(t)* y *z(t)* son las funciones de movimiento del cuerpo en coordenadas cartesianas. Por lo tanto podemos describir el movimiento de un cuerpo en el espacio por medio de la "*función vectorial de movimiento*" $\vec{r}(t)$.

Velocidad y aceleración en el movimiento tridimensional

Definimos la velocidad del cuerpo, de igual manera a cómo lo hicimos cuando analizamos el movimiento de un cuerpo que se mueve en el plano (2-D), como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir:

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\vec{V}}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

Podemos escribir el vector velocidad en sus componentes cartesianas

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

donde identificamos

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad y \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}$$

Como vemos, al igual que el vector posición, el vector velocidad es una función vectorial del tiempo.

De manera similar a lo realizado en el movimiento en el plano también podemos definir el vector aceleración para el movimiento tridimensional como

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si el vector posición $\vec{r}$ está expresado en término de sus coordenadas cartesianas, $\vec{r} = x.\hat{i} + y.\hat{j} + z.\hat{k}$, resulta

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}.\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}.\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}.\hat{k} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}.\hat{i} + \frac{dy}{dt}.\hat{j} + \frac{dz}{dt}.\hat{k}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\hat{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad y \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x.\hat{i} + a_y.\hat{j} + a_z.\hat{k}$$

Sabemos que podemos expresar a un vector como un escalar multiplicado por un versor; y en el caso particular de la velocidad podemos escribir $\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$. Si tanto el módulo como la dirección de la velocidad pueden variar con el tiempo tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v(t).\hat{v}(t)\right]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t) + v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Vemos que esta expresión de la aceleración contiene las dos componentes que ya hemos identificado en el caso de movimiento bidimensional.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_t(t) = \vec{a}_{//}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t)$$

$$\vec{a}_n(t) = \vec{a}_{\perp}(t) = v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

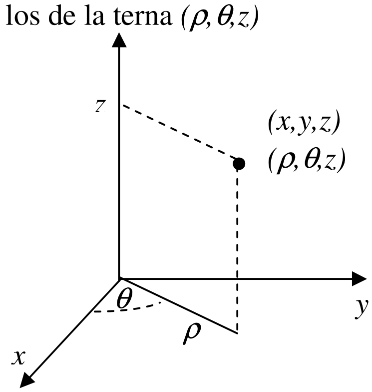
Entonces podemos expresar al vector aceleración en término de dos componentes cuyos efectos sobre el vector velocidad están bien diferenciados, la a*celeración tangencial* *(* $\vec{a}_t$ *)* responsable de modificar el módulo del vector velocidad y la a*celeración normal* *(* $\vec{a}_n$ *)* responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Sistema de coordenadas cilíndrico y esférico

Hasta ahora hemos analizado el movimiento tridimensional descripto en un sistema de coordenadas cartesiano. Sin embargo hay ciertos movimientos que, por su simetría particular, es más simple su descripción desde otro tipo de sistema de coordenadas diferente al cartesiano. Esto es similar a lo que ocurre en la descripción de un movimiento circular en el plano, el cual es más simple analizar utilizando un sistema de coordenadas polares. Existen muchos sistemas de coordenadas posibles pero analizaremos sólo dos, el cilíndrico y el esférico.

a) Sistema de coordenadas cilíndrico:

Este sistema utiliza un sistema de coordenadas polares para ubicar un punto en el plano e incorpora un eje *z* para determinar la altura del punto respecto a un plano de referencia. Para definir la posición de un punto en el espacio en un sistema de coordenadas cartesianas se debe especificar los valores de la terna *(x,y,z)* mientras que en coordenadas cilíndricas los de la terna (ρ, θ, z)



La relación entre el sistema de coordenadas cartesianos y cilíndrico es

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad & x &= \rho \cdot \cos(\theta) \\ \theta &= arctg(y/x) \qquad & y &= \rho \cdot sen(\theta) \\ z &= z \qquad & &(\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Para calcular la velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas debemos tener en cuenta que los versores en las direcciones ρ y θ son funciones del tiempo.

$$\vec{r} = \rho \cdot \hat{u}_\rho + z.\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k}$$

Sabiendo que $\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta = \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta$, la velocidad resulta

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \dot{z} \cdot \hat{k}$$

Si derivamos nuevamente respecto al tiempo podemos obtener la expresión para el vector aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt} \cdot \hat{k}$$

Como $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\rho = -\dot{\theta} \cdot \hat{u}_\rho$ tenemos que la expresión para el vector aceleración es

$$\vec{a} = \ddot{\rho} \cdot \hat{u}_\rho + 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta - \rho \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \hat{u}_\rho + \ddot{z} \cdot \hat{k}$$

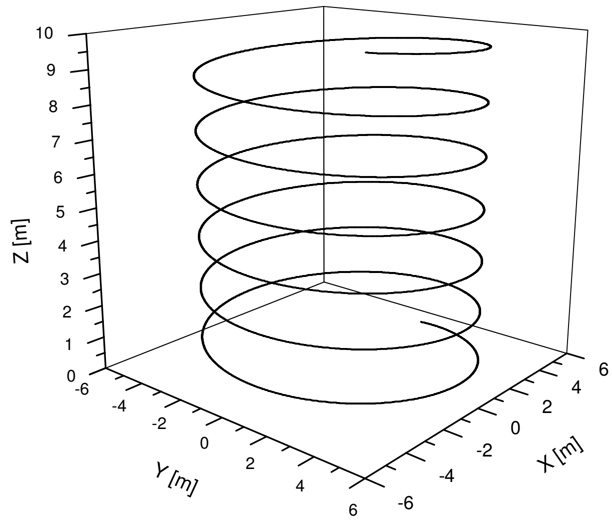
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} \cdot - \rho \cdot \dot{\theta}^2\right) \cdot \hat{u}_\rho + \left(2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot \hat{u}_\theta + \ddot{z} \cdot \hat{k}$$

Veamos la descripción de algunos movimientos en un sistema de coordenadas cilíndrico:

a) Supongamos que las funciones de movimiento son:

En coordenadas cilíndricas:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 5\,m$ $\theta(t) = 2\,s^{-1}.t$ $z(t) = 0.5\frac{m}{s}.t$	$x(t) = 5\,m.\cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 5\,m.sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 0.5\frac{m}{s}.t$

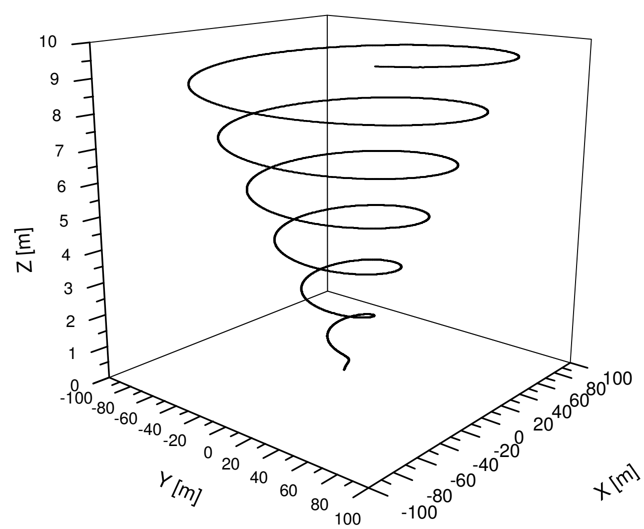
Como vemos la expresión de las funciones de movimiento es más simple en un sistema de coordenadas cilíndrico que en coordenadas cartesianas. En la figura se muestra la trayectoria correspondiente a este movimiento.



b) Si las funciones de movimiento son:

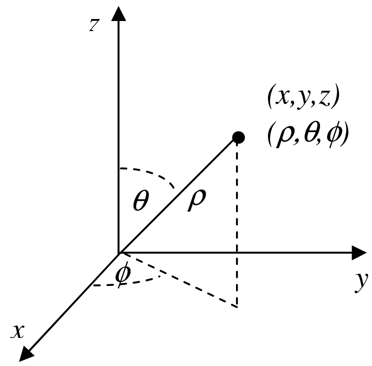
En coordenadas cilíndricas:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 5\frac{m}{s}.t$ $\theta(t) = 2\,s^{-1}.t$ $z(t) = 0.5\frac{m}{s}.t$	$x(t) = 5\frac{m}{s}.t.\cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 5\frac{m}{s}.t.\,sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 0.5\frac{m}{s}.t$

La trayectoria del movimiento sería la mostrada en la figura de abajo



b) Sistema de coordenadas esférico:

En el sistema de coordenadas polares para determinar la ubicación de un punto en el espacio se debe especificar la terna de valores (ρ,θ,ϕ) que corresponden a las coordenadas mostradas en la figura



La relación entre el sistema de coordenadas cartesianos y esférico es

$$\left|\begin{array}{cc} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & x = \rho \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ \theta = arctg(\sqrt{x^2 + y^2} / z) & y = \rho \cdot sen(\theta) \cdot sen(\phi) \\ \phi = arctg(y / x) & z = \rho \cdot \cos(\theta) \end{array}\right.$$

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

El vector posición en coordenadas esféricas es

$$\vec{r} = \rho \cdot \hat{u}_\rho$$

Para obtener el vector velocidad debemos derivar el vector posición respecto al tiempo y resulta

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt}$$

en coordenadas esféricas $\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta + sen\theta \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_\phi = \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + sen\theta \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi$, la velocidad resulta

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot sen\ \theta \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi$$

Si derivamos nuevamente respecto al tiempo podemos obtener la expresión para el vector aceleración en coordenadas esféricas

$$\vec{a}=\frac{d\dot{\rho}}{dt}\cdot\hat{u}_\rho+\dot{\rho}\cdot\frac{d\hat{u}_\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{u}_\theta+\rho\cdot\frac{d\dot{\theta}}{dt}\cdot\hat{u}_\theta+\rho\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\cdot sen(\theta)\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi+$$
$$\rho\cdot\cos(\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi+\rho\cdot sen\theta\cdot\frac{d\dot{\phi}}{dt}\cdot\hat{u}_\phi+\rho\cdot sen(\theta)\cdot\dot{\phi}\cdot\frac{d\hat{u}_\phi}{dt}$$

Como

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{u}_\rho+\cos(\theta)\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot\hat{u}_\phi=-\dot{\theta}\cdot\hat{u}_\rho+\cos(\theta)\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi$$

y

$$\frac{d\hat{u}_\phi}{dt}=-\frac{d\phi}{dt}\cdot sen(\theta)\cdot\hat{u}_\rho-\frac{d\phi}{dt}\cdot\cos(\theta)\cdot\hat{u}_\theta=-\dot{\phi}\cdot\left(sen(\theta)\cdot\hat{u}_\rho+\cos(\theta)\cdot\hat{u}_\theta\right)$$

el vector aceleración es

$$\vec{a}=\frac{d\dot{\rho}}{dt}\cdot\hat{u}_\rho+\dot{\rho}\cdot\left(\dot{\theta}\cdot\hat{u}_\theta+sen\theta\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi\right)+\frac{d\rho}{dt}\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{u}_\theta+\rho\cdot\frac{d\dot{\theta}}{dt}\cdot\hat{u}_\theta+\rho\cdot\dot{\theta}\cdot\left(-\dot{\theta}\cdot\hat{u}_\rho+\cos(\theta)\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi\right)$$
$$+\frac{d\rho}{dt}\cdot sen(\theta)\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi+\rho\cdot\cos(\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\dot{\phi}\cdot\hat{u}_\phi+\rho\cdot sen\theta\cdot\frac{d\dot{\phi}}{dt}\cdot\hat{u}_\phi-\rho\cdot sen(\theta)\cdot\dot{\phi}^2\cdot\left(sen(\theta)\cdot\hat{u}_\rho+\cos(\theta)\cdot\hat{u}_\theta\right)$$

Separando en cada una de las componentes resulta

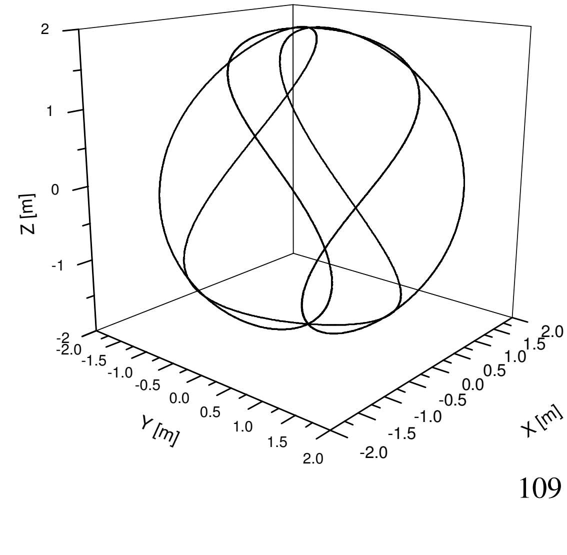
$$\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\cdot\dot{\theta}^2-\rho\cdot sen^2(\theta)\cdot\dot{\phi}^2\right)\cdot\hat{u}_\rho+\left(2\cdot\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}+\rho\cdot\ddot{\theta}-\rho\cdot sen(\theta)\cdot\cos(\theta)\cdot\dot{\phi}^2\right)\cdot\hat{u}_\theta+$$
$$\left(2\cdot\dot{\rho}\cdot sen(\theta)\cdot\dot{\phi}+2\cdot\rho\cdot\cos(\theta)\cdot\dot{\phi}\cdot\dot{\theta}+\rho\cdot sen(\theta)\cdot\ddot{\phi}\right)\cdot\hat{u}_\phi$$

Veamos unos ejemplos simples de movimientos de cuerpos puntuales descriptos en un sistema de coordenadas esférico:

a) Si las funciones de movimiento son

En coordenadas esférico:	En coordenadas cartesinas
$r(t)=2\,m$	$x(t)=2m\cdot sen(3\,s^{-1}.t)\cdot\cos(2\,s^{-1}.t)$
$\theta(t)=3\,s^{-1}.t$	$y(t)=2m\cdot sen(3\,s^{-1}.t)\cdot sen(2\,s^{-1}.t)$
$\phi(t)=4\,s^{-1}.t$	$z(t)=2m\cdot\cos(3s^{-1}.t)$

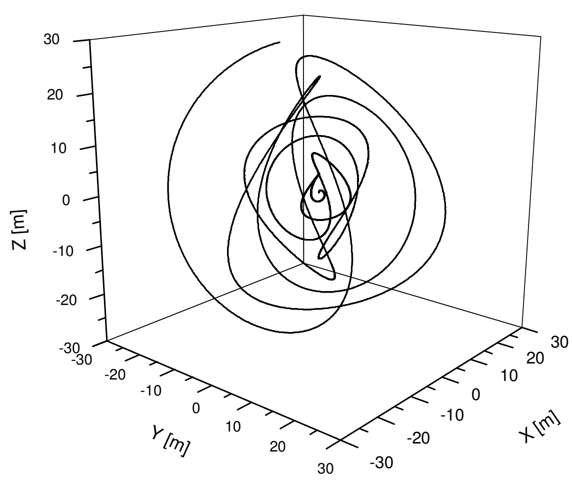
el gráfico de la trayectoria es



b) Supongamos ahora que todas las funciones de movimiento en coordenadas esféricas son funciones lineales del tiempo

En coordenadas esférico:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 3\frac{m}{s}\,t$ $\theta(t) = 5\,s^{-1}.t$ $\phi(t) = 2\,s^{-1}.t$	$x(t) = 3\frac{m}{s}\,t \cdot sen(5\,s^{-1}.t) \cdot \cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 3\frac{m}{s}\,t \cdot sen(5\,s^{-1}.t) \cdot sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 3\frac{m}{s}\,t \cdot \cos(5\,s^{-1}.t)$

la trayectoria es:



Como vemos funciones de movimiento muy simples en coordenadas esféricas corresponden a la descripción de movimientos complejos.

Bibliografía recomendada

- FÍSICA: Resnick, R. - Halliday, D. Tomo 1. Ed. ECPSA
- FÍSICA UNIVERSITARIA: Sear, Francia W. - Zemansky, Mark W. - Young Hugh D. Adisson - Wesley Iberoamericana, 6ta. Edición Wilmington.
- FÍSICA: Serway, Raymound A, Tomo 1. 3ra. Edición. Mc. Graw - Hill.