

UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “C”

TRABAJOS DE FÍSICA

Nº 6/2012

**De la Rueda de Barlow al Efecto Hall.
El efecto del campo magnético sobre el flujo de corriente
en los conductores Me-tálicos:
preguntas respuestas y razonamientos**

Lorenzo M. Iparraguirre



Editores: Miguel A. Chesta–Ricardo C. Zamar

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

De la Rueda de Barlow al Efecto Hall.

El efecto del campo magnético sobre el flujo de corriente en los conductores metálicos: preguntas respuestas y razonamientos

Lorenzo M. Iparraguirre

*Facultad de Matemática, Astronomía y Física – Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria – X5016LAE Córdoba – Argentina*

Resumen

La Rueda de Barlow, inventada por Peter Barlow en 1822, es un tema que suele ser presentado como un ejemplo ilustrativo de la manifestación de la fuerza magnética sobre la corriente eléctrica, acompañada en general de explicaciones y dibujos muy esquemáticos, que no contienen mucho más que reglas para decidir el sentido de rotación de la rueda en función de los sentidos de la corriente y del campo magnético aplicado. En este trabajo, luego de revisar las explicaciones tradicionales básicas sobre el funcionamiento de este aparato, se plantean interrogantes que quedan sin respuesta, poniendo de relieve aspectos ausentes en estas explicaciones, que serían importantes para una comprensión adecuada de los mecanismos que intervienen. El cuerpo central de este trabajo muestra el desarrollo de un esquema explicativo suficiente-mente completo, que se considera necesario para la construcción de los conceptos y razonamientos necesarios, que en general quedan fuera del alcance de los lectores y alumnos de distintos niveles. Finalmente se encuentra una interesante relación entre estos temas y el efecto Hall, para el cual se logra así un punto de vista novedoso que enriquece los tratamientos habituales de este tema también.

Palabras clave: fuerza magnética – Rueda de Barlow – Efecto Hall – motor homopolar – flujo bidimensional de corriente.

Abstract

The Barlow's wheel, invented by Peter Barlow in 1822, is a subject that is usually presented as an illustrative example of magnetic action over electric current, supported by very schematic explanations and drawings that contain not much more than rules to deduce the rotation sense of the wheel as a function of the senses of the supply electric current and the applied magnetic field. In this work, a revision of the traditional explanations of the Barlow's wheel functioning reveals unanswered questions of such explanations and highlights the discussions which would be important to address for a satisfactory understanding of the intervening mechanisms. The central body of this work presents a complete explanatory framework, necessary to build the concepts and reasoning, which usually remain inaccessible for readers and students of different levels. Finally an interesting relationship between these subjects and the Hall Effect is found, a novel point of view on this effect being presented, which improves the usual treatment of this topic.

Keywords: magnetic force – Barlow's Wheel – Hall Effect – homopolar motor – two-dimensional current flux.

1.-Introducción:

La rueda de Barlow es uno de esos mecanismos para los cuales, dada su extrema simplicidad, pueden considerarse suficientes, desde el punto de vista práctico, algunas explicaciones esquemáticas que simplemente sugieren que debe o puede funcionar, y permiten predecir algunas características básicas de su funcionamiento, como el sentido de giro, o el aumento o disminución de los valores de la velocidad o de la cupla obtenible, en función de posibles manipulaciones de sus elementos constitutivos.

Efectivamente, la sola imagen de este aparato (figuras 1 y 2) sugiere aplicar la ley de fuerza magnética de Lorentz para explicar su funcionamiento, y la manipulación más básica de los elementos que esta ley contiene es suficiente, no sólo para justificar todas las posibilidades prácticas de funcionamiento, sino para hacer cálculos estimativos y obtener valores numéricos que pueden resultar adecuados y verificables.

Ahora bien, este párrafo anterior define un grado de comprensión que podría denominarse “técnico”: es el grado de comprensión o conocimiento necesario para hacer funcionar el aparato, controlarlo, repararlo en caso de fallas, y aún hasta para construirlo.

Pero en este nivel de tratamiento ni siquiera llegan a entrecerse los detalles finos que están involucrados y que deberían ser analizados en un curso de física de nivel superior al de la escuela media.

Avanzando en estas páginas se irán presentando estos detalles, y se verá cómo su análisis lleva a un nivel de comprensión mucho más profundo y satisfactorio que el que se necesita para hacer funcionar el aparato.

2.- Descripción básica de la Rueda de Barlow y planteo de algunas cuestiones

Esta rueda es un motor eléctrico elemental, del tipo denominado “motor homopolar”. Consiste en un disco conductor (de cobre en general, pero eso es irrelevante), montado sobre un eje, conductor también, horizontal, con el mínimo rozamiento posible, de manera que el borde inferior del disco toma contacto con un líquido conductor en una cubeta adecuada (el líquido es mercurio en las propuestas iniciales, aunque para evitar problemas relacionados con la toxicidad de éste, se lo puede reemplazar, con gran desventaja, por cierto, por alguna solución electrolítica, como salmuera o soda cáustica). Así el disco cierra un circuito constituido por una fuente de corriente eléctrica cuyos terminales se conectan al eje y a la cubeta que contiene el líquido.

Por otra parte, el disco está montado de manera que su parte inferior gira en el entrehierro de un poderoso imán, cuyo campo magnético lo atraviesa perpendicularmente.

De este modo el campo magnético aplica una fuerza a la corriente que circula por el disco, y lo impulsa a girar como se ilustra en la figura 1.

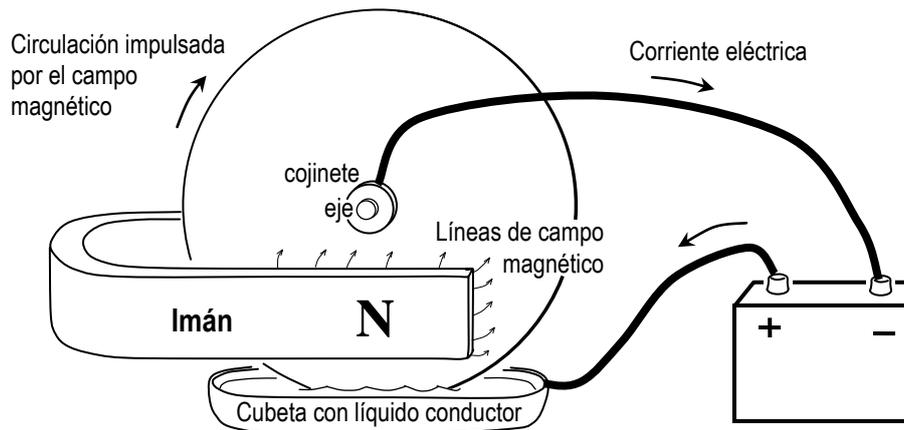


Fig. 1: Esquema de la rueda de Barlow. La corriente en el disco tiene sentido (convencional) ascendente, desde la cubeta hacia el eje, y según la ley de fuerza de Lorentz el campo magnético, que tiene sentido entrante hacia la hoja, le aplica una fuerza hacia la izquierda, impulsando la rotación que se muestra.

Vale aclarar que la cubeta con el líquido conductor en principio podría ser reemplazada por cualquier escobilla de contacto, y en ese caso no se requeriría que la posición del disco fuese vertical y podrían modificarse muchos detalles del diseño.

Pero para modificaciones de este tipo hay que considerar que este motor tiene muy bajo rendimiento: se requiere una corriente muy intensa para un impulso de rotación bastante débil, de manera que un mínimo rozamiento en la escobilla basta para impedir el movimiento. Con los imanes de neodimio tan potentes que se pueden conseguir actualmente es posible lograr el funcionamiento en estas condiciones si se dispone de una fuente de alrededor de 10 amperios, y se realiza una construcción bastante cuidadosa.

Un detalle muy importante es que las figuras de los textos en general suelen mostrar una rueda como la de la figura 2, tipo “estrella”, con puntas o rayos que pueden ser finos o gruesos, sin llegar a establecer con toda claridad cuál fue realmente el modelo construido por Barlow.

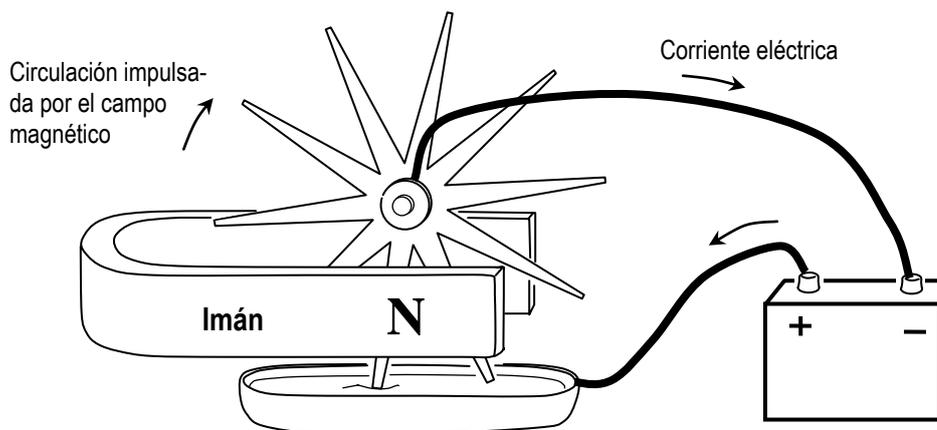


Fig. 2: Esquema de la rueda de Barlow para el caso el que el disco es sustituido por una estrella. Este esquema es tan frecuente como el anterior en toda la literatura sobre el tema.

Es interesante notar, por otra parte, que el funcionamiento de este aparato, *dejando de lado para más adelante algunos detalles*,¹ es reversible: si se quita la fuente de energía eléctrica y se hace girar el disco/estrella, se obtiene la correspondiente diferencia potencial entre los terminales del eje y de la cubeta. Constituye así el aparato denominado *dínamo de disco de Faraday*, inventado por éste en 1831 (figura 3).

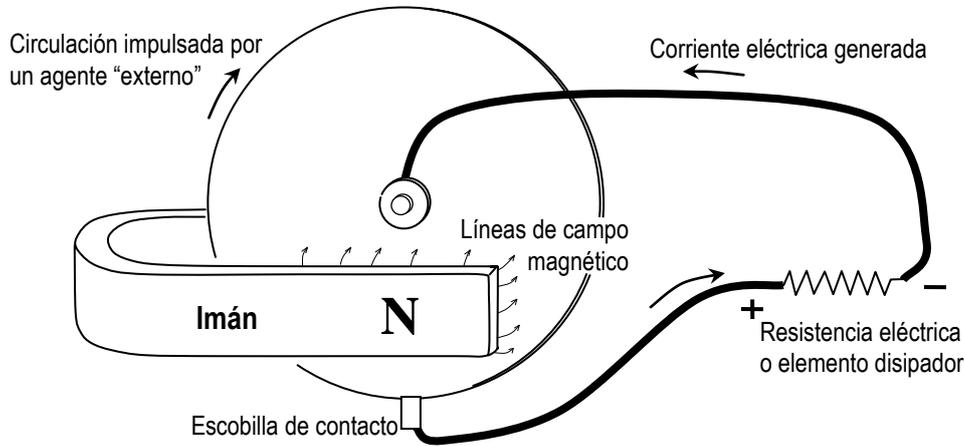


Fig. 3. Dínamo de disco de Faraday: Si se quita la fuente de corriente eléctrica y se hace girar el disco de Barlow, éste genera una fuerza electromotriz en sentido contrario al de la corriente que hubiera sido necesario suministrarle para producir en él esa rotación. Aquí la cubeta con el líquido puede ser sustituida por cualquier tipo de contacto porque el rozamiento es vencido por el agente externo.

3.- La explicación tradicional

La ley que se aplica para explicar el funcionamiento del disco de Barlow es la ley de fuerza magnética de Lorentz, según la cual la fuerza \vec{F} que un campo magnético \vec{B} aplica a una partícula de carga q que se mueve con velocidad lineal \vec{v} es:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

Esta ley también puede aplicarse indistintamente en su versión microscópica (2), y en su versión para conductores delgados lineales (3):

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} dV \quad (2)$$

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3)$$

Siendo:

$d\vec{F}$: la fuerza aplicada por el campo sobre la carga móvil en el elemento de volumen dV , en la versión microscópica (2), y en el elemento de conductor de longitud dl en la versión para cables conductores (3).

\vec{j} : el vector densidad de corriente.

¹ Lo primero que se nota cuando trata de utilizarse la versión disco lleno de la rueda como dínamo, es el notable frenado producido por las “corrientes parásitas de Foucault”, de las cuales éste sería un excelente demostrador, prácticamente idéntico al *péndulo de Foucault*. El frenado por las corrientes parásitas no aparece en la versión “peine” de este péndulo, con cortes que lo hacen similar a la versión estrellada de la rueda. Estas corrientes parásitas disminuyen la generación de corriente (y complican mucho las explicaciones) por parte del disco lleno, a menos que el campo magnético atravesase uniformemente toda la superficie del disco.

i : la intensidad de la corriente en un cable conductor.

\vec{dl} : un vector indicativo de un desplazamiento espacial a lo largo del cable conductor, con el sentido de circulación convencional de la corriente.

La aplicación de esta ley en cualquiera de sus versiones, para el aparato ilustrado en las figuras (1) y (2), es inmediata y puede verse en el esquema de la figura 4.

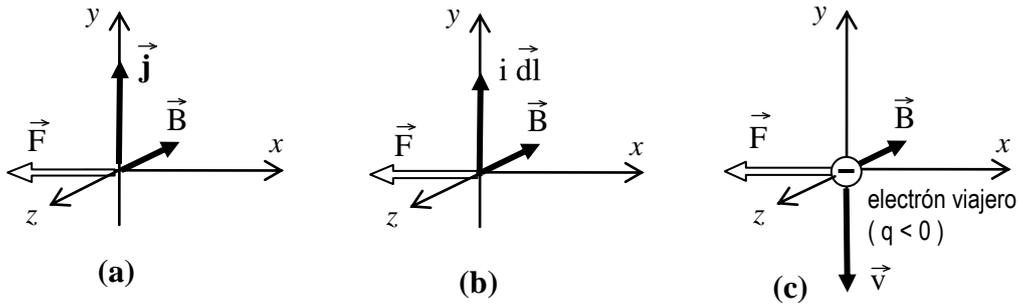


Fig. 4: Considerando un esquema simplificado en el cual la corriente i circula desde la cubeta hacia el eje (sentido convencional), es decir según el eje y , y estando el campo \vec{B} entrante hacia la hoja, es decir, opuesto a z , la fuerza resulta hacia la izquierda, es decir opuesta a x , como se ilustra en (a) y (b).

En (c) se aplica la ley a un hipotético electrón viajero, al cual se le atribuye cierta velocidad \vec{v} , opuesta al sentido convencional de circulación de la corriente. Si se imaginaran hipotéticas cargas positivas viajando según el sentido convencional de la corriente, se obtendría obviamente la misma fuerza, opuesta a x .

Por otra parte, un esquema muy similar se utiliza habitualmente para explicar la generación de electricidad en el disco de Faraday, como se ilustra en la figura 5.

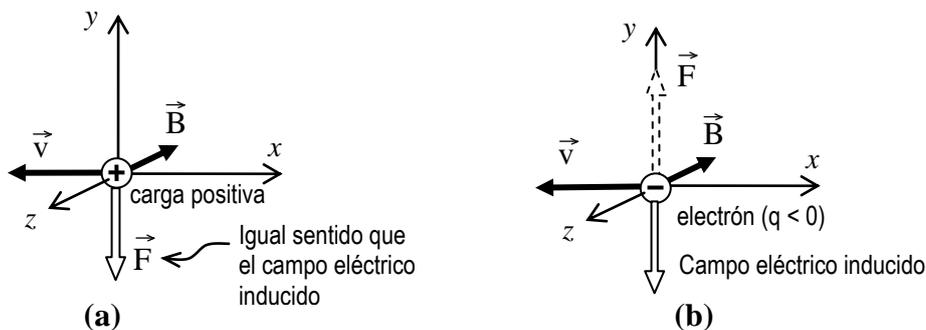


Fig. 5: (a). Considerando una hipotética carga positiva con la velocidad \vec{v} de un punto del disco (es decir en reposo respecto del mismo) la fuerza que el campo \vec{B} le aplica indica la dirección y sentido del campo eléctrico inducido. En (b) se muestra un hipotético electrón en reposo con respecto al disco en el lugar considerado. La fuerza del campo \vec{B} sobre este electrón indica el sentido en que tiende a hacerlo circular, hacia arriba. El vector opuesto, hacia abajo, representa el campo eléctrico inducido correspondiente, con el mismo sentido que la circulación convencional de la corriente inducida.

4.- Crítica a las explicaciones tradicionales

Puede decirse que se ha presentado hasta aquí la esencia de todas las explicaciones de estos fenómenos que se encuentran habitualmente en la literatura. Está claro que constituyen buenas

reglas sencillas y eficaces para determinar el sentido de circulación de la corriente o del disco en los diferentes casos posibles.

Ahora bien, comprender los fenómenos involucrados en estos temas es mucho más que poder predecir correctamente los sentidos de circulación. La comprensión implica cierta capacidad para manipular todo un conjunto de detalles conceptuales que no han sido mencionados siquiera.

Así por ejemplo es más o menos claro que cada pico de la rueda en la versión “estrella” se puede asimilar bastante bien, sin mucho esfuerzo de manipulación conceptual, a un conductor delgado sobre el cual actuaría una fuerza dada por la expresión (3), y que a partir de allí la explicación de la figura 4.(b) resulta bastante satisfactoria y completa, y sólo deja al lector la elaboración de detalles menores.

Pero eso no es para nada claro en la versión “disco lleno” de la rueda. En este caso se perciben inmediatamente muchas cuestiones que requieren de una elaboración bastante compleja.

Por ejemplo:

1) Es claro que la corriente no viaja por el disco a lo largo de una línea radial, sino que se distribuye en alguna configuración prácticamente bidimensional.

Al pensar en esto se plantean los interrogantes:

- ¿Cómo se distribuye la corriente por el disco lleno?
- ¿Cómo influye el campo magnético en esa distribución?

2) Las expresiones para la fuerza de Lorentz en estos casos de corriente distribuida son (1) o (2), y ambas expresan claramente la *fuerza actuante sobre las cargas viajeras*, que serían los electrones de conducción.

Según las ideas elementales básicas sobre la conducción metálica, estos electrones pueden moverse libremente dentro del disco conductor. El campo magnético puede desviarlos de la manera indicada por las expresiones 1 - 2, sin que eso implique por sí mismo acción alguna sobre la red cristalina, o sea sin que implique directamente *fuerza mecánica sobre el disco*.

Se infiere que de alguna manera la acción sobre los electrones *se tiene que transformar en acción mecánica sobre el disco*, pero esa inferencia no es lo mismo que elaborar un modelo que lo explique satisfactoriamente, y además deja claramente sin respuesta una pregunta importante:

- ¿Es tan eficiente la rueda disco lleno como la rueda estrella para generar movimiento a partir de la corriente?

Es razonable conjeturar que tal vez la rueda disco lleno funciona muy pobremente, y la única manera de hacerla eficiente es subdividirla angularmente en picos o sectores adecuados.

Esto último es muy fácil de verificar experimentalmente: el rendimiento del motor con la rueda estrella supera claramente al del disco lleno. Pero esto contradice directamente la idea de que la acción del campo magnético sobre todo el disco debería ser igual a la suma de la acción que resulta sobre las cargas móviles (electrones de conducción) más la que resulta sobre las cargas fijas a la red (acción que resulta en un momento nulo respecto del eje, dado que la fuerza magnética sobre estas últimas, que sólo se pueden mover en circunferencias, debe ser radial).

Es decir, después de haber visto y entendido las explicaciones habituales sobre el funcionamiento de la Rueda de Barlow, estamos bastante lejos de haber logrado un grado adecuado de comprensión de los detalles que van más allá de lo trivial.

Una tratamiento adecuado de estos temas debería presentar al lector (alumno o aprendiz de electricidad- magnetismo o electromagnetismo) algunas de estas cuestiones, y también suministrarle algunas herramientas para poder resolver los problemas que encontrará en el proceso de aclararlas.

Este tratamiento es el que se desarrolla a continuación, y que, como se verá, y como sucede siempre que se profundiza un tema, nos llevará a explorar temas que a priori no hubiésemos considerado.

5.- Detalles preliminares

Consideramos un modelo elemental en el que el metal está constituido por una red de iones positivos, cada uno de los cuales es el átomo correspondiente, desprovisto del/los electrones que aporta a la conducción. No interesa refinar más este modelo para los fenómenos que vamos a tratar. Básicamente supondremos que cada átomo aporta un electrón a la conducción, sin tener pretensiones de rigor.

Esta red de iones constituye una estructura que para los fines de este trabajo se puede considerar rígida, y que podríamos llamar el cuerpo físico de los objetos metálicos, es decir, es el asiento de la masa, y soporte de las acciones mecánicas.

Los iones tienen cierto movimiento vibratorio alrededor de sus respectivas posiciones de equilibrio, determinado básicamente por la agitación térmica, y que será irrelevante para nuestros fines.

En este modelo elemental, que es el llamado *Modelo de Drude*², los electrones de conducción, por otra parte, constituyen un “mar de electrones libres”, sujetos individualmente a movimientos caóticos de agitación térmica, y colectivamente a movimientos de flujo que serán objeto central de este estudio.

Y para poder decidir correctamente sobre la importancia que pueden tener algunos factores lo mejor es establecer algunas cifras.

Según la Teoría Cinética de los Gases se puede atribuir a cada electrón una energía cinética del orden de $3/2 k_B T \cong 6 \times 10^{-21} \text{ J} \cong 0,04 \text{ eV}$, lo que permite hablar de una velocidad cuadrática media individual de 10^5 m/s (siendo $k_B \cong 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, la constante de Boltzmann, y $T \cong 300 \text{ K}$, la temperatura ambiente).

Por otra parte la conducción eléctrica en metales involucra las siguientes relaciones:

$$\vec{j} = \rho \vec{U} = \text{vector densidad de corriente} \quad (4)$$

$$j = \frac{\delta_i}{\delta S_i} \quad (4')$$

Donde

ρ : densidad de carga móvil

² En este trabajo se presentan desarrollados todos los detalles de este modelo que serán necesarios, pero quien desee una ampliación muy accesible puede encontrarla en la referencia [1].

\bar{u} : velocidad media, o de flujo, de los electrones de conducción

δi : intensidad de la corriente eléctrica a través del elemento de sección transversal δS_t

La densidad de carga móvil está dada por

$$\rho = - \frac{N q_e}{V} = - n q_e \quad (5)$$

Donde

$q_e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, es la carga elemental ($q_e =$ carga del protón = $-$ carga del electrón)

N: es el número de electrones de conducción en el volumen V, y n es el número de éstos por unidad de volumen.

Atribuyendo por ahora 1 electrón de conducción por átomo, se tiene:

$$|\rho| = \frac{N_A q_e \delta}{A} \quad (6)$$

Donde

$N_A \cong 6,02 \times 10^{23}$, es el Número de Avogadro

A: es la masa molar

δ : densidad de la sustancia

En la siguiente tabla (Tabla 1) se presentan valores experimentales involucrados en estas expresiones.

Tabla 1. Valores referidos a la conducción eléctrica

	A (g / mol)	δ (kg / m ³)	$ \rho $ ($\times 10^{10}$ C / m ³)	ρ_R ($\times 10^{-8}$ $\Omega \cdot m$)
Cu	63,5	8960	1,36	1,65
Al	27,0	2700	0,96	2,65
Fe	55,9	7860	1,35	9,71
Sn	118,7	7300	0,59	11,0
Pb	207,2	11400	0,53	20,7
Bi	209,0	9800	0,45	115

Con estos valores es posible estimar que si las densidades de corriente pueden llegar al orden de $10 \text{ A/mm}^2 = 10^7 \text{ A/m}^2$, entonces según (4) están involucradas velocidades de flujo del orden de 10^{-3} m/s, enormemente menores que las velocidades individuales de los electrones obtenidas a partir de la Teoría Cinética.

Claramente la velocidad de flujo es una velocidad media, dada por el promedio de las velocidades electrónicas individuales:

$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum \bar{v}_i \quad (7)$$

Correspondería una nomenclatura indicadora de valor medio, pero la omitiremos para simplificar la escritura.

Por otra parte, para delimitar el alcance de algunos términos, corresponde aquí hacer algunas consideraciones similares a las que se hacen al considerar la estructura microscópica en dinámica de fluidos en general.

Para hablar de lo que sucede en cada lugar dentro del material se considera un volumen suficientemente pequeño como para poder denominarlo un *punto* de nuestro dispositivo macroscópico en estudio, pero suficientemente grande como para contener un número N muy grande de átomos, y con ello, de electrones de conducción.

Este número N debe ser tan grande que la entrada y salida de electrones individuales a este volumen no altere de manera detectable los valores medios de todas las variables involucradas.

Los electrones de conducción constituyen una enorme densidad de carga negativa móvil (10^{10} C/m³, lo que significa 10 C/mm³), pero viajan sumergidos en una densidad exactamente igual de carga positiva fija, de manera que están en las mismas condiciones que las moléculas neutras del modelo cinético de los gases ideales: sufren continuamente choques entre sí y con los iones de la red, pero no están sujetos a efectos repulsivos ni atractivos netos. Al igual que las moléculas en un gas, estos electrones están contenidos en un recipiente, que es el metal, cuya frontera impide su salida, como ya se ha mencionado.

Y también al igual que en el caso de las moléculas en el gas, no será necesario ahondar en la naturaleza de las fuerzas actuantes en los choques, que pueden ser consideradas simplemente mecánicas.

Los campos \bar{E} y \bar{B} que necesitamos considerar para entender la conducción en estos aparatos, son campos que denominaremos externos en general, para distinguirlos de los campos locales de los átomos individuales de la red, cuyo valor medio (en toda la región considerada un punto) es nulo.

Como veremos en detalle, estos campos denominados externos pueden ser realmente externos para el medio conductor, como el campo magnético del imán que se coloca para producir el movimiento, pero también pueden ser campos eléctricos creados por las distribuciones superficiales de carga que se inducen en el metal como *consecuencia de las acciones externas*.

La fuerza neta de estos campos sobre cada uno de los N electrones libres en la región que hemos dicho que se considera como un punto, está determinada por la ley de fuerza de Lorentz,

$$\bar{F}_i = -q_e \bar{E}(\bar{r}_i) - q_e \bar{v}_i \times \bar{B}(\bar{r}_i) \quad (8)$$

Promediando esta fuerza sobre todos los electrones del punto, y considerando que los campos externos no varían con las posiciones \vec{r}_i de todos los electrones individuales (dentro del punto), se obtiene:

$$\frac{1}{N} \sum \vec{F}_i = -q_e \vec{E} - q_e \vec{U} \times \vec{B} \quad (9)$$

Esta expresión permite ver claramente que la fuerza magnética está determinada por la pequeñísima velocidad de flujo, con independencia de los enormes valores de las velocidades electrónicas individuales.

Por otra parte, si se escribe la ley del impulso para estos electrones, considerando la fuerza de los campos externos dada por (9), e incluyendo todos los impulsos recibidos por los electrones a través de los choques con la red en un lapso δt en un término \vec{I}_{choques} se tiene:

$$\sum m_e \delta \vec{v}_i = -N q_e \vec{E} \delta t - N q_e \vec{U} \times \vec{B} \delta t + \vec{I}_{\text{choques}} \quad (9')$$

Ahora bien, en esta expresión es posible ver que el miembro izquierdo, que puede escribirse $N m_e \delta \vec{U}$, puede considerarse cero. Para ello consideremos un intervalo de tiempo tal que $|\delta \vec{U}|$ sea del mismo orden de magnitud que $|\vec{U}|$. Esas variaciones (tanto en el módulo como en la dirección de la velocidad media), en este aparato considerado, deben ocurrir en una distancia relativamente grande, del orden de 1 mm, lo cual implica que δt debe ser del orden de 1 s.

Esto permite ver que para un campo B del orden de 0,1 T, el término de fuerza magnética superará al miembro izquierdo en una relación $0,1 q_e/m_e$, esto es, 10^{13} .

Por otra parte, el término de fuerza eléctrica siempre superará al magnético, dado que E es del orden $\rho_R j \sim \rho_R \rho U \sim 10^2 U$.

De manera que claramente la fuerza media que la red aplica a los electrones por medio de los choques, debe cancelar la fuerza de los campos independientemente de las características del movimiento de flujo.

Es decir, estamos en las condiciones típicas de movimiento que encuentra un cuerpo en un fluido extremadamente viscoso: los efectos de la inercia son absolutamente despreciables, y prácticamente la fuerza del medio sobre el móvil equilibra exactamente en cada instante a las restantes fuerzas exteriores que pueda haber aplicadas sobre este último.

Por otra parte, para completar esta idea consideremos ahora la energía cinética de estos N electrones viajando en un punto.

La velocidad de flujo es la velocidad del centro de masa de este conjunto de electrones, y para la energía cinética del conjunto, llamando E_c^* a la energía cinética en el Sistema Centro de Masa, vale la expresión:

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} N m_e U^2 \quad (10)$$

Es importante tener presente que E_c^* es una cantidad que depende de la temperatura, dada aproximadamente por $3/2 N k_B T \cong N \times 6 \times 10^{-21} \text{ J} \cong N \times 0,04 \text{ eV}$, enormemente superior a la energía cinética de traslación, dada por el segundo término de (10), la cual veremos inmediatamente que no alcanza en ningún momento valores relevantes.

Efectivamente, en estos aparatos se tienen campos eléctricos del orden de 1 V/m, que en 1 mm pueden suministrar 10^{-3} eV a cada electrón. Pero el cálculo $1/2 m_e U^2$, con U del orden de

10^{-3} m/s (según estimaciones de párrafos anteriores) arroja un valor de 5×10^{-37} J \cong 3×10^{-18} eV.

Está claro que los electrones no pueden conservar, en su flujo, prácticamente nada de los 10^{-3} eV recibidos en 1 mm, ya que la velocidad de flujo está limitada por condiciones geométricas simples que se verán, y se mantiene dentro del orden de magnitud indicado. Así es que la energía que reciben los electrones de los campos externos entre choques es casi totalmente cedida a la red en los choques subsiguientes, y los electrones mantienen un flujo cuya velocidad media no varía mucho, transfiriendo continuamente a la red el impulso recibido del/los campos externos.

De manera que la situación en la materia suficientemente densa consiste en que los continuos choques mantienen el equilibrio térmico en todo el sistema, y transfieren a la red el impulso aplicado por los campos externos a los electrones de conducción, los cuales no tienen manera de acumularlo y conservarlo en sí mismos en estos casos.

Considerando la distribución completamente al azar de las velocidades individuales de los electrones excepto por el movimiento de flujo, se concluye que la dirección y el sentido de la fuerza neta ejercida por un conjunto de electrones sobre la red, deben ser los de la velocidad media del conjunto, \vec{U} , mientras que el módulo de dicha fuerza puede obtenerse de considerar cualquier situación simple, en ausencia de campo magnético.

Efectivamente, en ausencia de campo magnético se tiene la llamada “Ley de Ohm microscópica”:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho_R} \quad (11)$$

Siendo \vec{E} el campo eléctrico externo, es decir el responsable de la circulación de la corriente, y ρ_R el coeficiente de resistividad de la sustancia.

Ahora bien, en esta situación simple, \vec{E} , el único campo considerado, nos da la fuerza del campo por unidad de carga. Por unidad de volumen tendremos, debidas al campo, una fuerza $|\rho|\vec{E}$ sobre las cargas de la red, y la opuesta $-|\rho|\vec{E}$ sobre la carga móvil, que se transfiere a la red por medio de los choques (dando una fuerza neta nula sobre la red).

De manera que \vec{f} , la fuerza mecánica por unidad de volumen, aplicada a la red por la carga móvil, debe ser igual a $-|\rho|\vec{E}$, y según (11) y (4) puede escribirse:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -|\rho|\rho_R \vec{j} \\ &= \rho^2 \rho_R \vec{U} \end{aligned} \quad (12)$$

Esta expresión será muy interesante y útil porque expresa un tipo de fuerza “viscosa”: la corriente de cargas por medio de los choques aplica a la red una fuerza mecánica “de arrastre” proporcional a su velocidad de flujo, con la dirección y el sentido de ésta independientemente del signo de las cargas.

Si además de un campo eléctrico actúa un campo magnético, el flujo resultante es más complicado, pero la fuerza mecánica sobre la red siempre estará dada por esta misma expresión (12), dado que sólo depende de los choques de los electrones sobre ella.

Por último vale aclarar que inicialmente simplificaremos los planteos considerando que las partes móviles son mantenidas EN REPOSO por fuerzas/torques externos.

Una vez que haya quedado claro el mecanismo de acción de los campos sobre las cargas móviles, y de transferencia de fuerzas de éstas a la red, en una segunda etapa, consideraremos lo que sucede con todo el esquema al permitir el movimiento del disco o de la parte móvil que sea.

6.- Características generales del flujo de cargas

El flujo de cargas en la rueda de Barlow y en otros aparatos similares que analizaremos, básicamente es un flujo ESTACIONARIO, que tiene lugar en una lámina suficientemente delgada como para poder ser considerado BIDIMENSIONAL.

Comenzaremos considerando que los campos magnéticos se aplican perpendicularmente a la lámina en la que tiene lugar el flujo de cargas – luego se verá con claridad que si se agregan componentes de \vec{B} paralelas a la superficie, no tienen efecto alguno. Por otra parte, es importante decir que en general el campo aplicado (exterior) será suficientemente más intenso que el campo generado por la misma corriente, como para que no debamos considerar efectos magnéticos de la corriente sobre sí misma.

La ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$, impone, para cualquier situación estacionaria, la condición que será fundamental:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (13)$$

Teniendo en cuenta (4), esta condición también significa $\nabla \cdot \vec{U} = 0$, ya que el valor de ρ es uniforme en todo el interior del metal³.

Ahora bien, en ausencia del campo magnético, según (11), \vec{j} es proporcional a \vec{E} , y por lo tanto, *irrotacional*, ya que \vec{E} es irrotacional en casos estacionarios.

Más aún, existe algún campo escalar ψ tal que $\vec{E} = -\nabla\psi$. Esto garantiza que \vec{E} y \vec{j} son irrotacionales, y además, considerando (13) permite establecer:

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (14)$$

Distinguiendo con el subíndice “0” a los campos y variables en ausencia de campo magnético, ha quedado establecido:

$$\nabla \cdot \vec{U}_0 = 0 \quad (13')$$

³ Para ver claramente que esto debe ser así consideremos que, por una variación de la densidad de carga móvil (mientras la densidad de carga fija se mantiene constante), se produce una densidad de carga neta ρ .

Esta carga sería fuente de un campo \vec{E}_ρ según la ecuación $\nabla \cdot \vec{E}_\rho = \rho/\epsilon_0$. Este campo impulsaría una corriente $\vec{j}_\rho = \vec{E}_\rho/\rho_R$, que tendría la divergencia: $\nabla \cdot \vec{j}_\rho = \rho/\rho_R \epsilon_0$.

Ahora la ecuación de continuidad nos permite prever con qué rapidez esta corriente tiende a disipar la carga que la genera:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_R \epsilon_0} \rho \rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-t}{\rho_R \epsilon_0}\right)$$

Vemos que cualquier acumulación de carga generaría un campo eléctrico que la disiparía exponencialmente en un tiempo del orden $\rho_R \epsilon_0$, que para un conductor cualquiera es menor que 10^{-18} segundos.

$$\nabla \times \vec{U}_0 = 0 \quad (15)$$

$$\vec{U}_0 = \frac{-1}{|\rho| \rho_R} \nabla \psi_0 \quad (16)$$

$$\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (14)$$

Ahora bien, veremos que en presencia de campo magnético \vec{U} puede, si la geometría lo permite, llegar a tener circulación (no nula) alrededor del punto de alimentación, en cuyo caso \vec{U} no puede ser gradiente de una función escalar, y podríamos plantear:

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1 \quad (17)$$

Donde sólo \vec{U}_0 es gradiente de una función.

Si bien el disco en el cual estamos interesados es un claro caso en el cual la geometría permite a la corriente circular alrededor de un punto de alimentación (el centro), eso ya no sería totalmente válido para la versión estrella, y veremos que es de sumo interés considerar los dos tipos de situaciones ilustradas en la figura 6.

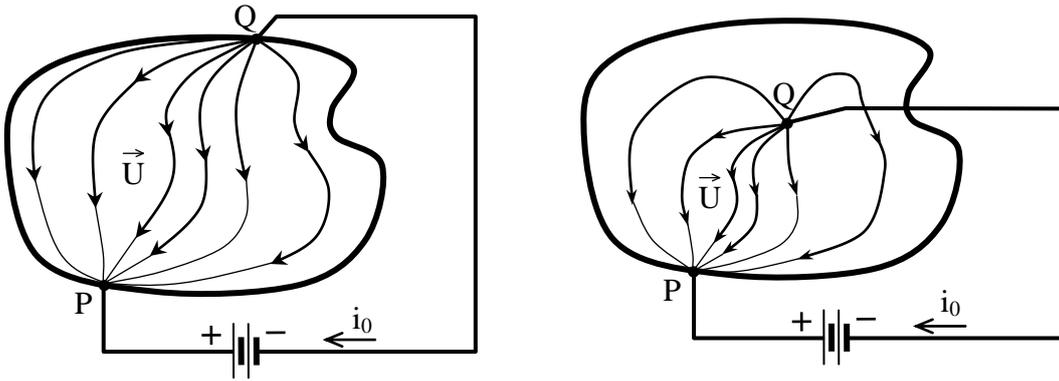


Fig. 6: Se ilustra una placa de cualquier forma, que es alimentada entre dos puntos P y Q, por una fuente de corriente eléctrica, con un flujo total i_0 , para dos casos: en la figura de la izquierda los dos puntos de alimentación, P y Q, están en el borde de la placa, mientras que en la de la derecha, uno de los puntos es interior a la placa. En ambos casos se muestran líneas de flujo de la velocidad \vec{U} , que con el sentido opuesto representarían el flujo de \vec{j} . Si se aplicara un campo magnético perpendicular al plano del dibujo, éste podría hacer circular corriente alrededor de Q sólo en el caso representado a la derecha.

Es interesante profundizar en este momento en los detalles del flujo en ausencia de campo magnético para cualquiera de los dos casos geométricos mencionados.

Las ecuaciones (14) y (16), que bastan para definir todos los detalles del flujo, hacen muy sencillo el análisis de la influencia del contorno sobre dicho flujo.

Para ello consideremos el contorno dividido en sectores para cada caso: asignamos pequeñas regiones para la entrada o salida de electrones, como se ilustra en la figura 7. En esas regiones la componente normal de \vec{U} , designada U_{\perp} , debe tener valores prefijados correspondientes al flujo de corriente que corresponda. En el resto del contorno U_{\perp} debe ser nula.

Estas regiones de entrada y salida de electrones (arcos P_1P_2 , Q_1Q_2 , y Q, en el plano de la figura 7, que se trasladan en la tercera dimensión a lo largo del pequeño espesor ϵ de la placa)

pueden tener cualquier forma, con tal de que los valores de U_{\perp} prefijados garanticen que el flujo total de corriente a través de ellos tenga el valor i_0 predeterminado.

Para nuestros intereses el tamaño de estas regiones se hace arbitrariamente pequeño, de manera de poder considerar que la entrada y salida de corriente ocurre a través de zonas aproximadamente puntuales, y así desentendernos de los detalles específicos del flujo en la inmediata vecindad de esos puntos. Pero no es necesario ni importante hacer tender estrictamente a cero el tamaño de estas regiones.

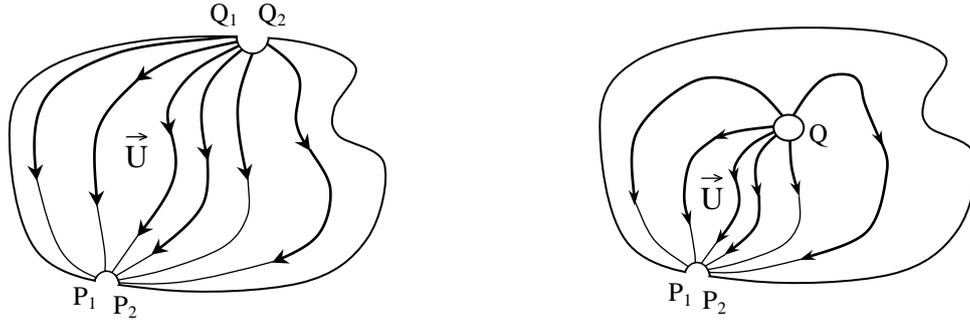


Fig. 7: Se muestra cómo considerar el contorno para los dos casos geométricos de la figura 6. Para la placa alimentada en ambos bordes, tendremos (recorriendo en sentido anti horario), desde P_1 hasta P_2 , un valor determinado de U_{\perp} correspondiente a la salida de los electrones, desde P_2 hasta Q_2 , $U_{\perp} = 0$, desde Q_2 hasta Q_1 , un valor determinado de U_{\perp} correspondiente al ingreso de los electrones, y desde Q_1 hasta P_1 , nuevamente $U_{\perp} = 0$. De manera similar, para el otro caso tendremos, ingreso de electrones en el contorno interior Q , y salida en el contorno exterior, entre P_1 y P_2 , con los valores correspondientes de U_{\perp} en cada lugar, y $U_{\perp} = 0$ desde P_2 hasta P_1 a lo largo de todo el borde restante.

7.- El caso de una placa conductora alimentada en dos puntos del borde.

Comencemos considerando el caso en ausencia de campo magnético, para el cual ya ha quedado establecido que se deben cumplir las condiciones (13) a (16).

Para este caso el hecho de que \vec{U}_0 sea gradiente de un potencial que debe cumplir la ecuación de Laplace es determinante, ya que al fijar los valores de $U_{0\perp}$ en todo el contorno, estamos fijando la derivada normal del potencial ψ_0 , de manera que estamos ante un problema de Laplace con condiciones de contorno de Newman:

$$\nabla^2 \psi_0 = 0, \text{ con } \frac{\partial \psi_0}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla \psi_0 \text{ especificado en todo el contorno}$$

La solución ψ_0 existe, y es única.

La aplicación del campo magnético \vec{B} , perpendicular a la placa (recordar que es mantenida inmóvil por fuerzas externas para mayor simplicidad y claridad de los razonamientos), da lugar a una *redistribución de carga superficial* en la placa tal que se modifica el campo eléctrico interior, de manera que se llega al estado estacionario con *la misma distribución de corriente*, $\vec{j} = \vec{j}_0$, dado que *es única*.

En estas condiciones el esquema de fuerzas por unidad de volumen es el ilustrado en la figura 8.

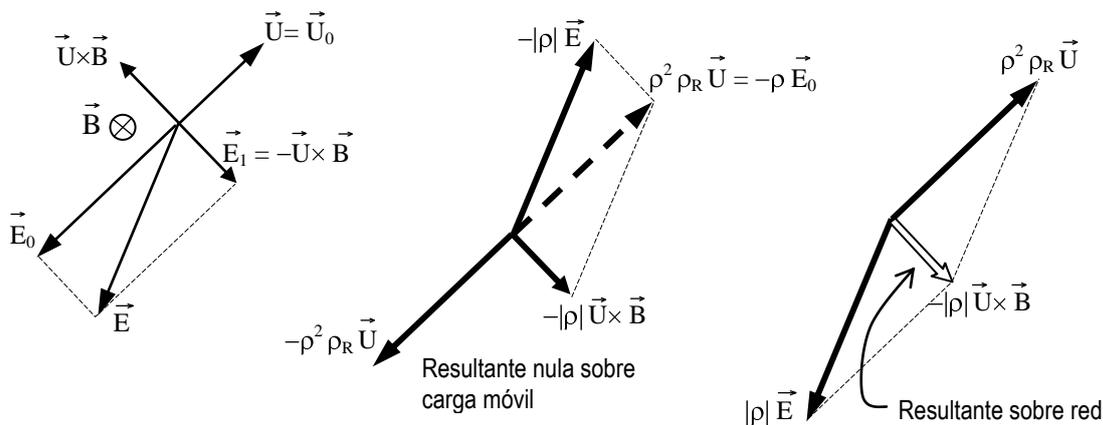


Fig. 8: Esquema de campos y fuerzas para el caso de campo magnético entrante a la hoja. **(Izquierda):** Campos. **(Centro):** Fuerzas (por unidad de volumen) de los campos sobre la carga móvil ($-\rho|$). **(Derecha):** Fuerzas sobre la red.

Dado que la distribución de corriente (o velocidades medias) no es modificada por el campo \vec{B} , tampoco lo es la fuerza de arrastre. Pero el campo eléctrico sí es modificado: al campo \vec{E}_0 se suma el $\vec{E}_1 = -\vec{U} \times \vec{B}$, que aplica (por unidad de volumen) la fuerza $-\rho|\vec{E}_1 = \rho|\vec{U}_0 \times \vec{B}$ a la carga móvil (cancelando el efecto del campo magnético sobre ella), y la fuerza opuesta, $\rho|\vec{E}_1 = -\rho|\vec{U}_0 \times \vec{B}$, a la red.

Así se tiene que la fuerza neta sobre la red, por unidad de volumen, está dada por la resultante de la fuerza de arrastre que le aplica la carga móvil, más la fuerza $\rho|\vec{E}$ que le aplica el campo eléctrico total. Esta resultante coincide con $-\rho|\vec{U}_0 \times \vec{B}$, que es la fuerza del campo magnético sobre la carga móvil, transferida finalmente a la red.

En este punto se puede ver con facilidad la razón para considerar sólo campo magnético perpendicular a la placa conductora: de existir componentes B_{\parallel} del campo magnético paralelas al plano de la corriente, su efecto se limitaría a producir una distribución superficial de carga que crearía un campo eléctrico perpendicular a dicho plano, el cual cancelaría el efecto de B_{\parallel} sobre la carga móvil, y lo transferiría a la red como una fuerza perpendicular a la placa.

Es útil para analizar las fuerzas, considerar un elemento de volumen a lo largo un tubo de flujo de cargas. Si utilizamos \vec{F} para la fuerza y \vec{f} para la densidad de fuerza por unidad de volumen, tendremos:

$$d\vec{F} = \vec{f} dV = -\rho|\vec{U}_0 \times \vec{B} dV$$

Si se elige un diferencial de volumen $dV = dS_{\perp}|d\vec{r}|$, siendo dS_{\perp} la sección transversal del tubo, y $d\vec{r}$ un desplazamiento a lo largo del mismo, orientado como \vec{j} o sea, opuesto a \vec{U}_0 , esta expresión puede escribirse:

$$d\vec{F} = di d\vec{r} \times \vec{B} \tag{18}$$

Siendo $di = j dS_{\perp}$, la cantidad de corriente en el tubo, que se mantiene constante a lo largo del mismo.

Este tratamiento justifica plenamente cómo surge la expresión (3) para la fuerza del campo magnético sobre un conductor lineal con corriente⁴, a partir de las expresiones (1) y (2) para la fuerza sobre cargas móviles.

En distintas situaciones esta expresión puede integrarse de diversas maneras para obtener la fuerza total sobre el elemento considerado; y para obtener el torque respecto del origen se debe integrar:

$$\begin{aligned} d\vec{\tau} &= \vec{r} \times d\vec{F} = di \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B} \\ &= di \left(d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r}) \right) \end{aligned} \quad (18')$$

Para el caso típico de \vec{B} perpendicular al plano de flujo de cargas, tomando momentos con respecto a un punto de dicho plano, esta última expresión se reduce a:

$$d\vec{\tau} = -di(\vec{r} \cdot d\vec{r})\vec{B} \quad (19)$$

Estas expresiones dicen simplemente que el impulso, tanto lineal como angular aplicado por el campo \vec{B} a la carga móvil, son transferidas a la red por los continuos choques y el campo eléctrico que se establece.

En el caso más simple en el que \vec{B} es un vector constante, se tiene, para cada tubo de flujo que comienza en \vec{r}_Q y termina en \vec{r}_P (figura 6):

$$d\vec{F} = di (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{B} \quad (20)$$

$$d\vec{\tau} = - \frac{(r_Q^2 - r_P^2) di}{2} \vec{B} \quad (21)$$

Obviamente si todos los tubos de flujo comienzan en un mismo punto P, y terminan en otro, Q, estas expresiones dan la fuerza y el torque totales simplemente reemplazando di por la corriente total i .

Un ejemplo con discusiones e interpretaciones

Un ejemplo elemental es un conductor recto alimentado por corriente i_0 desde P hasta Q. La expresión (20) se transforma en este caso en la versión típica de la ley de fuerza de un campo magnético uniforme sobre un conductor recto (que además sabemos que valdría para un conductor de cualquier forma entre P y Q):

$$\vec{F} = i_0 (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{B} \quad (20')$$

Esa expresión es el resultado final de todo el desarrollo, y es la expresión (3) de la ley de fuerza magnética aplicable a conductores lineales.

⁴ Este es otro tema descuidado por la literatura habitual: se acepta naturalmente que la fuerza sobre la corriente que fluye dentro de un conductor sea una fuerza sobre el conductor. Es claro que eso *debe ser* correcto, ya que la fuerza total del campo magnético sobre el sistema “conductor”, debe ser la fuerza sobre las cargas móviles, que es la *parte del sistema sobre la cual actúa este campo*. Pero también es claro que debe haber todo un mecanismo conectando el sistema “conductor”, con el sistema “carga móvil”, y que en algún momento de un curso sobre estos temas, ese mecanismo debería explicitarse y analizarse.

Pero ahora revisemos los campos que intervienen en este desarrollo. En la figura e.1 se muestra la situación sin campo magnético.

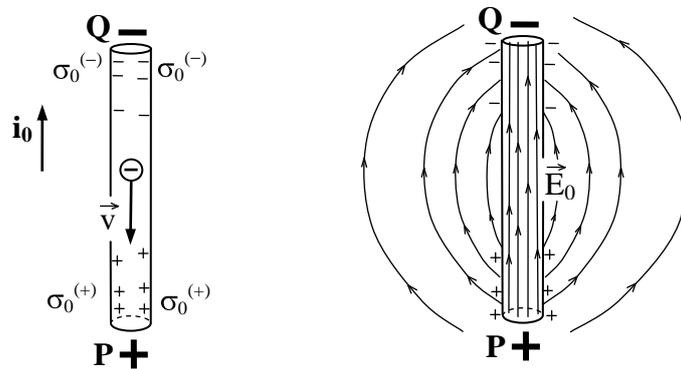


Fig. e.1: Esquema de distribución de carga superficial y campo eléctrico en un conductor metálico cilíndrico con corriente i_0 hacia arriba. Los bornes que alimentan al conductor, representados por P y Q, no se muestran, aunque el campo \vec{E}_0 fuera del conductor, y la distribución de carga superficial σ_0 , dependen de la forma de todo el sistema que lo alimenta. El campo \vec{E}_0 dentro del conductor, en cambio, es uniforme y está dado por la ley de Ohm.

Como se advierte en el epígrafe de la figura, tanto la distribución de carga superficial σ_0 como el campo \vec{E}_0 fuera del conductor dependen de la forma del circuito que lo alimenta, y serían en principio muy difíciles de determinar con precisión. Sabemos que son débiles porque tenemos diferencias de potencial pequeñas, pero no necesitamos conocerlos, y lo único que nos interesa es el campo interior, que es uniforme y está dado por la ley de Ohm..

Antes de seguir cabe preguntarse: ¿esta carga superficial no participa del movimiento de flujo? ¿Estos electrones “amontonados” cerca de Q, ¿no son llevados por el campo eléctrico hacia P?

Hay que tener cuidado para responder, porque cada electrón individual puede ser imaginado viajando caóticamente chocando, etc., entrando y saliendo de cualquier región de manera impredecible.

Pero el exceso de carga superficial, que se manifiesta como la carga σ_0 , NO es llevado por el campo. Es una carga que queda inmovilizada en la configuración que corresponde a la situación estacionaria.

Podemos imaginar que se han amontonado electrones cerca de Q por la dificultad que el conductor ofrece a su paso (y faltan cerca de P porque este electrodo los “succiona” más rápido que lo que pueden llegar desde Q). De manera que es la resistencia eléctrica del conductor la que determina que se deposite carga superficial de esta manera hasta que se alcanza el estado estacionario con campo interior constante.

De todos modos puede hacerse una estimación planteando que P y Q son dos electrodos esféricos con el diámetro del conductor, y se obtiene que la carga superficial en una pequeña longitud del conductor es una fracción despreciable de la carga libre de conducción en el mismo trozo de conductor.

Veamos ahora la situación con el campo magnético entrando a la hoja (figura e.2).

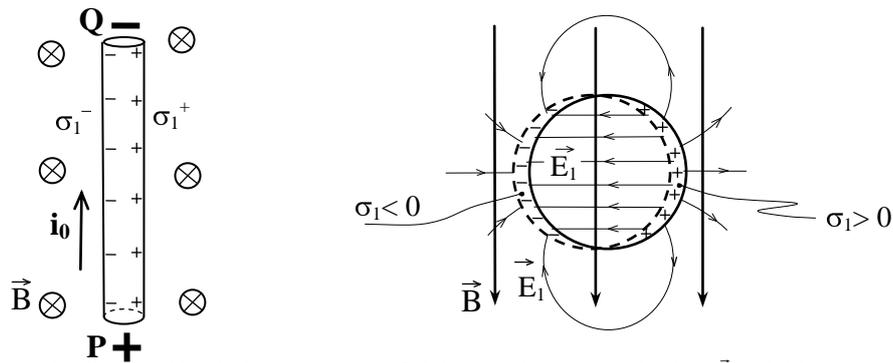


Fig. e.2: Esquema de distribución de la carga superficial σ_1 y el campo eléctrico \vec{E}_1 debidos al campo magnético, en el conductor de la figura anterior. Por razones de claridad no se han representado σ_0 ni \vec{E}_0 , aunque serían dominantes ($\sigma_1 \ll \sigma_0$ y $E_1 \ll E_0$). En la figura de la derecha se representa con un círculo la sección transversal del conductor cilíndrico, mostrando líneas de \vec{E}_1 dentro y fuera. Con una circunferencia en línea de trazos se representa lo que sería la sección del cilindro de carga negativa que va viajando levemente desplazado hacia la izquierda por la fuerza del campo magnético. Eso permite mostrar las densidades de carga σ_1^\pm .

La figura trata de sugerir la siguiente forma de imaginar la situación: hay un cilindro de carga negativa que viaja deslizándose dentro del cilindro de iguales dimensiones constituido por la red. El campo magnético empuja al cilindro negativo hacia el costado izquierdo y lo desplaza levemente, hasta donde lo permite la “barrera de potencial” en ese borde del conductor. Dicha barrera no es otra cosa que una manifestación de la atracción de la red sobre los electrones, que les impide abandonarla.

De manera que mientras las fuerzas laterales sobre el cilindro negativo se hallan equilibradas, ya que $\vec{E}_1 = -\vec{U} \times \vec{B}$, sobre la red actúa (lateralmente) \vec{E}_1 , que le aplica una fuerza hacia la izquierda. Y esta fuerza es exactamente la atracción del cilindro negativo, que es la fuerza con la cual el campo magnético empuja hacia la izquierda a dicho cilindro.

Para terminar digamos que es fácil estimar la extrema pequeñez de esta carga superficial: para generar un campo $\vec{E}_1 = -\vec{U} \times \vec{B}$ entre los bordes laterales de un conductor largo delgado, se requeriría una densidad superficial de carga del orden de $\epsilon_0 E_1$, que con valores grandes de U y de B , no llegaría a 10^{-13} C/m^2 . En un conductor de 1 mm de diámetro, por cada cm de longitud tendríamos 10^{-5} m^2 , y 10^{-8} m^3 . o sea 10^{-18} C de carga superficial, pero 10^2 C de carga volumétrica libre.

Es claro que el análisis desarrollado hasta aquí enriquece y completa las explicaciones sobre el funcionamiento de la versión estrellada de la rueda de Barlow, aunque no de la versión disco lleno.

El caso del disco lleno requiere que desarrollemos el análisis del caso en que uno de los puntos de alimentación es interior al disco, pero podría ser tratado con las ideas desarrolladas hasta aquí, si se practicara al disco *un corte*, desde el centro hasta el borde, que impidiera a los electrones circular alrededor del centro.

Es claro que si se practican muchos cortes radiales al disco se lo transforma en la versión estrellada, y que seguimos sin poder demostrar formalmente si el disco lleno funciona o no. Pero hemos hecho un pequeño avance: en el disco lleno con un único corte radial *en cualquier*

parte, se manifestaría el mismo torque que en la versión estrellada (siempre considerando que se lo mantiene en reposo – más adelante discutiremos las complicaciones que introduce el movimiento).

8.- Caso de disco alimentado entre el borde y el centro.

Al igual que en el caso anterior, en ausencia del campo magnético, luego de un período transitorio se establece una distribución de carga superficial que produce, en el interior de la placa (mantenida inmóvil por fuerzas externas), un campo eléctrico $\vec{E}_0 = -\nabla \psi_0$, que impulsa la circulación de corriente $\vec{j}_0 = \vec{E}_0 / \rho_R = -|\rho| \vec{U}_0$, con todas las propiedades que corresponden.

Una simplificación importante es considerar que el campo magnético \vec{B} sea perfectamente uniforme en toda la superficie de la placa, además de perpendicular a ella.

Vale aclarar que esta simplificación no le quita valor conceptual a las dudas sobre la posibilidad de que el disco lleno funcione o no, sino que en realidad es necesaria para dar más sentido a algunos de los interrogantes planteados, ya que, con un campo muy irregular es posible plantear ubicaciones relativas del punto de alimentación en el borde según las cuales podría suceder que:

- El disco estrellado no funcionara
- El disco lleno con seguridad no funcionara con esa alimentación aún si pudiera hacerlo con otra

De manera que en adelante consideraremos campo magnético uniforme en todo el disco además de constante y perpendicular a la placa, y la inquietud que nos guía pasa a ser:

Desarrollar las explicaciones sobre si *en esas condiciones de campo magnético*, el disco lleno, sin cortes, funciona, y si lo hace tan bien como el estrellado.

De manera que la aplicación del campo magnético en este caso, aunque da lugar a una redistribución de carga superficial en la placa, y modifica el campo de velocidades, no puede generar un campo $\vec{E}_1 = -\vec{U} \times \vec{B}$, dado que necesariamente el campo $\vec{U} \times \vec{B}$, como veremos inmediatamente, tendría circulación alrededor del centro, cosa que no puede tener un campo electrostático (\vec{U} es el nuevo campo de velocidades, aún desconocido, en presencia de campo magnético).

Efectivamente, calculemos la circulación a lo largo de una circunferencia de radio r:

$$\oint \vec{U} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = \left(\oint d\vec{r} \times \vec{U} \right) \cdot \vec{B} = -\vec{B} \oint U_r |d\vec{r}|$$

Donde U_r es la componente radial de \vec{U} , de manera que si ε es el espesor del disco, se tendrá:

$$-\rho \oint U_r \varepsilon |d\vec{r}| = i_0 = \text{flujo saliente de corriente, independiente de r.}$$

Es decir que la circulación de $\vec{U} \times \vec{B}$ tiene un valor fijado por la corriente i_0 que alimenta al disco:

$$\oint \vec{U} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{i_0 B}{\rho \varepsilon} \quad (22)$$

Notar que \vec{U} es desconocido, pero debe cumplir la condición de divergencia nula, y adecuadas condiciones de contorno.

Si tenemos en cuenta (17): $\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1$, planteando que se mantenga la misma alimentación i_0 con campo magnético que sin él, encontramos que la condición de contorno para \vec{U}_1 consiste simplemente en que su componente normal sea nula en todo el contorno (incluyendo las regiones de alimentación).

De manera que el campo magnético produce una redistribución de carga superficial y de flujo de corriente tal que $\vec{E}_0 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$, con \vec{E}_1 que ya no es $-\vec{U} \times \vec{B}$ (ver (24)).

Ahora bien, la fuerza neta nula sobre la carga móvil implica:

$$-|\rho| \vec{U} \times \vec{B} - |\rho| \vec{E}_0 - |\rho| \vec{E}_1 - \rho^2 \rho_R (\vec{U}_0 + \vec{U}_1) = 0 \quad (23)$$

Y si en esta expresión se tiene en cuenta que $-\rho|\vec{E}_0 = \rho^2 \rho_R \vec{U}_0$, se obtiene:

$$-\rho|\vec{U} \times \vec{B} - |\rho|\vec{E}_1 = \rho^2 \rho_R \vec{U}_1 \quad (24)$$

Ahora bien, calculando la circulación de ambos miembros de (24) alrededor del punto de alimentación Q, dado que \vec{E}_1 no tiene circulación, y que la de $-\vec{U} \times \vec{B}$ está dada por (22), se encuentra la circulación de \vec{U}_1 , que vale:

$$C = \oint \vec{U}_1 \cdot d\vec{r} = \frac{i_0 B}{\rho^2 \rho_R \epsilon} \quad (25)$$

Esto nos dice que manteniendo fijos los valores de estas variables, queda determinada la circulación a lo largo de cualquier curva que encierre al punto Q. De manera que la circulación de \vec{U}_1 debe ser nula a lo largo de cualquier curva que no encierre ese punto. Lo cual significa que \vec{U}_1 tampoco puede tener rotor:

$$\nabla \times \vec{U}_1 = 0 \quad (26)$$

Ahora tenemos la posibilidad de aplicar un truco que se utiliza en *Dinámica de Fluidos*.

Consideremos que la posibilidad de que exista una función ψ_1 tal que:

$$U_{1x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad ; \quad U_{1y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (27)$$

Estas relaciones garantizan automáticamente la condición $\nabla \cdot \vec{U}_1 = 0$; y si imponemos la condición de rotor nulo, considerando que \vec{U}_1 no depende de la tercer coordenada z, ni tiene componentes en esa dirección, obtenemos:

$$0 = (\nabla \times \vec{U}_1)_z = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi_1 \quad (28)$$

Es decir que nuevamente estamos ante la ecuación de Laplace, con la condición de contorno $\hat{n} \cdot \vec{U}_1 = 0$, siendo \hat{n} el versor normal al contorno, tanto en el borde externo, como en el contorno interior que delimita la zona de alimentación.

Ahora bien, \vec{U}_1 no es gradiente de ψ_1 , sino que la relación es otra. Si denominamos \hat{t} al versor tangente al contorno, perpendicular al \hat{n} , es fácil verificar que nuestra condición de contorno puede escribirse:

$$0 = \hat{n} \cdot \vec{U}_1 = \hat{t} \cdot \nabla \psi_1 \quad (29)$$

Lo que equivale a plantear $\psi_1 = \text{cte.}$, en cada contorno. De manera que estamos ante una ecuación de Laplace con condición de contorno de Dirichlet, que tiene solución y es única.

Es decir ψ_1 , y por ende \vec{U}_1 , quedan determinados cuando se fija un valor arbitrario para ψ_1 en el contorno Q , y otro en el borde externo. Ahora bien, dado que ψ_1 se define por sus derivadas, está indefinida en una constante aditiva, y por lo tanto siempre admite un valor arbitrario en un contorno, por ejemplo $\psi_1(Q) = 0$. En este caso el valor que puede tomar en el otro contorno está unívocamente relacionado, para cada geometría, con los valores de i_0 y de B .

Para nuestro caso de forma circular se pueden particularizar algunas cosas, como:

$$\vec{U}_1 \text{ está dado por: } U_{1r} = 0 ; U_{1\phi} = \frac{i_0 B}{2 \pi \rho^2 \rho_r} \frac{1}{r}$$

Y el esquema de campos y fuerzas correspondiente se muestra en la figura 9. El esquema es general, aunque algunas detalles, como el hecho de que \vec{U}_1 no tiene componente radial, se deben a la simetría del disco circular.

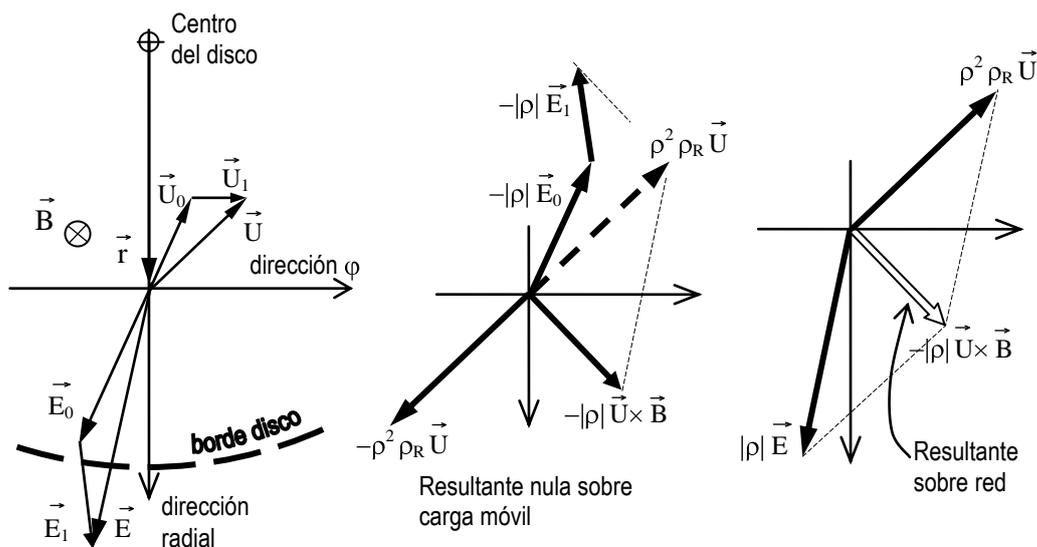


Fig. 9: Esquema de campos y fuerzas en un punto del disco para el caso de campo magnético entrante a la hoja. **(Izquierda):** Campos. **(Centro):** Fuerzas (por unidad de volumen) de los campos sobre la carga móvil $(-|\rho|)$. **(Derecha):** Fuerzas sobre la red.

Con estos elementos resueltos es fácil ver que siguen valiendo las expresiones (20) y (21) para la fuerza y el momento totales, ya que se pueden realizar exactamente todos los mismos pasos de cálculo, sólo sustituyendo \vec{U}_0 por \vec{U} , lo cual no influye en el proceso elegido para obtener esas expresiones.

Efectivamente, se tiene $d\vec{F} = \vec{f} dV = -|\rho| \vec{U} \times \vec{B} dV$, y si se elige un diferencial de volumen $dV = dS_{\perp} |d\vec{r}|$, siendo dS_{\perp} la sección transversal de un tubo de flujo que se considere, y $d\vec{r}$ un desplazamiento a lo largo del mismo, orientado como \vec{j} o sea, opuesto a \vec{U} , esta expresión puede escribirse:

$$d\vec{F} = di d\vec{r} \times \vec{B} \quad (18)$$

Siendo $di = j dS_{\perp}$, la cantidad de corriente en el tubo, que se mantiene constante a lo largo del mismo. Ahora el campo magnético *ha cambiado la forma de los tubos, pero no los puntos inicial y final, ni la corriente total i_0 .*

De manera que para la fuerza, y sobre todo para el momento total, que es el que nos interesa, se llega a las mismas expresiones (20) y (21), de manera absolutamente directa, ya que no intervienen otros elementos.

Sin embargo también es interesante notar que el momento resultante sobre la red con respecto al centro del disco podría calcularse integrando sobre todo el volumen tanto el momento de la densidad de fuerza neta, $-\rho|\vec{U} \times \vec{B}$, como el de la densidad de fuerza de arrastre $\rho^2 \rho_R \vec{U}$, como el de la parte de ésta que se debe al campo magnético, $\rho^2 \rho_R \vec{U}_1$.

Para ver esto basta notar que el momento de cualquiera de los tres vectores mencionados (y de cualquier campo vectorial en el plano del disco) involucra sólo la componente acimutal, la cual, multiplicada por r , e integrada sobre ϕ , da exactamente la circulación del vector alrededor del centro.

Así tenemos que la circulación de \vec{U} es lo mismo que la \vec{U}_1 , C , dada por (25), y la de $\vec{U} \times \vec{B}$ está dada por (22). Con estos valores en cualquiera de los cálculos de obtiene que el momento total con respecto al centro, para el sentido de la corriente de las figuras 6/7 vale:

$$\vec{\tau} = \frac{R^2 i_0 \vec{B}}{2} \quad (21')$$

Estos resultados muestran finalmente que el momento aplicado por el campo magnético a la carga móvil, es transferido al **disco** por el arrastre de ésta en su movimiento espiralado (el cual se ilustra en la figura 10), y **tiene exactamente el mismo valor que en la versión estrella de la rueda**, aunque en ella el flujo de corriente no es cambiado por el campo magnético, y el momento de rotación es aplicado a la red por la parte acimutal del campo \vec{E}_1 .

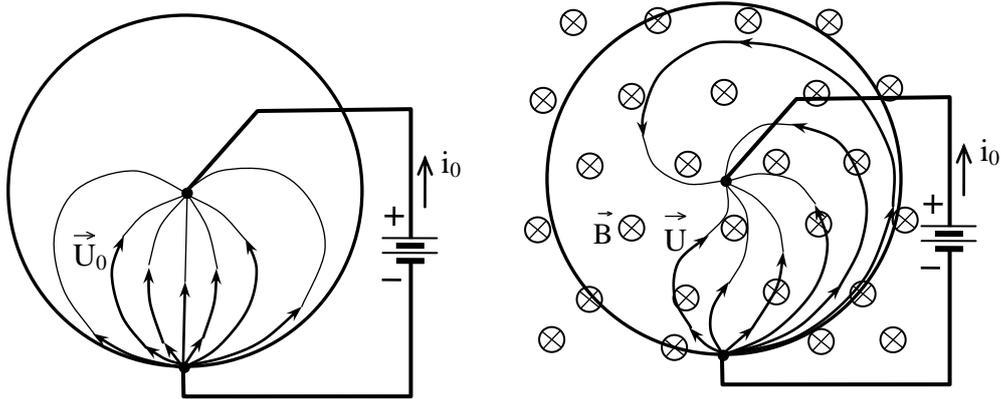


Fig. 10: Se ilustra el flujo de velocidades de la carga móvil en un disco de Barlow. A la izquierda sin campo magnético, y a la derecha con un campo magnético uniforme entrante hacia la hoja. La representación no es rigurosa: las líneas de \vec{U} pretenden mostrar la superposición del campo \vec{U}_0 con un campo \vec{U}_1 que circula uniformemente en sentido anti horario.

9.- De la Rueda de Barlow al Efecto Hall

Si bien han quedado perfectamente aclaradas todas las cuestiones planteadas acerca del torque sobre el disco lleno (en reposo), aún restan algunas cuestiones geométricas que es interesante analizar y discutir.

En efecto, dada la dificultad para calcular explícitamente la forma de las líneas de flujo en casos concretos, queda una parte importante librada a la imaginación y la intuición.

La tentación más fuerte es imaginar que la aplicación del momento de rotación al disco es exitosa porque las líneas deben enroscarse en una espiral muy apretada cerca del centro, que es donde el campo \vec{U}_1 crece infinitamente.

Esta idea es engañosa, porque la parte radial del flujo de cargas crece de manera similar al acercarse al centro, y algunas líneas de flujo pueden tener curvaturas leves, no parecerse a una espiral, y sugerir engañosamente que en una parte cancelan el momento de rotación que aplican en otra, como se ilustra en la figura 11.

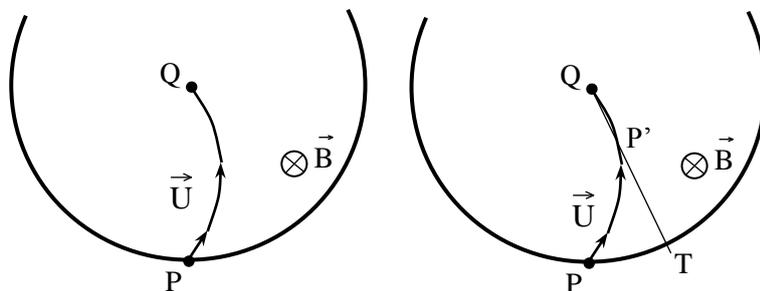


Fig. 11: En la figura de la izquierda una línea de flujo de electrones como la PQ puede dejar la sensación (errónea) de que los electrones aplicarían al disco un arrastre hacia la derecha, impulsándolo a rotar en sentido anti horario cerca de la periferia, pero hacia la izquierda, impulsando una rotación horaria, cerca del centro. Trazando una línea radial como la QT (figura de la derecha) se puede ver que, mientras la línea de flujo mantenga la curvatura en el mismo sentido, por leve que ésta sea, siempre cruzará la línea radial en algún punto P' en el mismo sentido acimutal, indicando un impulso de rotación que siempre es anti horario.

Ahora bien, consideremos estas mismas ideas frente a un cambio geométrico en las condiciones.

¿Qué sucedería si intentamos que este disco sea la tapa de un cilindro conductor hueco (es decir construido todo de chapa metálica de espesor ϵ), y que el campo magnético atraviese perpendicularmente la cara lateral, mientras la alimentación de corriente se produce entre dos extremos de una generatriz del cilindro?

Es decir, estamos planteándonos una situación en la cual el disco es suprimido, quedando un tubo que es la cara lateral de una superficie cilíndrica (prácticamente una “cinta” cilíndrica, como se ilustra en la figura 12). El campo magnético puede ser aplicado por imanes adecuados en la zona de alimentación de la corriente, y hasta puede lograrse, con bobinados o piezas polares adecuadas, que un campo uniforme atraviese toda la cinta cilíndrica.

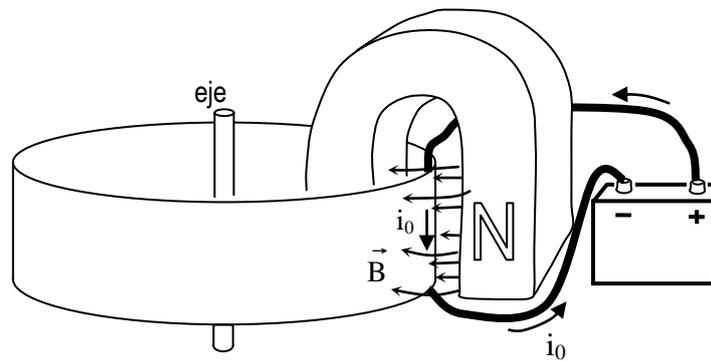


Figura 12: Una variante del disco de Barlow: una cinta cilíndrica conductora circula entre las piezas polares de un imán, mientras es alimentada por una fuente de corriente eléctrica en los dos puntos extremos de una generatriz del cilindro.

La intención de considerar esta modificación es volver a pensar las explicaciones en el marco de esta simetría diferente. Si ahora repetimos las consideraciones de la figura 11, nuevamente encontramos que las líneas de flujo siempre deben terminar en el punto Q, aún en presencia del campo magnético. Pero en este caso el mismo análisis nos lleva a deducir que la fuerza de arrastre hacia la derecha sobre la red debida a todo el tubo de flujo PQ, debe ser nulo. Y en esta nueva geometría, eso significa que el momento con respecto al eje del cilindro debe serlo (figura 13).

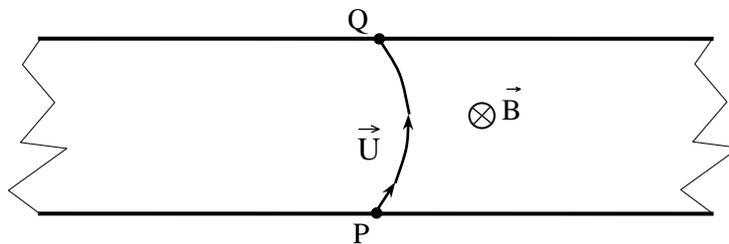


Fig. 13: En el caso de la cinta cilíndrica que aquí se representa aplanada, una línea de flujo PQ como la mostrada, la misma que en la figura del disco (figura 11) explicaría un arrastre con impulso de rotación antihorario, corresponde aquí a un impulso de rotación absolutamente nulo. ¿Una paradoja?

Es claro que esta paradoja, como todas las de la Física, sólo es aparente.

Cuando consideramos la cinta cilíndrica aplanada, ella puede ser tratada ventajosamente en coordenadas cartesianas. Ubiquemos la cinta de ancho “a” paralelamente al eje x, desde $y = 0$ hasta $y = a$, y desde $x = -\pi R$ hasta $x = \pi R$, siendo R es el radio del cilindro.

En esta descripción el flujo de corriente puede tratarse como un campo bidimensional sujeto a las condiciones ya mencionadas: divergencia nula, rotor nulo (calculables ambos con las expresiones cartesianas habituales), y condiciones de contorno similares a las ya vistas en los bordes de la cinta, que están dados por $y = 0$, e $y = a$.

Ahora bien, las líneas $x = \pm\pi R$, que limitan la cinta conductora en el sistema de coordenadas, claramente no son sus bordes, a menos que la cinta tenga un corte allí, y claramente ese detalle lleva a la resolución de la paradoja:

En la cinta cilíndrica en el espacio real de tres dimensiones, el campo magnético propuesto en la figura 11 tiende a hacer circular los electrones, y la cinta (arrastrada por éstos), de manera que la parte que ésta presenta al observador se desplace hacia la derecha.

Pero en la cinta aplastada en dos dimensiones de la figura 13, ese movimiento de flujo de los electrones sería un desplazamiento hacia la derecha, que al llegar al borde derecho, $x = \pi R$, reaparecería por el izquierdo, $x = -\pi R$, continuando ininterrumpidamente el desplazamiento siempre en el mismo sentido.

Es fácil ver que se tienen prácticamente las mismas condiciones que con el disco (y de la misma manera, para mayor simplicidad consideramos que una fuerza externa impide la rotación del dispositivo, y midiendo o detectando el torque producido por éste):

1) Cinta con corte

Si la cinta tiene algún corte que impide la circulación de corriente alrededor del eje, en ese caso el campo magnético no podrá modificar el campo de velocidades de flujo de los electrones, y hará que se produzca una distribución superficial de carga en la cinta, fuente del campo eléctrico \vec{E}_1 que transferirá a la red la fuerza aplicada por el campo a los electrones de conducción.

2) Cinta continua, sin corte

En este caso el campo magnético causa una redistribución de cargas cuyo campo \vec{E}_1 ya no puede impedir la circulación, aunque sí modificar el campo de velocidades de flujo, el cual en este caso sí circula alrededor del eje del dispositivo. El arrastre de esta corriente transfiere a la red la fuerza del campo magnético sobre la carga móvil.

Es fácil ver que en el caso de que el campo magnético sea uniforme en toda la cinta, el campo de velocidades \vec{U} , modificado por el campo magnético, es simplemente el campo \vec{U}_0 correspondiente a la ausencia de campo, más un campo \vec{U}_1 alineado con x, dado por (figura 14):

$$U_{1x} = \frac{i_0 B}{2\pi R \rho^2 \rho_R \epsilon} ; U_{1y} = 0 \quad (30)$$

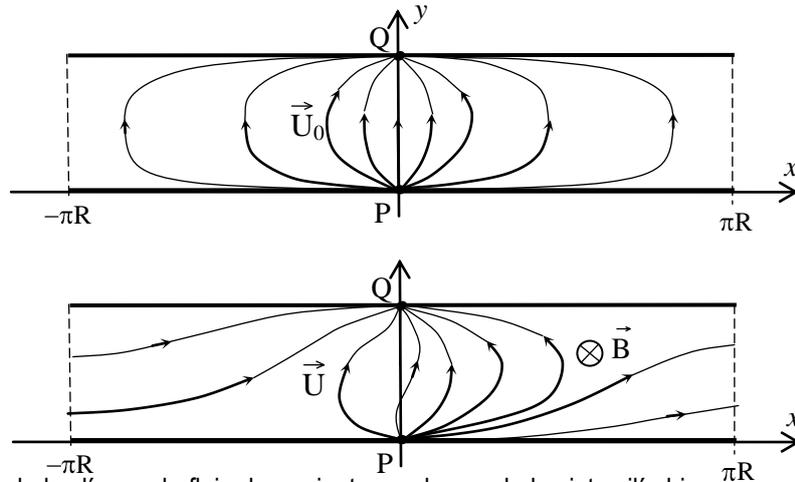


Fig. 14: Esquema de las líneas de flujo de corriente en el caso de la cinta cilíndrica representada plana. **Arriba:** sin campo magnético. **Abajo:** con un campo magnético uniforme en toda la cinta.

Ahora bien, la expresión (30) indica un flujo total de corriente i_x a lo largo de la cinta, es decir circulando alrededor del eje, dado por j a $\varepsilon = -|\rho|U_1$ a ε , lo que en valor absoluto da:

$$i_x = \frac{i_0 B}{|\rho| \rho_R} \frac{a}{2\pi R} \quad (31)$$

Que es la expresión del *Efecto Hall*, denominado así en honor al físico Edwin Herbert Hall⁵, quien lo descubrió en 1879 (en adelante llamaremos i_H a esta corriente).

Utilizando la ley de Ohm, podemos traducir esta corriente a un voltaje:

$$V_H = \frac{\rho_R 2\pi R}{a \varepsilon} i_H = \frac{i_0 B}{|\rho| \varepsilon} \quad (32)$$

10.- Determinación experimental del Efecto Hall en metales

Es posible transferir sin mucha dificultad las conclusiones del punto anterior al caso en que la figura 14 represente simplemente una lámina metálica plana, rectangular, de altura a y base b , inmersa en un campo magnético uniforme perpendicular, que es alimentada con corriente total i_0 entre los puntos P y Q (figura 15). Esta lámina impulsaría la circulación de la corriente i_H dada por (31) a través de un conductor que uniera sus extremos izquierdo y derecho, a condición de que la resistencia eléctrica de éste fuese estrictamente nula (nótese que el acto de salir

⁵ Es interesante saber Hall había recibido de su director de tesis, Henry Rowland, el encargo de investigar una idea de Maxwell (James Clerk, el padre de la teoría electromagnética), según la cual la fuerza del campo magnético se ejercería directamente sobre el conductor y no sobre la corriente eléctrica (recordar que en esa época la naturaleza de la corriente eléctrica era un misterio, la existencia de los electrones era sólo una conjetura, y el electromagnetismo aún tenía muchos puntos oscuros). De manera que Hall trataba de medir si el campo magnético hacía aumentar la resistencia eléctrica de un cable conductor, pensando que si el empuje del campo concentraba la corriente en un lado del conductor, disminuiría la sección efectiva de éste. Y claro, no pudo encontrar variación de la resistencia – ahora nosotros podemos entender claramente por qué el campo magnético, al no modificar el flujo de corriente, tampoco modifica la sección efectiva del conductor – y en cambio encontró el efecto que lleva su nombre. Para ampliar ver [2].

la corriente i_H por el extremo derecho de la cinta en la figura 14, es el mismo acto de entrar por el izquierdo, sin que medie distancia ni resistencia alguna en el proceso).

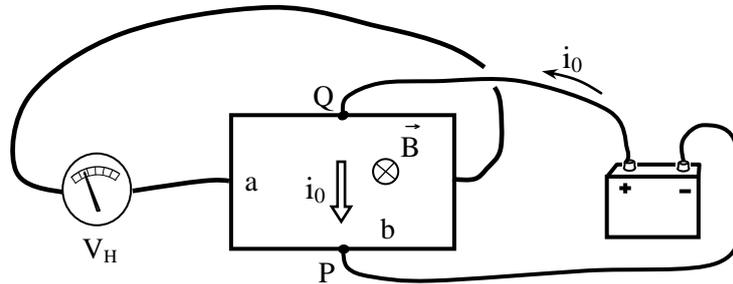


Fig. 15: Una lámina metálica rectangular de altura a y base b , atravesada por el campo magnético homogéneo \vec{B} , es alimentada con corriente i_0 entre P y Q . Un microvoltímetro detecta entre los lados verticales una diferencia de potencial V_H .

Lamentablemente cualquier instrumento con sus cables de conexión introducirá una resistencia capaz de dificultar tanto la circulación de i_H , que prácticamente transformará el caso de la banda cilíndrica continua en el caso de la banda con un corte que impide la circulación. En esas condiciones no habrá circulación de corriente que se pueda medir, y la diferencia de potencial entre los extremos de la cinta llegará al valor V_H , que según (22) es la fuerza magnética por unidad de carga integrada sobre el desplazamiento a lo largo de la cinta.

De manera que si bien, según los valores que surgen de la Tabla 1, para los metales los valores de i_H estarían en el rango de fracciones de miliamperio, dentro del alcance de instrumentos simples, en la práctica sólo es posible medir V_H , lo que como veremos, requiere llegar al orden de fracciones de microvoltios.

Efectivamente, según (32) vemos que hay que utilizar una lámina lo más delgada posible para compensar el gran valor de ρ , del orden de 10^{10} . Con $\varepsilon \approx 0,1$ mm, se tiene entonces, para B del orden de $0,1$ T:

$$V_H \approx 10^{-7} \text{ (V/A) } i_0$$

Esto nos indica que es necesario detectar μV para apreciar el efecto Hall⁶. Cuando ello es posible, la medición de V_H permite determinar el valor de la densidad de carga móvil de la sustancia (utilizando semiconductores dopados adecuadamente puede disminuirse mucho el valor de ésta, con lo cual se disminuye mucho la sensibilidad necesaria).

Cualquier instrumento que introduzca una resistencia mayor que $V_H/i_H \approx \rho_R/\varepsilon \approx 10^{-4} \Omega$, dificultará tanto la circulación de i_H que, aunque no la anule, hará que los valores de corriente medidos no tengan sentido.

Y es bueno saber que los miliamperímetros usualmente distan mucho de ser ideales: típicamente tienen resistencias del orden de $\text{k}\Omega$!

⁶ No es una tarea trivial la detección de el Efecto Hall en metales. Es interesante saber que Lord Kelvin había previsto vagamente este efecto en sus desarrollos teóricos en 1851, y que a partir de eso varios físicos, entre ellos Ernst Mach, habían intentado infructuosamente detectarlo experimentalmente antes de Hall. Éste a su vez también registró varios fracasos antes del éxito, que llegó como un premio a su excepcional perseverancia y meticulosidad. Para ampliar ver [2].

11.- El disco en movimiento

Si se permite la rotación del disco éste comenzará a girar por efecto del torque aplicado, y esperamos que se pueda plantear la existencia de determinada velocidad angular límite, ω , tal que cuando el disco la alcanza se llega a una situación estacionaria.

Por razones de simplicidad es importante seguir considerando el campo magnético uniforme en toda la extensión del disco, y posteriormente ver qué se debe esperar si no es así.

En la práctica siempre hay cierto torque debido al rozamiento que se opone a la rotación, pero en teoría vale plantear la posibilidad de que se llegue a un estado de rotación estacionaria aún en ausencia de rozamiento, situación que veremos que tiene sentido.

Vamos a considerar dos sistemas de referencia para los razonamientos: el sistema laboratorio (L), inercial, en el cual todo el aparato excluido el disco está en reposo, y el sistema disco (D), que rota con velocidad angular ω , respecto del anterior, de manera que en él el disco está en reposo una vez que alcanza la condición de rotación estacionaria que deseamos estudiar.

En el sistema L el disco se halla sumergido en un campo magnético uniforme que lo atraviesa perpendicularmente.

En el sistema D no es posible una descripción estacionaria del flujo, aunque se llegue a una situación de rotación estacionaria, ya que mientras el disco está en reposo en este sistema, el punto de alimentación en la periferia se desplaza uniformemente por el contorno. Pero es posible estimar que la variación en el tiempo del campo eléctrico puede dar lugar a campos magnéticos inducidos del mismo orden que los creados por la circulación de corriente en el disco, es decir de efectos despreciables.

En cambio el movimiento de rotación en el seno del campo magnético principal, \vec{B} , da lugar a la aparición de un campo eléctrico radial en sentido tal que tiende a impulsar una corriente radial sobre la cual la acción del campo \vec{B} tendería a frenar la rotación. Esto significa que este campo eléctrico radial inducido se opone al flujo de corriente i_0 que alimenta la rotación, y es un fenómeno típico de todos los motores eléctricos de corriente continua: a medida que aumenta su velocidad angular la corriente que los alimenta es debilitada por este efecto de la inducción, y se alcanza la velocidad final de rotación con una relativamente débil corriente de alimentación que genera el torque capaz de equilibrar el rozamiento o la resistencia que encuentra el motor.

En el caso ideal de no existir torque de rozamiento la velocidad final está determinada por la inducción de una fem que anula la corriente de alimentación. Y en el caso opuesto de una sobrecarga mecánica que impida alcanzar una velocidad de rotación suficientemente alta, el motor puede sobrecalentarse por un valor excesivamente elevado de corriente de alimentación.

Esto nos dice que de ser necesario deberíamos cambiar la condición de mantener fijo el valor de i_0 , por la de mantener fija la diferencia de potencial de la fuente de alimentación, ya que en caso de considerar ausencia de rozamiento, con alimentación i_0 constante tal vez la velocidad de rotación crecería sin límite, y no se alcanzaría una situación estacionaria. El detalle no es esencial para esta discusión, y supondremos que se alcanza una velocidad límite de rotación estacionaria sin especificar por ahora más detalles.

En estas condiciones en el sistema L sí es posible considerar una situación estacionaria. Llamemos \vec{U}_2 al campo de velocidades de flujo de los electrones de conducción en esta situación.

Distinguiremos con \vec{U}_{2L} y \vec{U}_{2D} , la expresiones de este campo de velocidades en el sistema L y en el sistema D respectivamente.

A modo de “tanteo” rápido pensemos⁷ qué sucedería si \vec{U}_{2L} fuese el mismo \vec{U} que encontramos para el caso del disco mantenido en reposo por fuerzas exteriores, y encontramos que no es razonable, porque dada la pequeñez de los valores de \vec{U} , al cambiar al sistema D no muy cerca del centro, nos encontraríamos con un campo \vec{U}_{2D} que describiría a los electrones marchando hacia atrás, y frenando al disco, a menos que ω fuese muy pequeña. Esto significaría que el disco sólo podría alcanzar valores de ω muy pequeños, lo que no parece acertado.

Ahora bien, intentado otro tanteo podemos considerar que en el sistema D en cada instante el campo de velocidades de flujo sea el \vec{U} que hemos encontrado antes para la situación estacionaria con el disco detenido por fuerzas externas, ubicado en cada instante de manera de corresponder con la posición del punto de alimentación en la periferia, que se va desplazando.

Esta propuesta es totalmente razonable, considerando que la variación en el tiempo producida por el desplazamiento del punto de alimentación sólo introduciría modificaciones en el campo magnético generado por la corriente en el disco, el cual es despreciable. Vale además destacar que la redistribución de carga superficial necesaria en cada instante consiste en una onda de carga superficial que circula respecto del sistema D, manteniéndose fija en L.

Para tener en cuenta el campo eléctrico radial inducido por la rotación llamaremos \vec{U}' al campo de velocidades de flujo modificado por él.

Ahora bien, la rotación dará lugar a una fuerza magnética sobre la carga en el disco, que desplazará los electrones de conducción hasta lograr una distribución superficial de carga que anulará exactamente la fuerza magnética dentro del disco. De manera que el campo de velocidades en el sistema D solo será afectado por la rotación en lo que corresponde a la disminución del valor de i_0 .

La fuente de alimentación detectará entre sus puntos de contacto P y Q una diferencia de potencial proporcional a la velocidad, oponiéndose al ingreso de corriente, de manera que ésta se debilitará, y el campo de velocidades se modificará multiplicándose por la relación i/i_0 :

$$\vec{U}' = \frac{i}{i_0} \vec{U}$$

De acuerdo con estas ideas, el campo de velocidades de flujo en los sistemas L y D sería:

$$\vec{U}_{2L} = \vec{U}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (33)$$

$$\vec{U}_{2D}(r, \varphi) = \vec{U}'(r, \varphi + \omega t) \quad (33')$$

⁷ A veces los profesores tenemos la costumbre de plantear a los alumnos “problemas” cuya solución nos es muy conocida, y para mostrarles cómo se resuelven vamos directamente, sin vacilar, a la solución, con la que ya estamos familiarizados. Es claro que podemos hacer eso porque aunque éstos son problemas para los alumnos, hace mucho que han dejado de serlo para nosotros. Pero eso puede dar a los alumnos la falsa idea de que así se resuelven los verdaderos problemas, idea muy dañina porque, además de ser falsa, les puede hacer sentir que no logran la capacidad para ello. La verdad es que cuando los profesores enfrentamos un verdadero problema, como fue mi caso personal al desarrollar este trabajo, tenemos que recurrir a otras estrategias: vacilamos mucho, probamos cosas que a veces son errores gruesos, tanteamos, etc. Y no siempre llegamos a una solución. En esta oportunidad me pareció útil mostrar tanteos que yo mismo tuve que hacer.

Esto significa que si se calcula el torque debido a la acción del campo magnético sobre la corriente, a partir del arrastre de ésta sobre la red en el sistema D, siempre se encontrará el mismo valor que en el caso del disco detenido, multiplicado por la relación i/i_0 .

Vale aclarar por último, que las expresiones (33) y (33') también son válidas para el campo de velocidades en cada pico de la versión estrella de la rueda, suponiendo que \vec{u} y \vec{u}' en este caso son los flujos correspondientes a lo largo de un pico elegido. Ésta puede considerarse una buena guía para la búsqueda de la expresión correcta.

Para terminar vale una consideración sobre la cantidad de corriente que puede representar la carga girando con el disco.

Tenemos dos efectos principales agregados por la rotación: por un lado la expresión (33) nos indica que en el sistema L se agrega una velocidad $\vec{\omega} \times \vec{r}$ al flujo, y por otro lado, tendremos una carga superficial desplazándose con esta misma velocidad.

Es claro que el efecto mencionado en primer término no existe en realidad, porque es el movimiento de rotación de la carga libre, que simplemente acompaña a la carga positiva de la red, anulando ambas mutuamente sus efectos.

Para la carga superficial desplazándose vale lo que ya se discutió en el ejemplo del conductor rectilíneo: en este caso también el aporte de esta carga es despreciable, y lo mostraremos desarrollando un ejemplo con valores numéricos.

Ejemplo numérico discutido.

Sea un disco de aluminio de radio $R = 0,06$ m, y espesor $\varepsilon = 1$ mm, en un campo uniforme de 0,2 T.

Puede estimarse que la resistencia eléctrica que ofrece a la corriente desde el centro hasta una zona pequeña en un borde es del orden de $10^{-5} \Omega$, lo cual indica que es mejor alimentarlo a través de una resistencia limitadora, ya que sin ella, para una corriente razonable, la fuente debería tener una fem del orden de 10^{-4} V, y la velocidad final del disco sería muy pequeña.

De manera que se decide alimentar con una fuente de fem $V_0 = 12$ V, a través de una resistencia limitadora de $1,2 \Omega$, para tener una corriente de alimentación, con disco detenido, $i_0 = 10$ A.

El campo de 0,2 T es un campo fuerte. Puede conseguirse con imanes muy fuertes del tipo de Nd, o con bobinados de unas 10000 vueltas, alimentados con unos 10 A.

Con el disco detenido entonces tendríamos un torque máximo

$$\tau_{\text{max}} = \frac{i_0 B R^2}{2} \cong 3,6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Es un valor equivalente a una fuerza de 0,06 N en el borde del disco; valor relativamente pequeño, que simplemente es un indicio de lo que puede conseguirse con este dispositivo de tan bajo rendimiento.

Al girar en el campo B con velocidad angular ω se induce en el sistema D un campo $E_1 = \omega r B$, cuya divergencia es constante y vale $\nabla \cdot \vec{E}_1 = 2 \omega B$.

Dado que $\nabla \cdot \vec{E}_1 = \rho/\varepsilon_0$, esto implica una densidad constante de carga acumulada en el disco $\rho = 2 \omega B \varepsilon_0$, la cual se acumulará como carga superficial $\sigma = \rho \varepsilon / 2$ en cada cara del disco.

$$\sigma = \omega B \epsilon_0 \epsilon$$

Este valor dependerá de la velocidad de rotación, y, en ausencia de rozamiento ésta alcanzará un valor máximo tal que la integral de E_1 a lo largo del radio iguale a la fem de la fuente.

$$\omega_{\max} = \frac{2 V_0}{B R^2} = 3,3 \times 10^4 \text{ 1/s}$$

Es una velocidad muy alta, a la que el rozamiento nunca permitirá aproximarse siquiera, ya que hemos visto que el torque es bastante bajo. Pero adoptaremos el valor porque nos dará estimaciones máximas de la carga superficial y de la posible corriente representada por ella.

Efectivamente, las densidades volumétrica y superficial que hubiesen correspondido serían:

$$\rho = 2 \omega B \epsilon_0 \sim 10^{-7} \text{ C/m}^3$$

$$\sigma = \omega B \epsilon_0 \epsilon \sim 10^{-10} \text{ C/m}^2$$

Aunque esta carga no se mantendría distribuida en el volumen, la estimación de ρ sirve para ver con claridad su pequeñez (por comparación con la densidad de carga de conducción). De todos modos los dos valores sirven para indicar una carga total $Q \sim 10^{-12} \text{ C}$, que girando a la velocidad máxima representaría una corriente del orden de 10^{-8} A alrededor del eje.

Es claro que el efecto de esta corriente es irrelevante. Podría generar campos magnéticos proporcionalmente menores que los que puede generar la corriente de alimentación, de 10 A, los que a su vez han sido considerados despreciables.

Además hay que tener en cuenta que esta distribución de cargas es capaz de generar una diferencia de potencial V_0 entre el centro y el borde, mucho mayor que la diferencia de potencial debida a la circulación de corriente en el disco (recordar que en el momento inicial, con el disco detenido, la diferencia de potencial entre centro y borde es del orden de 10^{-4} V), por lo cual la carga superficial debida a su vez a estas diferencias de potencial sería proporcionalmente menor e irrelevante.

12.- La situación si el campo magnético no es uniforme

En la situación más común el campo magnético se aplica con un imán de dimensiones limitadas, cuyo campo atraviesa sólo una parte del disco, con una intensidad que puede tanto variar entre un máximo y cero de manera más o menos regular, como invirtiendo su sentido (con líneas que atraviesan el disco en una zona y retornan en zonas vecinas).

Esto complica enormemente la tarea de encontrar cómo deben ser los esquemas de campos, líneas de flujo, etc., aún a nivel cualitativo, y algunos detalles pueden llevar a difíciles problemas de interpretación. Dado que éste no es el punto central de este trabajo, vamos a examinarlo superficialmente y dejamos para otro trabajo un análisis más completo.

La complicación más notable de este caso es la inducción de corrientes parásitas que se superpondrán a la corriente de alimentación; y la forma más simple de abordar la situación consiste precisamente en tratar separadamente los dos fenómenos, y plantear el resultado final como la superposición directa de ambos.

Para poder llegar a alguna conclusión razonablemente válida, en este punto sería necesario poder decidir si las corrientes parásitas tendrán intensidad suficiente para alterar de manera importante el valor del campo magnético que atraviesa al disco. Es posible conjeturar que no será así, pero dado que en el caso de un disco conductor perfecto (ideal), ellas podrían anular completamente dicho campo magnético, no es evidente cuál es realmente la situación.

Para aclarar el punto bastan algunos números obtenidos en experiencias simples.

Por ejemplo: en un disco de aluminio (sin cortes) de 10 cm de diámetro y 1 mm de espesor girando a unas 20 vueltas/s, frente a un imán de neodimio de 3 cm de diámetro (muy cercano), que tiene un momento magnético de unos 2 Am^2 , se detecta un torque de frenado debido a las corrientes inducidas que indica que el valor de éstas se acerca a los 200 A. Pero el momento magnético del imán de neodimio corresponde a una corriente de magnetización circulando en su contorno del orden de 3000 A.

Este resultado es bastante ilustrativo sobre la situación final: las corrientes parásitas inducidas no alcanzarán para afectar apreciablemente el valor del campo magnético, pero sí afectarán decisivamente la velocidad de rotación que es posible alcanzar, ya que su valor debería ser razonablemente menor que el de la corriente de alimentación para que haya un torque que impulse la rotación. Así es que si la rueda del experimento mencionado es alimentada con $i_0 \sim 10 \text{ A}$, no esperaríamos que supere 1 vuelta/s, velocidad a la que las corrientes parásitas alcanzarían ese valor.

De manera que finalmente es posible enunciar que, con el campo magnético no uniforme, localizado en una región del disco, habrá DOS EFECTOS importantes que conspirarán contra el funcionamiento del disco lleno.

- Por un lado tendremos que en el disco lleno la corriente se distribuirá en una zona muy amplia, quedando una parte mayor o menor de ella fuera de la zona de campo magnético intenso, con lo cual es posible que el torque actuante, aún en reposo, sea bastante inferior que el que actuaría sobre el disco estrellado.
- Y por otro lado tendremos que cuando el disco lleno gire se manifestará en él el frenado debido a las corrientes parásitas, mucho más intensas en general que en el disco estrellado o con cortes adecuados [3].

Con lo cual finalmente se cierra la cuestión, confirmando el resultado experimental que muestra la notable superioridad del disco estrellado por sobre el disco lleno para funcionar como motor homopolar, mientras al mismo tiempo queda claro, en función de los mecanismos estudiados, que cualquiera de ambos discos recibiría el mismo torque por la acción del campo magnético, en el caso en que éste fuese uniforme en toda la extensión de los mismos.

Citas bibliográficas

[1]: Ascroft; Mermin. Solid State Physics. Capítulo 1. Ed. Saunders College. 1976. Philadelphia.

[2]: Biographical Memoir of Edwin Herbert Hall, by P. W. Bridgman. National Academy of Sciences of U.S.A. Biographical Memoirs. Vol XXI – Second Memoir – 1939.
www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/hall-edwin.pdf

[3]: Harald; Jensen. A modified Barlow's wheel. American Journal of Physics. Dec. 1953. Vol. 21, 9. p 692