

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

SERIE “C”

TRABAJOS DE FÍSICA

N.º 12/2019

PROBLEMAS SELECTOS DE “ELECTROMAGNETISMO I”

G. A. Raggio



Editor: Miguel Chesta

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

PROBLEMAS SELECTOS DE ELECTROMAGNETISMO I

G.A. Raggio *
FaMAF-UNC

* raggio@famaf.unc.edu.ar

Índice

0. Introducción	2
1. Análisis vectorial	3
1.1. Distribuciones	13
2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	19
3. Electrostática	24
4. Dieléctricos	79
5. Magnetostática	85
A. Cálculo vectorial	102
B. Análisis vectorial	102
C. Polinomios de Legendre	108
C.1. Funciones asociadas de Legendre	109
D. Armónicos esféricos	110
E. Funciones de Bessel	110
F. Funciones de Bessel modificadas (o hiperbólicas)	111
G. Simetrías	112

0. Introducción

Lo que sigue es una colección –algo ecléctica– de problemas **resueltos** sobre los temas que se tratan en el curso de Electromagnetismo I del tercer año de la Licenciatura en Física de FaMAF. El origen de los problemas es incierto; muchos están explícitamente en los libros de Jackson, de Griffiths, etc.; otros son manufactura personal con destino a los exámenes. La mayoría figura de una u otra forma en esas carpetas gordas, mohosas y polvorientas que van heredando los encargados de los prácticos de sus antecesores desde tiempos remotos; muchas veces con “soluciones” que dejan mucho que desear aunque el tiempo las haya canonizado. Hay problemas que se apartan del curriculum usual y tienen su origen en los matices teóricos enfatizados por los profesores con los cuales, para mi suerte, compartí la materia en 2009-2010, a saber: Oscar Reula y Sergio Dain.

Las soluciones que ofrezco aquí son las que, en su momento, creí entender.

Aunque a veces resulta innecesariamente pesada mantenemos la regla de escribir vectores en negrita, e.g. \mathbf{x} , y no usamos la complicación \vec{x} . χ_F denota la función característica de un conjunto F ; o sea

$$\chi_F(p) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } p \in F \\ 0 & , \quad \text{si } p \notin F \end{cases} .$$

$A := B$ significa que A está definido por B ; $A \equiv B$, que A es idéntico a B ; $A \sim B$, que A es asintótico (bajo condiciones especificadas) a B . Aquí y allá usamos los símbolos $\mathcal{O}(\cdot)$ y $o(\cdot)$; usted deberá encargarse de saber que significan. El producto vectorial en \mathbb{R}^3 se denota con \wedge (y no con \times).

Algunas observaciones terminológicas: la esfera en n dimensiones es para mi el conjunto de puntos que equidistan

de un punto distinguido: el centro. Denotamos \mathcal{S}_a a la esfera de radio a . Cuando $a = 1$ omitimos generalmente el índice 1 y hablamos de la esfera unitaria (de radio 1). La bola es la región finita delimitada por una esfera; la notación es \mathcal{B}_a donde a es el radio en cuestión. En dos dimensiones, uso círculo y disco por esfera y bola respectivamente.

A medida que transcurren los problemas las explicaciones o explicitaciones sobre algunos pasos técnicos (e.g., “use el Teorema de Stokes”, “por las propiedades de la rotación...”) se hacen cada vez más escasas.

Hay apéndices: “Cálculo vectorial”; “Análisis vectorial”; “Polinomios de Legendre”; “Armónicos esféricos”; y “Funciones de Bessel”.

¡Para mi todo es bastante provisorio y lo que sigue muy! Nunca conseguí que alguien me informe de algún error aunque subconjuntos de lo que sigue circulan libremente entre alumnos. Pero seguramente errores hay. Mi dirección de correo electrónico figura en la página del título.

Nota de octubre de 2018: Revisé las soluciones en septiembre y octubre de 2018. Tuve en cuenta algunos de los comentarios de un revisor anónimo.

1. Análisis vectorial

Problema 1.1 *¿Cuales de los siguientes campos vectoriales son libres de fuentes y cuales libres de vórtices?*

a) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (2x_1 - 2x_2, -2x_1 + 4x_2 - 3x_3, -3x_2 + 6x_3)$

b) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x})/r^3$; \mathbf{a} constante y $r := \|\mathbf{x}\|$.

c) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}/(R + \alpha)$; \mathbf{a} y r como en b) y $\alpha > 0$.

a) Con $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (2x_1 - 2x_2, -2x_1 + 4x_2 - 3x_3, -3x_2 + 6x_3)$; tenemos $\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 2$, $\frac{\partial A_2}{\partial x_2} = 4$, $\frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 6$ y la divergencia es constante $\nabla \cdot \mathbf{A} = 12$. Además

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = (-3 + 3, 0, -2 + 2) = \mathbf{0}.$$

Esto sugiere inmediatamente encontrar f tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$. Y la integración de estas ecuaciones diferenciales conduce a $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + c$ con c un real arbitrario. El campo es conservativo.

b) En el caso $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x})/r^3$; \mathbf{a} constante y $r := \|\mathbf{x}\|$; conviene quizás escribir $\mathbf{A} = f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$, donde $f(\mathbf{x}) = 1/r^{-3}$ y $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$. Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f,$$

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla \wedge (f\mathbf{v}) = (\nabla f) \wedge \mathbf{v} + f\nabla \wedge \mathbf{v}.$$

Pero,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{x}) = 0, \quad \text{ya que } \mathbf{a} \text{ es constante y } \nabla \wedge \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{x} + (\nabla \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{x} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{x} + 3\mathbf{a}, \quad \text{ya que } \mathbf{a} \text{ es constante y } \nabla \cdot \mathbf{x} = 3,$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -3r^{-4} \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \text{ etc.} \right) = -3r^{-5}\mathbf{x}, \quad [(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{x}]_j = a_\ell \frac{\partial x_j}{\partial x_\ell} = \delta_{j\ell} a_\ell = a_j.$$

Entonces

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = 2\mathbf{a},$$

y luego

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{v} \cdot \nabla f = -3r^{-5} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) = 0 ,$$

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = -3r^{-5} \mathbf{x} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) + 2r^{-3} \mathbf{a} .$$

Pero,

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{a} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{x} = r^2 \mathbf{a} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{x} ,$$

con lo cual

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = -r^{-3} \mathbf{a} + 3r^{-5} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{x} .$$

- c) En el caso $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}/(r+\alpha)$; escribimos $\mathbf{A} = f\mathbf{a}$ con $f(\mathbf{x}) = (r+\alpha)^{-1}$. Se tiene $\nabla f(\mathbf{x}) = -(1/r(r+\alpha)^2)\mathbf{x}$.
Con lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (\nabla f) \cdot \mathbf{a} = -r^{-1}(r+\alpha)^{-2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} ;$$

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = (\nabla f) \wedge \mathbf{a} = -r^{-1}(r+\alpha)^{-2} \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} .$$

Problema 1.2 *Describa el campo vectorial*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x})} , \quad \mathbf{a} \text{ constante} ,$$

y calcule su divergencia y rotación. ¿En que región hay un potencial para \mathbf{v} y cual es?

Sugerencia: Todo es más simple si se trabaja en coordenadas cilíndricas referidas a \mathbf{a} como eje.

Lo primero a observar es que el campo no está definido en toda la recta que contiene a \mathbf{a} .

En coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , tal que \mathbf{e}_z coincida con el vector unitario en dirección de \mathbf{a} , tenemos

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_z , \quad a := |\mathbf{a}| , \quad \mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z , \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = ar(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) = ar\mathbf{e}_\varphi .$$

Entonces $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}| = ar$ y

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = (1/ar)\mathbf{e}_\varphi , \quad r > 0 , \quad \text{o sea } \mathbf{x} \neq c\mathbf{a} \text{ con } c \in \mathbb{R} .$$

Pero, siempre en coordenadas cilíndricas, para un campo escalar f ,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + (1/r) \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z ;$$

o sea que

$$(1.1) \quad \mathbf{v}(r, \varphi, z) = a^{-1} \nabla \varphi .$$

Es inmediato entonces que $\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$; y casi inmediato que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ya que $\nabla \cdot \nabla = \Delta$ y en coordenadas cilíndricas este operador contiene solamente una derivada respecto de φ que es de segundo orden ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = 0$).

El problema con (1.1) es que la asignación del ángulo azimutal φ no es unívoca; para $r > 0$, $(r, \varphi + 2k\pi, z)$ es el mismo punto para cualquier k entero. El campo \mathbf{v} no es conservativo y no admite un potencial global. Se puede calcular una integral de línea en un círculo que rodea a \mathbf{a} y verificar que no es nula. En cambio localmente, y en cualquier región que no encierra trozos de la recta asociada con \mathbf{a} si hay un potencial.

Calculemos la integral de línea de \mathbf{v} en un círculo C de radio 1 en el plano ortogonal a \mathbf{a} . Tenemos $d\mathbf{s} = \mathbf{e}_\varphi d\varphi$ y entonces

$$\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = a^{-1} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi d\varphi = 2\pi/a .$$

Obviamente todo puede hacerse en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{a} = (0, 0, a) , \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = a(-y, x, 0) , \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = a^{-1}(-y/r^2, x/r^2, 0) ,$$

donde $r := \sqrt{x^2 + y^2}$. Y con $\phi(x, y) := \arctan(y/x)$ tenemos $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -y/r^2$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x/r^2$. O sea que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = a^{-1} \nabla \phi .$$

Etc.

Problema 1.3 Verifique las relaciones: $\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi$; $\nabla \wedge (\phi \mathbf{u}) = \phi \nabla \wedge \mathbf{u} + (\nabla \phi) \wedge \mathbf{u}$; $\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \wedge \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v}$; $\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}$; $\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$.

Escribamos (x_1, x_2, x_3) para las coordenadas cartesianas canónicas (x, y, z) y, en general $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

■

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi u_j) = u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = u_j (\nabla \phi)_j + \phi \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{u} .$$

■

$$[\nabla \wedge (\phi \mathbf{u})]_j = \epsilon_{jkl} \frac{\partial (\phi u_\ell)}{\partial x_k} = \epsilon_{jkl} u_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \phi \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} = \epsilon_{jkl} [\nabla \phi]_k u_\ell + \phi [\nabla \wedge \mathbf{u}]_j = [(\nabla \phi) \wedge \mathbf{u}]_j + \phi [\nabla \wedge \mathbf{u}]_j ;$$

ergo

$$\nabla \wedge (\phi \mathbf{u}) = \phi \nabla \wedge \mathbf{u} + (\nabla \phi) \wedge \mathbf{u} .$$

■ Usando que ϵ_{jkl} es invariante ante permutaciones cíclicas de los índices, y que cambia de signo bajo transposiciones (permutaciones de dos índices cualesquiera):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) &= \frac{\partial (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_j}{\partial x_j} = \epsilon_{jkl} \frac{\partial (u_k v_\ell)}{\partial x_j} = \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} v_\ell + \epsilon_{jkl} u_k \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} = \epsilon_{\ell jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} v_\ell - \epsilon_{kjl} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} u_k \\ &= (\nabla \wedge \mathbf{u})_\ell v_\ell - (\nabla \wedge \mathbf{v})_k u_k = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} . \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} [\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})]_j &= \epsilon_{jkl} \frac{\partial (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_\ell}{\partial x_k} = \epsilon_{jkl} \frac{\partial (\epsilon_{lmn} u_m v_n)}{\partial x_k} = \epsilon_{jkl} \epsilon_{lmn} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x_k} u_m \right) \\ &= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x_k} u_m \right) = \delta_{jm} \delta_{kn} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x_k} u_m \right) - \delta_{jn} \delta_{km} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x_k} u_m \right) \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_k} v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} u_j - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} v_j - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} u_k = [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_j + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u_j - (\nabla \cdot \mathbf{u}) v_j - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}]_j ; \end{aligned}$$

ergo

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} .$$

■ Por un lado tenemos:

$$[\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]_j = \frac{\partial (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_k v_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} v_k + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} .$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})]_j &= u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \epsilon_{jkl} u_k (\nabla \wedge \mathbf{v})_\ell = u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \epsilon_{jkl} u_k \epsilon_{lmn} \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \\ &= u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \epsilon_{jkl} \epsilon_{lmn} u_k \frac{\partial v_n}{\partial x_m} = u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) u_k \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \\ &= u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} . \end{aligned}$$

Y, entonces intercambiando \mathbf{u} con \mathbf{v} una fórmula análoga. Por lo tanto,

$$[\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]_j = [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})]_j + [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})]_j ;$$

o sea

$$\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) .$$

Problema 1.4 Calcule $\nabla \cdot \mathbf{v}$ y las componentes de $\nabla \wedge \mathbf{v}$ en coordenadas esféricas. Calcule el Laplaciano en estas coordenadas.

Calculamos lo pedido y más para cualquier sistema de coordenadas curvilineas ortogonales. El resultado está consignado en el Apéndice B (página 104) cuya notación seguimos y acá lo demostramos.

(x_1, x_2, x_3) son las coordenadas curvilinea cartesianas y escribimos $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv (x, y, z)$. J denota el jacobiano normalizado de la transformación; o sea:

$$J_{jk} = h_k^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k},$$

donde h_k son los factores de escala.

Gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \sum_{j=1}^3 (\partial \psi / \partial x_j) \widehat{\mathbf{x}}_j = \sum_{j,k=1}^3 (\partial \psi / \partial \xi_k) (\partial \xi_k / \partial x_j) \widehat{\mathbf{x}}_j = \sum_{j,k,\ell=1}^3 (\partial \psi / \partial \xi_k) (\partial \xi_k / \partial x_j) J_{j,\ell} \widehat{\mathbf{e}}_\ell \\ &= \sum_{j,k,\ell=1}^3 (\partial \psi / \partial \xi_k) (\partial \xi_k / \partial x_j) h_\ell^{-1} (\partial x_j / \partial \xi_\ell) \widehat{\mathbf{e}}_\ell = \sum_{k,\ell=1}^3 (\partial \psi / \partial \xi_k) h_\ell^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_\ell \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_\ell} \right) \right) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^3 (\partial \psi / \partial \xi_k) h_\ell^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_\ell \delta_{k,\ell} = \sum_{k=1}^3 (\partial \psi / \partial \xi_k) h_k^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_k. \end{aligned}$$

Divergencia:

Problema 1.5 Determine la solución general de la ecuación de Laplace $\Delta \psi = 0$ en \mathbb{R}^3 donde ψ es polinomial de orden 3 o menos. O sea $\psi(x, y, z) = \sum_{j,k,\ell=0}^3 c_{j,k,\ell} x^j y^k z^\ell$ donde la suma es sobre índices j, k, ℓ con $j+k+\ell \leq 3$.

Es inmediato calcular el Laplaciano de ψ :

$$\Delta \psi = 2\{c_{2,0,0} + c_{0,2,0} + c_{0,0,2}\} + \{c_{1,2,0} + c_{1,0,2} + 3c_{3,0,0}\}x + 2\{c_{2,1,0} + c_{0,1,2} + 3c_{0,3,0}\}y + 2\{c_{2,0,1} + c_{0,2,1} + 3c_{0,0,3}\}z.$$

Por lo tanto las condiciones sobre los coeficientes son:

$$c_{2,0,0} + c_{0,2,0} + c_{0,0,2} = c_{1,2,0} + c_{1,0,2} + 3c_{3,0,0} = c_{2,1,0} + c_{0,1,2} + 3c_{0,3,0} = c_{2,0,1} + c_{0,2,1} + 3c_{0,0,3} = 0,$$

y nada más. De los 20 coeficientes 16 son arbitrarios; en particular los coeficientes $c_{0,0,0}$; $c_{1,1,1}$; $c_{1,0,0}$ y sus permutaciones; $c_{1,1,0}$ y sus permutaciones; son todos arbitrarios. Algunas soluciones son:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \zeta z + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz + cxyz, \quad x^2 - y^2, \quad 3xy^2 - x^3, \quad x^2y + yz^2 - 2y^3/3, \dots$$

y, por supuesto, cualquier suma de múltiplos arbitrarios de estas.

Problema 1.6 El campo vectorial $\mathbf{K}(x, y, z) = (4xyz, 2x^2z + 2yz^2, 2x^2y + 2y^2z + 4z^3)$ definido en \mathbb{R}^3 es irrotacional (verifíquelo). Determine el potencial general para este campo.

Es inmediato verificar que $\nabla \wedge \mathbf{K} = \mathbf{0}$ (o le creemos al enunciado) y buscamos un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbf{K}$. En tal caso, $\nabla \wedge \mathbf{K}$ es automático. Las ecuaciones para f son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xyz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2z + 2yz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2y + 2y^2z + 4z^3.$$

Integrando la primera obtenemos

$$f(x, y, z) = 2x^2yz + \alpha(y, z);$$

que introducido en la segunda ecuación nos da

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 2yz^2 .$$

Luego,

$$\alpha(y, z) = y^2 z^2 + \beta(z) .$$

Esto introducido en la última ecuación diferencial nos da

$$\frac{d\beta}{dz} = 4z^3 ;$$

y por ende $\beta(z) = z^4 + c$ con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Entonces

$$f(x, y, z) = 2x^2 yz + y^2 z^2 + z^4 + c .$$

Problema 1.7 Demuestre que si $B \subset \mathbb{R}^3$ es cerrado y acotado con borde suave ∂B entonces el volumen de B es igual a $3^{-1} \int_{\partial B} \mathbf{x} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

Aplicase el Teorema de Gauss al campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ con $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$ para obtener

$$3 \int_B dV = \int_B \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_{\partial B} \mathbf{x} \cdot d\boldsymbol{\sigma} .$$

Problema 1.8 Use el problema anterior y la representación paramétrica del toro dada por ($a > b > 0$)

$$x := (a + b \cos(\tau)) \cos(\alpha) , \quad y := (a + b \cos(\tau)) \sin(\alpha) , \quad z := b \sin(\tau) ,$$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \tau \leq 2\pi$, para calcular el volumen del toro.

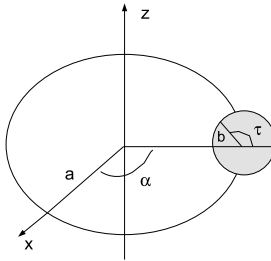


Figura 1: El toro

Hay una manera elemental de obtener la fórmula para el volumen: corte el toro en alguna de sus secciones circulares de radio b y extiéndalo a un cilindro recto de base πb^2 y altura $2\pi a$.

Acá utilizamos la fórmula del problema anterior dada la representación paramétrica de los puntos de la superficie del toro

$$\mathbf{x}(\tau, \alpha) = ((a + b \cos(\tau)) \cos(\alpha), (a + b \cos(\tau)) \sin(\alpha), b \sin(\tau)) .$$

La normal exterior $\mathbf{n}(\tau, \alpha)$ a la superficie del toro se obtiene fácilmente cuando $\alpha = 0$. En este caso $\mathbf{n}(\tau, 0)$ es la normal exterior a la circunferencia de radio b en el plano $y = 0$: $\mathbf{n}(\tau, 0) = b(\cos(\tau), 0, \sin(\tau))$. Rotando alrededor del eje z por α ,

$$\mathbf{n}(\tau, \alpha) = \mathbf{n}(\tau, 0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b(\cos(\tau) \cos(\alpha), \cos(\tau) \sin(\alpha), \sin(\tau)) .$$

El elemento de superficie también es geoméricamente inmediato: $d\sigma = (b d\tau) \cdot ([a + b \cos(\tau)] d\alpha)$. Luego, el volumen del toro es ($\mathbf{d}\sigma = \mathbf{n}(\tau, \alpha) d\sigma$):

$$\begin{aligned} V &= \frac{b}{3} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\tau (a + b \cos(\tau)) \mathbf{x}(\tau, \alpha) \cdot \mathbf{n}(\tau, \alpha) = \frac{2\pi b}{3} \int_0^{2\pi} d\tau (a + b \cos(\tau))(a \cos(\tau) + b) \\ &= \frac{2\pi b}{3} \left\{ (a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \cos(\tau) d\tau + ab \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\tau)^2) d\tau \right\} = \frac{2\pi b^2 a}{3} \left\{ 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos(\tau)^2 d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, $\cos(\tau)^2 = (1 + \cos(2\tau))/2$ y entonces $\int_0^{2\pi} \cos(\tau)^2 d\tau = \pi$, con lo cual obtenemos $V = 2\pi^2 b^2 a$.

Un desarrollo más formal del cálculo del elemento de superficie $\mathbf{d}\sigma$ es el siguiente. Calcule los vectores

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{x}(\tau, \alpha) = b(-\sin(\tau) \cos(\alpha), -\sin(\tau) \sin(\alpha), \cos(\tau)), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{x}(\tau, \alpha) = (a + b \cos(\tau))(-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0).$$

La normal es proporcional a

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -b(a + b \cos(\tau))(\cos(\tau) \cos(\alpha), \cos(\tau) \sin(\alpha), \sin(\tau)).$$

Normalizando y teniendo en cuenta la dirección, se obtiene la $\mathbf{n}(\tau, \alpha)$ dada. Además, se tiene

$$d\sigma = \sqrt{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} d\tau d\alpha,$$

Pero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y entonces $d\sigma = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| d\tau d\alpha = b(a + b \cos(\tau)) d\tau d\alpha$ en concordancia con lo obtenido geoméricamente.

Problema 1.9 Muestre con ejemplos que $\mathbf{v} = \nabla \phi$, respectivamente $\mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{a}$ no son las soluciones generales de $\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$, respectivamente $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, si \mathbf{v} no tiende a $\mathbf{0}$ cuando $r = \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Problema 1.10 Considere el campo vectorial

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \left(-\frac{y}{\rho^2}, \frac{x}{\rho^2}, 17 \right), \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

en la región $G := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Verifique que $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$ pero \mathbf{A} no admite un potencial. Comente: ¿ G no es simplemente conexo!

Sugerencia: Calcule la circulación de \mathbf{A} en el círculo de radio 1 en el plano $z = 0$.

Se tiene cualesquiera sean $(x, y) \neq (0, 0)$ que $(\partial A_2 / \partial x) = \rho^{-2} - 2x\rho^{-3}(\partial \rho / \partial x) = \rho^{-2} - 2x^2 \rho^{-4}$ y $(\partial A_1 / \partial y) = -\rho^{-2} + 2y^2 \rho^{-4}$ y todas las demás derivadas parciales que entran en la definición de la rotación se anulan. Entonces $(\partial A_2 / \partial x) - (\partial A_1 / \partial y) = 0$ y por ende $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

La circulación que se propone calcular es simple. Si $C = \{(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ es la circunferencia de radio 1 en el plano $z = 0$, entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 17), \quad \mathbf{x} \in C, \quad \mathbf{ds} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) d\varphi;$$

y

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = 2\pi.$$

Supongamos que existe un campo escalar Φ definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{A} = -\nabla \Phi$; entonces, con el Teorema Fundamental del Cálculo, ya que C es cerrada:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = - \oint_C (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{ds} = 0.$$

Luego no hay Φ como se requiere.

Recuerde que para regiones simplemente conexas la ausencia de vórtices (i.e., rotor cero) para un campo vectorial es equivalente a que este campo sea conservativo. La región G no es simplemente conexa pues una curva que encierre al eje z no puede contraerse a un punto en G .

Uno se inclina también – curiosidad de por medio – a ver una contradicción con el Teorema de Stokes:

$$(0 =) \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} ,$$

donde S es cualquier superficie delimitada por C . ¿Es entonces falso el Teorema de Stokes? El Teorema de Stokes necesita que S y C estén contenidos en una región donde \mathbf{A} sea continuamente diferenciable. Y cualquiera sea la superficie S delimitada por C esta es atravesada por el eje z donde \mathbf{A} no está definido (y no es continuamente diferenciable).

Problema 1.11 En la región $D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < |\mathbf{x}| < b\}$ considere el campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/r^3$, $r := |\mathbf{x}|$. Verifique que este campo es solenoidal, i.e., $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, pero no existe un campo vectorial \mathbf{B} tal que $\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{B}$. Sugerencia: Considere la superficie esférica $S_R := \{\mathbf{x} \in D : r = R\}$, $a < R < b$, a la cual se le quita un casquete $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S_R : x_3 \geq h\}$, $0 < h < R$, de modo que la superficie adquiere como borde a la circunferencia $C_h = \{\mathbf{x} \in S_R : x_3 = h\}$. Llamando $E_{R,h}$ a esta superficie bordeada y suponiendo la existencia del campo \mathbf{B} , use el Teorema de Stokes

$$\int_{E_{R,h}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_{E_{R,h}} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{C_h} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} ,$$

y pase al límite $h \rightarrow R$. Tenga en cuenta que

$$\left| \int_{C_h} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq \max_{\mathbf{y} \in C_h} (|\mathbf{B}(\mathbf{y})|) \times \text{longitud de } C_h .$$

Con $f(\mathbf{x}) = r^{-3}$, tenemos $\nabla f(\mathbf{x}) = -3r^{-5}\mathbf{x}$ y entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (f(\mathbf{x})\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\nabla \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot (\nabla f(\mathbf{x})) = 3f(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \left(\frac{-3}{r^5}\mathbf{x}\right) = 3f(\mathbf{x}) - 3\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r^5} = 0 .$$

Suponemos entonces la existencia de un campo vectorial \mathbf{B} cuya rotación es \mathbf{A} y procedemos como se sugiere. La cota para la integral de línea sobre C_h , tiene como consecuencia inmediata (recordando que una función continua en un conjunto cerrado y acotado es acotada)

$$\left| \int_{C_h} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq \max_{\mathbf{y} \in C_h} (|\mathbf{B}(\mathbf{y})|) \times \text{longitud de } C_h \leq \max_{\mathbf{y} \in D} (|\mathbf{B}(\mathbf{y})|) \times \text{longitud de } C_h ;$$

de donde se desprende –ya que la longitud de C_h es $2\pi\sqrt{R^2 - h^2}$ – que

$$\lim_{h \rightarrow R} \int_{C_h} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 .$$

Calculamos la integral de superficie. Trabajamos en coordenadas esféricas y entonces la normal hacia afuera en cada punto de la superficie es \mathbf{x}/r y el elemento de superficie es $R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$ mientras $\theta \in [\arccos(h/R), \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Luego,

$$\int_{E_{R,h}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_0^{2\pi} R d\varphi \int_{\arccos(h/R)}^{\pi} d\theta R \sin(\theta) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{R^4} = 2\pi \left(1 + \frac{h}{R}\right) ;$$

y esto converge a 4π cuando $h \rightarrow R$.

Concluimos que no existe el campo \mathbf{B} tal que $\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{B}$.

Observese que la región D (volumen delimitado por dos esferas concéntricas de radios a y b respectivos) no contiene el punto $\mathbf{0}$ y que \mathbf{A} como cualquiera de sus derivadas parciales de cualquiera de sus componentes es finita en todo D . Sin embargo D no posee la propiedad de que toda superficie cerrada puede contraerse (i.e. deformarse suavemente) a un punto sin dejar D . Basta considerar una esfera de radio intermedio entre a y b .

Problema 1.12 Dado un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un espacio vectorial real o complejo V , demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad , \quad f, g \in V ,$$

y que hay igualdad si y sólo si f y g son linealmente dependientes.

Primeramente demostramos el “Teorema de Pitagoras” para un producto escalar: Si $a, b \in V$ y $\langle a, b \rangle = 0$ entonces $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$. En efecto $\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle$.

Ahora pasamos a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Recordamos que dos vectores $a, b \in V$ son linealmente dependientes si existen números α y β (reales si V es real, complejos si V es complejo) que no son ambos nulos y tales que $\alpha a + \beta b = 0$. Observese que si uno de los vectores es nulo entonces el par de vectores es automáticamente linealmente dependiente ($\alpha 0 + 0 \cdot b = 0$).

La desigualdad se cumple con igualdad si $g = 0$; y en tal caso f y g son linealmente dependientes por definición. Sea $g \neq 0$ arbitrario y $h := g/\|g\|$ que es un vector unitario, o sea $\|h\| = 1$. Tenemos

$$f = \langle h, f \rangle h + \underbrace{\{f - \langle h, f \rangle h\}}_{=:u} .$$

Pero $\langle h, u \rangle = \langle h, f \rangle - \langle h, \langle h, f \rangle h \rangle = \langle h, f \rangle - \langle h, f \rangle \|h\|^2 = 0$. Por el teorema de Pitagoras

$$\|f\|^2 = \|\langle h, f \rangle h\|^2 + \|u\|^2 \geq \|\langle h, f \rangle h\|^2 = |\langle h, f \rangle|^2 = \|g\|^{-2} |\langle g, f \rangle|^2 ;$$

y hay igualdad si y solo si $u = 0$ o sea $f = \langle h, f \rangle h = \|g\|^{-2} \langle g, f \rangle g$ en cuyo caso f y g son linealmente dependientes.

Problema 1.13 Considere un vector unitario $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ y la aplicación $R(\mathbf{e}, \phi)$ definida en \mathbb{R}^3 por

$$R(\mathbf{e}, \phi) \mathbf{r} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e} + \cos(\phi) [\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}] + \sin(\phi) \mathbf{e} \wedge \mathbf{r} , \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 ,$$

donde ϕ es un real arbitrario.

- Convenzase que $R(\mathbf{e}, \phi)$ corresponde a una rotación alrededor del eje (dirigido) que contiene a \mathbf{e} , por un ángulo ϕ (en radianes) en el sentido anti-horario convencional respecto del plano ortogonal a \mathbf{e} .
- Verifique explícitamente la relación

$$R(\mathbf{e}, \phi_1) \circ R(\mathbf{e}, \phi_2) = R(\mathbf{e}, \phi_1 + \phi_2)$$

que es geoméricamente evidente.

- Demuestre que

$$\frac{dR(\mathbf{e}, \phi)}{d\phi} = \left[\frac{dR(\mathbf{e}, \phi)}{d\phi} \right]_{\phi=0} R(\mathbf{e}, \phi) ,$$

y que la solución de esta ecuación diferencial es

$$R(\mathbf{e}, \phi) = \exp \left\{ \phi \left[\frac{dR(\mathbf{e}, \phi)}{d\phi} \right]_{\phi=0} \right\} .$$

Verifique que

$$\left[\frac{dR(\mathbf{e}, \phi)}{d\phi} \right]_{\phi=0} \mathbf{r} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{r}$$

y por lo tanto,

$$R(\mathbf{e}, \phi) = \exp \{ \phi \mathbf{e} \wedge \cdot \} .$$

- Determine la matriz asociada con $R(\mathbf{e}, \phi)$ eligiendo la base cartesiana canónica y verifique que es ortogonal.

Suponga que \mathbf{r} es paralelo a \mathbf{e} , vale decir $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}$ con ρ real. Entonces $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = \rho$ y $\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Luego

$$R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = \mathbf{r} ;$$

vale decir los vectores paralelos a \mathbf{e} son invariantes. Si, en cambio \mathbf{r} es ortogonal a \mathbf{e} , entonces –ya que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = 0$ – tenemos

$$R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = \cos(\phi)\mathbf{r} + \sin(\phi)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} ;$$

lo que podemos dibujar (la hoja coincide con el plano subtendido por los dos vectores ortogonales \mathbf{r} y $\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}$; \mathbf{e} sale perpendicularmente de la hoja hacia el lector). Como \mathbf{r} , $\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}$ y \mathbf{e} forman una triada dextrógira de vectores dos a dos ortogonales, se trata efectivamente de una rotación de \mathbf{r} alrededor de \mathbf{e} por un ángulo ϕ en el sentido canónico (en contra del movimiento de las agujas de un reloj).

Como todo \mathbf{r} puede descomponerse univocamente en una suma $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ con \mathbf{r}_{\parallel} paralelo y \mathbf{r}_{\perp} perpendicular respectivamente a \mathbf{e} ; esto me convence que $R(\mathbf{e}, \phi)$ es realmente la rotación que se afirma que es.

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}, \phi_1) \circ R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r} &= R(\mathbf{e}, \phi_1)(R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{e} \cdot [R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}])\mathbf{e} + \cos(\phi_1)[R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot (R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}))\mathbf{e}] + \sin(\phi_1)\mathbf{e} \wedge (R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}) . \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot [R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}] &= \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} + \cos(\phi_2)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + \sin(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}] \\ &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \cos(\phi_2)[(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}] + \sin(\phi_2)\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} ; \end{aligned}$$

entonces

$$R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot (R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}))\mathbf{e} = R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} = \cos(\phi_2)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + \sin(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} .$$

También,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \wedge (R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r}) &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} \wedge \mathbf{e} + \cos(\phi_2)[\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}] + \sin(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{e} \wedge \mathbf{r} \\ &= \cos(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} + \sin(\phi_2)[(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{r}] = \cos(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} - \sin(\phi_2)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] ; \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}, \phi_1) \circ R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r} &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} + \cos(\phi_1) \{ \cos(\phi_2)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + \sin(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} \} \\ &\quad + \sin(\phi_1) \{ \cos(\phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} - \sin(\phi_2)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] \} \\ &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} + [\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)][\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + [\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \sin(\phi_1)\cos(\phi_2)]\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} . \end{aligned}$$

Usando las fórmulas para las funciones trigonométricas de una suma,

$$R(\mathbf{e}, \phi_1) \circ R(\mathbf{e}, \phi_2)\mathbf{r} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} + \cos(\phi_1 + \phi_2)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + \sin(\phi_1 + \phi_2)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} = R(\mathbf{e}, \phi_1 + \phi_2)\mathbf{r} .$$

—

Derivamos la relación

$$R(\mathbf{e}, \phi_1) \circ R(\mathbf{e}, \phi_2) = R(\mathbf{e}, \phi_1 + \phi_2)$$

respecto de ϕ_1 y obtenemos (con la regla de la cadena) denotando con $'$ la derivada respecto del ángulo:

$$R'(\mathbf{e}, \phi_1) \circ R(\mathbf{e}, \phi_2) = R'(\mathbf{e}, \phi_1 + \phi_2) ;$$

ahora tomando $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = \phi$ arbitrario

$$R'(\mathbf{e}, \phi) = R'(\mathbf{e}, 0) \circ R(\mathbf{e}, \phi) .$$

También podemos calcular directamente la derivada a partir de la definición de R , i.e.,

$$R'(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} [R(\mathbf{e}, \phi + \alpha)\mathbf{r} - R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r}]$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos(\phi + \alpha) - \cos(\phi)}{\alpha} [\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + \frac{\sin(\phi + \alpha) - \sin(\phi)}{\alpha} \mathbf{e} \wedge \mathbf{r} \right\} = -\sin(\phi)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] + \cos(\phi)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} .$$

Entonces, como ya calculamos antes,

$$R'(\mathbf{e}, 0) \circ R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = R'(\mathbf{e}, 0)(R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r}) = \mathbf{e} \wedge (R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r}) = \cos(\phi)\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} - \sin(\phi)[\mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}] \stackrel{!}{=} R'(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} .$$

Con la transformación lineal $A := R'(\mathbf{e}, 0)$, dada por $\mathbf{r} \mapsto A\mathbf{r} := \mathbf{e} \wedge \mathbf{r}$, tenemos

$$R'(\mathbf{e}, \phi) = A \circ R(\mathbf{e}, \phi) ;$$

y por las propiedades de la serie exponencial,

$$Y(\phi) := \exp(\phi A) := \sum_{k \geq 0} \frac{\phi^k}{k!} A^k$$

satisface

$$Y'(\phi) = AY(\phi)$$

y además $Y(0) = id$ la transformación idéntica. Ya que $R(\mathbf{e}, 0) = id$, deducimos que $R(\mathbf{e}, \phi) = Y(\phi)$.

La fórmula

$$R(\mathbf{e}, \phi) = \exp \{ \phi \mathbf{e} \wedge \cdot \} ,$$

ha de entenderse como

$$R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = \sum_{n \geq 0} \frac{\phi^n}{n!} (\underbrace{\mathbf{e} \wedge \mathbf{e} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}}_{n \text{ veces}} \wedge \mathbf{r}) ;$$

Sea e_1, e_2, e_3 las componentes cartesianas de \mathbf{e} y x, y, z aquellas del vector \mathbf{r} . Recuerde que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. Entonces

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} = [e_1x + e_2y + e_3z](e_1, e_2, e_3) ,$$

o sea que a la transformación lineal $\mathbf{r} \mapsto (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}$ le corresponde la matriz

$$P_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & e_3^2 \end{pmatrix} .$$

Notese que esta matriz $P_{\mathbf{e}}$ es simétrica (autoadjunta) y $P_{\mathbf{e}}^2 = P_{\mathbf{e}}$ (¡verifíquelo!) o sea una proyección ortogonal. También,

$$\mathbf{e} \wedge \mathbf{r} = (e_2z - e_3y, e_3x - e_1z, e_1y - e_2x) ,$$

a lo que le corresponde la matriz

$$V_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

que es antisimétrica. Pero entonces a $R(\mathbf{e}, \phi)$ le corresponde la matriz

$$P_{\mathbf{e}} + \cos(\phi)[\mathbf{1} - P_{\mathbf{e}}] + \sin(\phi)V_{\mathbf{e}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi) + (1 - \cos(\phi))e_1^2 & (1 - \cos(\phi))e_1e_2 - \sin(\phi)e_3 & (1 - \cos(\phi))e_1e_3 + \sin(\phi)e_2 \\ (1 - \cos(\phi))e_1e_2 + \sin(\phi)e_3 & \cos(\phi) + (1 - \cos(\phi))e_2^2 & (1 - \cos(\phi))e_2e_3 - \sin(\phi)e_1 \\ (1 - \cos(\phi))e_1e_3 - \sin(\phi)e_2 & (1 - \cos(\phi))e_2e_3 + \sin(\phi)e_1 & \cos(\phi) + (1 - \cos(\phi))e_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1^2 + \cos(\phi)(e_2^2 + e_3^2) & (1 - \cos(\phi))e_1e_2 - \sin(\phi)e_3 & (1 - \cos(\phi))e_1e_3 + \sin(\phi)e_2 \\ (1 - \cos(\phi))e_1e_2 + \sin(\phi)e_3 & e_2^2 + \cos(\phi)(e_1^2 + e_3^2) & (1 - \cos(\phi))e_2e_3 - \sin(\phi)e_1 \\ (1 - \cos(\phi))e_1e_3 - \sin(\phi)e_2 & (1 - \cos(\phi))e_2e_3 + \sin(\phi)e_1 & e_3^2 + \cos(\phi)(e_1^2 + e_2^2) \end{pmatrix} .$$

1.1. Distribuciones

Problema 1.14 Verifique que la función

$$f_a(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ si } |x| \geq |a| \\ \exp \left\{ \frac{-1}{|x+a|} + \frac{-1}{|x-a|} \right\} & , \text{ si } |x| < |a| \end{cases} , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

es tantas veces diferenciable como se quiera y tiene soporte compacto.

La función no se anula en ningún x que cumpla con $|x| < |a|$ y el soporte de una función es el cierre (la clausura) del conjunto donde no se anula. Por lo tanto el soporte de f_a es el intervalo cerrado $[-|a|, |a|]$ que es cerrado y acotado y por ende compacto.

Para $|x| > |a|$ es inmediato que todas las derivadas existen y son nulas. Las derivadas laterales izquierda en $-|a|$ y derecha en $|a|$ también existen y son nulas. Suponemos que $a > 0$, o sea $|a| = a$; si esto no es el caso, reemplazamos a a por $-a$ observando que $f_a = f_{-a}$. En el interior $(-a, a)$ del soporte tenemos $|x+a| = a+x$ y $|x-a| = a-x$ y es inmediato que todas las derivadas $f_a^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, existen. Para completar la demostración, basta verificar que las derivadas laterales derecha en $-a$ e izquierda en a existen y son nulas. Para ello observamos que f_a es par: i.e., $f_a(-x) = f_a(x)$. Además, sabemos que cualquiera sea $t \geq 0$, se tiene

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^t e^{-y} = 0 , \quad \lim_{y \rightarrow 0} e^{-1/y} / y^t = 0 .$$

Tenemos

$$\lim_{h \downarrow 0} f_a(a-h) = \lim_{h \downarrow 0} f_a(-a+h) = \lim_{h \downarrow 0} e^{-1/(2a-h)} e^{-1/h} = e^{-1/2a} \lim_{h \downarrow 0} e^{-1/h} = 0 .$$

Para la derivada izquierda en a , $(f'_a)_-(a)$, tenemos

$$(f'_a)_-(a) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f_a(a-h) - f_a(a)}{-h} = - \lim_{h \downarrow 0} \frac{f_a(a-h)}{h} = - \lim_{h \downarrow 0} e^{-1/(2a-h)} \frac{e^{-1/h}}{h} = -e^{-1/2a} \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{-1/h}}{h} = 0 .$$

De la paridad de f_a , obtenemos que la derivada a la derecha en $-a$, $(f'_a)_+(-a)$ satisface $(f'_a)_+(-a) = (f'_a)_-(a) = 0$.

En el interior del soporte, tenemos

$$f'_a(x) = \frac{-4ax}{(a^2 - x^2)^2} f_a(x) .$$

Por lo tanto, la segunda derivada izquierda en a es:

$$(f''_a)_-(a) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f'_a(a-h)}{-h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{4a(a-h)}{h(h^2 - 2ah)^2} f_a(a-h) = 4a^2 e^{-1/2a} \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{-1/h}}{h^3(2a-h)^2} = e^{-1/2a} \lim_{h \downarrow 0} h^{-3} e^{-1/h} = 0 .$$

Como f'_a es impar, obtenemos que $(f''_a)_+(-a) = (f''_a)_-(a) = 0$. Para continuar, observamos

Lema: Para todo $k = 1, 2, \dots$, se tiene

$$f_a^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(a^2 - x^2)^{2^k}} f_a(x)$$

en $(-|a|, |a|)$ donde P_k es un polinomio.

Demostración: La demostración es por inducción en k . Hemos visto esto para $k = 1$. Supongamos que es válido para $k \leq m$. Entonces

$$\begin{aligned} f_a^{(m+1)}(x) &= \frac{P_m(x)}{(a^2 - x^2)^{2^m}} f'_a(x) + \frac{P'_m(x)(a^2 - x^2)^{2^m} - P_m(x)2^m(a^2 - x^2)^{2^m-1}(-2x)}{(a^2 - x^2)^{2^{m+1}}} f_a(x) \\ &= \frac{P_m(x)}{(a^2 - x^2)^{2^m}} \frac{-4ax}{(a^2 - x^2)^2} f_a(x) + \frac{P'_m(x)(a^2 - x^2)^{2^m} + 2^{m+1}xP_m(x)(a^2 - x^2)^{2^m-1}}{(a^2 - x^2)^{2^{m+1}}} f_a(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{-4axP_m(x)(a^2 - x^2)^{2m-2} + P'_m(x)(a^2 - x^2)^{2m} + 2^{m+1}xP_m(x)(a^2 - x^2)^{2m-1}}{(a^2 - x^2)^{2m+1}} f_a(x) \blacksquare$$

Pero, entonces, nuevamente por inducción en k , habiendo visto que $f'(a) = f'(-a) = 0$ y suponiendo que $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(-a) = 0$ para $k \leq m$, tenemos

$$\begin{aligned} (f^{(m+1)})_-(a) &:= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f^{(m)}(a-h) - f^{(m)}(a)}{-h} = - \lim_{h \downarrow 0} \frac{f^{(m)}(a-h)}{h} = - \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_m(a-h)}{h(a^2 - (a-h)^2)^{2m}} f_a(a-h) \\ &= -P_m(a)e^{-1/2a} \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{-1/h}}{h^{2m+1}(2a-h)^{2m}} = 0; \end{aligned}$$

y similarmente (o simplemente por paridad) $(f^{(m+1)})_+(-a) = 0$.

Problema 1.15 Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, y un natural n considere la función

$$u_n(\mathbf{x}) := (n/\pi)^{d/2} \exp\{-n|\mathbf{x}|^2\},$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclidea usual en \mathbb{R}^d . Si

$$\ell_n(f) := \int_{\mathbb{R}^d} u_n(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d^d x,$$

para funciones f infinitamente diferenciables y de soporte compacto, demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(f) = f(\mathbf{0})$.

Consideramos primeramente el caso unidimensional $d = 1$. La fórmula integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}, \quad \Re(a) > 0,$$

es bien conocida¹. Por lo tanto u_n esta normalizada

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx = 1,$$

y en consecuencia

$$\ell_n(f) - f(0) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(0))u_n(x)dx.$$

Usando el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ donde ξ esta en el intervalo de extremos 0 y x . Ya que f' es de soporte compacto y continua, es de módulo acotado: existe K tal que $|f'(t)| \leq K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero entonces,

$$\begin{aligned} |\ell_n(f) - f(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(0))u_n(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(0)|u_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} |f'(\xi)| |x|u_n(x)dx \leq K \int_{\mathbb{R}} |x|u_n(x)dx. \end{aligned}$$

Calculamos la última integral.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x|u_n(x)dx &= \sqrt{n/\pi} \left(\int_{-\infty}^0 (-x)e^{-nx^2} dx + \int_0^{\infty} xe^{-nx^2} dx \right) \\ &= 2\sqrt{n/\pi} \int_0^{\infty} xe^{-nx^2} dx = 2\sqrt{n/\pi} \frac{1}{-2n} \int_0^{\infty} (e^{-nx^2})' dx = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}; \end{aligned}$$

¹La manera clásica de obtenerla es calculando $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy$ en coordenadas polares.

por lo tanto

$$|\ell_n(f) - f(0)| \leq K/\sqrt{n\pi},$$

y la afirmación está probada.

La generalización a d arbitrario es inmediata via el Teorema del Valor Medio multidimensional. Primeramente, u_n está normalizada ya que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-\sum_{j=1}^d a_j x_j^2\right\} d^d \mathbf{x} = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-a_j t^2} dt = \prod_{j=1}^d \sqrt{\pi/a_j}, \quad \Re(a_j) > 0.$$

Luego como antes,

$$\ell_n(f) - f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})) u_n(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x}.$$

Con el teorema del Valor Medio, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ hay $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ con $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = (\nabla f)(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}$. Con esto,

$$|\ell_n(f) - f(0)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla f)(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}| u_n(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x} \leq \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |f'_j(\mathbf{y})| |x_j| u_n(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x},$$

donde f'_j es la derivada parcial de f respecto de la j -ésima variable. Cada una de estas derivadas es continua y de soporte compacto con lo cual hay K_j tal que $|f'_j(\mathbf{z})| \leq K_j$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$. Entonces, para el sumando j -ésimo tendremos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f'_j(\mathbf{y})| |x_j| u_n(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x} \leq K_j \left((n/\pi)^{(d-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-n|\mathbf{t}|^2} d^{d-1} \mathbf{t} \right) \left(\sqrt{n/\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} |t| dt \right)$$

La primera integral da 1, y la segunda –unidimensional ella– da (hicimos el cálculo en el caso unidimensional) $1/\sqrt{n\pi}$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f'_j(\mathbf{y})| |x_j| u_n(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x} \leq K_j/\sqrt{n\pi},$$

y a fortiori

$$|\ell_n(f) - f(0)| \leq \sum_{j=1}^d K_j/\sqrt{n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{j=1}^d K_j.$$

Esto prueba la afirmación.

Problema 1.16 *Muestre la identidad (en el sentido de distribuciones)*

$$g(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) = g(\mathbf{0})\delta(\mathbf{x})$$

para una función g .

Esto es simplemente la definición del producto de una distribución por una función. Si g es una función, y T una distribución, entonces el producto gT se define como

$$(gT)(f) := T(gf), \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty.$$

Luego,

$$(g\delta)(f) = \delta(gf) = g(\mathbf{0})f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})\delta(f),$$

o sea $g\delta = g(\mathbf{0})\delta$.

Alternativamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = g(\mathbf{0})f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Problema 1.17 *Demostrar las siguiente identidad*

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(g(x))f(g(x))|g'(x)|dx = \int_{g(\mathbb{R})} \delta(u)f(u)du,$$

donde g es una función continuamente diferenciable cuya derivada g' no se anula en los ceros de g . Usando esta identidad, demostrar que

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

donde x_i son los ceros de $g(x)$. De esta identidad demostrar que en particular tenemos

$$\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|} [\delta(x + \alpha) + \delta(x - \alpha)].$$

Consideremos un intervalo $I := (a, b)$ donde la función g es invertible o sea su derivada g' no cambia de signo. Si $g' > 0$ en I , entonces $g(I) = (g(a), g(b))$. Si en cambio $g' < 0$ en I entonces $g(a) > g(b)$ y $g(I) = (g(b), g(a))$. En ambos casos la monotonía de g garantiza que hay a los sumo un cero de g en I .

Por las fórmulas de substitución de variables, tenemos

$$\int_I \delta(g(x))f(g(x))|g'(x)|dx = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{g(a)}^{g(b)} \delta(u)f(u)du & , \quad \text{si } g' > 0 \\ - \int_{g(a)}^{g(b)} \delta(u)f(u)du & , \quad \text{si } g' < 0 \end{array} \right\} = \int_{\min\{g(a), g(b)\}}^{\max\{g(a), g(b)\}} \delta(u)f(u)du .$$

Vemos que el módulo en $|g'(x)|$ garantiza que integramos de izquierda a derecha. Si ahora 0 está contenido en I obtenemos

$$\int_I \delta(g(x))f(g(x))|g'(x)|dx = \int_{\min\{g(a), g(b)\}}^{\max\{g(a), g(b)\}} \delta(u)f(u)du = f(0) .$$

Cuando 0 no está contenido en I la integral da cero.

Si suponemos que podemos obtener a \mathbb{R} como unión de intervalos I_j en cada uno de los cuales g es monótona (creciente o decreciente) y además g tiene un número finito de ceros simples (i.e., $g' \neq 0$ en un cero simple), entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(g(x))f(g(x))|g'(x)|dx = \sum_j \int_{I_j} \delta(g(x))f(g(x))|g'(x)|dx = \sum_{j: I_j \ni 0} f(0) ;$$

como hay a los sumo un cero de g por intervalo y hay un número finito de ceros, tenemos

$$\sum_{j: I_j \ni 0} f(0) = f(0) \times (\text{cantidad de ceros de } g) =: \int_{g(\mathbb{R})} f(u)\delta(u)du .$$

Donde ahora queda claro que se pretende indicar con la notación $\int_{g(\mathbb{R})} ..$ que es algo estrambótica. En efecto, si $g(x) = x^2 - a^2$, entonces $g(\mathbb{R}) = [-a^2, \infty)$ como conjunto pero este conjunto se obtiene dos veces como imagen de $(-\infty, 0]$ y de $[0, \infty)$. Así que hay que entender a $g(\mathbb{R})$ no como conjunto sino como unión de las imágenes de intervalos de monotonía de g . Aclarado esto, veamos que

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

bajo las hipótesis declaradas para g . Tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_i \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} f(g(x))|g'(x)| dx \\ &= \sum_i f(g(x_i)) = \sum_i f(0) = f(0) \times (\text{cantidad de ceros de } g) \end{aligned}$$

siendo la suma sobre los finitos ceros (todos simples) de g . O sea que la fórmula es correcta. La aplicación a $g(x) = x^2 - \alpha^2$ es inmediata.

Formalmente,

$$\delta(\sin(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n\pi),$$

pero atención: no podemos aplicar esto a una función como $g(x) = \sin(x)$ porque si bien todos sus ceros son simples, hay un número infinito de ellos.

Problema 1.18 *La función delta de Dirac en tres dimensiones puede ser considerada como el límite impropio $n \rightarrow \infty$ de la función Gaussiana del problema anterior (con $d = 3$).*

Considere un sistema de coordenadas curvilineo ortogonal general especificado por las superficies $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, con elementos de línea du/U , dv/V y dw/W en las tres direcciones perpendiculares. Probar que

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u')\delta(v - v')\delta(w - w') \cdot UVW$$

considerando el límite de la Gaussiana mencionada arriba. Notar que cuando $n \rightarrow \infty$ sólo las longitudes infinitesimales son necesarias para calcular las distancias en el exponente.

Dada una función f definida en \mathbb{R}^3 (de soporte compacto) y un sistema de coordenadas curvilineo ortogonal (u, v, w) especificado por $\mathbf{x}(u, v, w)$. sea $\tilde{f}(u, v, w) := f(\mathbf{x}(u, v, w))$. Con la gaussiana u_n del problema anterior que ahora llamamos ψ_n para evitar confusiones, tenemos

$$(1.2) \quad \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{y} - \mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \int \tilde{f}(u, v, w)\psi_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}(u, v, w)) \frac{dudvdw}{UVW}.$$

Sea (u_o, v_o, w_o) tal que $\mathbf{x}(u_o, v_o, w_o) = \mathbf{y}$ y consideremos el exponente en la exponencial que define a u_n :

$$g(u, v, w) := |\mathbf{y} - \mathbf{x}(u, v, w)|^2 = \sum_{j=1}^3 (y_j - x_j(u, v, w))^2.$$

Hacemos una expansión de Taylor de g alrededor de (u_o, v_o, w_o) obteniendo

$$\begin{aligned} g(u, v, w) &= g(u_o, v_o, w_o) + \frac{\partial g}{\partial u}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o) + \frac{\partial g}{\partial v}(u_o, v_o, w_o)(v - v_o) + \frac{\partial g}{\partial w}(u_o, v_o, w_o)(w - w_o) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u_o, v_o, w_o)(v - v_o)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(u_o, v_o, w_o)(w - w_o)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o)(v - v_o) + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o)(w - w_o) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w}(u_o, v_o, w_o)(v - v_o)(w - w_o) + R \end{aligned}$$

donde el resto R contiene productos $(u - u_o)^a(v - v_o)^b(w - w_o)^c$ con $a + b + c = 3$. Siendo $\mathbf{x}(u_o, v_o, w_o) = \mathbf{y}$, tenemos $g(u_o, v_o, w_o) = 0$ y, como

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v, w) = -2 \sum_{j=1}^3 (y_j - x_j(u, v, w)) \frac{\partial x_j}{\partial u}(u, v, w)$$

con fórmula análoga para las derivadas respecto de v y w , podemos deducir que $\frac{\partial g}{\partial u}(u_o, v_o, w_o)$ y las otras derivadas respecto de v y de w se anulan. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(u, v, w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u_o, v_o, w_o)(v - v_o)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(u_o, v_o, w_o)(w - w_o)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o)(v - v_o) + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u_o, v_o, w_o)(u - u_o)(w - w_o) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w}(u_o, v_o, w_o)(v - v_o)(w - w_o) + R. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas de segundo orden poniendo $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_\ell} = 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_\ell} - 2 \sum_{j=1}^3 (y_j - x_j) \frac{\partial^2 x_j}{\partial u_k \partial u_\ell};$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_\ell}(u_o, v_o, w_o) = 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_\ell}(u_o, v_o, w_o).$$

Pero, para coordenadas curvilineas ortogonales, tenemos

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_\ell}(u_o, v_o, w_o) = \delta_{k\ell} h_k^2$$

donde h_k es la constante de estructura asociada con la coordenada u_k . Con este resultado, con la identificación $U = 1/h_u$, $V = 1/h_v$ y $W = 1/h_w$, y poniendo $U_o = U(u_o, v_o, w_o)$ etc., obtenemos

$$g(u, v, w) = \left(\frac{u - u_o}{U_o}\right)^2 + \left(\frac{v - v_o}{V_o}\right)^2 + \left(\frac{w - w_o}{W_o}\right)^2 + R.$$

Regresando a la integral definitoria (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} &= \int \tilde{f}(u, v, w) \psi_n(-ng(u, v, w)) \frac{dudvdw}{UVW} \\ &= \int \tilde{f}(u, v, w) \phi_n\left(\frac{u - u_o}{U_o}\right) \phi_n\left(\frac{v - v_o}{V_o}\right) \phi_n\left(\frac{w - w_o}{W_o}\right) \exp\{-nR\} \frac{dudvdw}{UVW} \end{aligned}$$

donde ϕ_n es la gaussiana unidimensional. Ahora, hacemos la transformación de variables (lineal): $t_1 := (u - u_o)/U_o$, $t_2 := (v - v_o)/V_o$ y $t_3 := (w - w_o)/W_o$ e introduciendo $\hat{f}(t_1, t_2, t_3) := \tilde{f}(U_o t_1 + u_o, V_o t_2 + v_o, W_o t_3 + w_o)$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int \hat{f}(t_1, t_2, t_3) \phi_n(t_1) \phi_n(t_2) \phi_n(t_3) \exp\{-n\hat{R}(t_1, t_2, t_3)\} \frac{U_o V_o W_o}{UVW} dt_1 dt_2 dt_3,$$

donde \hat{R} es el resto R evaluado en las variables t_1, t_2, t_3 y, obviamente, el cociente $U_o V_o W_o / (UVW)$ debe evaluarse en estas mismas variables. Los resultados del ejercicio anterior indican que cuando $n \rightarrow \infty$ esta última integral es asintótica a

$$\hat{f}(0, 0, 0) \exp\{-n\hat{R}(0, 0, 0)\}$$

ya que UVW evaluado en $(0, 0, 0)$ es precisamente $U_o V_o W_o$. Pero $\hat{R}(0, 0, 0) = 0$ y $\hat{f}(0, 0, 0) = \tilde{f}(u_o, v_o, w_o) = f(\mathbf{y})$ con lo cual parece que terminamos la verificación de que

$$\psi_n(-ng(u, v, w)) \rightarrow \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') UVW.$$

El problema es que R no tiene signo constante y no se puede garantizar que e^{-nR} es acotado. La cuestión necesita, desde un punto de vista más riguroso, de un argumento más sutil.

Sin embargo, la identidad

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW$$

es casi trivial ya que (no distinguiendo h como función de las distintas coordenadas)

$$\begin{aligned} &\int h(u, v, w) (\delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') UVW) \frac{du dv dw}{UVW} \\ &= \int h(u, v, w) \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') du dv dw = h(u', v', w') = h(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

siempre y cuando el punto (u', v', w') este en el dominio de integración. Lo importante a notar y recordar es que si se hace una transformación de coordenadas en el argumento de una δ esta debe ser multiplicada por la inversa del Jacobiano de la transformación.

2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Problema 2.1 Demuestre la unicidad de la solución de la ecuación de Poisson con condiciones de contorno de Dirichlet. Es decir demuestre que dado un dominio (acotado) Ω y funciones ρ en Ω y g en $\partial\Omega$ (el borde de Ω), entonces si la ecuación

$$(2.1) \quad \Delta\Phi = \rho, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = g,$$

tiene solución, la solución es única.

Asumamos que tenemos dos soluciones Φ_1 y Φ_2 de (2.1). La diferencia $u = \Phi_1 - \Phi_2$ satisface la ecuación homogénea

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

Multiplicando por u la ecuación de Laplace e integrando, la primera identidad de Green (Teorema 6) da

$$0 = \int_{\Omega} u\Delta u \, dv = \int_{\partial\Omega} u(\nabla u) \cdot \mathbf{d}S - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dv.$$

Es decir obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} u(\nabla u) \cdot \mathbf{d}S = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dv.$$

Pero con $u \equiv 0$ en el borde, la integral de borde es cero y por lo tanto la integral del lado derecho es cero. Esto implica que la función es constante, pero como tiene que ser cero en el borde obtenemos que $u = 0$ y por lo tanto la solución es \hat{A} ónica.

Problema 2.2 Sea $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el promedio esférico f como

$$(2.2) \quad M_t(u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} u(\mathbf{x} + t\xi) \, dS_{\xi}.$$

Mostrar que si u es una función armónica (es decir $\Delta u = 0$) entonces u satisface la siguiente ecuación

$$u(\mathbf{x}) = M_t(u)(\mathbf{x}),$$

para todo t . Este resultado se conoce como el teorema del valor medio para funciones armónicas (ver Teorema 12) Ayuda: utilizar la fórmula para la derivada $\partial_t M_t(u)$ calculada en el teórico.

Para el promedio esférico de un campo escalar f se tiene que $M_0(f) = f$ y

$$\frac{\partial M_t}{\partial t} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B_t(\mathbf{x})} (\Delta f)(\mathbf{y}) \, dv$$

donde $B_t(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x} + s\hat{\mathbf{n}} : \hat{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq t\}$ es la bola de radio t centrada en \mathbf{x} . Si u es armónica entonces $M_t(u)$ es independiente de t y por ende $M_t(u) = M_0(u) = u$.

Problema 2.3 Utilice el resultado anterior para probar que si u es armónica \mathbb{R}^3 y además u satisface la siguiente desigualdad

$$(2.3) \quad |u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{(1 + |\mathbf{x}|)^{\alpha}},$$

en \mathbb{R}^3 , para algunas constantes positivas C y α , entonces $u = 0$. Notar que la desigualdad (2.3) implica que $u \rightarrow 0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

La idea básica es, dado un punto \mathbf{x} arbitrario tomar el promedio en una bola enorme y usar la desigualdad que indica que el valor de u en la superficie de esa bola enorme es chico.

Tenemos, cualquiera sea $t \geq 0$,

$$|u(\mathbf{x})| = |M_t(u)(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\{|\boldsymbol{\xi}|=1\}} |u(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi})| d\Omega \leq \frac{C}{4\pi} \int_{\{|\boldsymbol{\xi}|=1\}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}|)^\alpha} d\Omega .$$

Buscamos una cota inferior para $|\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}|$; tenemos

$$|\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + t^2 + 2t\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq |\mathbf{x}|^2 + t^2 - 2t|\mathbf{x}| = (|\mathbf{x}| - t)^2 ,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver (A.2)). O mas directamente de la desigualdad general del triángulo (ver (A.1)): $|\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}| \geq \|\mathbf{x}\| - |t\boldsymbol{\xi}| = \|\mathbf{x}\| - t$. O sea: $1 + |\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}| \geq 1 + \|\mathbf{x}\| - t$ y ya que el mapa $0 \leq s \mapsto s^\alpha$ es creciente, también $(1 + |\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}|)^\alpha \geq (1 + \|\mathbf{x}\| - t)^\alpha$; con lo cual:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{4\pi} \int_{\{|\boldsymbol{\xi}|=1\}} \frac{1}{(1 + |t - |\mathbf{x}||)^\alpha} d\Omega = \frac{C}{(1 + |t - |\mathbf{x}||)^\alpha}$$

Como $t \geq 0$ es arbitrario el miembro derecho de la desigualdad puede hacerse tan chico como se quiera eligiendo t lo suficientemente grande y esto demuestra que $u(\mathbf{x}) = 0$.

Problema 2.4 *Demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de ondas. Es decir, demostrar el siguiente resultado: si u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación de ondas*

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

tal que

$$(2.5) \quad u_1(0, x) = u_2(0, x), \quad \partial_t u_1(0, x) = \partial_t u_2(0, x),$$

y tal que la diferencia decae en infinito suficientemente rápido, entonces $u_1 = u_2$. Ayuda: probar primero que la siguiente energía es conservada

$$(2.6) \quad \mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + \nabla u \cdot \nabla u) dV$$

Indagamos si \mathcal{E} depende, o no, de t para una solución f de la ec. de ondas (2.4). La discusión que sigue no es de ninguna manera rigurosa y solamente pretende resaltar aquellos puntos críticos del argumento heurístico. Consideramos un volumen finito $V \subset \mathbb{R}^3$ y

$$\mathcal{E}_V(t) = \frac{1}{2} \int_V ((\partial_t f)^2 + \nabla f \cdot \nabla f) dV .$$

Suponemos que cuando V crece hasta cubrir todo \mathbb{R}^3 entonces $\mathcal{E}_V(t)$ tiende a (2.6). No estamos especificando aquí que quiere decir “crece hasta cubrir todo \mathbb{R}^3 ”. Podríamos tomar una sucesión $\{V_j : j = 1, 2, \dots\}$ de volúmenes finitos $V_j \subset \mathbb{R}^3$ con $V_j \subset V_{j+1}$ y tal que cualquier punto de \mathbb{R}^3 está contenido en algún V_k con k suficientemente grande y entender a (2.6) como límite respecto de esta sucesión específica. O pedir mas, por ejemplo, que el límite no dependa de la sucesión siempre y cuando esta cumpla con algunas condiciones, etc. etc. Hagamos lo que hagamos se trata de ver que pasa con la derivada temporal que también esta definida por un límite, con lo cual nuestro análisis es, en última instancia, una discusión sobre si podemos –o no– permutar dos límites. Hecha esta advertencia, procedemos a analizar la derivada temporal de \mathcal{E}_V .

Usando (2.4) y luego la primera identidad de Green (Teorema 6)

$$\partial_t \mathcal{E}_V(t) = \int_V ((\partial_t^2 f) \partial_t f + (\nabla \partial_t f) \cdot (\nabla f)) dV = \int_V ((\Delta f) \partial_t f + (\nabla \partial_t f) \cdot (\nabla f)) dV = \int_{\partial V} (\partial_t f) (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{\sigma} ,$$

siendo la última integral una integral sobre la superficie ∂V que delimita a V con elemento normal de superficie $d\sigma$. Si es cierto que $\partial_t f$ también tiende a 0 cuando V crece, entonces

$$\int_{\partial V} (\partial_t f)(\nabla f) \cdot d\sigma \longrightarrow 0$$

cuando V crece cubriendo todo \mathbb{R}^3 . En tal caso efectivamente $\partial_t \mathcal{E}_V \rightarrow 0$. Pero, observese, que el decaimiento en el infinito de $\partial_t f$ no se desprende necesariamente del de f .

Si, además, podemos intercambiar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{V \uparrow \mathbb{R}^3} \frac{\mathcal{E}_V(t+h) - \mathcal{E}_V(t)}{h} = \lim_{V \uparrow \mathbb{R}^3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_V(t+h) - \mathcal{E}_V(t)}{h},$$

entonces \mathcal{E} no depende de t . La condición de decaimiento en el infinito para la solución y para la derivada temporal es entonces necesaria para deducir que la energía asociada con dicha solución es constante.

Sea $u := u_1 - u_2$ que es solución de (2.4) con $u(0, \mathbf{x}) = \partial_t u(0, \mathbf{x}) = 0$. Queremos demostrar que $u \equiv 0$. Supongamos que la energía \mathcal{E} asociada con esta solución u es efectivamente constante (i.e., el decaimiento de $u(t, \cdot)$ en el infinito es apropiado); entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} ((\partial_t u)(t, \mathbf{x})^2 + (\nabla u)(t, \mathbf{x}) \cdot (\nabla u)(t, \mathbf{x})) dV = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) \\ & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} ((\partial_t u)(0, \mathbf{x})^2 + (\nabla u)(0, \mathbf{x}) \cdot (\nabla u)(0, \mathbf{x})) dV = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u)(0, \mathbf{x}) \cdot (\nabla u)(0, \mathbf{x}) dV ; \end{aligned}$$

donde usamos la condición inicial sobre la derivada temporal de u . Ahora aplicamos la primera identidad de Green (Teorema 6) para un volumen V finito delimitado por ∂V , lo que da

$$\int_V (\nabla u)(0, \mathbf{x}) \cdot (\nabla u)(0, \mathbf{x}) dV = - \int_V u(0, \mathbf{x})(\Delta u)(0, \mathbf{x}) dV + \int_{\partial V} u(0, \mathbf{x})(\nabla u)(0, \mathbf{x}) \cdot d\sigma = 0,$$

siendo $d\sigma$ el elemento de superficie normal a ∂V . Deducimos entonces que $\mathcal{E}(t) = 0$ y que el integrando en la expresión para $\mathcal{E}(t)$ debe anularse ya que este es no-negativo:

$$(\partial_t u)(t, \mathbf{x})^2 + (\nabla u)(t, \mathbf{x}) \cdot (\nabla u)(t, \mathbf{x}) = 0 ;$$

pero siendo ambos sumandos manifiestamente no-negativos, debe anularse cada uno de ellos

$$(\partial_t u)(t, \mathbf{x})^2 = (\nabla u)(t, \mathbf{x}) \cdot (\nabla u)(t, \mathbf{x}) = 0 ;$$

de donde $(\partial_t u)(t, \mathbf{x}) = 0$ y $(\nabla u)(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Entonces $u(t, \mathbf{x})$ es constante independiente de t y de \mathbf{x} . Ya que $u(0, \mathbf{x}) = 0$ deducimos que $u \equiv 0$.

Problema 2.5 Repita la demostración del resultado del problema anterior para la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = 0,$$

donde m es una constante arbitraria. ¿Cuál es la energía apropiada en este caso?

Un manipuleo enteramente análogo al del problema anterior muestra que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \{(\partial_t u)^2 + \nabla u \cdot \nabla u + m^2 u^2\} dV$$

es conservada, i.e. independiente del tiempo. Y, como en el problema anterior, esto conduce a la unicidad de la solución bajo condiciones de decaimiento.

Problema 2.6 Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$(2.7) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - i \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{0},$$

donde \mathbf{H} es un campo vectorial y i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). Demostrar que:

- a) $\mathbf{Y} = \partial_t \mathbf{H}$ satisface la ecuación de ondas.
 b) Si inicialmente tenemos $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ entonces $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ para todo tiempo.

¿Qué sucede si en la ecuación (2.7) no ponemos i en el segundo término?

a) Usando (B.4) tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial(i \nabla \wedge \mathbf{H})}{\partial t} = i \nabla \wedge (i \nabla \wedge \mathbf{H}) = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \Delta \mathbf{H}.$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla(\nabla \cdot (i \nabla \wedge \mathbf{H})) = \Delta \mathbf{Y} - i \nabla(\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H})) = \Delta \mathbf{Y}$$

por (B.1).

b) Con esta misma relación,

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = i \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{0};$$

de donde $\nabla \cdot \mathbf{H}$ es independiente del tiempo t y entonces $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ se anula siempre si lo hace para algún tiempo.

Si se reemplaza a la unidad imaginaria i por una constante real arbitraria c , obtenemos $\partial^2 \mathbf{Y} / \partial t^2 = -c^2 \Delta \mathbf{Y}$ y cada componente debe cumplir

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -\Delta u$$

en términos de la variable $s = |c|t$. Esta ecuación diferencial tiene soluciones muy distintas a las de la ecuación de ondas.

En efecto, cualquiera sea la función escalar $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, la función $f(\mathbf{x}, t) := \psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$ es solución de la ec. de onda $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$ siempre que el vector de onda \mathbf{k} y la frecuencia ω estén relacionados por $|\mathbf{k}|^2 = \omega^2$. Luego, $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t) = \psi_j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)$ es una solución de la ecuación de onda vectorial cualquiera sean las funciones escalares ψ_1, ψ_2 y ψ_3 . La ec. (2.8) no admite soluciones de este tipo que representan ondas que se propagan temporalmente sin deformación espacial. Por el contrario las soluciones típicas de (2.8) crecen o decrecen exponencialmente con el tiempo o en el espacio.

Problema 2.7 La energía total de un campo electromagnético está dada por

$$(2.9) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) d^3x.$$

Demuestre que si los campos decaen suficientemente rápido en infinito y además $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ entonces

$$(2.10) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Siendo \mathcal{E}_V la integral (2.9) sobre un volumen V finito arbitrario y derivando con respecto a t intercambiando la derivada con la integración, usando la ecuaciones de Maxwell (con $\mathbf{J} = \mathbf{0}$):

$$\frac{\partial \mathcal{E}_V}{\partial t} = \int_V (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) dv = \frac{1}{\mu_0} \int_V (\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E})) dv;$$

con (B.3) y el Teorema de Gauss,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_V}{\partial t} = \frac{1}{\mu_o} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{E}) dv = \frac{1}{\mu_o} \int_{\partial V} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} ,$$

donde ∂V es el borde de V y $d\mathbf{S}$ es el elemento vectorial de superficie en ∂V . Si, entonces, es cierto que

$$(2.11) \quad \int_{\partial V} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \longrightarrow 0 , \text{ cuando } V \rightarrow \mathbb{R}^3 ,$$

entonces podemos deducir que (2.10) es cierto, o sea \mathcal{E} es independiente del tiempo.

Si los campos son finitos en todo punto y $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \sim 1/r^{3+\epsilon}$ para $r \rightarrow \infty$ (lease que cada componente de $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ es asintótica a ...) con algún $\epsilon > 0$ entonces tendremos (2.11) ya que $1/r^{1+\epsilon}$ es integrable en el infinito.

Problema 2.8 a) Encuentre un campo eléctrico \mathbf{E} tal que $\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$ en todo el espacio y tal que la energía total del campo sea finita pero no nula.

b) En $t = 0$ asuma que damos como dato inicial para las ecuaciones de Maxwell sin fuentes el campo encontrado en el punto a) y además $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Demuestre que para $t > 0$ el campo magnético \mathbf{B} no es cero.

c) Calcule la energía del campo electromagnético del punto b) para todo t .

a) Si $\mathbf{E} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ entonces $\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$ es automático. El resto es imaginación. Planteamos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{a} ,$$

donde \mathbf{a} es un vector unitario arbitrario fijo y f es una función de $r := |\mathbf{r}|$ a determinar de modo que la energía

$$\mathcal{E} := \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r}$$

sea finita. Con $f' = df/dr$, tenemos $(\partial f / \partial x_j)(\mathbf{r}) = f'(r)r^{-1}x_j$ para $j = 1, 2, 3$ con lo cual

$$\mathbf{E}_j = \epsilon_{jkl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} = \epsilon_{jkl} a_l \frac{\partial f}{\partial x_k} = \epsilon_{jkl} a_l f'(r) x_k / r = (f'(r)/r) \epsilon_{jkl} x_k a_l = (f'(r)/r) (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) ;$$

o sea

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{f'(r)}{r} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) .$$

Entonces

$$\mathcal{E} = \int (f'(r))^2 (\sin(\theta))^2 d\mathbf{r}$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{r} y \mathbf{a} . En coordenadas esféricas con eje coincidente con \mathbf{a} ,

$$\mathcal{E} = 2\pi \int_0^\pi (\sin(\theta))^3 d\theta \int_0^\infty f'(r)^2 r^2 dr \leq 2\pi^2 \int_0^\infty f'(r)^2 r^2 dr ,$$

donde usamos las desigualdad $0 \leq \sin(\theta)^3 \leq 1$ válida en el intervalo $[0, \pi]$ y la positividad de la integral radial. Basta entonces que $f'(r)^2 r^2$ sea integrable. Por ejemplo, si $f(r) = e^{-r}$ entonces $f'(r)^2 r^2 = e^{-2r} r^2$ es integrable.

b) Tomamos $\mathbf{E}(t = 0) = \mathbf{E}_o$ el campo de a) y $\mathbf{B}(t = 0) = \mathbf{0}$ como condición inicial. Entonces, la propagación temporal gobernada por las ecuaciones de Maxwell implica que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t = 0) = -\nabla \wedge \mathbf{E}_o = -(\nabla(f'/r)) \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) - \frac{f'}{r} (\nabla \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a})) .$$

Ahora bien,

$$\nabla(f'/r) = \frac{f''(r)r - f'(r)}{r^3} \mathbf{r} ,$$

con lo cual

$$(\nabla(f'/r)) \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{0} ;$$

y

$$\nabla \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) = \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{a}}_{=0} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a} - \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{r}}_{=0} = 2\mathbf{a} ;$$

con lo cual

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t=0) = -2r^{-1} f'(r) \mathbf{a} \neq 0$$

y por lo tanto $\mathbf{B}(t) \neq 0$ para algún $t > 0$.

c) La energía $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2) d\mathbf{r}$ se conserva en el tiempo por lo cual es igual a la del campo eléctrico de a) para todo tiempo.

3. Electroestática

Problema 3.1 Utilice el teorema de Gauss para demostrar las siguientes proposiciones:

- Cualquier exceso de carga puesto sobre un conductor deberá estar sobre la superficie.
- Un conductor hueco cerrado apantalla el interior de los campos debidos a cargas exteriores, pero no apantalla el exterior de los campos debidos a cargas colocadas en su interior.
- El campo eléctrico junto a la superficie de un conductor es normal a dicha superficie, y su módulo vale σ/ϵ_0 , donde σ es la densidad de carga sobre la superficie.

Un conductor (perfecto) está caracterizado por la movilidad libre de cargas. En una situación de equilibrio electrostático las cargas se distribuyen de modo que el campo eléctrico en el conductor se anula. Si $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, entonces para cada superficie cerrada S dentro del conductor, $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$, y la ley de Gauss indica que la carga encerrada por S se anula. Esto nos da a).

b) Ya que la distribución superficial de cargas en el conductor es tal que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, cualquier carga exterior produce un acomodamiento de cargas superficiales manteniendo $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Pero la distribución de cargas superficial produce un campo eléctrico en el exterior.

c) Si \mathbf{r} es un punto de la superficie S del conductor y \mathbf{n} es la normal exterior a S en el punto \mathbf{r} , imaginamos un cajita cilíndrica C centrada en \mathbf{r} de modo que las tapas circulares idénticas D_1 y D_2 sean paralelas al plano tangente a S en \mathbf{r} . Mientras D_1 cae enteramente en el conductor (donde $\mathbf{E} = \mathbf{0}$), D_2 cae en el exterior del conductor. La normal a la superficie del manto cilíndrico M de C es perpendicular a \mathbf{n} . La ley de Gauss nos dice que

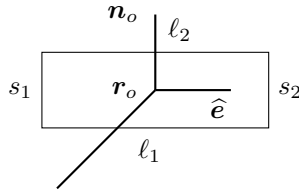
$$\frac{\Sigma |D|}{\epsilon_0} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{D_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

donde $|D|$ es la superficie de las tapas D_1 y D_2 , y $\Sigma = Q/|D|$ con Q la carga superficial que encierra la cajita C . En el límite cuando el manto M de la cajita tiene altura 0 y las tapas se contraen al punto \mathbf{r} , obtenemos

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \lim_{\text{"}D_2 \rightarrow \mathbf{r}\text{"}} \frac{1}{|D|} \int_{D_2} \mathbf{E}^\perp dS = \mathbf{E}^\perp,$$

donde σ es la densidad de carga superficial en el punto \mathbf{r} de S y \mathbf{E}^\perp es la componente de \mathbf{E} en \mathbf{r} perpendicular (paralela a \mathbf{n}) a S .

Encaramos ahora la demostración de que la componente tangencial \mathbf{E}^\parallel se anula en S . Suponemos que \mathbf{E} es continua fuera del conductor incluyendo la superficie S . LLamamos V al exterior del conductor junto con su borde S . Sea $\mathbf{r}_o \in S$, \mathbf{n}_o la normal a S en \mathbf{r}_o y supongamos que $\mathbf{E}^\parallel(\mathbf{r}_o) \neq \mathbf{0}$. De esto construiremos una



contradicción. Sea \hat{e} la dirección (ortogonal a \mathbf{n}_o) de \mathbf{E}^{\parallel} , o sea $\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r}_o) = \alpha \hat{e}$ con $\alpha > 0$. Por la continuidad, existe un entorno U de \mathbf{r}_o tal que $\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r}) \cdot \hat{e} > \alpha/2$ para todo $\mathbf{r} \in U \cap V$. También de la continuidad y del hecho que \mathbf{E} se anula en el interior del conductor, tenemos que $|\mathbf{E}| \leq K$ en U . Tomamos ahora un camino cerrado rectangular R (ver la figura) centrado en \mathbf{r}_o formado por dos segmentos ℓ_1 y ℓ_2 paralelos a \hat{e} de largo ℓ ; y dos segmentos s_1 y s_2 paralelos a \mathbf{n}_o de largo s con $s \leq \alpha\ell/6K$, de modo tal que: (i) $R \subset U$; (ii) $\ell_2 \in U \cap V$ (i.e., ℓ_2 está fuera del interior del conductor; (iii) ℓ_1 está en el interior del conductor. En tal caso,

$$0 = \int_R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\ell_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\ell_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\ell_2} \mathbf{E} \cdot \hat{e} ds + \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} .$$

Por el Teorema del Valor Medio del cálculo integral, existe $\xi \in \ell_2$ con

$$\int_{\ell_2} \mathbf{E} \cdot \hat{e} ds = \ell \mathbf{E}(\xi) \cdot \hat{e} > \frac{\alpha\ell}{2} .$$

Además,

$$\left| \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq Ks \leq \frac{\alpha\ell}{6} ,$$

y, análogamente, para la integral sobre s_2 . Entonces,

$$\int_{\ell_2} \mathbf{E} \cdot \hat{e} ds + \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} > \frac{\alpha\ell}{2} - 2\frac{\alpha\ell}{6} = \frac{\alpha\ell}{6} > 0 ,$$

contradiendo que $\int_R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$.²

Problema 3.2 Utilizando la identidad de Green demostrar:

- Si $\Delta\Phi = 0$ en \mathbb{R}^3 y $\Phi \rightarrow 0$ en infinito entonces $\Phi = 0$. Comparar con el problema 2 de la Guía 1.
- Un campo electrostático que decae en infinito y que es producido por una fuente localizada de cargas tiene necesariamente energía total finita.

La primera identidad de Green (ver página 34, (3.8)) para un volumen V de borde ∂V da

$$\int_V |\nabla\Phi|^2 dv = \int_V (\Phi(\Delta\Phi) + (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)) dv = \int_{\partial V} \Phi((\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n}) d\sigma ,$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior en ∂V . La idea es que si $\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ cuando $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ el término de superficie puede hacerse tan chico como se quiera eligiendo V apropiadamente (por ejemplo V es una esfera centrada en el origen de radio lo suficientemente grande). Esto implica que $\nabla\Phi = \mathbf{0}$ de modo que Φ resulta constante; pero el comportamiento asintótico de Φ para $r \rightarrow \infty$ implica que esa constante es nula. Para transformar esto en un resultado matemático hay que suponer algo más detallado sobre el comportamiento asintótico. Por ejemplo

$$\left| \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right| \leq C/r^{2+\epsilon} ,$$

²Esta demostración se extiende sin pena alguna a la demostración de que en una interfase la componente de \mathbf{E} tangencial a la interfase es continua. Los libros clásicos son generalmente algo esquemáticos en este punto y es por eso que decidí presentar esta demostración.

con $\epsilon > 0$ cuando r es lo suficientemente grande.

Si $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ es un campo electrostático producido por una fuente localizada en V_o (podemos suponer que V_o es cerrado) y V encierra completamente la región de la fuente entonces $\Delta\Phi = 0$ en $V \setminus V_o$. Ahora la energía del campo en V es proporcional a

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla\Phi|^2 dv &= - \int_V \Phi(\Delta\Phi) dv + \int_{\partial V} \Phi(\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{V_o} \Phi(\Delta\Phi) dv - \int_{V \setminus V_o} \Phi(\Delta\Phi) dv + \int_{\partial V} \Phi(\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= - \int_{V_o} \Phi(\Delta\Phi) dv + \int_{\partial V} \Phi(\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} d\sigma ; \end{aligned}$$

el primer sumando es finito y el segundo no contribuye cuando $V \uparrow \mathbb{R}^3$ si $\Phi \rightarrow 0$ adecuadamente para $r \rightarrow \infty$, lo que daría que $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi|^2 dv$ es finito.

Problema 3.3 *El potencial electrostático de un átomo de hidrógeno en el estado fundamental está dado por*

$$(3.1) \quad \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{e^{-2r/a_o}}{r} \left(1 + \frac{r}{a_o} \right)$$

donde q es la carga elemental y a_o es el radio de Bohr. Calcule y discuta la distribución de cargas. Verifique directamente y además con el teorema de Gauss que la carga total es nula.

Escribo $\Phi(\mathbf{r}) = f(r)g(r)$ con $f(r) = (q/4\pi\epsilon_o)e^{-2r/a_o}$ y $g(r) = r^{-1} + a_o^{-1}$. Entonces

$$\nabla\Phi = f\nabla g + g\nabla f, \quad \Delta\Phi = \nabla \cdot (f\nabla g + g\nabla f) = f\Delta g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + g\Delta f.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (\nabla f)(\mathbf{r}) &= (-2/a_o)f(r)\nabla r = (-2/a_o)f(r)r^{-1}\mathbf{r}, \quad (\nabla g)(\mathbf{r}) = -r^{-3}\mathbf{r}, \\ \Delta f(\mathbf{r}) &= (-2/a_o)\nabla \cdot (f(r)r^{-1}\mathbf{r}) = (-4f(r)/ra_o) + (4f(r)/a_o^2), \\ \Delta g(\mathbf{r}) &= -4\pi\delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\rho(\mathbf{r}) = -\epsilon_o\Delta\Phi = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{qe^{-2r/a_o}}{\pi a_o^3}.$$

La distribución de cargas es la superposición de una carga puntual de magnitud q en el origen con una carga negativa distribuida exponencialmente alrededor del origen. La carga total es:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = q - \frac{q}{\pi a_o^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2r/a_o} r^2 dr d\Omega = q - \frac{4q}{a_o^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_o} r^2 dr = 0;$$

donde usamos $\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^n = n!/\lambda^{n+1}$ para n natural y $\lambda > 0$ lo que se obtiene de $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$ por diferenciación con respecto a λ (o por integración por partes).

Por otro lado,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = f(r) \left\{ \frac{2}{a_o r^2} + \frac{2}{r a_o^2} + \frac{1}{r^3} \right\} \mathbf{r}.$$

Si \mathcal{S}_R es la esfera de radio $R > 0$, entonces el elemento vectorial de su superficie es $d\mathbf{f} = \hat{\mathbf{r}}R^2 d\Omega$, y por el teorema de Gauss la carga encerrada por \mathcal{S}_R es

$$\int_{\mathcal{S}_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = f(R) \left\{ \frac{2R}{a_o} + \frac{2R^2}{a_o^2} + 1 \right\};$$

esto tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$ ya que $R^\alpha f(R)$ lo hace cualquiera sea la potencia α .

Problema 3.4 *Dos láminas planas infinitas conductoras de espesor uniforme, t_1 y t_2 respectivamente, se colocan paralelamente una a la otra con sus caras adyacentes separadas por una distancia L . La primera lámina tiene una carga total por unidad de área (suma de las densidades superficiales de carga de cada lado) igual a q_1 y la segunda igual a q_2 .*

i) Use argumentos de simetría y la ley de Gauss para demostrar:

a) Las densidades superficiales de carga sobre las caras adyacentes son iguales y opuestas;

b) Las densidades en las caras exteriores en ambas láminas son iguales;

c) Los módulos de las densidades de carga y los campos producidos son independientes de t_1 , t_2 y L .

ii) Obtenga las densidades y los campos para el caso en que $q_1 = -q_2 = Q$.

o) Determinamos el campo eléctrico \mathbf{E} asociado a una lámina plana infinita (e infinitamente delgada) de densidad de carga superficial q . Ya que la distribución de carga es invariante ante translaciones en el plano de la lámina, \mathbf{E} no depende de coordenadas en el plano. Ya que la distribución de carga es invariante ante rotaciones arbitrarias alrededor de cualquier eje perpendicular al plano de la lámina, \mathbf{E} no tiene componentes en el plano. Con esto, eligiendo un sistema de coordenadas cartesiano tal que el plano de la lámina coincida con el plano “ yz ”, tenemos

$$\mathbf{E} = E(x)\hat{\mathbf{x}} = (E(x), 0, 0).$$

Esto cumple con $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$. Además, ya que una reflexión en el plano de la lámina no altera la distribución, $E(-x) = -E(x)$. Fuera de la lámina $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y esto implica que $dE/dx = 0$, o sea $E(x)$ es constante en cada uno de los semiplanos $\{x > 0\}$ y $\{x < 0\}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E\hat{\mathbf{x}} & , \text{ para } x > 0 \\ -E\hat{\mathbf{x}} & , \text{ para } x < 0 \end{cases}.$$

Para determinar E usamos el Teorema de Gauss $\epsilon_o \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = (\text{carga encerrada por } F)$. Tomando para F un cubo con dos caras F_1 y F_2 paralelas a la lámina una de cada lado de esta y observando que las cuatro caras paralelas perpendiculares a la lámina no contribuyen a la integral y, si el área de cada cara es A ,

$$qA = \epsilon_o \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \epsilon_o \left(-E \int_{F_1} \hat{\mathbf{x}} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) df + E \int_{F_2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} df \right) = 2\epsilon_o EA;$$

o sea que $E = q/(2\epsilon_o)$. En resumen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}},$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario perpendicular a la lámina dirigido de la lámina hacia el punto \mathbf{x} .

i) Usamos el índice “i” para la cara interior (aquella que enfrenta la otra placa) y el índice “e” para la cara exterior de cada placa. $\hat{\mathbf{n}}$ denota el vector unitario en la dirección perpendicular a las láminas dirigido de la lámina 1 hacia la lámina 2. Tenemos:

$$(3.2) \quad q_{1e} + q_{1i} = q_1 \quad , \quad q_{2e} + q_{2i} = q_2.$$

En cualquier punto interior de la placa 1 el campo eléctrico (que se conforma como suma de las contribuciones de cada una de las cuatro superficies) debe anularse; luego

$$\frac{q_{1e}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} - \frac{q_{1i}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} - \frac{q_{2i}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} - \frac{q_{2e}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}.$$

Lo mismo es cierto en cualquier punto interior de la placa 2; luego

$$\frac{q_{1e}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} + \frac{q_{1i}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} + \frac{q_{2i}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} - \frac{q_{2e}}{2\epsilon_o} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}.$$

Sumando ambas identidades obtenemos $q_{1e} - q_{2e} = 0$; restandolas $q_{1i} + q_{2i} = 0$. Entonces, con (3.2),

$$q_{1i} = -q_{2i} = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad q_{1e} = q_{2e} = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

ii) En este caso, $q_{1e} = 0$, $q_{1i} = Q$, $q_{2i} = -Q$ y $q_{2e} = 0$ lo que de alguna manera concuerda con la expectativa. El campo se anula salvo en la región intermedia entre las láminas donde es $\mathbf{E} = (Q/\epsilon_o)\hat{\mathbf{n}}$

Problema 3.5 Sea una superficie conductora esférica de radio a unida por un conductor fino a otra esfera conductora de radio b ($a > b$). Suponiendo que las esferas están cargadas con carga Q y suficientemente alejadas como para despreciar la influencia de una sobre la otra, calcule:

- a) El campo sobre la superficie de cada esfera;
 b) La carga sobre cada una de las esferas.

Considere un punto P sobre el segmento de recta que une los centros de las esferas que están a distancia d ($\gg a$) entre si. El potencial debido a la esfera E_a de radio a y carga Q_a es:

$$\phi_a(r) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donde r es la distancia del centro de E_a al punto intermedio P ($a \leq r \leq d - b$). El correspondiente potencial debido a la esfera E_b de radio b y carga Q_b es:

$$\phi_b(r) = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0(d-r)}.$$

El potencial en el segmento es entonces

$$\phi(r) = \phi_a(r) + \phi_b(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_a}{r} + \frac{Q_b}{d-r} \right).$$

Como las esferas están al mismo potencial, debemos tener $\phi(a) = \phi(d-b)$, de donde $a(d-b)Q_b = b(d-a)Q_a$. De esto y de $Q = Q_a + Q_b$,

$$Q_a = \frac{a(d-b)}{d(a+b)-2ab}Q \approx \frac{a}{a+b}Q, \quad Q_b = \frac{b(d-a)}{d(a+b)-2ab}Q \approx \frac{b}{a+b}Q.$$

Para los campos superficiales, siempre sobre el segmento considerado, tenemos denotando con $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario en la dirección del centro de la esfera de radio a a aquella de radio b ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= -\nabla\phi(a\hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_a}{a^2} - \frac{Q_b}{(d-a)^2} \right\} \hat{\mathbf{n}} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a(a+b)} \hat{\mathbf{n}}, \\ \mathbf{E}_b &= -\nabla\phi((d-b)\hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_a}{(d-b)^2} - \frac{Q_b}{b^2} \right\} \hat{\mathbf{n}} \approx -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b(a+b)} \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Problema 3.6 a) Demuestre que en la superficie de un conductor cargado, la derivada normal del campo eléctrico está dada por

$$(3.3) \quad \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la superficie.

b) Utilice el resultado anterior para analizar el efecto de las puntas.

Vea la figura 2. Dada una superficie cerrada S en \mathbb{R}^3 que sea regular (suave) y un punto $\mathbf{r} \in S$, denotamos con $\hat{\mathbf{n}}$ a la normal exterior a S en el punto \mathbf{r} .

$$\begin{aligned} E_n(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ E_n(\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{n}}) &= E_n(\mathbf{r}) + h \frac{\partial E_n}{\partial n}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(h^2) \\ \int_{\Delta S} E_n(\mathbf{r}) R_1 R_2 dudv &= \int_{\Delta S'} E_n(\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{n}})(R_1 + h)(R_2 + h) dudv \\ &= \int_{\Delta S'} \left\{ E_n(\mathbf{r}) R_1 R_2 + h \left[E_n(\mathbf{r})(R_1 + R_2) + \frac{\partial E_n}{\partial n}(\mathbf{r}) R_1 R_2 \right] + \mathcal{O}(h^2) \right\} dudv \end{aligned}$$

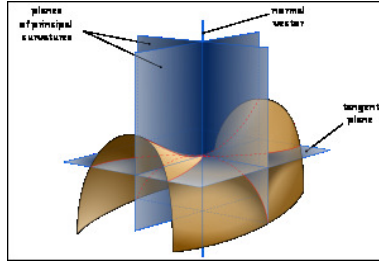


Figura 2: La figura es de Wikipedia: <http://de.wikipedia.org/wiki/Weingartenabbildung>

Entonces

$$0 = \int_{\Delta S'} \left\{ h \left[E_n(\mathbf{r})(R_1 + R_2) + \frac{\partial E_n}{\partial n}(\mathbf{r})R_1R_2 \right] + \mathcal{O}(h^2) \right\} dudv ,$$

y deducimos que $0 = E_n(\mathbf{r})(R_1 + R_2) + \frac{\partial E_n}{\partial n}(\mathbf{r})R_1R_2$, o sea

$$\frac{\partial E_n}{\partial n}(\mathbf{r}) = -E_n(\mathbf{r})(R_1^{-1} + R_2^{-1}) .$$

Problema 3.7 Tres bolas de radio a , una conductora, otra que posee una densidad de carga uniforme en su volumen y otra provista de una densidad de carga con simetría esférica que varía como r^n , con $n > -3$, poseen una carga total Q .

- Use el teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto en el interior como en el exterior de cada bola.
- Calcule el potencial tanto en el interior como en el exterior de cada bola.
- Represente gráficamente el comportamiento de los campos y el potencial en función de r para las primeras dos bolas y para la tercera en los casos en que $n = -2$ y $n = 2$.

a) En los tres casos el campo eléctrico es radial $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E(r)\hat{\mathbf{x}}$ con $r = |\mathbf{x}|$. Tomamos la esfera S_r centrada en el centro de cada una de las bolas, cuyo radio r es mayor que a . Entonces, con $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{x}} dS$,

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{S_r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \int_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r) .$$

Por lo tanto

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{x}} , \quad r > a .$$

En la bola conductora (índice 1), $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = 0$ para $r < a$ ya que la carga se distribuye sobre la superficie de la bola.

En las otras dos bolas, para $r < a$,

$$\frac{Q[r]}{\epsilon_0} = \int_{S_r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \int_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r) ,$$

donde $Q[r]$ es la carga encerrada por S_r .

Si la carga de B_a está uniformemente distribuida en su volumen (índice 2), $Q_2[r] = Q(r/a)^3$ y por ende

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{\mathbf{x}} , \quad r < a .$$

Observese que \mathbf{E}_2 es continua en S_a .

Si la distribución de carga de B_a está determinada por la densidad $\rho(\mathbf{x}) = Cr^n$, $r \leq a$, con $n > 3$ (índice 3), entonces

$$Q = \int_{B_a} \rho(\mathbf{x}) dv = 4\pi C \int_0^a r^{n+2} dr = 4\pi C \frac{a^{n+3}}{n+3} ,$$

con lo cual

$$C = \frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}}.$$

De esto obtenemos, para $r < a$, que

$$Q_3[r] = \int_{B_r} \rho(\mathbf{x}) dv = 4\pi C \frac{r^{n+3}}{n+3} = Q(r/a)^{n+3},$$

y luego

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{x}) = \frac{Qr^{n+1}}{4\pi\epsilon_0 a^{n+3}} \hat{\mathbf{x}}, \quad r < a.$$

Aquí también el campo es continuo en S_a .

b) Ya que en los tres casos $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E(r)\hat{\mathbf{x}}$, y si $\phi(\mathbf{x}) = \varphi(r)$ entonces $(\nabla\phi)(\mathbf{x}) = \varphi'(r)\hat{\mathbf{x}}$, tenemos que integrar $\varphi'(r) = -E(r)$ para obtener los potenciales correspondientes. Hay que tener en cuenta que el potencial está determinado salvo suma de una constante. Elegimos la constante de modo que $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}) = 0$.

En el caso conductor

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , \quad \text{para } r \geq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & , \quad \text{para } r < a \end{cases}.$$

En el caso de distribución uniforme,

$$\varphi_2(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , \quad \text{para } r \geq a \\ -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} (r^2 - 3a^2) & , \quad \text{para } r < a \end{cases}.$$

En el caso de distribución radial $\propto r^{-2}$,

$$\varphi_3(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , \quad \text{para } r \geq a \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} (\ln(r/a) - 1) & , \quad \text{para } r < a \end{cases}.$$

Y, por último, en el caso de distribución radial $\propto r^n$ con $n > -3$ y $n \neq -2$,

$$\varphi_3(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , \quad \text{para } r \geq a \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^{n+3}(n+2)} (r^{n+2} - (n+3)a^{n+2}) & , \quad \text{para } r < a \end{cases}.$$

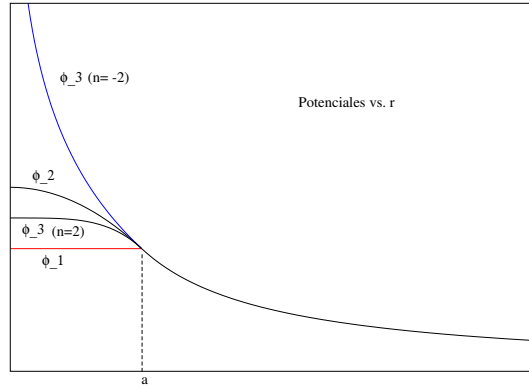
c)

Problema 3.8 *Un condensador simple es un dispositivo constituido por dos conductores aislados colocados uno junto a otro. Si colocamos sobre ellos cargas iguales y opuestas, habrá una cierta diferencia de potencial entre los conductores. El cociente entre la carga de un conductor y la diferencia de potencial recibe el nombre de capacidad. Haciendo uso de la ley de Gauss calcule la capacidad de:*

- Two planar and parallel plates of large area A separated by a distance d .
- Two concentric spherical conductors of radii a and b ($b > a$).
- Two concentric cylinders of length L , where L is large compared to both radii a and b ($b > a$).

a) Suponemos que las láminas son tan grandes que podemos despreciar efectos de borde. Así, tendremos un campo eléctrico constante entre las placas dado por $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$ si estas son perpendiculares a $\hat{\mathbf{z}}$. La magnitud de la carga en una de estas placas (cualquiera) es

$$|Q| = \left| \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right|$$



donde S es una superficie cerrada que encierra la placa y deja la otra afuera. Tomamos para S una caja rectangular con dos caras opuestas paralelas a la lámina encerrada. Las otras cuatro caras no contribuyen a la integral ya que tienen vector normal a ellas que es perpendicular a \hat{z} . Solamente contribuye la cara paralela F a la lámina que está entre los conductores. Entonces

$$|Q| = \epsilon \int_F E d\sigma = \epsilon |E| A .$$

Por otro lado la magnitud de la diferencia de potencial entre las láminas es

$$|\Delta\phi| = \left| \int_\ell \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right| ,$$

donde ℓ es un segmento que une a las láminas y es perpendicular a ellas. Entonces

$$|\Delta\phi| = |E| d .$$

Luego, la capacidad es $C = \epsilon A/d$.

b) Si Q es la carga total de la esfera interior, el campo eléctrico en la region intermedia es (vea problema 3.7)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} , \quad a < r < b .$$

La diferencia de potencial es

$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_a^b r^{-2} dr = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon ab} .$$

Luego

$$C = \frac{|Q|}{|V|} = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} .$$

c) Nuevamente supondremos que los cilindros son tan largos que se pueden despreciar efectos de borde. En una cáscara cilíndrica recta infinitamente larga con una carga superficial uniforme, el campo eléctrico expresado en coordenadas cilíndricas naturales (ρ, φ, z) referidas al eje de la cáscara es de la forma

$$(3.4) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho)\hat{\rho} , \quad \hat{\rho} = \cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{y}} ,$$

pues es invariante ante traslaciones a lo largo del eje y ante rotaciones alrededor de ese eje. Cuando el cilindro es de largo finito y podemos despreciar los efectos de borde, mantenemos esas simetrías y por ende la forma (3.4) para el campo.

Determino, primeramente, el campo producido por una cáscara (extremadamente delgada) cilíndrica recta Z_c muy larga (pero finita de largo L) de radio c (sin tapas) que es conductora con carga total Q ; suponiendo que el campo tiene la forma (3.4) lo que es consecuencia de la simetría supuesta que, a su vez, se desprende del desprecio de los efectos de borde. Considero la superficie cerrada S_t de un cilindro recto de radio t (con tapas) y altura L , cuyo eje coincide con el de Z_c . Para la porción cilíndrica (manto) de S_t tenemos el elemento vectorial de superficie $d\mathbf{S} = t\hat{\rho}d\varphi dz$. Si $t < c$ tengo

$$0 = \int_{S_t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} ,$$

y esto implica que $E(\rho) = 0$ si $t < c$. Si $t > c$ entonces

$$\frac{Q}{\epsilon} = \int_{S_t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz E(t)t = 2\pi t L E(t) ,$$

de modo que

$$E(\rho) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L\rho} .$$

Con esto ataco el problema planteado. En la región comprendida por los cilindros tengo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L\rho} \hat{\rho} , \quad a < \rho < b ,$$

ya que el cilindro exterior no contribuye. La diferencia de potencial es

$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \hat{\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \int_a^b \rho^{-1} d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln(b/a) .$$

Por lo tanto

$$C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} .$$

Problema 3.9 *Dos conductores cilíndricos, muy largos, de radios a_1 y a_2 son paralelos y separados por una distancia d que es grande comparadas con los radios. Demuestre que la capacidad por unidad de longitud está dada aproximadamente por*

$$(3.5) \quad C \approx \pi\epsilon \left(\log \frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right)^{-1} .$$

Suponga que la densidad de carga es uniforme.

Empiezo con la determinación del campo de un conductor cilíndrico cargado con una densidad de carga uniforme por unidad de largo λ . El campo es axialmente simétrico e invariante ante traslaciones en dirección axial con lo cual,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho)\hat{\rho} ,$$

en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) relativas al eje del conductor. El campo se anula si $\rho < a$ donde a es el radio del conductor. Para determinar E , tomo un cilindro recto Z_ρ de radio $\rho > a$, concéntrico con el conductor de largo unitario; por la Ley de Gauss

$$\frac{\lambda}{\epsilon} = \int_{Z_\rho} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} .$$

En el manto tenemos $d\mathbf{S} = \hat{\rho}\rho d\varphi dz$ y las tapas no contribuyen ya que el campo es tangencial a ellas. Por esto,

$$\frac{\lambda}{\epsilon} = E(\rho)\rho 2\pi ,$$

de modo que

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} ,$$

es el campo provocado por una unidad de longitud del conductor.

Ahora encaro el problema planteado interpretando que “muy largos” significa que puedo suponer que los efectos de los bordes (longitud finita) son despreciables y, por esto, que el campo es axialmente simétrico e invariante ante traslaciones en direcciones axiales. Tomo un sistema de coordenadas cartesianas donde los ejes de los conductores son perpendiculares al eje x , con origen en el conductor nro. 1 y dirección hacia el conductor nro. 2. Considero el segmento del eje x dado por $\{x\hat{x} : x \in [a_1, a_1 + d]\}$, que une los conductores a lo largo del eje cartesiano x . Para $a_1 \leq x \leq a_1 + d$, tengo las contribuciones de cada conductor por unidad de longitud de los conductores (indicados por los índices 1 y 2)

$$\mathbf{E}_1(x\hat{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon x} \hat{x}, \quad \mathbf{E}_2(x\hat{x}) = \frac{(-\lambda)}{2\pi\epsilon(a_1 + d + a_2 - x)} (-\hat{x}),$$

ya que la distancia de $x\hat{x}$ al eje del conductor 1 es x y la distancia de este punto al conductor 2 es $a_1 + d + a_2 - x$ y los vectores unitarios del eje al punto $x\hat{x}$ son, respectivamente, \hat{x} y $-\hat{x}$. El campo eléctrico total por unidad de longitud es la suma de ambas contribuciones

$$\mathbf{E}(x\hat{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + a_2 + d - x} \right).$$

La diferencia de potencial es ($ds = \hat{x} dx$)

$$V = \int_{\ell} \mathbf{E} \cdot ds = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} (\ln(x) - \ln(a_1 + a_2 + d - x)) \Big|_{a_1}^{a_1+d} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{(a_1 + d)(a_2 + d)}{a_1 a_2} \right);$$

y, ya que $(a_1 + d)(a_2 + d) \approx d^2$,

$$V \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{d^2}{a_1 a_2} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \ln \left(\frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right).$$

Luego, obtenemos la fórmula deseada para $C = |\lambda| / |V|$.

Problema 3.10 *Un volumen V en vacío está limitado por una superficie S que consiste en varias superficies conductoras S_i . Un conductor es mantenido a potencial unidad y todos los otros a potencial cero.*

a) *Demostrar que la capacidad del conductor a potencial unidad está dada por*

$$(3.6) \quad C = \frac{1}{4\pi} \int_V |\nabla\Phi|^2 d^3x.$$

b) *Mostrar que la capacidad es siempre menor o igual que la siguiente cantidad*

$$C[\Psi] = \frac{1}{4\pi} \int_V |\nabla\Psi|^2 d^3x,$$

donde Ψ es cualquier función de prueba que satisface las condiciones de borde sobre los conductores. Esto corresponde a la formulación variacional de la capacitancia.

a) Supongamos que la superficie S_1 está a potencial V_1 y todas las demás a potencial V_o . Para cargar este condensador, hay que transferir cargas negativas desde las demás superficies a S_1 (o vice versa). El trabajo infinitesimal para realizar la transferencia de una carga infinitesimal dq si la carga ya es q está dado por $dW = (q/C) dq$. Entonces, el trabajo total para cargar con una carga total Q es

$$W = \int_0^Q (q/C) dq = Q^2/(2C).$$

Ya que se tiene $Q = C(\Delta V)$ donde $\Delta V = |V_1 - V_o|$ es la diferencia de potencial entre S_1 y las demás superficies, obtenemos $W = C(\Delta V)^2/2$ o sea

$$C = 2W/(\Delta V)^2.$$

La energía del campo electrostático es

$$\frac{\epsilon_o}{2} \int \mathbf{E}^2 dv = \frac{\epsilon_o}{2} \int |\nabla\Phi|^2 dv ,$$

y el trabajo W se realiza en este campo electrostático. Entonces

$$C = \frac{\epsilon_o}{(\Delta V)^2} \int |\nabla\Phi|^2 dv = \frac{\epsilon_o}{(\Delta V)^2} \int_V |\nabla\Phi|^2 dv ;$$

la última igualdad es en virtud de que fuera de V el campo se anula pues la carga total es nula.

En nuestro caso, la diferencia de potencial es la unidad de modo que se obtiene la fórmula (3.6) en unidades SI.

b) Probamos más: si ψ y ϕ coinciden en el borde de $V \subset \mathbb{R}^3$, y $\Delta\phi = 0$ en V entonces:

$$(3.7) \quad \int_V |\nabla\psi|^2 dv = \int_V \{|\nabla\phi|^2 + |\nabla(\psi - \phi)|^2\} dv .$$

Observamos que para campos escalares f, g , $\nabla \cdot (f\nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g$ y el Teorema de Gauss nos da la muy útil fórmula de integración por partes (Primera identidad de Green, Teorema 6) :

$$(3.8) \quad \boxed{\int_V \{(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g\} dv = \int_V \nabla \cdot (f\nabla g) dv = \int_{\partial V} f(\nabla g) \cdot d\mathbf{S}} .$$

Ahora aplicamos esto con $g = \phi$ y $f = \psi - \phi$ que satisface $f \equiv 0$ en ∂V . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla\psi|^2 dv &= \int_V |\nabla\phi + \nabla f|^2 dv = \int_V \{|\nabla\phi|^2 + |\nabla f|^2 + 2(\nabla f) \cdot (\nabla\phi)\} dv \\ &= \int_V \{|\nabla\phi|^2 + |\nabla f|^2\} dv + 2 \int_{\partial V} f(\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} - 2 \int_V f\Delta\phi dv = \int_V \{|\nabla\phi|^2 + |\nabla f|^2\} dv ; \end{aligned}$$

que es (3.7). Es consecuencia inmediata que si $\psi = \phi$ en ∂V y $\Delta\phi = 0$ en V

$$\int_V |\nabla\psi|^2 dv \geq \int_V |\nabla\phi|^2 dv ,$$

con igualdad si y sólo si $\psi = \phi$.

Otra formulación alternativa es la variacional: **entre todas las funciones con valores prescritos en el borde de V la función que minimiza $\psi \mapsto \int_V |\nabla\psi|^2 dv$ es la solución de la ecuación de Laplace en V .** La relación (3.7) también provee una demostración sencilla y elegante de la unicidad de solución de la ecuación de Laplace con valores especificados en el borde.

Problema 3.11 *Un dipolo puntual de momento \mathbf{p} está ubicado en el punto \mathbf{x}_0 . De las propiedades de las derivadas de la delta de Dirac demuestre que para los cálculos del potencial Φ del dipolo o de la energía de un dipolo en un campo externo, el dipolo puede ser descripto como la densidad de carga efectiva dada por*

$$\rho_{efe}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) .$$

Usamos la definición de la derivada de la distribución de Dirac y la fórmula $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|) = (\mathbf{r} - \mathbf{x})/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3$

$$\int \frac{\rho_{efe}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot \left(\int \nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^3\mathbf{x} \right) = \mathbf{p} \cdot \left(\int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d^3\mathbf{x} \right) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_0|^3} ,$$

que es efectivamente el potencial de un dipolo \mathbf{p} ubicado en \mathbf{x}_0 .

Así mismo, la energía en un potencial externo Φ se calcula a

$$\begin{aligned} \int \rho_{efe}(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} &= -\mathbf{p} \cdot \left(\int \nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\Phi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \right) = \mathbf{p} \cdot \left(\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\nabla\Phi)(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \right) \\ &= \mathbf{p} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

que es el resultado correcto.

Problema 3.12 Considere dos placas planas (infinitas) metálicas dispuestas como en la figura 3 aisladas entre si por un pequeñísimo espacio a lo largo del eje ‘z’. La placa horizontal está a potencial cero y la otra a potencial constante V . No hay cargas en el espacio delimitado por las placas (ángulo dihedral $\pi/3$)

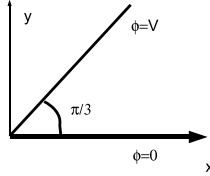


Figura 3: La cuña

- a) Determine el campo electrostático entre las placas (ángulo dihedral $\pi/3$).
 b) Determine la densidad de carga inducida en la parte superior de la placa horizontal (aquella a potencial cero).

a) Suponemos que la intersección de las placas es (infinitamente delgada) una recta infinita; en un sistema de coordenadas cilíndrico con eje en la intersección de las placas, no hay dependencia de la coordenada axial z . Ya que no hay cargas en la cuña formada por las placas y las condiciones de contorno para el potencial no dependen de la distancia r al eje se impone el Ansatz

$$\Phi(r, \varphi, z) = F(\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi/3], \quad r \geq 0, \quad z \in \mathbb{R},$$

para el potencial donde $F'' = 0$, o sea $F(\varphi) = \alpha\varphi + \beta$ con constantes α y β determinadas por:

$$0 = F(0) = \beta, \quad V = F(\pi/3) = \alpha(\pi/3) + \beta;$$

o sea

$$\Phi(r, \varphi, z) = (3V/\pi) \varphi.$$

Entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \frac{-3V}{\pi r} \widehat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{-3V}{\pi r} (-\sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi)\widehat{\mathbf{y}}) = \frac{-3V}{\pi(x^2 + y^2)} (-y\widehat{\mathbf{x}} + x\widehat{\mathbf{y}}).$$

El campo es singular en la intersección de las placas.

Esto es a comparar con el problema 1.10, observando que la cuña formada por las placas es simplemente conexa. Tampoco hay demanda de periodicidad del potencial en φ .

- b) La densidad de carga en la superficie equipotencial $\Phi = 0$ correspondiente a $\varphi = 0$ y donde la normal hacia adentro es $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ está dada por

$$\sigma(r, 0, z) = \epsilon_0 \mathbf{E}(r, 0, z) \cdot \widehat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{-3\epsilon_0 V}{\pi r}.$$

Problema 3.13 Una esfera conductora hueca de radio a y conectada a tierra encierra una carga puntual q en su interior. Determine: el potencial en el interior de la esfera; la densidad de carga superficial inducida; y módulo y dirección de la fuerza que actúa sobre q .

El potencial fuera de la esfera es idénticamente nulo.

El origen coincide con el centro de la esfera. La posición de la carga q es \mathbf{u} de módulo u con $0 < u < a$. Procedemos con el método de las imágenes. Suponemos una carga (virtual, imaginaria) q' ubicada en \mathbf{v} , con $v := |\mathbf{v}|$. El potencial ϕ asociado a estas dos cargas puntuales es entonces

$$(3.9) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}|}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad r := |\mathbf{r}| \leq a.$$

El problema geométrico es determinar q' y \mathbf{v} de tal modo que $\phi(\mathbf{r}) = 0$ para todo \mathbf{r} con $|\mathbf{r}| = a$; o sea el potencial se anula sobre la esfera dada. La condición es:

$$(3.10) \quad q|\mathbf{r} - \mathbf{v}| = -q'|\mathbf{r} - \mathbf{u}|, \quad |\mathbf{r}| = a.$$

Es inmediato que esta condición implica que q y q' tienen signo distinto. La representación (3.9) de ϕ y su unicidad implican necesariamente que q' y \mathbf{v} son únicos.

Veamos que \mathbf{v} y \mathbf{u} son paralelos o anti-paralelos. Suponga que \mathbf{v} cumple la condición (3.10) y considere una rotación arbitraria alrededor del eje coincidente con \mathbf{u} ; entonces para $r = a$, y usando que las rotaciones no cambian el largo y que $R\mathbf{u} = \mathbf{u}$, tenemos

$$\begin{aligned} q|\mathbf{r} - R\mathbf{v}| &= q|RR^{-1}\mathbf{r} - R\mathbf{v}| = q|R(R^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{v})| = q|R^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{v}| \\ &= -q'|R^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{u}| = -q'|R^{-1}(\mathbf{r} - R\mathbf{u})| = -q'|\mathbf{r} - R\mathbf{u}| = -q'|\mathbf{r} - \mathbf{u}|. \end{aligned}$$

O sea que $R\mathbf{v}$ cumple con (3.10) y por la unicidad $R\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Esto implica que $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ ya que los únicos vectores invariantes ante rotaciones deben estar sobre el eje.

Tomando cuadrados de (3.10) y usando $v = |\lambda|u$,

$$q^2(a^2 + \lambda^2 u^2 - 2a\lambda u \cos(\alpha)) = (q')^2(a^2 + u^2 - 2au \cos(\alpha)),$$

donde α es el ángulo formado por \mathbf{r} y \mathbf{u} ; y esto debe ser cierto para todo α ; o sea:

$$(3.11) \quad q^2(a^2 + \lambda^2 u^2) - 2auq^2\lambda \cos(\alpha) = (q')^2(a^2 + u^2) - 2au(q')^2 \cos(\alpha), \quad \text{para todo } \alpha.$$

Tomando $\alpha = \pi/2$ obtenemos

$$(3.12) \quad q^2(a^2 + \lambda^2 u^2) = (q')^2(a^2 + u^2).$$

Esto insertado en (3.11) nos da:

$$(q')^2 = \lambda q^2.$$

En particular $\lambda > 0$. Y esta relación insertada en (3.12) nos da la ecuación cuadrática

$$q^2(a^2 + u^2\lambda^2) = \lambda q^2(a^2 + u^2)$$

para λ cuyas raíces son $\lambda = a^2/u^2$ y $\lambda = 1$. La raíz 1 se desecha pues nos da $\phi \equiv 0$. Entonces

$$q' = -aq/u, \quad \mathbf{v} = (a^2/u^2)\mathbf{u}.$$

El potencial asociado es

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} - \frac{qa}{u|\mathbf{r} - (a^2/u^2)\mathbf{u}|}, \quad r \leq a.$$

Podemos entonces volver al problema planteado y obtenemos el potencial

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} - \frac{a}{u|\mathbf{r} - (a^2/u^2)\mathbf{u}|} \right) & , \quad |\mathbf{r}| \leq a \\ 0 & , \quad |\mathbf{r}| > a \end{cases}$$

El campo eléctrico es entonces:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} q \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{u}}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|^3} - \frac{a(\mathbf{r} - (a^2/u^2)\mathbf{u})}{u|\mathbf{r} - (a^2/u^2)\mathbf{u}|^3} \right) & , \quad |\mathbf{r}| \leq a \\ 0 & , \quad |\mathbf{r}| > a \end{cases}$$

Es digno mencionar los casos límites $u = 0$ y $u = a$. En el primero, la carga en el centro de la esfera no permite una esfera a potencial cero y en los resultados obtenemos $|q'| = \infty$ y en el infinito. En el segundo la carga sería $q' = -q$ en el mismo lugar con lo cual no hay carga.

La densidad de carga de la esfera en \mathbf{r} con $|\mathbf{r}| = a$ es:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \left(\frac{-\mathbf{r}}{a} \right),$$

ya que debemos tomar la normal hacia el interior de la bola. Recordando que para $|\mathbf{r}| = a$, tenemos $(u/a)|\mathbf{r} - (a^2/u^2)\mathbf{u}| = |\mathbf{r} - \mathbf{u}|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}) &= \frac{-q}{4\pi a} \left(\frac{a^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|^3} - \frac{u^2}{a^2} \frac{a^2 - (a^2/u^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{(u^3/a^3)|\mathbf{r} - (a^2/u^2)\mathbf{u}|^3} \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi a |\mathbf{r} - \mathbf{u}|^3} \left(a^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - \frac{u^2}{a^2} [a^2 - (a^2/u^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}] \right) = \frac{-q(a^2 - u^2)}{4\pi a |\mathbf{r} - \mathbf{u}|^3}. \end{aligned}$$

Y parece razonable que la densidad de carga en la esfera sea de signo opuesto a la carga puntual en su interior. Veamos que la carga total de la esfera es $-q$. En efecto, la carga de la esfera es

$$\int_{\{|\mathbf{r}|=a\}} \sigma(\mathbf{r}) d\Omega;$$

para integrar podemos suponer que elegimos el eje z coincidente con \mathbf{u} y su dirección. En tal caso $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = au \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo polar y el elemento de superficie de la esfera de radio a es $a^2 d\phi \sin(\theta) d\theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\{|\mathbf{r}|=a\}} \sigma(\mathbf{r}) d\Omega &= \frac{-q(a^2 - u^2)}{4\pi a} a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{(a^2 + u^2 - 2au \cos(\theta))^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{-qa(a^2 - u^2)}{2} \int_{(a-u)^2}^{(a+u)^2} \frac{ds}{2aus^{3/2}}, \end{aligned}$$

donde hemos substituido $s := a^2 + u^2 - 2au \cos(\theta)$ que es invertible de $[0, \pi]$ a $[(a-u)^2, (a+u)^2]$. Entonces, efectivamente,

$$\int_{\{|\mathbf{r}|=a\}} \sigma(\mathbf{r}) d\Omega = \frac{-q(a^2 - u^2)}{4u} \int_{(a-u)^2}^{(a+u)^2} \frac{ds}{s^{3/2}} = \frac{q(a^2 - u^2)}{2u} ((a+u)^{-1} - (a-u)^{-1}) = -q.$$

Para obtener la fuerza que actúa sobre q podemos usar la ley de Coulomb para el par q, q' obteniendo

$$\mathbf{F} = -q^2 \frac{a(\mathbf{u} - (a^2/u^2)\mathbf{u})}{u|\mathbf{u} - (a^2/u^2)\mathbf{u}|^3} = \frac{q^2 a}{(a^2 - u^2)^2} \mathbf{u}.$$

La fuerza es entonces radial y dirigida hacia la superficie y su módulo es $q^2 au / (a^2 - u^2)^2$.

Problema 3.14 Considere el siguiente modelo estático para una molécula de metano CH_4 . El carbono (carga $-4q$) ocupa el centro de un tetraedro regular cuyos vértices son los cuatro hidrógenos (carga q cada uno). Muestre que el campo eléctrico a distancias r del carbono grandes es de orden $\mathcal{O}(r^{-5})$.

Ayuda: Los puntos $(0, 0, 1)$, $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ son vértices de un tetraedro regular con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano.

Consideramos la expansión multipolar tomando como origen del sistema (cartesiano o esférico) el átomo de carbono C . La dependencia de la distancia r del ℓ -ésimo sumando ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) de la expansión multipolar es $\mathcal{O}(r^{-\ell-1})$ y contribuye $\mathcal{O}(r^{-\ell-2})$ al campo electrostático. Por lo tanto debemos verificar que las contribuciones del monopolo ($\ell = 0$), del dipolo ($\ell = 1$) y del cuadrupolo ($\ell = 2$) se anulan todas.

Como la carga total es nula no hay sumando monopolar. El momento dipolar \mathbf{p} debe ser invariante ante rotaciones de 120° alrededor de cualquiera de los cuatro ejes definidos por los pares $C-H$; ya que esta rotación

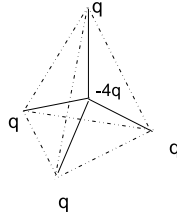


Figura 4: Tetraedro

permuta ciclicamente los tres hidrógenos fuera del eje. Pero entonces \mathbf{p} debe ser colineal con estos cuatro ejes³ cuya única intersección es $\mathbf{0}$; por lo tanto $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Recordamos que

$$Q_{jk} = \int_{\mathbb{R}^3} (3x_j x_k - |\mathbf{x}|^2 \delta_{jk}) \rho(\mathbf{x}) dv ,$$

de donde se desprende inmediatamente que $tr(\mathbb{Q}) = 0$ y que \mathbb{Q} es simétrica: $Q_{jk} = Q_{kj}$.

Podríamos calcular sin mayores problemas (vea abajo) el tensor cuadrupolar \mathbb{Q} pero argumentamos con simetrías.

Si elijo un sistema cartesiano donde el plano y, z contiene dos hidrógenos (ubicados en los dos puntos asociados a los primeros dos vectores dados) entonces \mathbb{Q} debe ser invariante para la reflexión en ese plano dada por la matriz ortogonal

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que intercambia los dos hidrógenos fuera del plano. Entonces

$$\mathbb{U}\mathbb{Q}\mathbb{U} = \mathbb{Q} \implies \begin{pmatrix} Q_{11} & -Q_{12} & -Q_{13} \\ -Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ -Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix} = \mathbb{Q} .$$

O sea que $Q_{12} = Q_{13} = 0$; ergo

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Consideramos la rotación \mathbb{S} por 120° alrededor del eje z dada por

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que permuta los tres hidrógenos que no están sobre el eje de rotación. Con esta rotación que deja invariante la distribución de cargas obtenemos

$$\mathbb{S}\mathbb{Q}\mathbb{S}^\dagger = \mathbb{Q} \implies \begin{pmatrix} \frac{Q_{11}+3Q_{22}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}(Q_{22}-Q_{11}) & -\sqrt{3}Q_{23}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(Q_{22}-Q_{11}) & \frac{Q_{22}+3Q_{11}}{4} & -Q_{23}/2 \\ -\sqrt{3}Q_{23}/2 & -Q_{23}/2 & Q_{33} \end{pmatrix} = \mathbb{Q} .$$

Y de aquí $Q_{23} = 0$ y $Q_{11} = Q_{22} = \alpha$ lo que implica que $Q_{33} = -2\alpha$; o sea

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix} .$$

³El único vector invariante ante una rotación es colineal con el eje de rotación.

Podríamos proceder con otras simetrías como rotación por 120° alrededor de otro eje $C-H$, etc.; pero calculamos α directamente a partir de la definición y de la densidad de carga

$$\rho(\mathbf{x}) = q(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}_3) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}_4) - 4\delta(\mathbf{x})),$$

donde los vectores \mathbf{a}_j ($j = 1, 2, 3, 4$) son a veces los cuatro vectores indicados y a es la distancia $C-H$.

$$\begin{aligned} \alpha = Q_{11} &= q \int_{\mathbb{R}^3} (3x_1^2 - |\mathbf{x}|^2) \rho(\mathbf{x}) dv = q(3a_{11}^2 + 3a_{21}^2 + 3a_{31}^2 + 3a_{41}^2 - 4a^2) \\ &= q \left[3a^2 \left(0 + 0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) - 4a^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

En efecto: $\mathbb{Q} = \mathbb{O}$. Esto verifica que el primer sumando que puede ser no nulo es el octupolar correspondiente a $\ell = 3$.

Problema 3.15 La carga Q está distribuida uniformemente en el perímetro de un cuadrado de lado a . Determine el campo electrostático a grandes distancias del cuadrado hasta orden $\mathcal{O}(r^{-4})$ siendo r la distancia al centro del cuadrado. Calcule en coordenadas cartesianas apropiadas y luego exprese el resultado en coordenadas esféricas donde el plano del cuadrado corresponde a $\theta = \pi/2$.

Tomamos un sistema cartesiano con origen en el centro del cuadrado. Para obtener la contribución a orden r^{-4} en el campo (i.e., contribución a orden r^{-3} en el potencial) debemos calcular hasta el momento cuadrupolar ($\ell = 2$).

El momento dipolar \mathbf{p} es invariante ante rotaciones de 180° alrededor de cualquiera de los dos ejes que cortan lados opuestos por la mitad. \mathbf{p} está necesariamente en la intersección de estos ejes y por ende es nulo. No hay contribución dipolar.

Recordamos que el tensor cuadrupolar cartesiano \mathbb{Q} de elementos $Q_{j,k}$ ($j, k = 1, 2, 3$) es simétrico y de traza nula. Seleccionamos un sistema cartesiano con origen en el centro del cuadrado y ejes x_1 y x_2 paralelos a los lados. Consideramos la reflexión respecto del eje x_1 dada por

$$\mathbb{U}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

\mathbb{Q} es invariante ante esta reflexión (que deja invariante la distribución de cargas):

$$\mathbb{Q} = \mathbb{U}_1^\dagger \mathbb{Q} \mathbb{U}_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & -Q_{12} & -Q_{13} \\ -Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ -Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix};$$

por lo tanto $Q_{12} = Q_{13} = 0$. Con esto y considerando la reflexión respecto del eje x_2 dada por

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{U}_2^\dagger \mathbb{Q} \mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & -Q_{23} \\ 0 & -Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

y $Q_{23} = 0$. \mathbb{Q} es diagonal. La rotación alrededor del eje x_3 por 90° dada por

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deja invariante la distribución de carga y entonces

$$\mathbb{Q} = \mathbb{S}^\dagger \mathbb{Q} \mathbb{S} = \begin{pmatrix} \frac{Q_{11}+Q_{22}}{2} & \frac{Q_{11}-Q_{22}}{2} & 0 \\ \frac{Q_{11}-Q_{22}}{2} & \frac{Q_{11}+Q_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{pmatrix}$$

con lo cual $Q_{11} = Q_{22}$ y $Q_{33} = -(Q_{11} + Q_{22}) = -2Q_{11}$. Nos queda calcular $\Lambda := Q_{11}$;

$$\Lambda = \int_{\mathbb{R}^3} (2x^2 - y^2 - z^2)\rho(\mathbf{x})d^3x,$$

donde

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4a} \delta(z) \{ [\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)]\chi_{[-a/2, a/2]}(y) + [\delta(y - a/2) + \delta(y + a/2)]\chi_{[-a/2, a/2]}(x) \}.$$

Recordando que la función característica está definida por $\chi_A(t) = 1$ si $t \in A \subset \mathbb{R}$ y $\chi_A(t) = 0$ si $t \notin A$. Como ρ es invariante ante el intercambio de x con y , $\int x^2\rho(\mathbf{x})d^3x = \int y^2\rho(\mathbf{x})d^3x$; y dado que ρ es proporcional a $\delta(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_{\mathbb{R}^3} (x^2 - z^2)\rho(\mathbf{x})d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} x^2\rho(\mathbf{x})d^3x \\ &= \frac{Q}{4a} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \{ [\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)]\chi_{[-a/2, a/2]}(y) + [\delta(y - a/2) + \delta(y + a/2)]\chi_{[-a/2, a/2]}(x) \} x^2 \\ &= \frac{Q}{4a} \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{\mathbb{R}} x^2[\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)]dx + \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{\mathbb{R}} [\delta(y - a/2) + \delta(y + a/2)]dy \right\} \\ &= \frac{Q}{4a} \left\{ a2(a/2)^2 + \frac{2}{3}(a/2)^3 2 \right\} = Qa^2/6. \end{aligned}$$

Entonces, el potencial es

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon|\mathbf{x}|} + \frac{Qa^2}{12|\mathbf{x}|^5}(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-4}),$$

y el campo electrostático

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = Q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon|\mathbf{x}|^3} + \frac{5a^2(x^2 + y^2 - 2z^2)}{12|\mathbf{x}|^7} \right) \mathbf{x} - \frac{Qa^2}{6|\mathbf{x}|^5}(x, y, -2z) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-5}).$$

La expresión en coordenadas esféricas es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, \varphi) &= Q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon r^2} + \frac{Qa^2}{4r^4}(\sin(\theta)^2 - 2\cos(\theta)^2) \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{Qa^2}{2r^4} \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= Q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon r^2} - \frac{Qa^2}{2r^4} P_2(\cos(\theta)) \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{Qa^2}{2r^4} \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathcal{O}(r^{-5}). \end{aligned}$$

Problema 3.16 Considere una distribución de carga dada en coordenadas esféricas por la densidad

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \frac{p}{3\pi^2 a^4} e^{-r/a} \sin(\varphi)$$

donde a y p son constantes con dimensión de distancia y momento dipolar respectivamente. Determine el campo eléctrico asociado con esta distribución hasta orden $\mathcal{O}(r^{-5})$.

La densidad tiene una simetría manifiesta; es invariante ante reflexión en el plano “ xy ”.

La carga total (momento de orden cero) es nula ya que la integral de ρ tiene a

$$(3.13) \quad \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi$$

como factor y este es nulo.

Por la simetría mencionada, la componente z del momento dipolar \mathbf{p} es nula. Alternativamente, la parte azimutal de la integral que determina a p_z es (3.13). La parte azimutal de la integral que determina a p_x es ($x = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$):

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi = 0.$$

Para la componente y del momento dipolar tenemos

$$p_y = \frac{p}{3\pi^2 a^4} \int_0^\infty e^{-r/a} r^3 dr \int_0^{2\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi \int_0^\pi (\sin(\theta))^2 d\theta.$$

Usando las fórmulas de integración definida $\int_0^\infty e^{-t} t^p dt = p!$ e indefinida $\int (\sin(ax))^2 dx = (x/2) - (\sin(2ax))/(4a)$ si a es real y no nulo; obtenemos $p_y = p$ y por ende $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}}$ es el momento dipolar asociado.

Para obtener el potencial hasta orden $\mathcal{O}(r^{-3})$ y por ende el campo a orden $\mathcal{O}(r^{-4})$ nos falta el momento cuadrupolar. Usando la simetría de reflexión mencionada, los términos no nulos pueden ser los diagonales (con traza nula) y Q_{12} . Un cálculo directo muestra que todos ellos son nulos. Alternativamente calculando los momentos dipolares esféricos de segundo orden ($m = -2, -1, 0, 1, 2$)

$$q_{2m} := \int \overline{Y_2^m(\theta, \varphi)} \rho(r, \theta, \varphi) r^4 dr d\Omega \propto \int_0^\pi P_2^m(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \sin(\varphi) d\varphi$$

La integral azimutal es entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(e^{-i(m-1)\varphi} - e^{-i(m+1)\varphi} \right) d\varphi = -i\pi(\delta_{m,1} - \delta_{m,-1});$$

por lo tanto $q_{2,m} = 0$ salvo posiblemente cuando $|m| = 1$. Pero

$$q_{2,1} \propto \int_0^\pi P_2^1(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^1 P_2^1(x) dx.$$

Con la paridad $P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(x)$ de las funciones asociadas de Legendre, P_2^1 es impar con lo que $q_{2,1} = 0$ y, ya que P_2^{-1} es también impar, también $q_{2,-1} = 0$. Esto demuestra que $q_{2,m} = 0$ para $m = -2, -1, 0, 1, 2$. A fortiori el momento cuadrupolar cartesiano es nulo.

Al orden requerido el campo eléctrico es dipolar con momento dipolar eléctrico $p\hat{\mathbf{y}}$.

Problema 3.17 *Un anillo circular de radio R consiste en dos secciones semicirculares una con carga q y la otra con carga $-q$, ambas distribuidas uniformemente. Encuentre el desarrollo multipolar del potencial electrostático fuera del anillo.*

Determinamos primero los tres primeros momentos cartesianos. El monopolo es nulo ya que la carga total lo es. Elegimos un sistema cartesiano con eje “ z ” perpendicular al plano del anillo por su centro y eje “ x ” que divida el anillo en los semi-círculos de carga opuesta ($x > 0$ corresponde a carga q ; $x < 0$ a carga $-q$). Entonces la distribución de cargas es invariante ante reflexión en el plano $\{z = 0\}$, luego $p_z = 0$; y reflexión en el plano $\{x = 0\}$ y entonces $p_x = 0$. Estas mismas simetrías implican (vea el problema anterior) que $\mathbb{Q} = (Q_{j,k})$ es diagonal.

En coordenadas cilíndricas tenemos

$$\rho(r, \varphi, z) = \delta_o(z) \delta_R(r) \frac{q}{\pi R} (\chi_{[0,\pi]}(\varphi) - \chi_{[\pi,2\pi]}(\varphi)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{r}|^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} &= \frac{q}{\pi R} \int_{\mathbb{R}} dz \delta_o(z) \int_0^\infty dr r \delta_R(r) \left(\int_0^\pi d\varphi (r^2 + z^2) - \int_\pi^{2\pi} d\varphi (r^2 + z^2) \right) \\ &= \frac{qR^2}{\pi} \left(\int_0^\pi d\varphi - \int_\pi^{2\pi} d\varphi \right) = 0 . \end{aligned}$$

Pero

$$\int |\mathbf{r}|^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int x^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + \int y^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + \int z^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} ,$$

y, ya que la integral de $z^2 \rho(\mathbf{r})$ se anula manifiestamente, $Q_{11} = -Q_{22}$ y

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Un análisis de la integral de $x^2 \rho(\mathbf{r})$ muestra rápidamente que esta se anula y de esto se sigue que $\alpha = 0$ y por supuesto $\mathbb{Q} = \mathbb{O}$. Pero calculemos,

$$\begin{aligned} \int x^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} &= \frac{q}{\pi R} \int_{\mathbb{R}} dz \delta_o(z) \int_0^\infty dr r \delta_R(r) \left(\int_0^\pi d\varphi (r^2 \cos(\varphi)^2) - \int_\pi^{2\pi} d\varphi r^2 \cos(\varphi)^2 \right) \\ &= \frac{qR^2}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos(\varphi)^2 d\varphi - \int_\pi^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi)^2 \right) = \frac{qR^2}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos(\varphi)^2 d\varphi - \int_0^\pi d\varphi \cos(\varphi - \pi)^2 \right) \\ &= \frac{qR^2}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos(\varphi)^2 d\varphi - \int_0^\pi d\varphi \cos(\varphi)^2 \right) = 0 , \end{aligned}$$

que es lo que afirmábamos.

Nos queda la componente no-nula del momento dipolar:

$$\begin{aligned} p_y &= \int y \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{q}{\pi R} \int_{\mathbb{R}} dz \delta_o(z) \int_0^\infty dr r \delta_R(r) \left(\int_0^\pi d\varphi (r \sin(\varphi)) - \int_\pi^{2\pi} d\varphi r \sin(\varphi)^2 \right) \\ &= \frac{qR}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi - \int_\pi^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi) \right) = \frac{qR}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi - \int_0^\pi d\varphi \sin(\varphi - \pi) \right) \\ &= \frac{2qR}{\pi} \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = 4qR/\pi . \end{aligned}$$

¿Que podemos decir sobre momentos con $\ell \geq 3$? Conviene reescribir la densidad en coordenadas esféricas –ahora $r = |\mathbf{r}|$ –

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \delta_R(r) \frac{\delta_{\pi/2}(\theta)}{R \sin(\theta)} \frac{q}{\pi R} (\chi_{[0, \pi]}(\varphi) - \chi_{[\pi, 2\pi]}(\varphi)) .$$

Entonces

$$\begin{aligned} q_{\ell, m} &= \int r^\ell \rho(\mathbf{r}) \overline{Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)} dv = \frac{qR^\ell}{\pi} \left(\int_0^\pi \overline{Y_{\ell, m}(\pi/2, \varphi)} d\varphi - \int_\pi^{2\pi} \overline{Y_{\ell, m}(\pi/2, \varphi)} d\varphi \right) \\ &= \frac{qR^\ell}{\pi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(0) \left(\int_0^\pi e^{-im\varphi} d\varphi - \int_\pi^{2\pi} e^{-im\varphi} d\varphi \right) \\ &= \frac{qR^\ell}{\pi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(0) \left(\int_0^\pi e^{-im\varphi} d\varphi - \int_0^\pi e^{-im(\pi+\varphi)} d\varphi \right) \\ &= \frac{qR^\ell}{\pi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(0) (1 - (-1)^m) \int_0^\pi e^{-im\varphi} d\varphi . \end{aligned}$$

La integral que queda puede hacerse pero no es muy instructiva. Lo que vemos inmediatamente es que $q_{\ell,m} = 0$ si m es par. Pero también, de la paridad $P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(x)$, deducimos que $P_\ell^m(0) = 0$ si $\ell + m$ es impar. Por lo tanto, $q_{\ell,m}$ puede ser no nulo solamente para ℓ y m ambos impares. Recuperamos entonces la nulidad del momento cuadrupolar.

Problema 3.18 En un cascarón esférico de radio R se mantiene una distribución de carga $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_o \sin(\theta) \sin(\varphi)$, para $|\mathbf{r}| = R$; donde θ es el ángulo polar y φ el ángulo azimutal respecto de algún eje, y σ_o es constante.

a) Determine el potencial electrostático en todo el espacio.

b) ¿Cual es la carga total? ¿Es cierto que fuera del cascarón el campo es puramente dipolar?

Se trabaja naturalmente en un sistema de coordenadas esféricas de modo que (θ, φ) sean los ángulos polar y azimutal respectivamente. Debemos resolver la ecuación de Laplace para el exterior y el interior de la bola de radio R

$$\Delta\Phi_I = 0, \quad r < R; \quad \Delta\Phi_{II} = 0, \quad r > R$$

con continuidad en $|\mathbf{r}| = R$ y condición de contorno de modo que para todo \mathbf{r} con $r = |\mathbf{r}| = R$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_o(\mathbf{E}_{II}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_I(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

donde $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Por lo tanto,

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_o \left(\frac{\partial\Phi_I}{\partial r}(\mathbf{r}) - \frac{\partial\Phi_{II}}{\partial r}(\mathbf{r}) \right).$$

El Ansatz canónico es:

$$\Phi_I(r, \Omega) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r^\ell Y_{\ell,m}(\Omega), \quad \Phi_{II}(r, \Omega) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} r^{-\ell-1} Y_{\ell,m}(\Omega),$$

ya que no puede haber singularidad en el origen y el potencial debe anularse cuando $r \rightarrow \infty$ ya que las cargas tienen distribución acotada. De la continuidad en la esfera obtenemos –ya que $\{Y_{\ell,m} : \ell \geq 0, m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell\}\}$ es un sistema de funciones linealmente independientes sobre la esfera–

$$(3.14) \quad A_{\ell,m} R^{2\ell+1} = B_{\ell,m}.$$

Ya que

$$(3.15) \quad \sin(\theta) \sin(\varphi) = i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1,1}(\Omega) - Y_{1,-1}(\Omega)),$$

el mismo argumento aplicado a la condición de discontinuidad de la derivada radial nos da:

$$(3.16) \quad \ell A_{\ell,m} R^{2\ell+1} + (\ell + 1) B_{\ell,m} = 0, \quad \text{para } \ell \neq 1 \text{ o } \ell = 0 \text{ y } m = 0.$$

$$(3.17) \quad \epsilon_o(A_{1,m} + 2R^{-2} B_{1,m}) = \pm i \sigma_o \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \quad m = \pm 1.$$

De (3.14,3.16,3.17) obtenemos

$$A_{\ell,m} = B_{\ell,m} = 0, \quad \text{para } \ell \neq 1 \text{ o } \ell = 1 \text{ y } m = 0,$$

y –teniendo en cuenta (3.15)–

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_o}{3\epsilon_o} \begin{cases} r \sin(\theta) \sin(\varphi) & , \quad \text{para } r < R \\ \frac{R^3}{r^2} \sin(\theta) \sin(\varphi) & , \quad \text{para } r > R \end{cases}.$$

Observese que en virtud de (3.15) la expansión multipolar de Φ es evidente: todos los momentos multipolares esféricos son nulos salvo $q_{1,\pm 1}$. En particular, la carga total es nula ya que el momento de orden $\ell = 0$ es nulo. Esto también se verifica explícitamente integrando σ sobre la esfera de radio R pues la contribución azimutal es $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = 0$.

Fuera del cascarón el problema resulta equivalente al de un dipolo con

$$\mathbf{p} = \frac{\sigma_o R^3}{3\epsilon_o} \hat{\mathbf{y}};$$

i.e.,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

El problema también puede resolverse simplemente usando las funciones de Green interior y exterior de una esfera.

Problema 3.19 En una región V del espacio libre de cargas y corrientes se mantiene un campo electrostático $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ cuyas componentes cartesianas están dadas por

$$E_j = C_j + \sum_{k=1}^3 D_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, 3,$$

en términos de la posición $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Muestre que la matriz $\mathbb{D} = (D_{jk})$ es simétrica y tiene traza nula.

En V se coloca una bola conductora de radio R y sin carga neta cuyo centro coincide con el origen del sistema cartesiano. La polarización de la bola en el campo externo \mathbf{E} se describe por un dipolo $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y los momentos cuadrupolares cartesianos $\mathbb{Q} = (Q_{jk})$. No hay multipolos de orden mayor.

b) Determine el potencial inducido por la bola polarizada para $|\mathbf{x}| \geq R$ en términos del dipolo y \mathbb{Q} .

c) ¿Cual es el campo eléctrico dentro de la bola?

d) Determine \mathbf{p} y \mathbb{Q} en términos de $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$, \mathbb{D} y el radio. Calcule el campo eléctrico fuera de la bola.

e) ¿Cual es la densidad de carga superficial en la bola?

a) Debemos cumplir

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_j}{\partial x_j} = D_{jj} = \text{tr}(\mathbb{D});$$

y también, para $j = 1, 2, 3$,

$$0 = (\nabla \wedge \mathbf{E})_j = \epsilon_{jkl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = \epsilon_{jkl} D_{kl} = \pm(D_{pq} - D_{qp})$$

donde $j \neq p \neq q \neq j$; luego $D_{pq} = D_{qp}$. Y esto cubre todos los elementos no-diagonales de \mathbb{D} .

b) El potencial que se obtiene de la bola polarizada es la suma de un potencial dipolar y uno cuadrupolar

$$\Phi_o(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^5}, \quad |\mathbf{x}| \geq R.$$

Usamos la notación canónica \cdot para el producto escalar; o sea: $\mathbf{x} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^3 Q_{jk} x_j x_k$. El potencial interior en un conductor es constante y el campo se anula lo que contesta c).

d) El potencial total Φ es suma de Φ_o y el potencial mantenido Φ_1 tal que $-\nabla\Phi_1 = \mathbf{E}$. Φ_1 se obtiene fácilmente integrando \mathbf{E} :

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = c_o - \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}),$$

donde c_o es una constante arbitraria. Sobre la superficie equipotencial de la esfera debemos tener

$$\text{const.} = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi_o(\mathbf{x}) + \Phi_1(\mathbf{x}) = R^{-3}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + (R^{-5}/2)\mathbf{x} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{x}) + c_o - \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} - (1/2)\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}),$$

para todo \mathbf{x} con $|\mathbf{x}| = R$. Esto implica inmediatamente que

$$\mathbf{p} = R^3\mathbf{C}, \quad \mathbb{Q} = R^5\mathbb{D};$$

con lo cual es potencial total fuera de la bola es

$$\Phi(\mathbf{x}) = c_o + \left(\frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} - 1\right)\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^5}{|\mathbf{x}|^5} - 1\right)\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}| \geq R.$$

Observe que $\Phi \sim \Phi_1$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ como debe ser. El campo exterior total es

$$-\nabla\Phi = \mathbf{E} - \nabla\Phi_o;$$

Pero,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \left(\frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} - 1\right)C_j + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{x})(-3)\frac{R^3 x_j}{|\mathbf{x}|^5} + \sum_{k=1}^3 D_{jk}x_k \left(\frac{R^5}{|\mathbf{x}|^5} - 1\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}))(-5)\frac{R^5 x_j}{|\mathbf{x}|^7},$$

con lo cual

$$(3.18) \quad -\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3}\right)\mathbf{C} + 3(\mathbf{C} \cdot \mathbf{x})\frac{R^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5} + \left(1 - \frac{R^5}{|\mathbf{x}|^5}\right)(\mathbb{D}\mathbf{x}) + \frac{5}{2}(\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}))\frac{R^5\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^7}.$$

e) La densidad superficial de carga sobre la esfera es

$$\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\epsilon_o\nabla\Phi(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}}.$$

Y con (3.18)

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = -R^{-1}\left[3(\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}) - \frac{5}{2}(\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}))\right]\hat{\mathbf{x}}, \quad |\mathbf{x}| = R.$$

Entonces

$$\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon_o R^{-1}(3\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \frac{5}{2}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D} \cdot \mathbf{x})) = \epsilon_o(3\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{5R}{2}\hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{x}})).$$

Problema 3.20 Considere una esfera (radio a) conductora de carga Q inmersa en un campo externo $\mathbf{E}^{(o)}$ de componentes cartesianas

$$E_j^{(o)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 D_{jk}x_k, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3);$$

donde $\sum_{j=1}^3 D_{jj} = 0$ y $D_{jk} = D_{kj}$. El origen del sistema cartesiano coincide con el centro de la esfera. Calcule el campo electrostático total y la distribución de carga de la esfera.

El potencial asociado con el campo externo $\mathbf{E}^{(o)}$ es ($-\nabla\Phi^{(o)} = \mathbf{E}^{(o)}$):

$$\Phi^{(o)}(\mathbf{x}) = \alpha - \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}).$$

En presencia de la esfera, el potencial para $|\mathbf{x}| \geq a$ es

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^{(o)}(\mathbf{x}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{x}),$$

donde

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) = \beta + \frac{Q}{4\pi\epsilon|\mathbf{x}|} + \frac{1}{2|\mathbf{x}|^5}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x}),$$

donde Ψ es solución de la ecuación de Laplace con $\Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-4})$. Esto se desprende de que $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(o)} + \mathbf{E}^{(1)}$ donde, para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}^{(1)} = -\nabla\Phi^{(1)} \sim \mathbf{0}$ ya que $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}^{(o)}$. Ψ contiene todas las contribuciones multipolares de orden superior a la cuadrupolar.

Ahora, sobre la esfera

$$const. = \Phi(\mathbf{x}) = \alpha - \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}) + \beta + \frac{Q}{4\pi\epsilon a} + \frac{1}{2a^5}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}| = a.$$

Pero entonces, para todo \mathbf{x} con $|\mathbf{x}| = a$,

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}) = \frac{1}{2a^5}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{x}), \quad \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad |\mathbf{x}| = a.$$

De esto se desprende que

$$\mathbb{Q} = a^5\mathbb{D}, \quad \Psi \equiv 0;$$

pues Ψ es solución de la ecuación de Laplace con $\Psi(\mathbf{x}) = 0$ para todo \mathbf{x} con $|\mathbf{x}| = a$ y $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{x}) = 0$.
Luego

$$\Phi(\mathbf{x}) = \gamma + \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x}) \left(\frac{a^5}{|\mathbf{x}|^5} - 1 \right);$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \left(1 - \frac{a^5}{|\mathbf{x}|^5} \right)\mathbb{D}\mathbf{x} + \frac{5\mathbf{x} \cdot (\mathbb{D}\mathbf{x})}{2|\mathbf{x}|^7}\mathbf{x}.$$

La densidad de carga en la esfera es

$$\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{4\pi a^2} + \frac{5\epsilon\hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{D}\hat{\mathbf{x}})}{2a^4},$$

con una anisotropía dada por la forma cuadrática \mathbb{D} .

Problema 3.21 Considere el problema del potencial en el semiespacio $\{\mathbf{r} : z \geq 0\}$ con condiciones de contorno de Dirichlet en el plano $\{\mathbf{r} : z = 0\}$.

- Determine la función de Green del problema.
- En el círculo $\{\mathbf{r} : x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}$ el potencial es V y en el resto del plano que contiene al círculo el potencial es nulo. Determine una fórmula integral para el potencial en un punto arbitrario expresado en términos de coordenadas cilíndricas.
- Demuestre que sobre el eje del cilindro, $\Phi(\rho, \phi, z) = V(1 - z(a^2 + z^2)^{-1})$.

a) Denotemos con \mathcal{S} el semiespacio y con $\partial\mathcal{S}$ su borde. Por el método de las imágenes (por ejemplo) obtenemos:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \Pi(\mathbf{x})|}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{x} \in \mathcal{S},$$

donde Π denota la imagen espejada en el plano $\{\mathbf{r} : z = 0\} = \partial\mathcal{S}$,

$$\Pi(x, y, z) = (x, y, -z).$$

En efecto,

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{S},$$

ya que $\Pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para (y solo para) $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}$.

b) La fórmula general dado que no hay cargas nos da

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{S}} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\Omega,$$

donde $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n_x}$ es la derivada de G en la dirección de la normal en el punto $\mathbf{x} \in \partial S$ orientada hacia adentro de S , y $d\Omega$ es el elemento de superficie de ∂S .

Tenemos ($\mathbf{x} = (x, y, z)$)

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial z} = \frac{2r_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3};$$

$$\phi(\mathbf{x}) = V\delta(|\mathbf{x}| - a).$$

Para evaluar la integral podemos elegir coordenadas polares en el plano ∂S de modo que el ángulo ϕ se mida a partir de la proyección de \mathbf{r} sobre el plano. Entonces, con $r_o = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$, y $\mathbf{x} = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), 0)$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2 = r^2 + \rho^2 - 2r_o\rho \cos(\phi), \quad d\Omega = \rho d\rho d\phi.$$

Luego,

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{Var_z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(r^2 + a^2 - 2r_o a \cos(\phi))^{3/2}}.$$

O, si expresamos a \mathbf{r} en coordenadas cilíndricas con eje perpendicular a ∂S por el centro del círculo

$$\phi(r_o, \phi, z) = -\frac{Vaz}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(r_o^2 + z^2 + a^2 - 2r_o a \cos(\alpha))^{3/2}}.$$

El potencial es independiente del ángulo ϕ como era de esperar dada la simetría del problema.

c) En el eje del cilindro tenemos $r_o = 0$, luego

$$\phi(0, \phi, z) = -\frac{Vaz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Problema 3.22 Una esfera conductora de radio a que tiene carga Q es rodeada por un anillo centrado de radio R ($R > a$) que es conductor y tiene carga total $-Q$.

- Argumente que la densidad de carga es uniforme a lo largo del anillo.
- Calcule la densidad superficial de carga en la esfera.
- Determine el primer momento multipolar no nulo del sistema.

a) La distribución de cargas en ambos conductores se condicionan mutuamente. Intuitivamente una distribución no uniforme en el anillo es más inestable.

Sin embargo, al matematizar el problema, el potencial Φ satisface la ec. de Laplace fuera de esfera y anillo que son conductores y por lo tanto superficies equipotenciales. Se trata entonces de un problema de Dirichlet que tiene solución única. Ya que la ec. de Laplace y las condiciones de borde son invariantes ante rotaciones arbitrarias alrededor del eje natural de simetría del problema (perpendicular al plano del anillo por el centro de la esfera), deducimos que el potencial es invariante ante estas rotaciones y, por ende, independiente del ángulo azimutal. La densidad lineal de carga en el anillo resulta independiente de ese ángulo y es entonces constante e igual a $-Q/(2\pi a)$.

b) Usamos coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera y eje polar coincidente con el eje de simetría. Suponemos dada la distribución (lineal) de carga en el anillo via una función λ del ángulo azimutal. La densidad de carga volumétrica asociada al anillo es entonces

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta_R(r) \frac{\delta_{\pi/2}(\theta)}{r} \lambda(\varphi).$$

Resolvemos un problema más general elegantemente con la expansión de la función de Green-Dirichlet para el exterior de una esfera en armónicos esféricos.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell}^m(\Omega) \overline{Y_{\ell}^m(\Omega')}}{2\ell + 1} \left(\frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{a^{\ell+1}}{r' r^{\ell+1}} \right), \quad r, r' > a.$$

Si Φ_o es el potencial de la esfera, el potencial para $r > a$ es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_o + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\mathcal{B}'_a} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dv' ,$$

donde $\mathcal{B}'_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| > a\}$ es el complemento de la esfera \mathcal{B}_a de radio a centrada en el origen. La contribución de la superficie $\partial\mathcal{B}'_a = \mathcal{S}_a$ que involucra a $(\partial G/\partial r')(\mathbf{r}, a, \theta', \varphi')$ se anula ya que $\Phi - \Phi_o$ se anula en \mathcal{S}_a . Se tiene

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_o = \epsilon_o^{-1} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)}{2\ell+1} R \left[\int_a^r \delta_R(r') \frac{(r')^{\ell}}{r^{\ell+1}} dr' + \int_r^{\infty} \delta_R(r') \frac{r^{\ell}}{(r')^{\ell+1}} dr' - \int_a^{\infty} \delta_R(r') \frac{a^{\ell+1}}{r^{\ell+1}} dr' \right] \\ \left[\int_0^{2\pi} \lambda(\varphi') \overline{Y_{\ell}^m(\pi/2, \varphi')} d\varphi' \right] .$$

Se tiene que $Y_{\ell}^m(\pi/2, \varphi)$ es cero salvo cuando $\ell + m$ es par en cuyo caso

$$Y_{\ell}^m(\pi/2, \varphi) = \frac{\alpha_{\ell,m}}{\sqrt{4\pi}} e^{im\varphi}$$

con constantes $\alpha_{\ell,m}$ conocidas (ver (D.4) pero observar que hemos factorizado $1/\sqrt{4\pi}$ por razones estéticas). Esto nos provee de una fórmula general para Φ en términos de los coeficientes de Fourier de λ : $\hat{\lambda}(n) := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi$. Aquí nos interesa el caso de $\lambda(\varphi) = -Q/(2\pi R)$ constante; entonces $\hat{\lambda}(m) = -(Q/(2\pi R))\delta_{m,0}$, por lo cual

$$\int_0^{2\pi} \lambda \alpha_{\ell,m} e^{-im\varphi'} d\varphi' = -\frac{Q\alpha_{\ell,0}}{R} \delta_{m,0} .$$

Las integrales radiales son

$$\int_a^r \delta_R(r') \frac{(r')^{\ell}}{r^{\ell+1}} dr' = \begin{cases} 0 & , \text{ si } r < R \\ R^{\ell}/r^{\ell+1} & , \text{ si } r > R \end{cases} ; \\ \int_r^{\infty} \delta_R(r') \frac{r^{\ell}}{(r')^{\ell+1}} dr' = \begin{cases} 0 & , \text{ si } r > R \\ r^{\ell}/R^{\ell+1} & , \text{ si } r < R \end{cases} ; \\ \int_a^{\infty} \delta_R(r') \frac{a^{\ell+1}}{r^{\ell+1}} dr' = R^{-1}(a/r)^{\ell+1} .$$

Reuniendo todo para el caso λ constante (y usando $Y_{\ell}^0(\theta, \varphi) = \sqrt{(2\ell+1)/4\pi} P_{\ell}(\cos(\theta))$):

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_o = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \alpha_{2\ell,0} \frac{P_{2\ell}(\cos(\theta))}{R\sqrt{4\ell+1}} \left(-\left[\frac{a}{r}\right]^{2\ell+1} + \begin{cases} \left[\frac{r}{R}\right]^{2\ell} & , \text{ si } r \leq R \\ \left[\frac{R}{r}\right]^{2\ell+1} & , \text{ si } r \geq R \end{cases} \right) .$$

De $\sigma(a, \theta, \varphi) = \epsilon_o(\partial\Phi/\partial r)(a, \theta, \varphi)$, obtenemos

$$\sigma(a, \theta, \varphi) = -\frac{Q}{4\pi Ra} \sum_{\ell \geq 0} \alpha_{2\ell,0} \sqrt{4\ell+1} P_{2\ell}(\cos(\theta)) ,$$

y usted podrá incorporar las expresiones explícitas para $\alpha_{2\ell,0}$ si le sirve.

c) Para $r > R$ el potencial es

$$\Phi_o - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \alpha_{2\ell,0} \frac{P_{2\ell}(\cos(\theta))}{\sqrt{4\ell+1} R} \frac{R^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}}{r^{2\ell+1}} .$$

El sumando dominante para $r \rightarrow \infty$ es un monopolo:

$$-\frac{Q(R-a)}{4\pi\epsilon_o R} \frac{1}{r} .$$

Problema 3.23 *Un cilindro circular recto de radio a y altura L tiene sus tapas circulares a potencial cero mientras que sobre su superficie el potencial esta dado por $V(\phi, z)$ (en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) donde z coincide con el eje). Determine el potencial en el interior del cilindro.*

Debemos resolver el problema de Dirichlet para el cilindro:

$$(3.19) \quad \Delta\Phi = 0 ,$$

y

$$(3.20) \quad \Phi(r, \varphi, 0) = \Phi(r, \varphi, L) = 0 ,$$

$$(3.21) \quad \Phi(a, \varphi, z) = V(\varphi, z) .$$

Para ello seguimos una estrategia aplicable a la solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas como la ecuación de Laplace (3.19). Buscamos “muchas” soluciones de (3.19) **que cumplan con la condición de borde homogénea (3.20) sin tener en cuenta la condición de borde (3.21)**. La suma de estas soluciones satisface (3.19) & (3.20). Intentamos plantear la solución del problema (3.19) & (3.20,3.21) como suma (serie) de estas soluciones. El “muchas” significa precisamente tantas como sean necesarias para desarrollar la solución de esta manera.

Construimos las soluciones especiales ψ de (3.19) mediante el Ansatz⁴ de separación de variables:

$$\psi(r, \varphi, z) = R(r)U(\varphi)Z(z) .$$

Con el Laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\Delta = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ,$$

obtenemos (' denota la derivada respecto del argumento que corresponda):

$$UZr^{-1}(rR)' + r^{-2}RZU'' + RUZ'' = 0 .$$

Dividiendo por ψ en aquellos puntos donde no se anula, y multiplicando por r^2 ,

$$(3.22) \quad \frac{r(rR)'}{R} + \frac{U''}{U} + r^2 \frac{Z''}{Z} = 0 ;$$

pasando el sumando U''/U al miembro derecho,

$$\frac{r(rR)'}{R} + r^2 \frac{Z''}{Z} = -\frac{U''}{U} ,$$

tenemos una función de (r, z) a la izquierda y una función de φ a la derecha. Por lo tanto,

$$(3.23) \quad \frac{U''}{U} = \lambda , \quad 0 \leq \phi < 2\pi ,$$

donde λ es constante. Pero debemos tener $\psi(r, \varphi + 2\pi, z) = \psi(r, \varphi, z)$ lo que no tiene nada que ver con física sino que es un artefacto del sistema de coordenadas. Las únicas soluciones 2π -periódicas de (3.23) se obtienen cuando $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$, y son

$$U_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) .$$

⁴Palabra alemana que significa tanto como “propuesta”, y que usamos frecuentemente.

Volviendo a (3.22) con esta información y dividiendo por r^2 tenemos

$$\frac{r(rR)'}{R} - n^2 + r^2 \frac{Z''}{Z} = 0 ;$$

pasando el sumando Z''/Z al miembro derecho y dividiendo por r^2 obtenemos:

$$\frac{(rR)'}{rR} - \frac{n^2}{r^2} = -\frac{Z''}{Z} .$$

Nuevamente ambos miembros deben ser constantes e iguales. Con lo cual

$$(3.24) \quad \frac{Z''}{Z} = \mu ; \quad 0 \leq z \leq L .$$

Si $\mu \geq 0$ las soluciones son funciones hiperbólicas (una recta para $\mu = 0$). No podemos satisfacer (3.20) en el caso $\mu \geq 0$ (salvo con la solución idénticamente nula para $\mu = 0$). Si $\mu < 0$ las soluciones de (3.24) son trigonométricas:

$$\tilde{S}(z) = \alpha \cos(\sqrt{|\mu|}z) + \beta \sin(\sqrt{|\mu|}z) .$$

Para satisfacer (3.20) es preciso que $\alpha = 0$ y que $\sin(\sqrt{|\mu|}L) = 0$ o sea: $\sqrt{|\mu|}L = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto las soluciones de (3.24) que nos sirven son:

$$Z_m(z) = \sin(m\pi z/L) , \quad m \in \mathbb{N}^+ \text{ }^5,$$

y

$$\mu = -(m\pi L)^2 , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Regresando a (3.22)

$$\frac{r(rR)'}{R} - n^2 - (m\pi r/L)^2 = 0 .$$

Multiplicando por R y haciendo las derivadas respecto de r ,

$$(3.25) \quad r^2 R'' + rR' - \left[n^2 + \left(\frac{m\pi r}{L} \right)^2 \right] R = 0 .$$

Introduciendo la variable adimensional $x := m\pi r/L$ esta ecuación diferencial (lineal, homogénea de segundo orden) se transforma en

$$x^2 S'' + xS' - (n^2 + x^2)S = 0 , \quad S(x) := R(xL/(m\pi)) .$$

Esta es la ecuación diferencial de Bessel modificada. Dos soluciones linealmente independientes de ella⁶ son las funciones de Bessel modificada I_n y de Neumann (o Weber) modificada K_n . Las funciones de Neumann modificadas son singulares en $x = 0$ (logarítmicamente para $n = 0$ y como x^{-n} sino). No podemos aceptarlas como soluciones físicamente relevantes. En cambio, la función de Bessel modificada de orden n , I_n , es regular y no negativa para todo $x \geq 0$; y se anula solamente cuando $n > 0$ y en tal caso solamente en $x = 0$. Entonces, la solución de (3.25) que nos sirve es:

$$R_{n,m}(r) = I_n(m\pi r/L) .$$

Juntando todo lo elaborado:

$$\psi_{n,m}(r, \varphi, z) = R_{n,m}(r)Z_m(z)U_n(\varphi) = I_n(m\pi r/L) \sin(m\pi z/L) (A_{n,m} \cos(n\varphi) + B_{n,m} \sin(n\varphi)) ,$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}^+$, son soluciones de (3.19) & (3.20). Por lo tanto, lo mismo es cierto para

$$(3.26) \quad \Phi(r, \varphi, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \psi_{n,m}(r, \varphi, z) ,$$

⁵ \mathbb{N}^+ es \mathbb{N} sin cero.

⁶Vease cualquier buen libro sobre métodos matemáticos de la física, o bien una de las obras cumbres de la humanidad: M. Abramowitz, and I. Stegun: *Handbook of Mathematical Function*. Dover, 1965.

dejando de lado la convergencia de la serie. Esta función cumplirá con la condición de borde (3.21) que nos falta si:

$$(3.27) \quad V(\varphi, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 1} I_n(m\pi a/L) \sin(m\pi z/L) (A_{n,m} \cos(n\varphi) + B_{n,m} \sin(n\varphi)) .$$

Pero esto no es otra cosa que un desarrollo de Fourier de la función $V : [0, 2\pi] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Obsérvese también que $I_n(m\pi a/L) > 0$.

Recordamos que las funciones $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}^+\}$ forman un sistema completo de funciones dos-a-dos ortogonales definidas en $[0, 2\pi]$ con:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_{n,m} , \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 ;$$

Es posible demostrar que para $a > 0$, $\{\sin(m\pi x/a) : m \in \mathbb{N}^+\}$ es un conjunto completo de funciones dos-a-dos ortogonales en el intervalo $[0, a]$ con

$$(2/a) \int_0^L \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi x/a) dx = \delta_{n,m} .$$

Las fórmulas para los coeficientes son entonces:

$$A_{n,m} = \frac{2}{\pi L I_n(m\pi a/L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz \cos(n\varphi) \sin(m\pi z/L) V(\varphi, z) ,$$

$$B_{n,m} = \frac{2}{\pi L I_n(m\pi a/L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz \sin(n\varphi) \sin(m\pi z/L) V(\varphi, z) .$$

Resta discutir la convergencia (puntual o en algún otro sentido) de la serie (3.26) para Φ . Ya que $x \mapsto I_n(x)$ es estrictamente creciente y no-negativa en $[0, \infty)$, la convergencia puntual absoluta de (3.26) esta garantizada en la medida que V admita el desarrollo de Fourier (3.27) absolutamente convergente (lo que sucede si V es diferenciable con derivadas parciales continuas). Obsérvese que es natural esperar que $V(\varphi, 0) = V(\varphi, L)$ para que haya continuidad en los bordes de las tapas y esta propiedad es automática en (3.27).

Por último observamos que las ecuaciones diferenciales (3.23) y (3.24) son instancias particularmente simples de problemas de autovalores de un operador lineal (en este caso: tomar la segunda derivada). Y tanto λ como μ dejan de ser arbitrarios cuando imponemos periodicidad en (3.23) y nulidad de la solución en los extremos (0 y L) del intervalo en (3.24).

Problema 3.24 Considere dos cáscaras esféricas concéntricas de radios a y b , (con $a < b$). La cáscara interior está a potencial V_a y la exterior a potencial V_b donde

$$V_a(\theta, \phi) = V \cos(\theta) , \quad V_b(\theta, \phi) = W \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)$$

donde V y W son constantes y θ, ϕ son coordenadas esféricas angulares (origen en el centro de las esferas).

a) Encuentre el potencial y el campo electrostático en todo el espacio.

b) Calcule todos los multipolos en la región exterior.

c) Si, además, se sabe que el interior de la esfera menor está libre de cargas, calcule la densidad de carga para radios inferiores a b .

Información suplementaria:

$$Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) , \quad Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}(\theta) e^{\pm i\varphi} .$$

Se trabaja naturalmente en coordenadas esféricas.

a) Para $r < a$ el potencial tiene la forma

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)) ,$$

pues la condición en $r = a$ tiene simetría azimutal. Debemos tener, ya que $P_1(x) = x$,

$$VP_1(\theta) = V \cos(\theta) = \Phi(a, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_{\ell} a^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)) ;$$

de donde ($\{P_{\ell} : \ell \in \mathbb{N}\}$ es un sistema linealmente independiente)

$$A_{\ell} = 0 , \quad \ell \neq 1 , \quad A_1 = V/a ;$$

i.e.,

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \varphi) = V(r/a) \cos(\theta) , \quad 0 \leq r \leq a .}$$

Para $r > b$ tenemos

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell, m} r^{-\ell-1} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) .$$

En $r = b$, y usando $\sin(\phi) = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/(2i)$

$$W \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{i}{2} (Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)) = W \sin(\theta) \sin(\varphi) = \Phi(b, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell, m} b^{-\ell-1} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) ;$$

de donde

$$B_{\ell, m} = 0 , \quad \ell \neq 1 , \quad B_{1,0} = 0 , \quad B_{1,1} = B_{1,-1} = i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Wb^2}{2} ;$$

o sea

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \varphi) = W(b/r)^2 \sin(\theta) \sin(\varphi) , \quad r \geq b .}$$

En la región intermedia $a \leq r \leq b$ tenemos

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [C_{\ell, m} r^{\ell} + D_{\ell, m} r^{-\ell-1}] Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) .$$

En $r = a$,

$$V \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0(\theta, \varphi) = V \cos(\theta) = \Phi(a, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [C_{\ell, m} a^{\ell} + D_{\ell, m} a^{-\ell-1}] Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) ,$$

de donde

$$(3.28) \quad C_{\ell, m} a^{2\ell+1} + D_{\ell, m} = 0 , \quad \ell \neq 1 , \quad C_{1, m} a^3 + D_{1, m} = 0 , \quad m = \pm 1 , \quad C_{1,0} a^3 + D_{1,0} = Va^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} .$$

En $r = b$,

$$W \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{i}{2} (Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)) = W \sin(\theta) \sin(\varphi) = \Phi(b, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} [C_{\ell, m} b^{\ell} + D_{\ell, m} b^{-\ell-1}] Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) ,$$

de donde

$$(3.29) \quad C_{\ell, m} b^{2\ell+1} + D_{\ell, m} = 0 , \quad \ell \neq 1 , \quad C_{1,0} b^3 + D_{1,0} = 0 , \quad C_{1, \pm 1} b^3 + D_{1, \pm 1} = \frac{i}{2} Wb^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} .$$

Para $\ell \neq 1$, de (3.28) y (3.29), tenemos que $C_{\ell,m}a^{2\ell+1} = C_{\ell,m}b^{2\ell+1}$ y esto implica que $C_{\ell,m} = 0$ y luego también $D_{\ell,m} = 0$.

Para $\ell = 1$ y $m = 0$, de (3.28) y (3.29): $C_{1,0} = -Va^2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}/(b^3 - a^3)$ y $D_{1,0} = Va^2b^3\sqrt{\frac{4\pi}{3}}/(b^3 - a^3)$.

Para $\ell = 1$ y $m = \pm 1$ las mismas dos condiciones nos dan: $C_{1,\pm 1} = \frac{i}{2}Wb^2\sqrt{\frac{8\pi}{3}}/(b^3 - a^3)$ y $D_{1,\pm 1} = -\frac{i}{2}Wb^2a^3\sqrt{\frac{8\pi}{3}}/(b^3 - a^3)$ Por lo tanto

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{Va^2b}{b^3-a^3} [(r/b) - (b/r)^2] \cos(\theta) + \frac{Wb^2a}{b^3-a^3} [(r/a) - (a/r)^2] \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad a \leq r \leq b.$$

El campo electroestático es $\mathbf{E} = \nabla\Phi = (\partial\Phi/\partial r)\mathbf{e}_r + (1/r \sin(\theta))(\partial\Phi/\partial\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (1/r)(\partial\Phi/\partial\theta)\mathbf{e}_\theta$.

b) Los momentos multipolares para la región exterior $r > b$ ya han sido calculados; son exactamente los $B_{\ell,m}$. El único momento no nulo es el dipolar.

c) Si la esfera interior de radio a no contiene carga, la densidad superficial de carga en ella está dada por

$$\sigma(a, \theta, \varphi) = -\epsilon_o \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(a^-, \theta, \varphi) = \epsilon_o \mathbf{E}_r(a^-, \theta, \varphi) = \epsilon_o \frac{\partial\Phi}{\partial r}(a^-, \theta, \varphi),$$

donde a^- indica que debemos tomar el campo electroestático desde adentro de la esfera. Entonces

$$\sigma(a, \theta, \varphi) = -\epsilon_o(V/a) \cos(\theta).$$

Problema 3.25 Considere un cascarón conductor esférico de radio a y espesor despreciable. La superficie del mismo se mantiene a potencial $V = V_0 \sin \theta \cos \phi$. Ese cascarón se encuentra rodeado por otro cascarón esférico de radio b y espesor despreciable que posee una densidad superficial de carga $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, donde V_0 y σ_0 son constantes (ver figura 5).

- Calcular el potencial eléctrico en todo el espacio.
- Calcule la carga total del sistema.

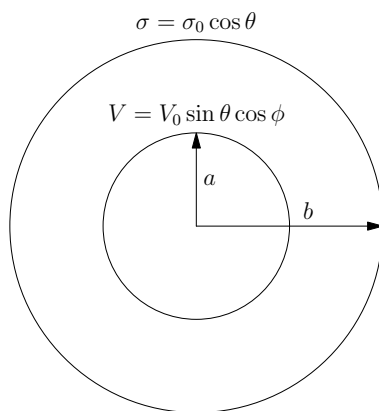


Figura 5: Cáscaras concéntricas

Se trabaja naturalmente en coordenadas esféricas. Se usa la información sobre armónicos esféricos provista en el ejercicio anterior.

a) Para $r < a$ el potencial tiene la forma

$$\Phi^{(I)}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi),$$

y la condición en $r = a$ es $\Phi^{(I)}(a, \theta, \varphi) = V_o \sin(\theta) \cos(\varphi) = -V_o \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^1(\theta, \varphi) - Y_1^{-1}(\theta, \varphi))$. Por lo tanto, $A_{\ell, m} = 0$ para $\ell \neq 1$; $A_{1,0} = 0$ y $A_{1,\pm 1} = \mp (V_o/a) \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$, i.e.,

$$\Phi^{(I)}(r, \theta, \varphi) = V_o (r/a) \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad , \quad 0 \leq r \leq a .$$

Para $r > b$ tenemos

$$\Phi^{(III)}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell, m} r^{-\ell-1} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) .$$

Mientras que en la región intermedia $a \leq r \leq b$ tenemos

$$\Phi^{(II)}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [C_{\ell, m} r^{\ell} + D_{\ell, m} r^{-\ell-1}] Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) .$$

En $r = a$,

$$-V_o \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^1(\theta, \varphi) - Y_1^{-1}(\theta, \varphi)) = V_o \sin(\theta) \cos(\varphi) = \Phi^{(II)}(a, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [C_{\ell, m} a^{\ell} + D_{\ell, m} a^{-\ell-1}] Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) ,$$

de donde

$$(3.30) \quad C_{\ell, m} a^{2\ell+1} + D_{\ell, m} = 0 \quad , \quad \ell \neq 1 \quad , \quad C_{1,0} a^3 + D_{1,0} = 0 \quad , \quad C_{1,\pm 1} a^3 + D_{1,\pm 1} = \mp V_o a^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} .$$

En $r = b$, debemos tener

$$(\sigma_o/\epsilon_o) \cos(\theta) = \frac{2\sigma_o \sqrt{\pi}}{\epsilon_o \sqrt{3}} Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial r}(b, \theta, \varphi) - \frac{\partial \Phi^{(III)}}{\partial r}(b, \theta, \varphi) ,$$

y

$$\frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial \theta}(b, \theta, \varphi) = \frac{\partial \Phi^{(III)}}{\partial \theta}(b, \theta, \varphi) \quad , \quad \frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial \varphi}(b, \theta, \varphi) = \frac{\partial \Phi^{(III)}}{\partial \varphi}(b, \theta, \varphi) .$$

De donde

$$\ell C_{\ell, m} b^{2\ell+1} - (\ell+1) D_{\ell, m} + (\ell+1) B_{\ell, m} = 0 \quad , \quad \ell \neq 1 \quad ,$$

$$(3.31) \quad C_{1,\pm 1} b^3 - 2D_{1,\pm 1} + 2B_{1,\pm 1} = 0 \quad , \quad C_{1,0} b^3 - 2D_{1,0} + 2B_{1,0} = \frac{2\sigma_o b^3}{\epsilon_o} \sqrt{\frac{\pi}{3}} ;$$

y

$$(3.32) \quad C_{\ell, m} b^{2\ell+1} + D_{\ell, m} = B_{\ell, m} \quad , \quad \ell \in \mathbb{N} \quad , \quad m \in \{-\ell, \dots, \ell\} .$$

De (3.30,3.31,3.32) deducimos que $C_{\ell, m} = D_{\ell, m} = B_{\ell, m} = 0$ para $\ell \neq 1$; que

$$C_{1,0} = \frac{2\sigma_o}{3\epsilon_o} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \quad , \quad D_{1,0} = -\frac{2\sigma_o a^3}{3\epsilon_o} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \quad , \quad B_{1,0} = \frac{2\sigma_o (b^3 - a^3)}{3\epsilon_o} \sqrt{\frac{\pi}{3}} ;$$

y que

$$C_{1,\pm 1} = 0 \quad , \quad D_{1,\pm 1} = B_{1,\pm 1} = \mp V_o a^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} .$$

En resumen:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} V_o \frac{r}{a} \sin(\theta) \cos(\varphi) & , \quad 0 \leq r \leq a \\ V_o \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\sigma_o a}{3\epsilon_o} \left(\frac{r}{a} - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) \cos(\theta) & , \quad a \leq r \leq b \\ V_o \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\sigma_o (b^3 - a^3)}{3\epsilon_o a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos(\theta) & , \quad r \geq b \end{cases} .$$

b) Ya que $\Phi(r, \theta, \varphi) \sim r^{-2}(AY_1^0(\theta, \varphi) + BY_1^1(\theta, \varphi) + CY_1^{-1}(\theta, \varphi))$ para $r \rightarrow \infty$ y no hay término proporcional a r^{-1} (asociado con Y_0^0), deducimos que la carga total es nula.

Problema 3.26 *Considere un cilindro de radio a y longitud L . La tapa superior del cilindro está a potencial $V(r, \varphi)$ y el resto del cilindro a potencial cero. Encuentre el potencial en el interior del cilindro.*

Debemos resolver el problema de Dirichlet para el cilindro:

$$(3.33) \quad \Delta\Phi = 0 ,$$

y

$$(3.34) \quad \Phi(r, \varphi, 0) = 0 ,$$

$$(3.35) \quad \Phi(a, \varphi, z) = 0 , \quad 0 \leq z < L ,$$

$$(3.36) \quad \Phi(r, \varphi, L) = V(r, \varphi) .$$

Para ello seguimos la estrategia aplicada en el Problema 5 de la guía 4. Construimos las soluciones especiales ψ de (3.33) mediante el Ansatz de separación de variables:

$$\psi(r, \varphi, z) = R(r)U(\varphi)Z(z) .$$

Con el Laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\Delta = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ,$$

obtenemos (' denota la derivada respecto del argumento que corresponda):

$$UZr^{-1}(rR)' + r^{-2}RZU'' + RUZ'' = 0 .$$

Dividiendo por ψ en aquellos puntos donde no se anula, y multiplicando por r^2 ,

$$(3.37) \quad \frac{r(rR)'}{R} + \frac{U''}{U} + r^2 \frac{Z''}{Z} = 0 .$$

Por lo tanto,

$$(3.38) \quad \frac{U''}{U} = \lambda , \quad 0 \leq \phi < 2\pi ,$$

donde λ es constante. Las únicas soluciones 2π -periódicas de (3.38) se obtienen cuando $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$, y son

$$U_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) .$$

Volviendo a (3.37) con esta información y dividiendo por r^2 tenemos

$$\frac{r(rR)'}{R} - n^2 + r^2 \frac{Z''}{Z} = 0 ;$$

pasando el sumando Z''/Z al miembro derecho y dividiendo por r^2 obtenemos:

$$\frac{(rR)'}{rR} - \frac{n^2}{r^2} = -\frac{Z''}{Z} ;$$

con lo cual

$$(3.39) \quad \frac{Z''}{Z} = \mu; \quad 0 \leq z \leq L.$$

Si $\mu < 0$ las soluciones de (3.39) son trigonométricas; y las que cumplen con (3.34) son:

$$\tilde{S}(z) = \sin(\sqrt{|\mu|}z).$$

Si $\mu \geq 0$ las soluciones son funciones hiperbólicas (una recta para $\mu = 0$); las que cumplen con (3.34) son:

$$Z_\mu(z) = \sinh(\sqrt{\mu}z), \quad \mu > 0; \quad Z_0(z) = z.$$

Regresando a (3.37)

$$\frac{r(rR')'}{R} - n^2 + \mu r^2 = 0.$$

Multiplicando por R y haciendo las derivadas respecto de r ,

$$(3.40) \quad r^2 R'' + rR' + [\mu r^2 - n^2] R = 0, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Debemos analizar los dos casos para el signo de μ . Cuando $\mu < 0$, obtenemos como en el Problema 5 de la guía 4, la ecuación diferencial de Bessel modificada para R (tras transformación de variables $r \rightarrow \sqrt{|\mu|r}$) y las soluciones no tienen ceros lo que nos obstaculiza el cumplir con la condición de borde (3.35).

Si, $\mu = 0$, (3.40) es la ecuación diferencial de Euler con soluciones:

$$R_n(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}, \quad n > 0; \quad R_0(r) = \alpha + \beta \ln(r), \quad n = 0.$$

La regularidad en $r = 0$ implica que $\beta = 0$; y la condición (3.35) se cumple solamente para $\alpha = 0$. En tal caso $\psi \equiv 0$ que no nos interesa. Si, en cambio, $\mu > 0$ y introducimos la variable adimensional $x := \sqrt{\mu}r$, (3.40) se transforma en

$$x^2 S'' + xS' + (x^2 - n^2)S = 0, \quad S(x) := R(x/\sqrt{\mu}).$$

Esta es la ecuación diferencial de Bessel. Dos soluciones linealmente independientes de ella⁷ son las funciones de Bessel (o de Bessel de primera especie) J_n y de Neumann (o de Weber, o de Bessel de segunda especie) Y_n . Las funciones de Neumann son singulares en $x = 0$ (logarítmicamente para $n = 0$ y como x^{-n} sino). No podemos aceptarlas como soluciones físicamente relevantes. En cambio, la función de Bessel de orden n , J_n , es regular para todo $x \geq 0$.

$$J_n(x) \sim x^n / (2^n n!) \text{ para } x \rightarrow 0; \quad J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - (n\pi/2) - (\pi/4)) \text{ para } x \rightarrow \infty.$$

Además, como lo sugiere la expresión asintótica para $x \rightarrow \infty$, J_n tiene denumerablemente infinitos ceros $\{\xi_{n,m} : m \in \mathbb{N}^+\}$ no negativos enumerados de modo que $\xi_{n,m} < \xi_{n,m+1}$. La solución de (3.40) que nos sirve es:

$$R_{n,\mu}(r) = J_n(\sqrt{\mu}r), \quad \mu > 0.$$

Con ella podemos cumplir con (3.35) si

$$J_n(\sqrt{\mu}a) = 0;$$

y los ceros de la función de Bessel son los que nos permiten hacer precisamente esto: debemos elegir $\sqrt{\mu}a = \xi_{n,m}$; o sea

$$\mu = \xi_{n,m}^2 / a^2.$$

Esto nos da a las funciones

$$\psi_{n,m}(r, \varphi, z) = R_{n,\xi_{n,m}^2/a^2}(r) Z_{\xi_{n,m}^2/a^2}(z) U_n(\varphi) = J_n(\xi_{n,m}r/a) \sinh(\xi_{n,m}z/a) (A_{n,m} \cos(n\varphi) + B_{n,m} \sin(n\varphi)),$$

⁷Vease cualquier buen libro sobre métodos matemáticos de la física, o bien una de las obras cumbres de la humanidad: M. Abramowitz, and I. Stegun: *Handbook of Mathematical Function*. Dover, 1965.

con $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}^+$, como soluciones de (3.33), (3.34) & (3.35).

Por lo tanto, lo mismo es cierto para

$$(3.41) \quad \Phi(r, \varphi, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \psi_{n,m}(r, \varphi, z),$$

dejando de lado la convergencia de la serie. Esta función cumplirá con la condición de borde (3.36) que nos falta si:

$$(3.42) \quad V(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 1} J_n(\xi_{n,m}r/a) \sinh(\xi_{n,m}L/a) (A_{n,m} \cos(n\varphi) + B_{n,m} \sin(n\varphi)).$$

Esto es un desarrollo de Fourier-Bessel de la función $V : [0, a] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, que explicamos a continuación. Obsérvese también que $\sinh(\xi_{n,m}L/a) > 0$.

Recordamos que las funciones $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}^+\}$ forman un sistema completo de funciones dos-a-dos ortogonales definidas en $[0, 2\pi]$ con:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_{n,m}, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0;$$

Es posible demostrar⁸ que para $a > 0$, y cualquier $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{\sqrt{x}J_n(\xi_{n,m}x/a) : m \in \mathbb{N}^+\}$ es un conjunto completo de funciones dos-a-dos ortogonales en el intervalo $[0, a]$ con

$$\int_0^a x J_n(\xi_{n,m}x/a) J_n(\xi_{n,k}x/a) dx = \delta_{n,m} \frac{a^2}{2} J_{n+1}(\xi_{n,m})^2.$$

Aquí resulta importante la propiedad de los ceros de las funciones de Bessel $\xi_{n,m} < \xi_{n+1,m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}^+$.

Las fórmulas para los coeficientes son entonces:

$$A_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2 \sinh(\xi_{n,m}L/a) J_{n+1}(\xi_{n,m})^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr V(r, \varphi) r \cos(n\varphi) J_n(\xi_{n,m}r/a),$$

$$B_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2 \sinh(\xi_{n,m}L/a) J_{n+1}(\xi_{n,m})^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr V(r, \varphi) r \sin(n\varphi) J_n(\xi_{n,m}r/a).$$

Resta discutir la convergencia (puntual o en algún otro sentido) de la serie (3.41) para Φ . Obsérvese que es natural esperar que $V(a, \varphi) = 0$ para que haya continuidad en el borde de la tapa superior y esta propiedad es automática en (3.42).

Por último observamos que las ecuaciones diferenciales (3.38) y (3.40) son instancias particulares de problemas de autovalores de un operador diferencial lineal. Y tanto λ como $\mu \geq 0$ dejan de ser arbitrarios cuando imponemos periodicidad en (3.38) y nulidad de la solución en el extremo a del intervalo en (3.40) respectivamente. Esto a su vez transforma a (3.39) en un problema de autovalores.

Problema 3.27 *Considere dos cáscaras esféricas concéntricas de radios a y b ($b > a$) cada una dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interna y el hemisferio inferior de la esfera exterior están a potencial V . Los otros hemisferios están a potencial cero.*

Determine el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie de polinomios de Legendre.

Discuta los límites $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.

⁸Esto se discute de manera elemental en, por ejemplo: *M.L. Boas. Mathematical Methods in the Physical Sciences. J. Wiley & Sons, New York, 1983*; más precisamente en: *Courant-Hilbert*; y realmente de manera completa en *G.N. Watson: A treatise on the theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1995 (2nd edition)*.

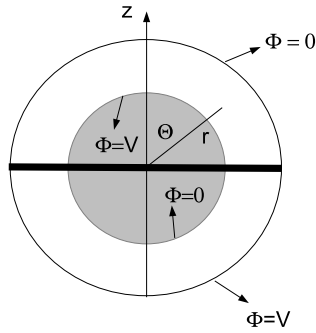


Figura 6: Cáscaras concéntricas II

Trabajamos en coordenadas esféricas con eje polar perpendicular al plano horizontal. El potencial Φ en la zona entre las esferas $a \leq r \leq b$ es independiente del ángulo azimutal ya que las condiciones de contorno lo son. Luego, el Ansatz es:

$$(3.43) \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{\ell \geq 0} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos(\theta)) .$$

Y, las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \Phi(a, \theta) = V, \quad \Phi(b, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \pi/2; \\ \Phi(a, \theta) = 0, \quad \Phi(b, \theta) = V, \quad \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V = \sum_{\ell \geq 0} (A_{\ell} a^{\ell} + B_{\ell} a^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad \& \quad 0 = \sum_{\ell \geq 0} (A_{\ell} b^{\ell} + B_{\ell} b^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos(\theta)), \quad 0 \leq \theta < \pi/2; \\ 0 = \sum_{\ell \geq 0} (A_{\ell} a^{\ell} + B_{\ell} a^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad \& \quad V = \sum_{\ell \geq 0} (A_{\ell} b^{\ell} + B_{\ell} b^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos(\theta)), \quad \pi/2 \leq \theta < \pi. \end{aligned}$$

Luego, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$,

$$(3.44) \quad \int_0^{\pi} P_n(\cos(\theta)) \Phi(a, \theta) \sin(\theta) d\theta = V \int_0^{\pi/2} P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta ;$$

$$(3.45) \quad \int_0^{\pi} P_n(\cos(\theta)) \Phi(b, \theta) \sin(\theta) d\theta = V \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta ;$$

Introduciendo el Ansatz (3.43) en (3.44) y usando $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = (2/(2n+1)) \delta_{n,m}$,

$$A_n a^n + B_n a^{-n-1} = \frac{2n+1}{2} V \int_0^{\pi/2} P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta .$$

Y, procediendo análogamente con (3.45)

$$A_n b^n + B_n b^{-n-1} = \frac{2n+1}{2} V \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta .$$

Transformamos variable $x := \cos(\theta)$ y usamos la paridad de los polinomios de Legendre $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, para obtener las ecuaciones determinantes para los coeficientes:

$$(3.46) \quad A_n a^n + B_n a^{-n-1} = \frac{V(2n+1)}{2} \int_0^1 P_n(x) dx \quad \& \quad A_n b^n + B_n b^{-n-1} = (-1)^n \frac{V(2n+1)}{2} \int_0^1 P_n(x) dx .$$

Cálculo de las integrales, I: Con la relación de ortogonalidad y la paridad, tenemos:

$$\begin{aligned} 2\delta_{n,o} &= \int_{-1}^1 P_n(x)P_o(x) dx = \int_{-1}^1 P_n(x) dx = \int_{-1}^0 P_n(x) dx + \int_0^1 P_n(x) dx \\ &= (-1)^n \int_0^1 P_n(x) dx + \int_0^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^1 P_n(x) dx & , \text{ si } n \text{ es par o cero} \\ 0 & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = 0 \\ 0 & , \text{ si } n \geq 2 \text{ es par} \end{cases} .$$

Nos quedan las integrales para n impar

$$(3.47) \quad \alpha_n := \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x) dx .$$

Regresando a (3.46), obtenemos:

$$A_n = B_n = 0 , \quad \text{para } n \text{ par} ; \quad B_o = 0 \ \& \ A_o = V/2 .$$

Mientras que:

$$A_n = \frac{V\alpha_n(b^{n+1} + a^{n+1})}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} , \quad B_n = -\frac{V\alpha_n a^{n+1} b^{n+1} (a^n + b^n)}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} \quad \text{para } n \text{ impar} .$$

Luego,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V}{2} + V \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2k+1}}{a^{4k+3} - b^{4k+3}} \left[(b^{2k+2} + a^{2k+2}) r^{2k+1} - \frac{a^{2k+2} b^{2k+2} (a^{2k+1} + b^{2k+1})}{r^{2k+2}} \right] P_{2k+1}(\cos(\theta)) .$$

Obsérvese $\Phi(r, \pi/2) = V/2$, y la parte del plano $\theta = \pi/2$ que cae entre las esferas es una superficie equipotencial⁹.

Cálculo de las integrales, II: Con la fórmula

$$(2\ell + 1)P_\ell = P'_{\ell+1} - P'_{\ell-1}$$

obtenemos, para $n \geq 1$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0) - P_{n-1}(1) + P_{n-1}(0)] = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] .$$

Si n es par entonces P_{n-1} y P_{n+1} son funciones impares y por ende $P_{n-1}(0) = P_{n+1}(0) = 0$ con lo que reobtenemos lo ya visto.

Se tiene (ver M. Abramowitz, and I. Stegun: *Handbook of Mathematical Function*. Dover, 1965; §22.4)

$$(3.48) \quad P_\ell(0) = \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^\ell} \binom{\ell}{\ell/2} , \quad \text{para } \ell \text{ par} .$$

Luego de alguna manipulación de los coeficientes binomiales (3.48) nos da:

$$\alpha_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2} (2n+1)}{2^n (n+1)} \binom{n-1}{(n-1)/2} = \frac{(-1)^{(n-1)/2} (2n+1) (n-1)!}{2^n (n+1) [(n-1)/2!]^2} , \quad n \text{ impar} .$$

⁹Como en el caso de las series de Fourier en una discontinuidad el desarrollo da el valor intermedio.

Problema 3.28 Repita el problema anterior usando la función de Green apropiada.

La función de Green para el volumen \mathcal{V} entre dos esferas concéntricas de radios a y b ($a < b$) es:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{(2\ell+1)(b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1})} \left(r_{>}^{\ell} - \frac{b^{2\ell+1}}{r_{>}^{\ell+1}} \right) \left(r_{<}^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}(\Omega) \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')},$$

con las definiciones acostumbradas de $r_{<}$ y $r_{>}$. Y,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \Phi(\mathbf{r}') \nabla' \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{S},$$

ya que no hay cargas en \mathcal{V} . Ahora el borde $\partial\mathcal{V}$ de \mathcal{V} es la unión de la dos esferas \mathcal{S}_a y \mathcal{S}_b . Para la esfera interior tenemos $d\mathbf{S} = -a^2 \hat{\mathbf{r}}' d\Omega'$; para la exterior $d\mathbf{S} = b^2 \hat{\mathbf{r}}' d\Omega'$; siendo $d\Omega$ el elemento de superficie de la esfera unitaria. Por lo tanto

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{-b^2}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_b} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Omega' + \frac{a^2}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_a} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Omega'.$$

Introduciendo el potencial superficial del problema anterior,

$$(3.49) \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{-b^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{a^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Para aplicar la fórmula que nos da la solución debemos calcular las derivadas radiales:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{(2\ell+1)(b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1})} \left(\ell(r')^{\ell-1} + \frac{(\ell+1)b^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+2}} \right) \left(r^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}(\Omega) \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')},$$

para $r \leq r'$; y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{(2\ell+1)(b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1})} \left(r^{\ell} - \frac{b^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) \left(\ell(r')^{\ell-1} + \frac{(\ell+1)a^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+2}} \right) Y_{\ell,m}(\Omega) \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')},$$

para $r \geq r'$.

En la integral de (3.49) sobre el hemisferio inferior de la esfera exterior tenemos $r' = b \geq r$ y

$$\begin{aligned} \frac{-b^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= b^2 V \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{b^{\ell-1}}{b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}} \left(r^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}(\Omega) \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin(\theta') \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')}. \end{aligned}$$

Ya que la dependencia en φ de $Y_{\ell,m}(\Omega)$ es $e^{im\varphi}$ obtenemos

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } m \neq 0 \\ \sqrt{(2\ell+1)\pi} P_{\ell}(\cos(\theta')) & , \text{ si } m = 0 \end{cases}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{-b^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{V}{2} \sum_{\ell \geq 0} \frac{(2\ell+1)b^{\ell+1}}{b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}} \left(r^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos(\theta)) \\ &\times \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin(\theta') P_{\ell}(\cos(\theta')). \end{aligned}$$

Las integrales han sido calculadas en el problema anterior; solo son no nulas aquellas para $\ell = 0$ y ℓ impar. Con la notación (3.47) usada en el problema anterior,

$$\alpha_k := \frac{2k+1}{2} \int_0^1 P_k(x) dx, \quad k \geq 1 \text{ impar},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{-b^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{Vb}{2(b-a)} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ & + V \sum_{k \geq 1} \frac{b^{2k+2} \alpha_{2k+1}}{a^{4k+3} - b^{4k+3}} \left(r^{2k+2} - \frac{a^{4k+3}}{r^{2k+2}} \right) P_{2k+1}(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Volviendo a (3.49) nos falta la integral sobre el hemisferio superior de la esfera interior; aquí, $r' = a \leq r$ y entonces

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -a^2 V \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{a^{\ell-1}}{b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}} \left(r^\ell - \frac{b^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}(\Omega) \\ & \times \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin(\theta') \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')}. \end{aligned}$$

Los cálculos subsiguientes son análogos a los hechos; solo contribuyen los sumandos con $m = 0$ para cada ℓ y, luego, solo aquellos sumandos con $\ell = 0$ y ℓ impar. El resultado que se obtiene es:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin(\theta') \frac{\partial \Psi}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-Va}{2(b-a)} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ & + \sum_{k \geq 1} \frac{a^{2k+2} \alpha_{2k+1}}{a^{4k+3} - b^{4k+3}} \left(r^{2k+2} - \frac{b^{4k+3}}{r^{2k+2}} \right) P_{2k+1}(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Esto sumado a lo obtenido para la esfera exterior nos da el resultado obtenido en el problema anterior.

Problema 3.29 *Dos cargas puntuales q y $-q$ están localizadas en el eje z en $z = a$ y $z = -a$ respectivamente.*

- Encuentre el potencial electrostático como una expansión de armónicos esféricos y potencias de r para $r > a$ y $r < a$.*
- Manteniendo el producto $qa \equiv p/2$ constante, tome el límite $a \rightarrow 0$ y encuentre el potencial para $r \neq 0$. Este es, por definición, un dipolo ubicado a lo largo del eje z y su correspondiente potencial.*
- Suponga que el dipolo de la parte b) está rodeado por una cáscara esférica, concéntrica con el origen, conectada a tierra de radio b . Utilizando superposición lineal encuentre el potencial en todo punto interior a la cáscara.*

a) Para una carga puntual de magnitud λ localizada en \mathbf{s} , tenemos

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \lambda \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} P_\ell(\cos(\gamma))$$

para el potencial ψ en el punto \mathbf{r} donde $r_{<} := \min\{r, s\}$, $r_{>} := \max\{r, s\}$, $r = |\mathbf{r}|$, $s = |\mathbf{s}|$ y γ es el ángulo formado por \mathbf{r} y \mathbf{s} . En nuestro caso, por lo tanto:

$$\phi(\mathbf{r}) = q \sum_{\ell \in \mathbb{N}} [P_\ell(\cos(\theta)) - P_\ell(\cos(\pi - \theta))] \begin{cases} \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}}, & \text{si } r < a \\ \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}}, & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

$$= q \sum_{\ell \in \mathbb{N}} [P_\ell(\cos(\theta)) - P_\ell(-\cos(\theta))] \begin{cases} \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}}, & \text{si } r < a \\ \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}}, & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

Pero P_ℓ es par para ℓ par e impar para ℓ impar: $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$. Luego

$$\phi(\mathbf{r}) = 2q \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P_{2\ell+1}(\cos(\theta)) \begin{cases} \frac{r^{2\ell+1}}{a^{2(\ell+1)}}, & \text{si } r < a \\ \frac{a^{2\ell+1}}{r^{2(\ell+1)}}, & \text{si } r \geq a \end{cases}.$$

b) En el límite $a \downarrow 0$, debemos tomar la expresión válida para $r > a$. Si $p = 2qa$, permanece constante, sobrevive un solo sumando (el primero) y tenemos:

$$\phi_o(\mathbf{r}) = p \frac{P_1(\cos(\theta))}{r^2} = p \frac{\cos(\theta)}{r^2}.$$

c) Interpretamos que la cáscara es conductora y el potencial en ella se anula. El potencial total Φ será

$$\Phi(\mathbf{r}) = \phi_o(\mathbf{r}) + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} c_\ell r^\ell P_\ell(\cos(\theta))$$

donde el segundo término proviene de la distribución de carga superficial (interior) σ de la esfera, que estamos suponiendo tiene simetría azimutal (no depende del ángulo φ). La condición $\Phi = 0$ para $|\mathbf{r}| = b$ se cumple si

$$c_1 = -p/b^3, \quad c_\ell = 0 \text{ para todo } 1 \neq \ell \geq 0.$$

Luego,

$$\Phi(\mathbf{r}) = p \cos(\theta) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{b^3} \right), \quad 0 < |\mathbf{r}| \leq b.$$

Nuestra suposición sobre la naturaleza del potencial debido a la distribución superficial se ve confirmada por la unicidad de la solución.

Calculamos la distribución superficial de carga dada por –la normal a la superficie es $-\mathbf{e}_r$ y $|\mathbf{r}| = b$

$$\sigma(\mathbf{r}) = -(1/4\pi)\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (1/4\pi)\mathbf{e}_r \cdot (\nabla\Phi)(\mathbf{r}) = (1/4\pi)\frac{\partial\Phi}{\partial r}(\mathbf{r}) = -(3p/4\pi)\cos(\theta)/b^3.$$

La distribución es negativa para $0 \leq \theta < \pi/2$ y positiva para $\pi/2 < \theta \leq \pi$ correspondiendo al dipolo orientado hacia arriba. La carga superficial total

$$\int_{|\mathbf{r}|=b} d\Omega \sigma(\mathbf{r})$$

es nula.

Problema 3.30 *Tres cargas puntuales $(q, -2q, q)$ están ubicadas sucesivamente a distancia a entre ellas en línea recta y la carga central $(-2q)$ está ubicada en el origen de una cáscara conductora conectada a tierra de radio b .*

a) *Escriba el potencial de las tres cargas puntuales en ausencia de la esfera conductora. Encuentre la forma límite del potencial cuando $a \rightarrow 0$ pero manteniendo el producto $qa^2 = Q$ finito. Escriba este potencial en coordenadas esféricas.*

b) *La presencia de la esfera conductora de radio b altera el potencial para $r < b$. El potencial sumado puede ser descrito como producido por la densidad de carga superficial inducida en la superficie interna $r = b$ o también como el producido por cargas imágenes ubicadas en la región $r > b$. Use la superposición lineal para satisfacer las condiciones de borde y encuentre el potencial en todas partes dentro de la esfera para $r < a$ y $r > a$. Muestre que en el límite $a \rightarrow 0$ se obtiene:*

$$(3.50) \quad \Phi(r, \theta, \phi) \rightarrow \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{r^5}{b^5} \right) P_2(\cos \theta).$$

Usamos coordenadas esféricas con el eje “z” coincidiendo con la recta que une las cargas: $\mathbf{r}_1 = (0, 0, a)$, $\mathbf{r}_2 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (0, 0, -a)$ son las posiciones de las cargas q , $-2q$ y q respectivamente.

a) Procedemos como en el problema anterior.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{-2q}{r} + 2q \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \begin{cases} \frac{r^{2\ell}}{a^{2\ell+1}} & , \text{ si } r < a \\ \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} & , \text{ si } r > a \end{cases} .$$

Para $r > a$ tenemos:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2q \sum_{\ell \in \mathbb{N}^+} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} .$$

En el límite $a \downarrow 0$ con $qa^2 = Q$ constante, obtenemos

$$\Phi_o(\mathbf{r}) = 2Q P_2(\cos(\theta)) / r^3 = \frac{Q}{r^3} (3 \cos(\theta) - 2) .$$

b) ¡Al diablo con las cargas virtuales! Corregimos el potencial Φ con una solución regular de la ecuación de Laplace que tiene simetría azimutal; i.e. hacemos el Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \begin{cases} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} C_\ell r^\ell P_\ell(\cos(\theta)) & , \text{ si } r < b \\ \sum_{\ell \in \mathbb{N}} D_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos(\theta)) & , \text{ si } r > b \end{cases} ,$$

para el potencial Ψ . La condición $\Psi = 0$ para $|\mathbf{r}| = b$ se cumple si

$$C_o = 0 , \quad C_m = 0 \text{ para } m \text{ impar} , \quad C_{2\ell} = \frac{-2qa^{2\ell}}{b^{4\ell+1}} \text{ para } \ell \geq 1 .$$

Tenemos entonces

$$\psi(\mathbf{r}) = 2q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} - \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \left[\frac{a^{2\ell} r^{2\ell}}{b^{4\ell+1}} - \begin{cases} \frac{r^{2\ell}}{a^{2\ell+1}} & , \text{ si } r < a \\ \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} & , \text{ si } r > a \end{cases} \right] \right) .$$

El sumando b^{-1} compensa el sumando con $\ell = 0$ proveniente de la corrección. Para $r > a$ tenemos:

$$\psi(\mathbf{r}) = 2q \sum_{\ell \in \mathbb{N}^+} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{4\ell+1} \right] .$$

El límite $a \downarrow$ con $qa^2 = Q$ constante nos da efectivamente (3.50) con $\epsilon_o = 4\pi$.

Problema 3.31 *Un capacitor está formado por dos grandes placas conductoras paralelas planas a una distancia d . Una de las placas tiene una pequeñísima imperfección –un chichón– en forma de hemisferio de radio a ($a \ll d$) como se esboza en la figura 7. La placa con el chichón es mantenida a potencial cero mientras que la otra está a un potencial tal que muy lejos del chichón el campo eléctrico entre las placas es constante de magnitud E_o en dirección ortogonal a las placas.*

a) Calcule la densidad de carga superficial en la placa imperfecta mantenida a potencial cero y discuta el comportamiento espacial de ella.

b) Muestre que la carga total inducida en el chichón es $3\pi\epsilon_o E_o a^2$.

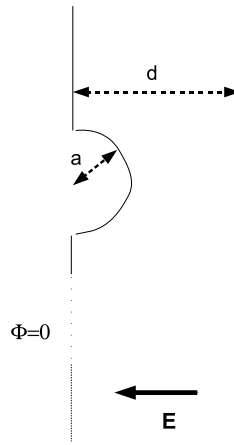


Figura 7: El chichón

c) Suponga que la placa perfecta es reemplazada por una carga puntual q a una distancia d del centro del chichón perpendicular a la placa. Muestre que la carga inducida en el chichón es:

$$-q \left(1 - \frac{d^2 - a^2}{d\sqrt{d^2 + a^2}} \right).$$

El planteo del problema es redundante. Si las placas son conductoras entonces el potencial en ellas es constante. Luego, lejos del chichón, el campo eléctrico es asintótico a un campo constante y perpendicular a las placas.

a) Eligiendo un sistema de coordenadas esférico con origen en el centro del chichón y eje polar hacia la placa perfecta y perpendicular a ella, el problema tiene simetría azimutal por lo cual el potencial Φ no depende del ángulo azimutal φ .

Si muy lejos del chichón el campo es (asintótico a) $\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = E_o \hat{\mathbf{z}}$ entonces, bajo la misma condición, $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi_o(\mathbf{r}) = -E_o z = -E_o r \cos(\theta)$ para $r \rightarrow \infty$.

Tenemos

$$(3.51) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq r \leq d/\cos(\theta);$$

$$(3.52) \quad \Phi(a, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad \& \quad \Phi(r, \pi/2) = 0, \quad r \geq a;$$

$$(3.53) \quad \Phi(d/\cos(\theta), \theta) = -E_o d, \quad 0 \leq \theta < \pi/2;$$

$$(3.54) \quad \Phi(r, \theta) \sim \Phi_o(r, \theta) \text{ para } r \rightarrow \infty.$$

Aunque θ solo recorre $[0, \pi/2]$, la mitad del intervalo $[0, \pi]$, planteamos el Ansatz

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell \geq 0} \left(A_\ell r^\ell + r^{-(\ell+1)} B_\ell \right) P_\ell(\cos(\theta))$$

que satisface (3.51) módulo convergencia. Recordando que $P_1(x) = x$, la condición asintótica (3.54) implica que $A_1 = -E_o$ y $A_\ell = 0$ para $\ell \neq 1$ o sea

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_o(r, \theta) + \sum_{\ell \geq 0} r^{-(\ell+1)} B_\ell P_\ell(\cos(\theta)).$$

La condición (3.52) en la placa imperfecta es:

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(0) = \sum_{k \geq 0} \frac{B_{2k}}{r^{2k+1}} P_{2k}(0) = 0, \quad r \geq a,$$

$$(B_o/a) + [(B_1/a^2) - E_o a] \cos(\theta) + \sum_{\ell \geq 2} \frac{B_\ell}{a^{\ell+1}} P_\ell(\cos(\theta)) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2;$$

ya que $P_\ell(-x) = (-)^\ell P_\ell(x)$ implica que $P_\ell(0) = 0$ para ℓ impar. Concluimos de la primera que $B_\ell = 0$ para ℓ par y esto introducido en la segunda condición da

$$(3.55) \quad [(B_1/a^2) - E_o a] \cos(\theta) + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k+1}}{a^{2(k+1)}} P_{2k+1}(\cos(\theta)) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Usando todo lo anterior, la condición de borde (3.53) en la placa perfecta nos da:

$$(3.56) \quad \sum_{k \geq 0} \frac{B_{2k+1}}{d^{2(k+1)}} (\cos(\theta))^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos(\theta)) = 0, \quad 0 \leq \theta < \pi/2.$$

La solución procedería determinando las constantes B_{2k+1} , $k \geq 0$, con estas dos condiciones.

Intentamos encontrar una aproximación Φ_1 al potencial que tenga la propiedad de converger a la solución exacta Φ_o para $a \rightarrow 0$. Podemos satisfacer (3.55) con $B_1 = E_o a^3$ y $B_{2k+1} = 0$ para $k \geq 1$. Entonces

$$\Phi_1(r, \theta) = -E_o r \cos(\theta) (1 - (a/r)^3),$$

cumple con (3.52) y tiende a Φ_o para $a \rightarrow 0$, pero (3.53) no se cumple ya que

$$\Phi_1(d/\cos(\theta), \theta) = -E_o d \left[1 - \left(\frac{a \cos(\theta)}{d} \right)^3 \right];$$

hay un error de orden $(a/d)^3$. Con esta aproximación al potencial obtenemos (usando que $\hat{\mathbf{z}} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r - \sin(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta$) la siguiente aproximación al campo

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = E_o \cos(\theta)(1 + 2(a/r)^3)\hat{\mathbf{e}}_r - E_o \sin(\theta)(1 - (a/r)^3)\hat{\mathbf{e}}_\theta = E_o \hat{\mathbf{z}} + E_o \left(\frac{a}{r} \right)^3 [2 \cos(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r + \sin(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta].$$

La densidad de carga aproximada es

$$\sigma_1(\mathbf{r}) = \epsilon_o \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_r$$

donde \mathbf{n}_r es la normal a la superficie en el punto \mathbf{r} hacia el volumen entre placas. Luego, para $r = a$ la normal es $\hat{\mathbf{e}}_r$ y entonces

$$\sigma_1(\mathbf{r}) = 3\epsilon_o E_o \cos(\theta);$$

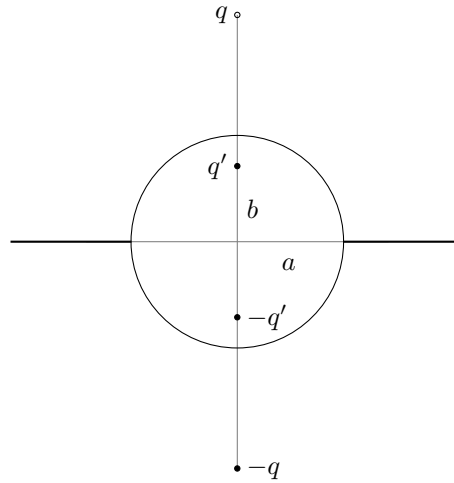
y, para $\theta = \pi/2$ con $r \geq a$ la normal es $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ por lo cual

$$\sigma_1(r, \pi/2) = \epsilon_o E_o (1 - (a/r)^3).$$

El comportamiento espacial de esta densidad de carga superficial de la placa imperfecta es simple: constante hasta orden $\mathcal{O}((a/r)^3)$ lejos del chichón, y en el chichón (notablemente) independiente del radio a del chichón con una dependencia simple del ángulo polar. Calculamos también la densidad de carga en la placa perfecta donde la normal es $-\hat{\mathbf{z}}$ obteniendo

$$\sigma_1(d/\cos(\theta), \theta) = -\epsilon_o E_o + \epsilon_o E_o \left(\frac{a \cos(\theta)}{d} \right)^3 [3(\cos(\theta))^2 - 1]$$

que nos da la densidad correcta en el límite $a \rightarrow 0$ y, además, tiene el comportamiento correcto lejos del chichón ya que esto corresponde a $\cos(\theta) \rightarrow 0$.



b) La carga total inducida en el chichón es, aproximadamente,

$$\int_{\text{superficie del chichón}} d\Omega \sigma_1(\Omega) = 3\epsilon_o E_o \int_0^{\pi/2} a d\theta \cos(\theta) \int_0^{2\pi} a \sin(\theta) d\varphi = 3\epsilon_o \pi E_o a^2 .$$

c) Con el mismo sistema de coordenadas esféricas, planteo el potencial como

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o |\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{z}}|} + \Phi_o(r, \theta) , \quad r > a , \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 ,$$

donde Φ_o satisface la ecuación de Laplace en la region abierta $K = \{(r, \theta, \phi) : r > a , 0 \leq \theta < \pi/2 , 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ y se tiene

$$(3.57) \quad \frac{-q}{4\pi\epsilon_o \sqrt{d^2 + r^2 - 2rd \cos(\theta)}} = \Phi_o(r, \theta) , \quad \text{en } \partial K ,$$

que corresponde a que el potencial sea nulo en la placa imperfecta.

Procedo con el método de las imágenes introduciendo, una carga virtual de magnitud $-q$ espejada a la carga real respecto del plano de la placa (esta sería la configuración si ambas placas fuesen planas); y dos cargas virtuales de magnitud $\pm q'$ (a determinar) dentro del chichón¹⁰. Una de estas cargas comprendería el caso donde la placa imperfecta se reemplaza por una esfera; la otra –espejada respecto del plano de la placa imperfecta– compensa la presencia de esta placa. ¿Funcionará? Las cargas $\pm q'$ deben estar espejadas entre si respecto del plano de la placa a una distancia b (a determinar) de él y sobre el eje ‘ z' ’. Vea la figura.

Entonces Φ_o es el potencial obtenido por la superposición de los potenciales asociados con estas tres cargas virtuales:

$$\Phi_o(r, \theta) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_o \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos(\theta)}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + r^2 + 2br \cos(\theta)}} \right) .$$

Sobre la parte plana de la placa que es $\{(r, \pi/2) : r \geq a\}$, la condición (3.57) se cumple ya que $\Phi_o(r, \pi/2) = -q/(4\pi\epsilon_o \sqrt{d^2 + r^2})$. Resta satisfacer la condición sobre el chichón propiamente dicho: $\{(a, \theta) : 0 < \theta < \pi/2\}$. Omito los detalles del cálculo análogo al del problema 3.13. El resultado es

$$\Phi_o(r, \theta) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_o \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos(\theta)}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (rd/a)^2 - 2dr \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (rd/a)^2 + 2dr \cos(\theta)}} \right) ,$$

que cumple manifiestamente con la condición (3.57) en el chichón. Por lo tanto

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos(\theta)}} \right)$$

¹⁰Vea el Problema 3.13, página 35.

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2 + (rd/a)^2 - 2dr \cos(\theta)}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (rd/a)^2 + 2dr \cos(\theta)}} \Bigg) .$$

Tomando la derivada respecto de r obtenemos

$$\sigma(a, \theta) = -\epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial r}(a, \theta) = -q \frac{(d^2 - a^2)}{4\pi a} \left((a^2 + d^2 - 2da \cos(\theta))^{-3/2} - (a^2 + d^2 + 2da \cos(\theta))^{-3/2} \right) ,$$

para la densidad de carga sobre el chichón. La densidad de carga superficial es opuesta –como debe ser– a la carga puntual ya que $\cos(\theta) \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

La integral sobre la superficie del chichón da la carga inducida en él y está dada por la fórmula explicitada.

Para la densidad de carga en la parte plana de la placa obtengo

$$\sigma(r, \pi/2) = -\epsilon_o \mathbf{E}(r, \pi/2, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \epsilon_o r^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, \pi/2) = -\frac{qd}{2\pi} \left((a^2 + (rd/a)^2)^{-3/2} - (d^2 + r^2)^{-3/2} \right) ;$$

que –como debe ser– es de signo opuesto a q .

Comentarios: No está de más decir que el item c) podría atacarse con un desarrollo en polinomios de Legendre como hicimos en a).

Recalco que la solución de a) y b) ofrecida es aproximada. El potencial Φ_1 no es constante en la placa perfecta como debería de serlo en un conductor (condición (3.53)).

Problema 3.32 Una superficie esférica de radio R tiene carga uniformemente distribuida sobre su superficie con una densidad de $Q/4\pi R^2$, excepto por una sección esférica en el polo norte (vea figura 8), definida por un cono de ángulo $\theta = \alpha$. a) Muestre que el potencial dentro de la superficie esférica puede ser expresado como

$$(3.58) \quad \Phi = \frac{Q}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

donde para $l = 0$ definimos $P_{-1}(\cos \alpha) = -1$. ¿Cuánto vale el potencial afuera de la cáscara?

b) Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en el origen.

c) Discuta los límites del potencial (3.58) y el campo eléctrico encontrado en b) en los siguientes límites: (i) la sección esférica es muy pequeña, (ii) la sección esférica es muy grande, de tal manera que la región cargada es ahora una pequeña región esférica rodeando el polo sur.

a) Claramente trabajamos en coordenadas esféricas con eje polar coincidente con el del cono. Como la distribución de cargas es localizada y finita, y tiene simetría azimutal, proponemos el Ansatz

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \Phi_{in}(r, \theta) := \sum_{\ell \geq 0} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)) & , \quad 0 \leq r \leq R \\ \Phi_{out}(r, \theta) := \sum_{\ell \geq 0} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos(\theta)) & , \quad R \leq r \end{cases} .$$

La condición de continuidad en $r = R$ es:

$$\sum_{\ell \geq 0} A_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)) = \Phi_{in}(R, \theta) = \Phi_{out}(R, \theta) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos(\theta))$$

y se cumple si y solo si

$$(3.59) \quad B_{\ell} = A_{\ell} R^{2\ell+1} .$$

La densidad de carga superficial en la esfera es:

$$(3.60) \quad \sigma(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } 0 \leq \theta < \alpha \\ \frac{Q}{4\pi R^2} & , \quad \text{si } \alpha < \theta \leq \pi \end{cases} , \quad |\mathbf{r}| = R ;$$

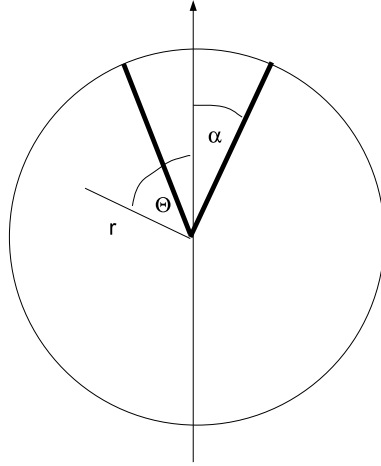


Figura 8: Agujero en polo norte

la condición de contorno respectiva es entonces:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E}_{out}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{in}(\mathbf{r})) = \epsilon_o^{-1} \sigma(\mathbf{r}), \quad |\mathbf{r}| = R.$$

Esto expresado en términos del potencial $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ es:

$$\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial r}(R, \theta) - \frac{\partial\Phi_{out}}{\partial r}(R, \theta) = \sigma(\mathbf{r})/\epsilon_o.$$

Derivando e incorporando la relación (3.59) obtenemos:

$$\sum_{\ell \geq 0} (2\ell + 1) A_\ell R^{\ell-1} P_\ell(\cos(\theta)) = \sigma(\mathbf{r})/\epsilon_o.$$

Incorporando (3.60), multiplicando esto por $P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta)$ e integrando sobre $[0, \pi]$ al usar las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Legendre obtenemos

$$2A_n R^{n-1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2} \int_{-1}^{\cos(\alpha)} P_n(x) dx, \quad \text{o sea } A_n = \frac{Q}{8\pi\epsilon_o R^{n+1}} \int_{-1}^{\cos(\alpha)} P_n(x) dx.$$

La integral la calculamos como en el Problema 1. Con $P_0(x) = 1$,

$$\int_{-1}^{\cos(\alpha)} P_0(x) dx = \cos(\alpha) + 1.$$

Para $n \geq 1$, $P_n = (P'_{n+1} - P'_{n-1})/(2n + 1)$ y

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\cos(\alpha)} P_n(x) dx &= \frac{1}{2n + 1} \int_{-1}^{\cos(\alpha)} (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx \\ &= \frac{1}{2n + 1} [P_{n+1}(\cos(\alpha)) - P_{n+1}(-1) - P_{n-1}(\cos(\alpha)) + P_{n-1}(-1)]. \end{aligned}$$

Pero $P_\ell(-1) = (-1)^\ell P_\ell(1) = (-1)^\ell$ con lo cual $P_{n-1}(-1) - P_{n+1}(-1) = 0$ y

$$\int_{-1}^{\cos(\alpha)} P_n(x) dx = \frac{1}{2n + 1} [P_{n+1}(\cos(\alpha)) - P_{n-1}(\cos(\alpha))].$$

Entonces, efectivamente,

$$A_n = \frac{Q}{8\pi\epsilon_o(2n+1)R^{n+1}} [P_{n+1}(\cos(\alpha)) - P_{n-1}(\cos(\alpha))] ,$$

lo que establece la fórmula que se debía obtener (en unidades donde $4\pi\epsilon_o = 1$). Esto via (3.59) también determina el potencial exterior.

b) Calculamos

$$\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial r} = \sum_{\ell \geq 0} A_\ell \ell r^{\ell-1} P_\ell(\cos(\theta)) , \quad \frac{\partial\Phi_{in}}{\partial \theta} = -\sin(\theta) \sum_{\ell \geq 0} A_\ell r^\ell P'_\ell(\cos(\theta)) ;$$

con lo cual

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_{in}(\mathbf{r}) = -\left(\sum_{\ell \geq 0} A_\ell \ell r^{\ell-1} P_\ell(\cos(\theta))\right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\sin(\theta) \sum_{\ell \geq 0} A_\ell r^{\ell-1} P'_\ell(\cos(\theta))\right) \hat{\boldsymbol{\theta}} .$$

En $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, con $P_1(x) = x$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}) = -A_1 P_1(\cos(\theta)) \hat{\mathbf{r}} + \sin(\theta) A_1 P'_1(\cos(\theta)) \hat{\boldsymbol{\theta}} = -A_1(\cos(\theta) \hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}) = -A_1 \hat{\mathbf{z}} .$$

Luego, con

$$A_1 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_o 3R^2} [P_2(\cos(\alpha)) - P_0(\cos(\alpha))] = \frac{Q}{24\pi\epsilon_o R^2} \left[\frac{3}{2} \cos(\alpha)^2 - \frac{1}{2} - 1 \right] = -\frac{Q}{16\pi\epsilon_o R^2} \sin(\alpha)^2 ,$$

obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}) = \frac{Q \sin(\alpha)^2}{16\pi\epsilon_o R^2} \hat{\mathbf{z}} .$$

Un análisis geométrico de la distribución de carga muestra que en el origen el campo es axial. El signo indica que la dirección es hacia el polo norte (en el caso de $Q > 0$) lo que es también intuitivamente razonable.

c) Analizamos la dependencia en la apertura del agujero. La carga total es

$$R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\alpha^\pi \frac{Q}{4\pi R^2} \sin(\theta) d\theta = \frac{Q}{2} \int_\alpha^\pi \sin(\theta) d\theta = \frac{Q}{2} (1 + \cos(\alpha)) .$$

Para la esfera completa $\alpha = 0$ y la carga es Q ; para el agujero completo $\alpha = \pi$ y la carga es nula.

En el caso $\alpha \rightarrow 0$ ($\cos(\alpha) \rightarrow 1$) el potencial tiende a

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \begin{cases} 1/r & , \text{ para } r \geq R \\ 1/R & , \text{ para } 0 \leq r \leq R \end{cases} ,$$

ya que $P_{\ell+1}(\cos(\alpha)) - P_{\ell-1}(\cos(\alpha)) \rightarrow 0$ salvo para $\ell = 0$. Cuando $\alpha \rightarrow \pi$ ($\cos(\alpha) \rightarrow -1$), no hay carga y efectivamente Φ se anula.

En el límite $R \rightarrow 0$ persiste solamente el sumando con $\ell = 0$ y

$$\Phi_{out}(r, \theta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_o} \frac{1}{r} [P_1(\cos(\alpha)) + 1] P_0(\cos(\theta)) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_o} \frac{1}{r} [\cos(\alpha) + 1] .$$

Este potencial corresponde al de una carga puntual en el origen de magnitud $Q(1 + \cos(\alpha))/2$.

El caso de la esfera enorme corresponde al límite $R \rightarrow \infty$. Tomamos el potencial interior

$$\Phi_{in}(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} \frac{Q r^n}{8\pi\epsilon_o (2n+1) R^{n+1}} [P_{n+1}(\cos(\alpha)) - P_{n-1}(\cos(\alpha))] P_n(\cos(\theta)) ,$$

que en el límite se anula.

Problema 3.33 Una cáscara hueca de radio a tiene un potencial $V(\theta, \phi)$ especificado en su superficie. Probar la equivalencia de estas dos formas del potencial en el interior de la cáscara:

$$\Phi = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$; y

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde $A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$.

Para $r \leq a$ el Ansatz para el potencial es $\Phi(r, \Omega) = \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} B_{\ell, m} r^\ell Y_{\ell, m}(\Omega)$ donde $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$. La condición de borde es $V(\theta) = \Phi(a, \Omega) = \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} B_{\ell, m} a^\ell Y_{\ell, m}(\Omega)$ de donde $B_{\ell, m} = A_{\ell, m} a^{-\ell}$ con los coeficientes de la expansión en armónicos esféricos de V ,

$$A_{\ell, m} = \int_{S_2} d\Omega V(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega)};$$

o sea

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} A_{\ell, m} (r/a)^\ell Y_{\ell, m}(\Omega) = \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} (r/a)^\ell Y_{\ell, m}(\Omega) \int_{S_2} d\Omega' V(\Omega') \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')} \\ (3.61) \quad &= \int_{S_2} d\Omega' V(\Omega') \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} (r/a)^\ell Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')}. \end{aligned}$$

Aquí S es la esfera de radio 1 en tres dimensiones.

Considere cualquier vector \mathbf{a} en la superficie de la esfera de radio a , $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{e}}$, y cualquier vector \mathbf{r} dentro de la esfera. Se tiene la expansión

$$(3.62) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}} Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')},$$

donde Ω especifica la dirección de \mathbf{r} y Ω' aquella de \mathbf{a} . Derivando (3.62) respecto de r en ambos miembros, usando que $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\gamma)}$,

$$\frac{a \cos(\gamma) - r}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} \frac{\ell}{2\ell + 1} \frac{r^{\ell-1}}{a^{\ell+1}} Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')}$$

Multiplicando ambos miembros de esto con $2r$ y sumando (3.62) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2r(a \cos(\gamma) - r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} &= 4\pi \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} \frac{2\ell}{2\ell + 1} \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}} Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')} \\ +4\pi \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}} Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')} &= \frac{4\pi}{a} \sum_{\ell \geq 0, m=-\ell, \dots, m} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')}. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{2r(a \cos(\gamma) - r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} (2r(a \cos(\gamma) - r) + |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} (2ra \cos(\gamma) - 2r^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos(\gamma)) = \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\frac{a(a^2 - r^2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0, m = -\ell, \dots, m} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')}; \quad r \leq a.$$

Mas preciosa aún:

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} = \frac{4\pi}{a(a^2 - r^2)} \sum_{\ell \geq 0, m = -\ell, \dots, m} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell Y_{\ell, m}(\Omega) \overline{Y_{\ell, m}(\Omega')}}}, \quad r \leq a.$$

Con esta fórmula y (3.61) obtenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_{S_2} d\Omega' \frac{V(\Omega')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\gamma))^{3/2}},$$

que es la famosa fórmula integral de Poisson. Yo prefiero escribirla

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_{\{\mathbf{x}: |\mathbf{x}|=a\}} d\Omega_a \frac{V(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3}},$$

donde $d\Omega_a$ es el elemento de superficie de la esfera de radio a : $d\Omega_a = a^2 d\Omega$ (por ejemplo: en coordenadas esféricas $d\Omega_a = a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$).

Problema 3.34 Una carga lineal de longitud $2d$ con carga total Q tiene una densidad de carga que varía como $(d^2 - z^2)$, donde z es la distancia al punto medio. Una cáscara esférica conductora conectada a tierra de radio $b > d$ se ubica centrada en el punto medio de esta distribución lineal de carga.

- a) Encuentre el potencial en el interior de la cáscara esférica utilizando una expansión de polinomios de Legendre.
- b) Calcule la densidad de carga superficial inducida en la cáscara.
- c) Discuta las respuestas a) y b) en el límite $d \ll b$.

Con densidad de carga lineal $\lambda(z) = c(d^2 - z^2)$ la constante c se determina de $Q = \int_{-d}^d \lambda(z) dz$ obteniendose así $\lambda(z) = 3Q(d^2 - z^2)/(4d^3)$.

- a) Usamos la función de Green para el interior de una esfera S_b de radio b

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{b|\mathbf{y}|}{4\pi\|\mathbf{y}\|^2\mathbf{x} - b^2\mathbf{y}}.$$

Y la densidad de carga volumétrica (en coordenadas cartesianas con eje “z” a lo largo del segmento cargado y origen en el medio de este segmento) asociada con la carga lineal

$$\rho(\mathbf{x}) = \lambda(z) \chi_{[-d, d]}(r) \delta_0(x) \delta_0(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon_o} \int_{S_b} G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{S_b} \lambda(z) \chi_{[-d, d]}(z) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} - \frac{b|\mathbf{u}|}{\|\mathbf{u}\|^2\mathbf{r} - b^2\mathbf{u}} \right) \delta_0(x) \delta_0(y) dx dy dz \\ (3.63) \quad &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-d}^d \lambda(z) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - z\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{b|z|}{\|z\|^2\mathbf{r} - b^2z\hat{\mathbf{z}}|} \right) dz. \end{aligned}$$

Usamos la expansión en polinomios de Legendre

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{r^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell \cos(\gamma)$$

donde γ es el ángulo formado por \mathbf{r} y \mathbf{y} , $r_< := \min\{|\mathbf{r}|, |\mathbf{y}|\}$ y $r_> := \max\{|\mathbf{r}|, |\mathbf{y}|\}$.

En el segundo sumando de (3.63) tenemos $\|z^2 \mathbf{r}\| = |z|^2 r$ y $\|b^2 z \widehat{\mathbf{z}}\| = b^2 |z|$; ya que $z \in [-d, d]$, $d < b$ y $r \leq b$, obtenemos $\min\{\|z^2 \mathbf{r}\|, \|b^2 z \widehat{\mathbf{z}}\|\} = |z|^2 r$ y $\max\{\|z^2 \mathbf{r}\|, \|b^2 z \widehat{\mathbf{z}}\|\} = b^2 |z|$. Entonces con el ángulo polar θ de \mathbf{r} ,

$$\begin{aligned} - \int_{-d}^d \lambda(z) \frac{b|z|}{\|z^2 \mathbf{r} - b^2 z \widehat{\mathbf{z}}\|} dz &= - \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(\cos(\theta)) \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}} \int_0^d \lambda(z) z^\ell dz + \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(\cos(\pi - \theta)) \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}} \int_{-d}^0 \lambda(z) |z|^\ell dz \\ &= - \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(\cos(\theta)) \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}} \int_0^d \lambda(z) z^\ell dz - \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(-\cos(\theta)) \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}} \int_0^d \lambda(-z) z^\ell dz. \end{aligned}$$

Como $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$ y λ es par obtenemos:

$$\begin{aligned} - \int_{-d}^d \lambda(z) \frac{b|z|}{\|z^2 \mathbf{r} - b^2 z \widehat{\mathbf{z}}\|} dz &= -2 \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \frac{r^{2\ell}}{b^{4\ell+1}} \int_0^d \lambda(z) z^{2\ell} dz \\ &= -3Q \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \frac{(rd)^{2\ell}}{(2\ell+1)(2\ell+3)b^{4\ell+1}}. \end{aligned}$$

El primer sumando de (3.63) es mas complicado.

$$\int_{-d}^d \frac{\lambda(z)}{|\mathbf{r} - z \widehat{\mathbf{z}}|} dz = \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(\cos(\theta)) \int_0^d \lambda(z) \frac{r_\leq^\ell}{r_>^{\ell+1}} dz + \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(\cos(\pi - \theta)) \int_{-d}^0 \lambda(z) \frac{r_\leq^\ell}{r_>^{\ell+1}} dz$$

donde $r_< := \min\{r, |z|\}$ y $r_> := \max\{r, |z|\}$. Nuevamente –usando la paridad de P_ℓ , y el hecho de que λ , $r_<$ y $r_>$ son funciones pares de z – obtenemos solo contribución de los índices pares

$$\int_{-d}^d \frac{\lambda(z)}{|\mathbf{r} - z \widehat{\mathbf{z}}|} dz = 2 \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \int_0^d \lambda(z) \frac{r_\leq^{2\ell}}{r_>^{2\ell+1}} dz.$$

Si $r \geq d$,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \int_0^d \lambda(z) \frac{r_\leq^{2\ell}}{r_>^{2\ell+1}} dz &= 2 \sum_{\ell \geq 0} \frac{P_{2\ell}(\cos(\theta))}{r^{2\ell+1}} \int_0^d \lambda(z) z^{2\ell} dz \\ &= 3Q \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \frac{d^{2\ell}}{(2\ell+1)(2\ell+3)r^{2\ell+1}}. \end{aligned}$$

Cuando $r < d$,

$$2 \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \int_0^d \lambda(z) \frac{r_\leq^{2\ell}}{r_>^{2\ell+1}} dz = 2 \sum_{\ell \geq 0} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \left\{ \int_0^r \lambda(z) \frac{z^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} dz + \int_r^d \lambda(z) \frac{r^{2\ell}}{z^{2\ell+1}} dz \right\};$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^r \lambda(z) \frac{z^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} dz &= \frac{3Q}{4d^3} \left(\frac{d^2}{2\ell+1} - \frac{r^2}{2\ell+3} \right); \\ \int_r^d \lambda(z) \frac{r^{2\ell}}{z^{2\ell+1}} dz &= \frac{3Q}{4d^3} \begin{cases} d^2 \ln(d/r) - (d^2 - r^2)/2 & , \text{ si } \ell = 0 \\ -r^2 \ln(d/r) + (d^2 - r^2)/2 & , \text{ si } \ell = 1 \\ \frac{d^2}{2\ell(\ell-1)} \left(\frac{r}{d}\right)^{2\ell} + \frac{d^2}{2\ell} - \frac{r^2}{2(\ell-1)} & , \text{ si } \ell \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora se trata de juntar todo lo establecido.

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell \geq 0} \frac{P_{2\ell}(\cos(\theta))}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \left(\frac{d}{b}\right)^{2\ell} \left[\frac{b^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{b^{2\ell+1}} \right], \quad r \geq d};$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{2d} + \frac{r^2}{6d^3} - \frac{2}{3b} + \frac{\ln(d/r)}{d} \right] + \frac{3QP_2(\cos(\theta))}{8\pi\epsilon_o} \left[\frac{5}{6d} - \frac{7r^2}{10d^3} - \frac{2r^2d^2}{15b^5} - \frac{r^2\ln(d/r)}{d^3} \right] \\ + \frac{3Q}{8\pi\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 2} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \left[\frac{4\ell+1}{2\ell(2\ell+1)d} - \frac{(4\ell+1)r^2}{2(\ell-1)(2\ell+3)d^3} - \frac{2r^{2\ell}d^{2\ell}}{(2\ell+1)(2\ell+3)b^{4\ell+1}} + \frac{r^{2\ell}}{2\ell(\ell-1)d^{2\ell+1}} \right], \quad r < d.$$

Se puede verificar que ambas expresiones coinciden para $r = d$. Observese que como era de esperar Φ es invariante ante reflexión en el plano ortogonal al segmento por su punto medio (i.e., $\theta \mapsto \pi - \theta$). ¡ Φ diverge en $r = 0$ como $-\ln(r)/d$ y esto no lo entiendo bien aún!

b) La densidad de carga superficial como no hay campo externo es:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial r}(\mathbf{r}) = -\frac{3Q}{4\pi} \sum_{\ell \geq 0} \frac{(4\ell+1)P_{2\ell}(\cos(\theta))d^{2\ell}}{(2\ell+1)(2\ell+3)b^{2\ell+2}}, \quad |\mathbf{r}| = b.$$

c) En el límite $d \rightarrow 0$, la carga se concentra en el centro de la esfera. La distribución de carga superficial es $-Q/(4\pi b^2)$ y coincide con la distribución de carga en una esfera de radio b a potencial constante cuando hay una carga Q en el centro de ella. Así mismo, el potencial en este límite es $\frac{Q}{4\pi\epsilon_o}(r^{-1}-b^{-1})$ como era de esperar.

Problema 3.35 *Un disco conductor delgado y plano de radio R es mantenido a potencial constante V . La densidad de carga en el disco es proporcional a $1/\sqrt{R^2 - p^2}$, siendo p la distancia al centro del disco.*

- a) *Determine el potencial en toda partes.*
b) *Encuentre la capacidad del disco.*

Elegimos coordenadas esféricas con eje polar perpendicular al plano del disco y origen en su centro. Si $\sigma(p, \varphi)$ es la densidad de carga en el disco ($0 \leq p \leq R$) entonces la densidad de carga volumétrica es:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \frac{\delta_{\pi/2}(\theta)}{r} \sigma(r, \varphi) \chi_{[0,R]}(r).$$

El potencial correspondiente es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} dv;$$

hacemos una expansión en armónico esféricos del denominador y obtenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\Omega)}{2\ell+1} \int_0^R dx x \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \int_0^{\pi} d\theta' \sin(\theta') \delta_{\pi/2}(\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \sigma(x, \varphi') \overline{Y_{\ell,m}(\Omega')} \\ = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\Omega)}{2\ell+1} \int_0^R dx x \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sigma(x, \varphi') \overline{Y_{\ell,m}(\pi/2, \varphi')} \\ = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\Omega)}{2\ell+1} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(0) \int_0^R dx x \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sigma(x, \varphi') e^{-im\varphi'}.$$

Ya que $P_{\ell}^m(-t) = (-)^{\ell+m} P_{\ell}^m(t)$ deducimos que $P_{\ell}^m(0) = 0$ para $\ell+m$ impar. Si, además, σ es independiente del ángulo azimutal (o sea, polar en el plano del disco), usando $\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} d\alpha = 2\pi\delta_{m,0}$, obtenemos que los únicos sumandos no nulos son aquellos con ℓ par y $m = 0$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{k \geq 0} \frac{Y_{2k,0}(\Omega)}{4k+1} \sqrt{\frac{(4k+1)}{4\pi}} P_{2k}(0) \int_0^R dx x \frac{r_{<}^{2k}}{r_{>}^{2k+1}} \sigma(x) \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{k \geq 0} P_{2k}(0) P_{2k}(\cos(\theta)) \int_0^R dx x \frac{r_{<}^{2k}}{r_{>}^{2k+1}} \sigma(s).$$

Resta la integral radial. Cuando $r = |\mathbf{r}| \geq R$, tenemos $r_{<} = x$ y $r_{>} = r$ y

$$\int_0^R dx x \frac{r_{<}^{2k}}{r_{>}^{2k+1}} \sigma(x) = \frac{1}{r^{2k+1}} \int_0^R dx x^{2k+1} \sigma(x);$$

en caso contrario

$$\int_0^R dx x \frac{r_{<}^{2k}}{r_{>}^{2k+1}} \sigma(x) = \frac{1}{r^{2k+1}} \int_0^r dx x^{2k+1} \sigma(x) + r^{2k} \int_r^R dx \frac{\sigma(x)}{x^{2k}}.$$

Calculamos estas integrales para el caso planteado o sea: $\sigma(p) = \kappa/\sqrt{R^2 - p^2}$ donde κ es constante (determinada por la carga o el potencial V).

El cambio de variables $t = \sqrt{1 - (x/R)^2}$ nos da

$$\int_0^R dx x^{2k+1} \sigma(x) = \kappa \int_0^R dx \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \kappa R^{2k+1} \int_0^1 dt (1 - t^2)^k;$$

$$\int_0^r dx x^{2k+1} \sigma(x) = \kappa R^{2k+1} \int_{\sqrt{1-(r/R)^2}}^1 dt (1 - t^2)^k, \quad \int_r^R dx \frac{\sigma(x)}{x^{2k}} = \frac{\kappa}{R^{2k}} \int_0^{\sqrt{1-(r/R)^2}} \frac{dt}{(1 - t^2)^k \sqrt{1 - t^2}}.$$

Con la notación

$$F_k^+(a) := \int_a^1 (1 - t^2)^k dt, \quad F_k^-(a) := \int_0^a (1 - t^2)^{-(2k+1)/2} dt, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

tenemos entonces

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_o} \sum_{k \geq 0} P_{2k}(0) P_{2k}(\cos(\theta)) \begin{cases} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} F_k^+(0) \\ \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} F_k^+(\sqrt{1 - (r/R)^2}) + \left(\frac{r}{R}\right)^{4k+1} F_k^-(\sqrt{1 - (r/R)^2}) \end{cases},$$

correspondiendo aquí el renglón superior a $r \geq R$ y el inferior a $r \leq R$. Para relacionar la constante κ con el potencial en el disco observamos que

$$V = \Phi(\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} dv = \frac{\kappa}{2\epsilon_o} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\kappa}{2\epsilon_o} \arcsin(r/R)|_0^R = \frac{\kappa\pi}{4\epsilon_o};$$

o sea: $\kappa = 4V\epsilon_o/\pi$.

La integral $F_k^+(a)$ puede hacerse elementalmente usando la expansión binomial; el cálculo de $F_k^-(a)$ es algo más involucrado¹¹.

b) La carga total es

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) dv = 2\pi\kappa \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2\pi\kappa R F_0^+(0) = 2\pi R \kappa = 8V\epsilon_o R;$$

con lo que la capacidad es $C = 8\epsilon_o R$.

Problema 3.36 Considere una cáscara conductora esférica hueca de radio b mantenida a potencial cero, en cuyo interior se ubica un anillo circular concéntrico de radio a (con $a < b$) con carga uniforme Q . Determine el potencial en el interior de la cáscara utilizando la función de Green.

¹¹Vease: 2.263.4 y 3.248.2 en I.S. Gradshteyn, and I.M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York 1980. E.g.: $F_k^+(0) = ((2k)!)/((2k+1)!)$.

La función de Green-Dirichlet para una cavidad esférica de radio b es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{br'}{4\pi|(r')^2\mathbf{r} - b^2\mathbf{r}'|}.$$

La densidad de carga es, en coordenadas esféricas con eje polar perpendicular al anillo por su centro,

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta_a(r) \delta_{\pi/2}(\theta).$$

Luego, siendo \mathcal{B}_b la bola esférica de radio b ,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_o} \int_{\mathcal{B}_b} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' = \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_o} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{e}}'|} - \frac{ba}{|a^2\mathbf{r} - b^2a\hat{\mathbf{e}}'|} \right), \quad r \leq b,$$

donde $\hat{\mathbf{e}}'$ es el vector unitario en el plano que contiene al anillo.

Tenemos

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{e}}'|} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{(2\ell+1)r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\Omega) \overline{Y_{\ell,m}(\pi/2, \varphi')},$$

donde $r_{<} := \min\{r, a\}$ y $r_{>} := \max\{r, a\}$; y, ya que $a^2r \leq b^2a$,

$$\frac{ba}{|a^2\mathbf{r} - b^2a\hat{\mathbf{e}}'|} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{a^{\ell} r^{\ell}}{(2\ell+1)b^{2\ell+1}} Y_{\ell,m}(\Omega) \overline{Y_{\ell,m}(\pi/2, \varphi')}.$$

Como en el problema anterior

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \overline{Y_{\ell,m}(\pi/2, \varphi')} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } m \neq 0 \\ \sqrt{(2\ell+1)\pi} P_{\ell}(0) & , \text{ si } m = 0 \end{cases}.$$

Pero

$$P_{\ell}(0) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \ell \text{ es impar} \\ \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^{\ell}} \binom{\ell}{\ell/2} & , \text{ si } \ell \text{ es par} \end{cases}.$$

Entonces

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \binom{2\ell}{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{4^{\ell}} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \left(\frac{r_{<}^{2\ell}}{r_{>}^{2\ell+1}} - \frac{a^{2\ell} r^{2\ell}}{b^{4\ell+1}} \right);$$

o sea:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 0} \binom{2\ell}{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{4^{\ell}} P_{2\ell}(\cos(\theta)) \begin{cases} \frac{(b^{4\ell+1} - a^{4\ell+1})r^{2\ell}}{a^{2\ell+1}b^{4\ell+1}} & , \text{ si } r \leq a \\ \frac{a^{2\ell}}{b^{2\ell}} \left[\frac{b^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{b^{2\ell+1}} \right] & , \text{ si } a \leq r \leq b \end{cases}.$$

Observese que en el límite $a \rightarrow 0$ se obtiene –como es de esperar– el potencial de una carga puntual de magnitud Q en el centro de la esfera.

Problema 3.37 Considere una carga Q distribuida uniformemente sobre el manto de un cono recto de altura h y radio R de su base circular. Determine la densidad de carga volumétrica en coordenadas cilíndricas con origen en el vértice del cono y eje polar coincidente con el eje del cono y dirigido del vértice a la base (figura 9). Pro memoria: En un cono recto truncado de ángulo de apertura τ como en la figura 10; la porción del manto (superficie sin tapas circulares) subtendida por el ángulo α es: $\alpha \sin(\tau)(s^2 - r^2)/2 = \frac{\alpha}{2\sin(\tau)}(a^2 - b^2)$. Aquí, s es la distancia, por el cono, del vértice a la tapa inferior de radio a , mientras que r es la distancia, por el cono, del vértice a la tapa superior de radio b ; luego $\sin(\tau) = a/s = b/r$.

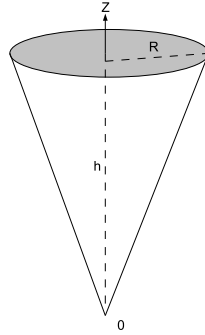


Figura 9: Cono

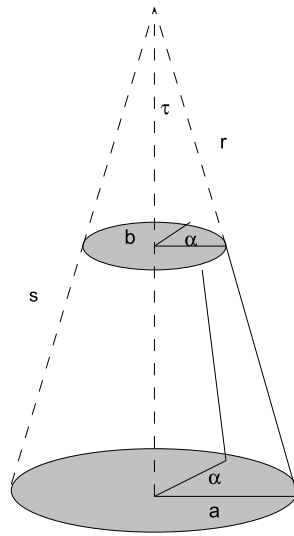


Figura 10: Cono truncado

El manto M del cono en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) con origen en el vértice del cono y eje polar coincidente con el eje del cono dirigido hacia la base, se describe como

$$M = \{(zR/h, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\} = \{(r, \varphi, hr/R) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{h^2 + R^2}\},$$

ya que en el manto del cono tenemos $r/z = R/h$.

Considere un volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que la intersección de V con el manto del cono sea la superficie $S = V \cap M$. Entonces, ya que la carga esta distribuida uniformemente sobre el manto debemos tener

$$(3.64) \quad \int_V \rho \, d\mathbf{x} = (\text{carga total}) \frac{(\text{área de } S)}{(\text{área del manto})} = Q \frac{|S|}{\pi R \sqrt{h^2 + R^2}},$$

donde $|S|$ denota el área de S (ya que $\pi R \sqrt{h^2 + R^2}$ es el área del manto del cono).

Usando la función (llamada función característica del conjunto I)

$$\chi_I(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in I \\ 0 & , \text{ si } x \notin I \end{cases}, \text{ cualquiera sea } I \subset \mathbb{R},$$

planteamos que

$$\rho(r, \varphi, z) = \delta(r - Rz/h) \chi_{[0,h]}(z) f(r, \varphi, z) = \delta(r - Rz/h) \chi_{[0,R]}(r) f(r, \varphi, z),$$

observando que si $z = hr/R$ entonces $\chi_{[0,h]}(hr/R) = \chi_{[0,R]}(r)$. Esta distribución se anula fuera del manto como debe ser debido a (3.64).

Consideramos las superficies especiales Σ del manto delimitadas por $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $z = z_1$ y $z = z_2$ con $2\pi \geq \varphi_2 > \varphi_1 \geq 0$ y $0 \leq z_1 < z_2 \leq h$. Es intuitivamente claro que cualquier superficie del manto que tenga un borde no demasiado salvaje puede aproximarse tan bien como se quiera cubriéndola con una unión (disjunta) de superficies de tipo Σ . Luego, si (3.64) se cumple para cualquier Σ entonces se cumple para cualquier superficie $S \subset M$ (de borde regular).

Ahora en nuestro cono, el ángulo de apertura τ satisface $\sin(\tau) = R/\sqrt{h^2 + R^2}$, y tenemos

$$|\Sigma| = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{2R} (r_2^2 - r_1^2) = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{R\sqrt{h^2 + R^2}}{2h^2} (z_2^2 - z_1^2), \quad r_j = Rz_j/h.$$

Por lo tanto, para volúmenes V tales que $V \cap M = \Sigma$, la condición es

$$(3.65) \quad \int_V \rho \, d\mathbf{x} = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{Q}{2\pi R^2} (r_2^2 - r_1^2) = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{Q}{2\pi h^2} (z_2^2 - z_1^2), \dots$$

cualesquiera sean φ_1, φ_2 y z_1, z_2 (resp. r_1, r_2) mientras cumplan $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ y $0 \leq z_1 < z_2 \leq h$ (resp. $0 \leq r_1 < r_2 \leq R$).

Calculamos ahora el miembro izquierdo de esta condición. Evaluando primeramente la integral sobre la variable radial r tenemos

$$\begin{aligned} \int_V \rho \, d\mathbf{x} &= \int_V \delta(r - Rz/h) \chi_{[0,R]}(r) f(r, \varphi, z) r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= \int_{V \cap M = \Sigma} \left(\frac{Rz}{h} \right) \chi_{[0,R]}(Rz/h) f(Rz/h, \varphi, z) d\varphi \, dz = \frac{R}{h} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \chi_{[0,h]}(z) z f(Rz/h, \varphi, z) \\ &= \frac{R}{h} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz z f(Rz/h, \varphi, z). \end{aligned}$$

Con esto, la condición (3.65) impone que f sea constante e igual a $Q/(\pi h R)$, i.e.

$$\rho(r, \varphi, z) = \frac{Q}{\pi h R} \delta(r - Rz/h) \chi_{[0,h]}(z) = \frac{Q}{\pi h R} \delta(r - Rz/h) \chi_{[0,R]}(r).$$

Hemos evaluado la integral volumétrica integrando primero sobre la variable radial r . Sin embargo, podríamos haber integrado primero la variable z recordando que $\delta(ax) = (1/|a|)\delta(x)$, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_V \rho \, d\mathbf{x} &= \int_V \delta(r - Rz/h) \chi_{[0,R]}(r) f(r, \varphi, z) r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= \frac{h}{R} \int_V \delta(hr/R - z) \chi_{[0,h]}(z) f(r, \varphi, z) r \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{h}{R} \int_{V \cap M = \Sigma} r \chi_{[0,h]}(hr/R) f(r, \varphi, hr/R) d\varphi \, dr \\ &= \frac{h}{R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr \chi_{[0,R]}(r) r f(r, \varphi, hr/R) = \frac{h}{R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr r f(r, \varphi, hr/R). \end{aligned}$$

La condición (3.65) nos conduce al mismo resultado.

Y, ya que estamos, calculemos la distribución de carga en coordenadas esféricas (r, φ, θ) [este r no es el anterior] con origen y eje como en el caso de coordenadas cilíndricas. El largo del manto (distancia del vértice a la base por el manto) es $\sqrt{h^2 + R^2}$. Aquí planteamos

$$\rho(r, \varphi, \theta) = \delta(\theta - \tau) \chi_{[0, \sqrt{h^2 + R^2}]}(r) g(r, \varphi, \theta),$$

que es cero fuera de M ; siendo $\tau \in [0, \pi/2]$ la apertura del cono dada por $\arcsin(\tau) = R/\sqrt{h^2 + R^2}$. La análoga a la superficie Σ usada en el caso cilíndrico es

$$\Sigma = \{(r, \varphi, \tau) : 0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq \sqrt{h^2 + R^2}, 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq 2\pi\}.$$

Y esta nuevamente claro que cualquier superficie no demasiado salvaje de M puede aproximarse por una unión disjunta de estas superficies simples. La fórmula indicada nos da

$$|\Sigma| = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{R}{2\sqrt{h^2 + R^2}} (r_2^2 - r_1^2);$$

con lo cual la condición (3.65) es:

$$(3.66) \quad \int_V \rho \, d\mathbf{x} = \frac{Q}{2\pi(h^2 + R^2)} (\varphi_2 - \varphi_1) (r_2^2 - r_1^2),$$

cualquiera sea el volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que $V \cap M = \Sigma$. Calculamos el miembro izquierdo de esta condición.

$$\begin{aligned} \int_V \rho \, d\mathbf{x} &= \int_V \delta(\theta - \tau) \chi_{[0, \sqrt{h^2 + R^2}]}(r) g(r, \varphi, \theta) r^2 \, dr \, d\varphi \, \sin(\theta) \, d\theta \\ &= \sin(\tau) \int_{V \cap M = \Sigma} \chi_{[0, \sqrt{h^2 + R^2}]}(r) g(r, \varphi, \tau) d\varphi r^2 \, dr = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 g(r, \varphi, \tau). \end{aligned}$$

Entonces de (3.66) obtenemos que $g(r, \varphi, \tau) = \mu/r$ donde la constante μ es

$$\mu = \frac{Q}{\pi R \sqrt{h^2 + R^2}};$$

o sea:

$$\rho(r, \varphi, \theta) = \frac{Q}{\pi R \sqrt{h^2 + R^2}} \frac{\delta(\theta - \tau)}{r}.$$

Tratamiento alternativo. Supongase dada la distribución de carga superficial σ sobre el manto del cono. O sea:

$$\text{Carga en } S = \int_S \sigma(\mathbf{r}) dF,$$

donde $S \subset M$. La distribución superficial está definida para $\mathbf{r} \in S$. Tenemos entonces $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \chi_{[0, h]}(z)$. La densidad volumétrica ρ debe ser tal que

$$\rho(\mathbf{r}) dv = \sigma(\mathbf{r}) dF;$$

el miembro derecho está definido solamente para $\mathbf{r} \in M$. En particular, $\rho(\mathbf{r}) = 0$ si $\mathbf{r} \notin M$. Con referencia a la figura, tenemos

$$dF = \left(\frac{dz}{\cos(\tau)} \right) (\tan(\tau) z d\varphi).$$

Luego, en coordenadas cilíndricas

$$\rho(r, \varphi, z) r dr \, d\varphi \, dz = \begin{cases} \frac{\tan(\tau)}{\cos(\tau)} \sigma(\varphi, z) z dz \, d\varphi & , \text{ si } (r, \varphi, z) \in M \\ 0 & , \text{ sino} \end{cases}$$

y entonces

$$\rho(r, \varphi, z) = \delta(r - \tan(\tau)z) \sigma(\varphi, z) \frac{1}{\cos(\tau)} = \delta(r - Rz/h) \sigma(\varphi, z) \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{h},$$

mientras $0 \leq z \leq h$. Si $z > h$ entonces $\rho = 0$, o sea

$$\rho(r, \varphi, z) = \frac{\sqrt{h^2 + R^2} \sigma(\varphi, z)}{h} \delta(r - Rz/h) \chi_{[0, h]}(z).$$

En coordenadas esféricas

$$dF = (dr) (r \sin(\tau) d\varphi);$$

luego

$$\rho(r, \varphi, \theta) r^2 \sin(\theta) dr d\varphi d\theta = \sigma(r, \varphi) \chi_{[0, \sqrt{h^2 + R^2}]}(r) \sin(\tau) r dr d\varphi.$$

Entonces

$$\rho(r, \varphi, \theta) = \frac{\sigma(r, \varphi)}{r} \delta(\theta - \tau).$$

En nuestro caso, $\sigma(\mathbf{r}) = Q/(\pi R \sqrt{h^2 + R^2})$, y se obtiene lo ya calculado.

4. Dieléctricos

Problema 4.1 *Un dieléctrico de constante ϵ_1 esta separado de uno de constante dieléctrica ϵ_2 por el plano $\{\mathbf{r} : x = 0\}$. Se quiere el campo eléctrico de una carga puntual de magnitud q ubicada en el dieléctrico de constante ϵ_1 a una distancia d del plano separador.*

Sugerencia: Plantee los potenciales en ambos medios introduciendo cargas virtuales. Para el medio 1 una espejada por el plano separador en el dieléctrico de constante ϵ_2 ; para el medio 2 una en la misma posición que la carga real.

Siendo $\mathbf{x} = (d, 0, 0)$ la posición de la carga, el Ansatz para el potencial es:

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} + \mathbf{x}|} \right\}, \quad \mathbf{r} \text{ con } x > 0,$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}, \quad \mathbf{r} \text{ con } x < 0.$$

Las condiciones en la interfaz (el plano separador) $\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} = \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}$ y $\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{n} = \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{n}$ se traducen con $\mathbf{n} = \mathbf{x}/d$ en:

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; \quad \text{en } \mathbf{r} = (0, y, z).$$

De aquí se obtiene $q' = (\epsilon_1 - \epsilon_2)q/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ y $q'' = 2\epsilon_2 q/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$.

Problema 4.2 *Una carga puntual de magnitud q está a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a -con $a < d$ - y constante dieléctrica ϵ . Determine el potencial eléctrico en todo el espacio en términos de un desarrollo en armónicos esféricos. Verifique que en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$ se recupera el caso de una esfera conductora.*

Trabajamos en coordenadas esféricas referidas al centro de la esfera con eje polar coincidente con la recta que une este centro con la carga puntual. Tanto la distribución de cargas como la distribución del material dieléctrico es invariante ante rotaciones arbitrarias alrededor del eje polar por lo cual ni campo ni potencial dependen del ángulo azimutal.

Para el potencial adentro de la esfera planteamos ($x := \cos(\theta)$)

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell \geq 0} a_\ell r^\ell P_\ell(x), \quad 0 \leq r < a,$$

como serie de soluciones regulares de la ecuación de Laplace. Fuera de la esfera dieléctrica,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \sum_{\ell \geq 0} \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(x), \quad r > a,$$

donde el potencial electrostático de la carga puntual está “corregido” por una serie de soluciones de la ecuación de Laplace que se anulan para $r \rightarrow \infty$. Aquí, $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{z}}$. Las condiciones en la interfase (superficie de la esfera) son –ya que la normal exterior es $\hat{\mathbf{r}}^-$ –

$$\Phi \text{ es continua en } r = a, \quad \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^-, \theta) = \epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^+, \theta);$$

donde las derivadas parciales radiales se entienden como límites desde adentro (a^-) y respectivamente desde afuera (a^+) de la esfera. Para determinar los coeficientes a_ℓ, b_ℓ , es preciso hacer el desarrollo del potencial coulombiano para $r < d$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{r^\ell}{d^{\ell+1}} P_\ell(x), \quad r < d.$$

Entonces la continuidad de Φ en $r = a$ nos proporciona

$$(4.1) \quad b_\ell = (a_\ell - \gamma d^{-(\ell+1)}) a^{2\ell+1}, \quad \ell \geq 0;$$

donde hemos definido $\gamma := q/(4\pi\epsilon_o)$. La discontinuidad de la derivada radial en a nos da:

$$(4.2) \quad \epsilon_o(\ell + 1)b_\ell = \ell a^{2\ell+1}(\epsilon_o \gamma d^{-(\ell+1)} - \epsilon a_\ell), \quad \ell \geq 0.$$

La solución del sistema lineal (4.1,4.2) es:

$$a_\ell = \frac{q(2\ell + 1)}{4\pi\epsilon_o d^{\ell+1}(\ell + 1 + \eta\ell)}, \quad b_\ell = \frac{q\ell(1 - \eta)a^{2\ell+1}}{4\pi\epsilon_o d^{\ell+1}(\ell + 1 + \eta\ell)}, \quad \ell \geq 0;$$

donde $\eta := \epsilon/\epsilon_o$.

El límite $\eta \rightarrow 1$ conduce al potencial coulombiano puro ($b_\ell = 0$ y $a_\ell = q/(4\pi\epsilon_o d^{\ell+1})$). El límite $\eta \rightarrow \infty$ produce el potencial

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \sum_{\ell \geq 1} (a/d)^{2\ell+1} \frac{d^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(x), \quad r > a,$$

y cero para $r < a$, que corresponde al del caso de una esfera conductora.

Problema 4.3 Una cáscara cilíndrica muy larga de material dieléctrico con constante ϵ/ϵ_o y radio interior a y exterior b , se ubica en un campo que era previamente constante E_o con su eje perpendicular al campo. El medio dentro y fuera de la cáscara tiene constante dieléctrica uno.

a) Determine el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones, despreciando el efecto de que el cilindro tiene longitud finita.

b) Dibuje las líneas de fuerza para el caso típico de $b = 2a$.

c) Discuta las formas límites de la solución para un cilindro sólido dieléctrico en un campo uniforme y para una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Calculamos como si el cilindro fuese infinitamente largo. Elegimos coordenadas cilíndricas (r, φ, z) cuyo eje “ z ” coincide con el eje del cilindro. El campo asintótico (constante en una dirección fija perpendicular al eje del cilindro) no depende de z , y tomamos su dirección como eje “ x ” positivo a partir del cual definimos el ángulo azimutal φ . Entonces el campo asintótico es $\mathbf{E}_o = E_o(1, 0, 0)$ en cartesianas y $\mathbf{E}_o = E_o \cos(\varphi)\mathbf{e}_r - E_o \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi$ en coordenadas cilíndricas. Se tiene $\mathbf{E}_o = -\nabla\Phi_o$, con $\Phi_o(x, y, z) = -E_o x$ o bien $\Phi_o(r, \varphi, z) = -E_o r \cos(\varphi)$.

a) Para obtener el potencial Φ , debemos resolver la ecuación de Laplace para las tres regiones: (I) $0 \leq r < a$, (II) $a < r < b$ y (III) $b < r$ y empalmar las soluciones de modo de cumplir las condiciones de borde para el dieléctrico (la normal coincide con \mathbf{e}_r):

$$\begin{aligned} \epsilon_o \mathbf{E}^{(I)} \cdot \mathbf{e}_r &= \epsilon \mathbf{E}^{(II)} \cdot \mathbf{e}_r, \text{ y } \mathbf{E}^{(I)} \wedge \mathbf{e}_r = \mathbf{E}^{(II)} \wedge \mathbf{e}_r \text{ para } r = a; \\ \epsilon \mathbf{E}^{(II)} \cdot \mathbf{e}_r &= \epsilon_o \mathbf{E}^{(III)} \cdot \mathbf{e}_r, \text{ y } \mathbf{E}^{(II)} \wedge \mathbf{e}_r = \mathbf{E}^{(III)} \wedge \mathbf{e}_r \text{ para } r = b. \end{aligned}$$

Ya que \mathbf{E} no depende de z , estas condiciones se describen como ($\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi$):

$$\begin{aligned} \epsilon_o E_r^{(I)} &= \epsilon E_r^{(II)}, \quad E_\varphi^{(I)} = E_\varphi^{(II)}, \quad r = a; \\ \epsilon E_r^{(II)} &= \epsilon_o E_r^{(III)}, \quad E_\varphi^{(II)} = E_\varphi^{(III)}, \quad r = b. \end{aligned}$$

Recordando que $\nabla f = (\partial f / \partial r) \mathbf{e}_r + r^{-1} (\partial f / \partial \varphi) \mathbf{e}_\varphi + (\partial f / \partial z) \mathbf{e}_z$, obtenemos las condiciones de empalme en términos del potencial (que no depende de z):

$$(4.3) \quad \boxed{\epsilon_o \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r}(a, \varphi) = \epsilon \frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial r}(a, \varphi), \quad \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \varphi}(a, \varphi) = \frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial \varphi}(a, \varphi)},$$

$$(4.4) \quad \boxed{\epsilon \frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial r}(b, \varphi) = \epsilon_o \frac{\partial \Phi^{(III)}}{\partial r}(b, \varphi), \quad \frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial \varphi}(b, \varphi) = \frac{\partial \Phi^{(III)}}{\partial \varphi}(b, \varphi)}.$$

Además, debemos cumplir con la condición asintótica

$$(4.5) \quad \boxed{\Phi^{(III)}(r, \varphi) \sim \Phi_o(r, \varphi), \quad r \rightarrow \infty};$$

y con la condición de continuidad en todo punto.

Como de costumbre, buscamos expresar los potenciales como series de soluciones en variables separadas de la ecuación de Laplace. En nuestro caso, no habiendo dependencia de z , la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas nos conduce a la ecuación diferencial de Euler para la función radial y obtenemos

$$\psi_o(r, \varphi) = a_o + b_o \ln(r), \quad \psi_n(r, \varphi) = r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) + r^{-n} (c_n \cos(n\varphi) + d_n \sin(n\varphi)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

como todas las soluciones en variables separadas. Entonces, desechando las singularidades para $r = 0$, planteamos:

$$\Phi^{(I)}(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)), \quad 0 \leq r < a;$$

$$\Phi^{(II)}(r, \varphi) = \alpha_o + \beta_o \ln(r) + \sum_{n \geq 1} \{r^n (\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)) + r^{-n} (\gamma_n \cos(n\varphi) + \delta_n \sin(n\varphi))\}, \quad a < r < b;$$

$$\Phi^{(III)}(r, \varphi) = \mu_o + \nu_o \ln(r) + \sum_{n \geq 1} \{r^n (\mu_n \cos(n\varphi) + \nu_n \sin(n\varphi)) + r^{-n} (\sigma_n \cos(n\varphi) + \tau_n \sin(n\varphi))\}, \quad b < r.$$

La condición asintótica (4.5) es que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} (\Phi^{(III)}(r, \varphi, z) - \Phi_o(r, \varphi, z)) = \lim_{r \rightarrow \infty} [\mu_o + \nu_o \ln(r) + (\mu_1 + E_o)r \cos(\varphi) + \nu_1 r \sin(\varphi) \\ &+ \sum_{n \geq 1} \{r^{n+1} (\mu_{n+1} \cos((n+1)\varphi) + \nu_{n+1} \sin((n+1)\varphi)) + r^{-n} (\sigma_n \cos(n\varphi) + \tau_n \sin(n\varphi))\}], \end{aligned}$$

lo que nos da: $\mu_1 = -E_o$, $\mu_n = 0$ para todo $n \neq 1$, y $\nu_n = 0$ para todo $n \geq 0$. O sea,

$$\Phi^{(III)}(r, \varphi) = -E_o r \cos(\varphi) + \sum_{n \geq 1} r^{-n} (\sigma_n \cos(n\varphi) + \tau_n \sin(n\varphi)), \quad b < r.$$

Ahora usamos las condiciones de continuidad en $r = a$ y en $r = b$ y las condiciones de empalme (4.3) y (4.4) para determinar los coeficientes restantes.

La continuidad en $r = b$ nos da: $\alpha_o + \beta_o \ln(b) = 0$ y también

$$(4.6) \quad \sigma_1 = b^2(E_o + \alpha_1) + \gamma_1, \quad \sigma_n = b^{2n}\alpha_n + \gamma_n \quad (n \geq 2), \quad \tau_n = b^{2n}\beta_n + \delta_n, \quad (n \geq 1).$$

Imponiendo las condiciones de empalme (4.4) para las derivadas angulares obtenemos nuevamente (4.6). Mientras que la condición (4.4) para las derivadas radiales nos da:

$$(4.7) \quad \beta_o = 0, \quad \epsilon(\gamma_1 - b^2\alpha_1) = \epsilon_o(E_o b^2 + \sigma_1), \\ \epsilon_o\sigma_n = \epsilon(\gamma_n - b^{2n}\alpha_n) \quad (n \geq 2), \quad \epsilon_o\tau_n = \epsilon(\delta_n - b^{2n}\beta_n) \quad (n \geq 1).$$

Entonces deducimos que $\alpha_o = 0$.

La continuidad en $r = a$ nos entrega $a_o = \alpha_o + \beta_o \ln(a) = 0$ y

$$(4.8) \quad \gamma_n = a^{2n}(a_n - \alpha_n), \quad \delta_n = a^{2n}(b_n - \beta_n) \quad (n \geq 1).$$

Imponiendo las condiciones de empalme (4.3) volvemos a obtener (4.8) de la condición para las derivadas angulares mientras que la condición para las derivadas radiales nos da

$$(4.9) \quad \epsilon_o a_n = \epsilon(\alpha_n - a^{-2n}\gamma_n), \quad \epsilon_o b_n = \epsilon(\beta_n - a^{-2n}\delta_n) \quad (n \geq 1).$$

Definimos el parámetro $\eta := \epsilon_o/\epsilon$. Combinando (4.8) y (4.9) obtenemos

$$(4.10) \quad \alpha_n = \frac{1+\eta}{2} a_n, \quad \gamma_n = a^{2n} \frac{1-\eta}{2} a_n, \quad \beta_n = \frac{1+\eta}{2} b_n, \quad \delta_n = a^{2n} \frac{1-\eta}{2} b_n \quad (n \geq 1).$$

Combinando (4.6) y (4.7) obtenemos

$$(4.11) \quad 2b^2 E_o = (\eta - 1)\gamma_1 - b^2(1 + \eta)\alpha_1, \quad b^{2n}(1 + \eta)\alpha_n = (\eta - 1)\gamma_n \quad (n \geq 2), \\ b^{2n}(1 + \eta)\beta_n = (\eta - 1)\delta_n \quad (n \geq 1).$$

Con (4.10) y (4.11) para $n = 1$ obtenemos¹²

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{-4b^2 E_o \eta}{(1 + \eta)^2 b^2 - (1 - \eta)^2 a^2} =: A}, \quad b^2(1 + \eta)^2 b_1 = -a^2(1 - \eta)^2 b_1;$$

lo que implica que $b_1 = 0$; mientras que para $n \geq 2$ tenemos

$$b^{2n}(1 + \eta)^2 a_n = -a^{2n}(1 - \eta)^2 a_n, \quad b^{2n}(1 + \eta)^2 b_n = -a^{2n}(1 - \eta)^2 b_n.$$

Esta última relación indica que

$$a_n = b_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

Luego, $b_n = \beta_n = \delta_n = \tau_n = 0$ para $n \geq 1$; $a_n = \alpha_n = \gamma_n = \sigma_n = 0$ para $n \geq 2$; y

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{-2b^2 E_o \eta(1 + \eta)}{(1 + \eta)^2 b^2 - (1 - \eta)^2 a^2}}, \quad \boxed{\gamma_1 = \frac{-2b^2 a^2 E_o \eta(1 - \eta)}{(1 + \eta)^2 b^2 - (1 - \eta)^2 a^2}}, \quad \boxed{\sigma_1 = \frac{-b^2 E_o(1 - \eta^2)(b^2 - a^2)}{(1 + \eta)^2 b^2 - (1 - \eta)^2 a^2} =: B}.$$

En consecuencia:

$$\Phi^{(I)}(r, \varphi) = r a_1 \cos(\varphi), \quad 0 \leq r < a; \\ \Phi^{(II)}(r, \varphi) = (r \alpha_1 + r^{-1} \gamma_1) \cos(\varphi), \quad a < r < b;$$

¹²Obsérvese que $\eta > 0$ implica que $|1 + \eta| > |1 - \eta|$ y luego -ya que $b \geq a > 0$ - obtenemos que $(1 + \eta)^2 b^2 > (1 - \eta)^2 a^2$.

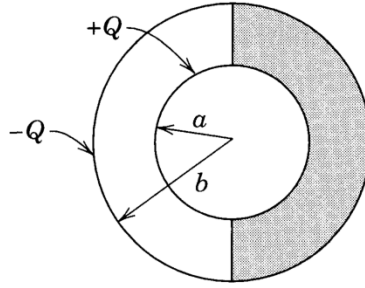


Figura 11: Capacitor esférico

$$\Phi^{(III)}(r, \varphi) = (-E_o r + r^{-1} \sigma_1) \cos(\varphi), \quad b < r.$$

o bien:

$$\Phi(r, \varphi, z) = \cos(\varphi) \begin{cases} A \begin{cases} r & , \text{ si } 0 \leq r < a \\ \frac{(1+\eta)r}{2} + \frac{a^2(1-\eta)}{2r} & , \text{ si } a \leq r \leq b \end{cases} \\ -E_o r + \frac{B}{r} & , \text{ si } r \geq b \end{cases}.$$

En el caso $a = 0$ obtenemos de esto el potencial

$$\Phi(r, \varphi, z) = \cos(\varphi) \begin{cases} \frac{-2E_o \eta}{(1+\eta)} r & , \text{ si } 0 \leq r \leq b \\ -E_o r + \frac{b^2 E_o (1-\eta)}{(1+\eta)} \frac{1}{r} & , \text{ si } r \geq b \end{cases}.$$

En el caso $a = b$ debemos además hacer el límite $\eta \rightarrow 1$ y obtenemos que el potencial es Φ_o .

Problema 4.4 *Dos cáscaras conductoras, de radio interior a y exterior b , tienen cargas $\pm Q$. Se llena la mitad del espacio entre las cáscaras con una cáscara dieléctrica (de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0), como lo muestra la figura 11.*

- (a) *Encuentre el campo en todas partes entre las cáscaras conductoras.*
- (b) *Calcule la distribución superficial de carga en la cáscara conductora interior.*
- (c) *Calcule la densidad de cargas de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$.*

El desmembramiento en a) y b) es meramente indicativo. La vaina es una sola. c) es otra cosa.

Las cáscaras conductoras son superficies equipotenciales. El campo fuera de la región entre las cáscaras se anula.

Trabajamos en coordenadas esféricas con eje polar tal que la interfase corresponde al ángulo polar $\theta = \pi/2$ y dirección hacia el medio de constante dieléctrica ϵ . En tal caso no hay dependencia del ángulo azimutal ϕ . Las condiciones de contorno expresadas en términos del potencial Φ definido para $a \leq r \leq b$ y el campo interior $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, son:

- a) En las cáscaras el campo eléctrico debe ser radial y constante por lo cual

$$(4.12) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(a, \theta) = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(b, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \pi;$$

Equivalentemente, para $0 \leq \theta < \pi$

$$(4.13) \quad \Phi(a, \theta) = V_1, \quad \Phi(b, \theta) = V_2$$

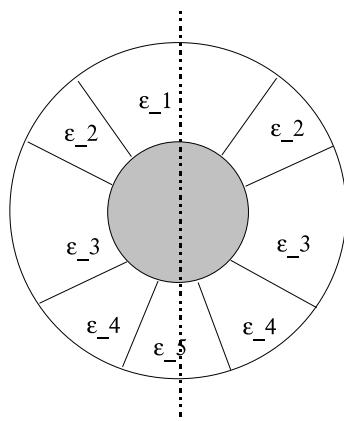


Figura 12: Una distribución de dieléctricos con simetría azimutal y interfases de ángulo polar constante

con constantes V_1, V_2 .

- b) En la interfase entre los dieléctricos el vector unitario normal a la superficie de la interfase es \mathbf{e}_θ y tenemos $\epsilon_o \mathbf{E}_\theta(r, (\pi/2)^+) = \epsilon \mathbf{E}_\theta(r, (\pi/2)^-)$ porque no hay carga libre en la interfase; además $\mathbf{E}_r(r, (\pi/2)^+) = \mathbf{E}_r(r, (\pi/2)^-)$ para $a \leq r \leq b$. Esto, en términos del potencial, es

$$(4.14) \quad \epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, (\pi/2)^+) = \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, (\pi/2)^-), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, (\pi/2)^+) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, (\pi/2)^-), \quad a \leq r \leq b.$$

El primer impulso es plantear a Φ como serie de polinomios de Legendre y usar las condiciones de contorno para determinar los coeficientes. Sin embargo la condición de contorno en la interfase (4.14) se cumple trivialmente con cualquier función puramente radial y, las dos superficies equipotenciales son esféricas. Esto sugiere, quizás, intentar una solución puramente radial:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = A + B/r, \quad a \leq r \leq b.$$

Este Ansatz cumple trivialmente con (4.14) y (4.12), y la determinación con (4.13) de las constantes A, B en términos de las (aún desconocidas) constantes V_1, V_2 da:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \underbrace{\frac{bV_2 - aV_1}{b - a}}_{=:A} + \underbrace{\frac{(V_1 - V_2)ab}{b - a}}_{=:B} \frac{1}{r}, \quad a \leq r \leq b.$$

Luego,

$$\mathbf{E} = -\frac{B}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad a \leq r \leq b.$$

Es notable que esta es la solución cualquier sea la distribución de dieléctricos siempre que haya simetría azimutal y las interfases entre dieléctricos sean superficies con θ constante. Por ejemplo, la distribución obtenida rotando la figura 12 alrededor del eje marcado. Lo que cambiará en cada caso es la distribución superficial de cargas en las cáscaras que depende solamente del ángulo polar.

En nuestro caso la normal a la superficie interior (radio a) hacia el espacio entre las cáscaras es \mathbf{e}_r mientras que la normal a la superficie exterior (radio b) hacia el espacio entre las cáscaras es $-\mathbf{e}_r$; entonces

$$\sigma(a, \theta, \varphi) = \begin{cases} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r = -\epsilon B/a^2 & , \quad 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \epsilon_o \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r = -\epsilon_o B/a^2 & , \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} ;$$

y

$$\sigma(b, \theta, \varphi) = \begin{cases} -\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r = \epsilon B/b^2 & , \quad 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -\epsilon_o \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r = \epsilon_o B/b^2 & , \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} .$$

Si integramos la densidad de carga superficial en la esfera interior \mathcal{S}_a , obtenemos:

$$Q = \int_{\mathcal{S}_a} \sigma(a, \varphi, \theta) a^2 d\Omega = -2\pi a^2 (B/a^2) \left[\epsilon \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta + \epsilon_o \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \right] = -2\pi B(\epsilon + \epsilon_o) .$$

Luego,

$$B = -\frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_o)} .$$

Esto determina la diferencia de potencial

$$V_1 - V_2 = \frac{Q(a-b)}{2\pi ab(\epsilon + \epsilon_o)}$$

y deja una constante libre en el potencial (usualmente se pone $V_2 = 0$ para que $\Phi = 0$ cuando $r > b$).

c) Para la polarización $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_o \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_o) \mathbf{E}$ en medios lineales como estamos considerando. La densidad de carga inducida en la superficie cuya normal interior es \mathbf{n} es $\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$. En nuestro caso,

$$\mathbf{P} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \pi/2 < \theta \leq \pi \\ \frac{(\epsilon - \epsilon_o)Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_o)r^2} \mathbf{e}_r & , \quad \text{si } 0 \leq \theta < \pi/2 \end{cases} .$$

Luego,

$$\sigma_p(a, \varphi, \theta) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \pi/2 < \theta \leq \pi \\ \frac{(\epsilon - \epsilon_o)Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_o)a^2} & , \quad \text{si } 0 \leq \theta < \pi/2 \end{cases} .$$

A los fines de completar el problema, el lector debería plantear desarrollo en polinomios de Legendre

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{cases} \Phi^+(r, \theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \{A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}\} P_\ell(\cos(\theta)) & , \quad \text{para } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \Phi^-(r, \theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \{C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\} P_\ell(\cos(\theta)) & , \quad \text{para } \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases} .$$

y determinar los coeficientes a partir de las condiciones de contorno. Lo que resulta complicado y tedioso y muestra que siempre conviene pensar un poco y probar lo más simple antes de largarse a calcular.

5. Magnetostática

Problema 5.1 *Determine la contribución al campo magnético de un segmento recto por el cual fluye una corriente constante de magnitud I . Considere el caso especial de una recta infinita.*

La ley de Biot-Savart es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' ;$$

donde C es el circuito donde fluye la corriente \mathbf{I} . En nuestro caso C consiste de un segmento recto S y el resto que no está especificado¹³. La integral tomada sobre S es la contribución a \mathbf{B} de S .

Refiriendonos a la figura 13, sea ℓ la recta (infinita) que contiene al segmento y $\hat{\mathbf{e}}$ el vector unitario sobre ℓ en

¹³Cuando S es la recta infinita entera, $S = C$. Si S es finito o semi-infinito (con comienzo pero sin fin) entonces tiene que haber un resto porque la corriente debe fluir y no puede desaparecer en un extremo.

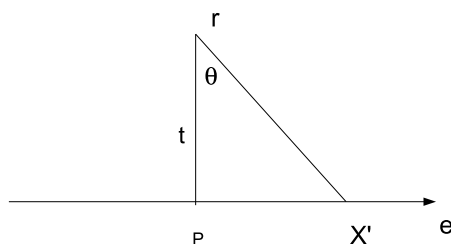


Figura 13: Segmento recto de un circuito

la dirección de corriente. Consideramos un punto arbitrario de posición \mathbf{r} y sea P el punto de ℓ que se obtiene proyectando \mathbf{r} sobre ℓ . Elegimos a P como origen de un sistema de coordenadas tal que ℓ coincida con el eje “ x ” y la dirección dada por $\hat{\mathbf{e}}$ sea la positiva. Entonces, la posición x' sobre ℓ está dada por

$$x' = t \tan(\theta)$$

donde $t = |\mathbf{r}|$ es la distancia de \mathbf{r} a ℓ y el ángulo θ está especificado por:

$$(5.1) \quad \sin(\theta) = \frac{x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \cos(\theta) = \frac{t}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|};$$

donde $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$. Observese que $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ (vea la figura).

Ya que $\mathbf{I}(\mathbf{r}') = I \hat{\mathbf{e}}$ si \mathbf{r}' cae en $S \subset \ell$ y, en ese caso,

$$|\hat{\mathbf{e}} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sin((\pi/2) - \theta) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta),$$

o bien

$$\hat{\mathbf{e}} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{e}} \wedge \mathbf{r} = t(\hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta)(\hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}}),$$

la contribución es

$$\mathbf{B}_S(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' \right) \hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}},$$

donde $x_1 < x_2$ son los extremos de S . Ahora, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = t / \cos(\theta)$ y $dx' = t / \cos(\theta)^2$ y entonces

$$\mathbf{B}_S(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi t} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta) d\theta \right) \hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi t} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \right) \hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}},$$

donde $\theta_{1,2}$ son los ángulos asociados a los extremos de S . Es importante observar que de acuerdo a (5.1) el ángulo θ se mide a partir de la perpendicular a ℓ que pasa por \mathbf{r} siendo positivo en la dirección de $\hat{\mathbf{e}}$ y negativo en la dirección opuesta.

Si el segmento está especificado por $S = \{x\hat{\mathbf{e}} : x_1 \leq x \leq x_2\}$ (en cuyo caso el origen está en la recta ℓ), entonces

$$\mathbf{B}_S(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mu_o I}{4\pi |\mathbf{r} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}|} \left(\frac{x_2}{|\mathbf{r} - x_2 \hat{\mathbf{e}}|} - \frac{x_1}{|\mathbf{r} - x_1 \hat{\mathbf{e}}|} \right) \right] \hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}}.$$

Si S es toda la recta tendremos, cualquiera sea \mathbf{r} que no este sobre la recta, que $\theta_2 = \pi/2$ y $\theta_1 = -\pi/2$ y obtenemos el resultado conocido¹⁴:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o I}{2\pi t} \hat{\mathbf{e}} \wedge \hat{\mathbf{r}}, \quad t \text{ es la distancia de } \mathbf{r} \text{ a la recta generada por } \hat{\mathbf{e}}.$$

¹⁴Alternativamente $x_2 \rightarrow \infty$ y $x_1 \rightarrow -\infty$.

Problema 5.2 Muestre que el campo general \mathbf{B} con simetría axial puede escribirse como $\mathbf{B} = f(r, z)(\nabla\varphi) + (\nabla\varphi) \wedge (\nabla\psi)(r, z)$ en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) con una función escalar ψ de r y z . Calcule las corrientes inducidas por este campo.

Sea R_α la rotación por α alrededor del eje de simetría usado para definir las coordenadas cilíndricas. Para evitar confusiones escribimos v_1 para la componente radial, v_2 para la componente angular, y v_3 para la componente axial del vector \mathbf{v} . Y, como siempre, $\widehat{\mathbf{v}}$ denota el vector unitario $|\mathbf{v}|^{-1}\mathbf{v}$ asociado a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Tenemos

$$\begin{aligned} R_\alpha \widehat{\mathbf{x}} &= \cos(\alpha)\widehat{\mathbf{x}} + \sin(\alpha)\widehat{\mathbf{y}}, & R_\alpha \widehat{\mathbf{y}} &= \cos(\alpha)\widehat{\mathbf{y}} - \sin(\alpha)\widehat{\mathbf{x}}, & R_\alpha \widehat{\mathbf{z}} &= \widehat{\mathbf{z}}; \\ R_\alpha \widehat{\mathbf{e}}_2(r, \varphi, z) &= R_\alpha(\cos(\varphi)\widehat{\mathbf{y}} - \sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}) = \cos(\varphi)R_\alpha \widehat{\mathbf{y}} - \sin(\varphi)R_\alpha \widehat{\mathbf{x}} \\ &= -(\cos(\alpha)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\alpha))\widehat{\mathbf{x}} + (\cos(\alpha)\cos(\varphi) - \sin(\alpha)\sin(\varphi))\widehat{\mathbf{y}} \\ &= -\sin(\varphi + \alpha)\widehat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi + \alpha)\widehat{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{e}}_2(r, \varphi + \alpha, z); \end{aligned}$$

y similarmente

$$R_\alpha \widehat{\mathbf{e}}_1 = \widehat{\mathbf{e}}_1(r, \varphi + \alpha, z), \quad R_\alpha \widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{z}}.$$

El campo \mathbf{B} tiene simetría axial si y solo si

$$R_\alpha \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(R_\alpha \mathbf{r}).$$

Con $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_1(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{e}}_1(r, \varphi, z) + B_2(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{e}}_2(r, \varphi + \alpha, z) + B_3(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{z}}$, el miembro izquierdo de la condición es

$$B_1(\mathbf{r})R_\alpha \widehat{\mathbf{e}}_1(r, \varphi, z) + B_2(\mathbf{r})R_\alpha \widehat{\mathbf{e}}_2(r, \varphi, z) + B_3(\mathbf{r})R_\alpha \widehat{\mathbf{z}},$$

mientras que el miembro derecho de ella es

$$B_1(R_\alpha \mathbf{r})R_\alpha \widehat{\mathbf{r}} + B_2(R_\alpha \mathbf{r})R_\alpha \widehat{\varphi} + B_3(R_\alpha \mathbf{r})R_\alpha \widehat{\mathbf{z}};$$

por lo tanto

$$B_j(r, \varphi + \alpha, z) = B_j(R_\alpha \mathbf{r}) = B_j(\mathbf{r}) = B_j(r, \varphi, z), \quad j = 1, 2, 3,$$

de donde B_j no depende del ángulo azimutal. En otras palabras $|\mathbf{B}|$ no depende del ángulo y la dirección se obtiene por rotación.

Usando $\nabla\varphi = \widehat{\mathbf{e}}_2/r$, $\widehat{\mathbf{e}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{e}}_2 = \widehat{\mathbf{z}}$ y permutaciones cíclicas, tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{z}} &= \widehat{\mathbf{e}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{e}}_2 = r\widehat{\mathbf{e}}_1 \wedge (\nabla\varphi) \\ \widehat{\mathbf{e}}_1 &= -\widehat{\mathbf{z}} \wedge \widehat{\mathbf{e}}_2 = -r\widehat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r, \varphi, z) &= B_1(r, z)\widehat{\mathbf{e}}_1 + B_2(r, z)\widehat{\mathbf{e}}_2 + B_3(r, z)\widehat{\mathbf{z}} = -rB_1(r, z)\widehat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla\varphi) + rB_2(r, z)(\nabla\varphi) + rB_3(r, z)\widehat{\mathbf{e}}_1 \wedge (\nabla\varphi) \\ &= rB_2(r, z)(\nabla\varphi) + r(-B_1(r, z)\widehat{\mathbf{z}} + B_3(r, z)\widehat{\mathbf{e}}_1) \wedge (\nabla\varphi); \end{aligned}$$

recordando que para una función escalar ψ de las variables r y z , se tiene

$$\nabla\psi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\psi}{\partial r}(r, z)\widehat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z}(r, z)\widehat{\mathbf{z}}$$

podemos escribir

$$\mathbf{B} = f(r, z)(\nabla\varphi) + (\nabla\varphi) \wedge (\nabla\psi)$$

si $f(r, z) = rB_2(r, z)$ y

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -rB_3, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = rB_1.$$

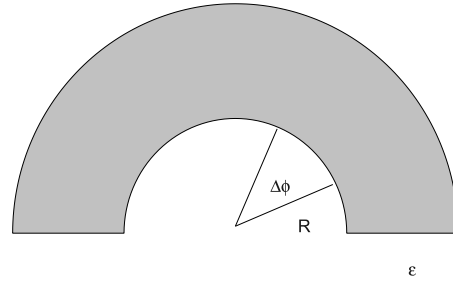


Figura 14: Porción del manto (magnificada)

Problema 5.3 En el manto de un cilindro recto (e infinito) de radio R circula una corriente de densidad superficial $J\hat{e}_\varphi$, con J constante (\hat{e}_φ es el vector unidad en la dirección del ángulo asociado con coordenadas cilíndricas con eje ‘ z ’ coincidente con el eje del cilindro).

1) Se quiere conocer la presión sobre el manto.

Para ello, considere una corriente en la región $R \leq r \leq R + \epsilon$ (vea la figura 14) de densidad volumétrica $K\hat{e}_\varphi$ con K constante, y:

- Calcule el campo magnético en esta región (manto de ancho ϵ).
 - Determine la fuerza sobre un elemento de superficie ΔS del manto entre φ y $\varphi + \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi \ll 1$): $\Delta S = R\Delta\varphi\Delta z$, donde Δz es la altura (longitud axial).
 - Calcule la presión y pase al límite $\epsilon \rightarrow 0$, $K \rightarrow \infty$ con $J = K\epsilon$ constante.
- 2) Aplique el resultado para estimar la presión sobre una espira de largo ℓ con n vueltas recorrida por una corriente de magnitud I .

1)

a) Ya que la densidad de corriente volumétrica no depende del ángulo azimutal ni de la coordenada axial z , lo mismo sucede para el campo magnético: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_r(r)\hat{e}_r + B_\varphi(r)\hat{e}_\varphi + B_z(r)\hat{z}$. Entonces, $0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = r^{-1}(\partial(rB_r)/\partial r) + r^{-1}(\partial B_\varphi/\partial \varphi) + (\partial B_z/\partial z) = r^{-1}(\partial(rB_r)/\partial r)$ y por ende $rB_r(r)$ es constante de donde $B_r(r) = c/r$ que es singular en $r = 0$ salvo cuando $c = 0$. No hay entonces componente radial: $B_r \equiv 0$. También, ya teniendo en cuenta lo recién observado,

$$K\hat{e}_\varphi = \nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial r}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\hat{z};$$

luego, por un lado $B_\varphi(r) = c/r$ de donde $c = 0$ y no hay componente azimutal; y por otro lado la única componente no nula es la axial con $B_z(r) = -Kr + C$. A la constante C la determinamos con es el siguiente argumento (crucial). Queremos al final de toda esta excursión considerar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Ahora, cuando $\epsilon = 0$ y la corriente es solamente superficial (dada por $J\hat{e}_\varphi$) el campo magnético se anula para $r \geq R$. Pedimos entonces, para recuperar el campo correcto en el límite, que $B_z(R + \epsilon) = 0$ y obtenemos entonces $C = K(R + \epsilon)$ y

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = K(R + \epsilon - r)\hat{z}, \quad R \leq r \leq R + \epsilon.$$

b) Considerando el “elemento de volumen” $\Delta V = [R, R + \epsilon] \times [\varphi, \varphi + \Delta\varphi] \times [z, z + \Delta z]$ la fuerza que ejerce el campo magnético sobre él es ($\hat{e}_\varphi \wedge \hat{z} = \hat{e}_r$)

$$\begin{aligned} \Delta F &= \int_R^{R+\epsilon} dr \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} r d\varphi \int_z^{z+\Delta z} dz (\mathbf{K}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})) = K^2(\Delta\varphi)(\Delta z) \int_R^{R+\epsilon} r(R + \epsilon - r) dr \hat{e}_r \\ &= K^2 \frac{\Delta S}{R} \left(\frac{(R + \epsilon)^3}{2} - \frac{R^2(R + \epsilon)}{2} - \frac{(R + \epsilon)^3}{3} + \frac{R^3}{3} \right) \hat{e}_r = \left(\frac{K^2 \epsilon^2 \Delta S}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \hat{e}_r. \end{aligned}$$

¡Es aquí donde el valor de la constante C juega un papel absolutamente crucial eliminando los sumandos lineales en ϵ !

c) Por lo tanto, en el límite deseado, la presión que es puramente radial, tiene magnitud $J^2/2$.

2) La densidad de corriente superficial es $J = nI/\ell$ con lo cual obtenemos la presión aproximada $n^2 I^2/2\ell^2$.

Problema 5.4 Considere una cáscara esférica de radio R . En el interior de la cáscara existe un campo magnético de la forma

$$(5.2) \quad B_x = 2Qx, \quad B_y = 2Qy, \quad B_z = -4Qz,$$

donde Q es una constante y (x, y, z) son coordenadas Cartesianas centradas en el origen de la cáscara esférica.

a) Muestre que el campo magnético satisface las ecuaciones de Maxwell en el interior de la cáscara. Encuentre el potencial magnético tal que $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$.

b) Encuentre la distribución de corriente en la cáscara que produce este campo magnético en su interior. Calcule el campo magnético en el exterior de la cáscara.

a) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$, las ec. de Maxwell se satisfacen ya que no hay corrientes en el interior de la esfera. El potencial Φ está determinado por:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2Qx, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2Qy, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 4Qz;$$

y la integración de la primera ec. dif. nos da $\Phi(x, y, z) = -Qx^2 + \alpha(y, z)$; esto en la segunda ec. dif. nos da $\Phi(x, y, z) = -Q(x^2 + y^2) + \beta(z)$; lo que en la tercera ec. dif. nos produce $\Phi(x, y, z) = -Q(x^2 + y^2) + 2Qz^2 + c$ donde c es constante. Tomamos $c = 0$ y entonces $\Phi(x, y, z) = -Qr^2 + 3Qz^2$; en coordenadas esféricas, $\Phi(r, \theta) = Qr^2(3 \cos(\theta)^2 - 1) = 2Qr^2 P_2(\cos(\theta))$.

b) La densidad de corriente \mathbf{K} sobre la esfera está dada por

$$(5.3) \quad (\mathbf{B}^{ext} - \mathbf{B}) \cdot \hat{e}_r = 0, \quad \mu_o \mathbf{K} = \hat{e}_r \wedge (\mathbf{B}^{ext} - \mathbf{B}), \quad r = R,$$

donde \mathbf{B}^{ext} es el campo magnético exterior a la esfera ($r > R$). Ya que fuera de la esfera no hay corrientes, tenemos $\nabla \cdot \mathbf{B}^{ext} = 0$ y $\nabla \wedge \mathbf{B}^{ext} = \mathbf{0}$ de donde $\mathbf{B}^{ext} = -\nabla\Psi$ para un potencial Ψ definido para $r > R$. Ya que \mathbf{B} es independiente del ángulo azimutal φ lo mismo debe ser el caso para \mathbf{B}^{ext} y por ende para Ψ . Por lo tanto,

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos(\theta)),$$

suponiendo que $\mathbf{B}^{ext} \rightarrow \mathbf{0}$ para $r \rightarrow \infty$. La condición de contorno (5.3) en términos de los potenciales toma la forma:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(R, \theta) = \frac{\partial\Psi}{\partial r}(R, \theta), \quad \mu_o \mathbf{K} = R^{-1} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(R, \theta) - \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(R, \theta) \right) \hat{e}_\varphi.$$

De la condición sobre las derivadas radiales obtenemos ($\{P_\ell : \ell \geq 0\}$ es un sistema de funciones linealmente independientes sobre $[-1, 1]$): $A_\ell = 0$ para $\ell \neq 2$ y $A_2 = -4QR^5/3$; o sea

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{4QR^5}{3r^3} P_2(\cos(\theta)) = -\frac{2QR^5}{3r^3} (3 \cos(\theta)^2 - 1).$$

Entonces,

$$\mathbf{B}^{ext}(r, \theta) = -\frac{2QR^5}{r^4} (3 \cos(\theta)^2 - 1) \hat{e}_r - \frac{4QR^5}{r^4} \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{e}_\theta,$$

$$\mathbf{K} = -\frac{10QR \cos(\theta) \sin(\theta)}{\mu_o} \hat{e}_\varphi.$$

Problema 5.5 *Se quiere obtener un campo magnético dipolar en el exterior de una esfera de radio R que tiene permeabilidad magnética del vacío. ¿Cuál debe ser la distribución de corriente sobre la superficie? Determine el campo en el interior de la esfera.*

El campo dipolar exterior – si esta centrado en el centro de la esfera – es:

$$\mathbf{B}^{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right), \quad r > R,$$

en términos el momento magnético \mathbf{m} . Denotamos el campo interior ($r < R$) con \mathbf{B}^{in} . Sobre la esfera hay continuidad en la componente normal que es la radial,

$$(5.4) \quad B_r^{in}(R, \Omega) = B_r^{dip}(R, \Omega)$$

para todo ángulo sólido Ω ; y la densidad superficial de corriente \mathbf{K} se determina por

$$(5.5) \quad \mu_o \mathbf{K} = \mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{B}^{dip} - \mathbf{B}^{in}), \quad r = R.$$

Hay una dirección distinguida que es la de \mathbf{m} por lo cual la elegimos como eje polar; entonces $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$. Reescribimos el campo dipolar en estas coordenadas esféricas. Usando $\hat{\mathbf{z}} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r - \sin(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta$,

$$\mathbf{B}^{dip}(\mathbf{r}) = \frac{m\mu_o}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r + \sin(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta), \quad r > R.$$

Para el campo interior planteamos un potencial Ψ que sea armónico para $r < R$. Convendrá entonces plantear las condiciones de empalme (5.4,5.5) en términos de potenciales. Para esto necesito el potencial exterior Φ tal que $\mathbf{B}^{dip} = -\nabla\Phi$. Las ecuaciones determinantes son

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{m\mu_o}{2\pi r^3} \cos(\theta), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{m\mu_o}{4\pi r^2} \sin(\theta), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0,$$

y la integración da

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{m\mu_o}{4\pi r^2} \cos(\theta) + A = A + \frac{m\mu_o}{4\pi r^2} P_1(\cos(\theta))$$

donde A es constante arbitraria.

Habiendo elegido coordenadas de manera que el campo dipolar tenga simetría azimutal, el Ansatz para el potencial interior es

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{\ell \geq 0} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos(\theta)).$$

De (5.4) $(\partial\Psi/\partial r)(R, \theta) = (\partial\Phi/\partial r)(R, \theta)$ para todo $\theta \in [0, \pi]$ y la independencia lineal del sistema $\{P_\ell : \ell \geq 0\}$ en $[-1, 1]$ implica que $B_o = 0$ y que:

$$\Psi(r, \theta) = A_o + \left(\left[\frac{2B_1}{R^3} - \frac{m\mu_o}{2\pi R^3} \right] r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos(\theta) + \sum_{\ell \geq 2} B_\ell \left(\frac{(\ell+1)r^\ell}{\ell R^{2\ell+1}} + \frac{1}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos(\theta)).$$

El potencial (y por ende el campo magnetostático) será singular en el centro si alguno de los B_ℓ con $\ell \geq 1$ no se anula. Entonces, tomando el potencial regular, tenemos

$$\mathbf{B}^{in} = -\nabla\Psi = \frac{m\mu_o}{2\pi R^3} (\cos(\theta)\hat{\mathbf{e}}_r - \sin(\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta) = \frac{m\mu_o}{2\pi R^3} \hat{\mathbf{z}}, \quad r < R.$$

Con esto,

$$\mathbf{K}(\theta, \varphi) = \frac{3m}{4\pi R^3} \sin(\theta) \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{3m}{4\pi R^3} \sin(\theta) (-\sin(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{y}}).$$

Problema 5.6 *Un imán permanente cilíndrico recto de longitud L y radio a tiene magnetización \mathbf{M} constante y uniforme paralela al eje de imán. Determine el campo magnético \mathbf{H} y la inducción magnética \mathbf{B} . Discuta el comportamiento de las líneas de estos campos.*

Como no hay corrientes podemos plantear $\mathbf{H} = -\nabla\phi$ donde el potencial magnético ϕ está dado por

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} ds$$

donde S es la superficie del cilindro, ds es el correspondiente elemento de superficie y $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es el vector unitario normal a S en $\mathbf{x} \in S$ con dirección hacia afuera del cilindro. Tenemos $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = M\hat{\mathbf{z}}$ eligiendo la dirección de la magnetización como eje 'z'. Ya que \mathbf{n} es ortogonal a \mathbf{M} sobre el manto del cilindro, solo contribuyen las tapas S_{\pm} donde $\mathbf{n} = \pm\hat{\mathbf{z}}$; luego

$$(5.6) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{M}{4\pi} \left\{ \int_{S_+} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} ds - \int_{S_-} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} ds \right\}.$$

El cálculo de las integrales sobre las tapas pide a gritos un tratamiento en coordenadas cilíndricas. Pero primeramente analizamos el comportamiento para $r = |\mathbf{r}|$ grande que, de acuerdo a Jackson § 5.9.C, es dipolar

$$\phi(\mathbf{r}) \sim \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

con momento dipolar magnético

$$\mathbf{m} := \int_Z \mathbf{M} dv = \pi L a^2 \mathbf{M}.$$

Para verificar esto hacemos una expansión en armónicos esféricos de los integrandos en las integrales sobre S_{\pm} expresando los elementos de superficie correspondientes en coordenadas esféricas con eje polar coincidente con \mathbf{M} y origen en el punto medio entre las tapas.

Sea $\theta_o := \arctan(2a/L)$. Para $\mathbf{x} \in S_+$ tenemos $x := |\mathbf{x}| = L/(2 \cos(\theta'))$ con $\theta' \in [0, \theta_o]$. Haciendo referencia a la figura, $ds = t dt d\varphi'$ con $t = 2 \tan(\theta')/L$ y entonces $ds = (2/L)^2 (\sin(\theta')/\cos(\theta')^3) d\theta' d\varphi'$. Entonces

$$\int_{S_+} ds f(x, \theta', \varphi') = (2/L)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\theta_o} d\theta' \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} f\left(\frac{L}{2 \cos(\theta')}, \theta', \varphi'\right).$$

Mientras que para $\mathbf{x} \in S_-$, tenemos $x = -L/(2 \cos(\theta'))$ con $\theta' \in [\pi - \theta_o, \pi]$. Y de la figura, recordando que $\sin(\pi - \theta') = \sin(\theta')$ y $\cos(\pi - \theta') = -\cos(\theta')$, $ds = -(2/L)^2 (\sin(\theta')/\cos(\theta')^3) d\theta' d\varphi'$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{S_-} ds f(x, \theta', \varphi') &= -(2/L)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi - \theta_o}^{\pi} d\theta' \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} f\left(\frac{-L}{2 \cos(\theta')}, \theta', \varphi'\right) \\ &= (2/L)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\theta_o} d\theta' \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} f\left(\frac{L}{2 \cos(\theta')}, \pi - \theta', \varphi'\right). \end{aligned}$$

Insertando la expansión de $1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|$ en términos de armónicos esféricos ($\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ y $\mathbf{x} = (x, \theta', \varphi')$) y usando las dos fórmulas integrales para las tapas, luego suponiendo que r es lo suficientemente grande (basta que $r \geq \sqrt{a^2 + (L/2)^2}$), obtenemos

$$\phi(\mathbf{r}) = M \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)}{(2\ell + 1)r^{\ell+1}} \left(\frac{2}{L}\right)^{2-\ell} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} (\cos(\theta'))^{-\ell} \left[\overline{Y_{\ell, m}(\theta', \varphi')} - \overline{Y_{\ell, m}(\pi - \theta', \varphi')} \right] d\theta'.$$

La integral azimutal es inmediata y contribuye 2π solamente para $m = 0$ cualquiera sea ℓ :

$$\phi(\mathbf{r}) = 2\pi M \sum_{\ell \geq 0} \frac{Y_{\ell, 0}(\theta, \varphi)}{(2\ell + 1)r^{\ell+1}} \left(\frac{2}{L}\right)^{2-\ell} \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} (\cos(\theta'))^{-\ell} \left[\overline{Y_{\ell, 0}(\theta', \varphi')} - \overline{Y_{\ell, 0}(\pi - \theta', \varphi')} \right] d\theta'.$$

Ya que $Y_{\ell, 0}(\theta', \varphi') = \sqrt{(2\ell + 1)/(4\pi)} P_{\ell}(\cos(\theta'))$ y $P_{\ell}(-x) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(x)$, esto se reduce a

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{M}{2} \sum_{\ell \geq 0} \frac{P_{\ell}(\cos(\theta))}{r^{\ell+1}} \left(\frac{2}{L}\right)^{2-\ell} [1 + (-1)^{\ell+1}] \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} (\cos(\theta'))^{-\ell} P_{\ell}(\cos(\theta')) d\theta'$$

$$= M \sum_{k \geq 0} \frac{P_{2k+1}(\cos(\theta))}{r^{2k+2}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1-2k} \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^{4+2k}} P_{2k+1}(\cos(\theta')) d\theta'.$$

Hay contribuciones multipolares solo de orden impar (no hay monopolo, cuadrupolo, etc.). La contribución dominante es efectivamente la dipolar y, ya que $P_1(x) = x$, esta es

$$M \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{2}{L} \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} d\theta' = M \frac{L \cos(\theta)}{4\pi r^2} \left(\frac{2}{L}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^3} d\theta' = M \frac{L \cos(\theta)}{4\pi r^2} \int_{S_+} ds = \frac{\pi L a^2 M}{4\pi r^3}$$

como debe ser.

Hemos entonces obtenido una expresión exacta para el potencial magnético fuera de la esfera que circunscribe al cilindro:

$$\boxed{\phi() = M \sum_{k \geq 0} \frac{P_{2k+1}(\cos(\theta))}{r^{2k+2}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1-2k} \int_0^{\theta_o} \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')^{4+2k}} P_{2k+1}(\cos(\theta')) d\theta'} , \quad r \geq \sqrt{a^2 + (L/2)^2}.$$

Tomando el gradiente obtenemos \mathbf{H} y entonces $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ fuera del cilindro. Tratamiento en cilíndricas via expansion Fourier-Bessel (Pagina 126 J.)

Problema 5.7 *Un cilindro circular de longitud finita L y radio a tiene N vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente I . Muestre que la inducción magnética en el eje del cilindro en el límite $NL \rightarrow \infty$ es*

$$(5.7) \quad B_z = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

donde los ángulos están definidos en la figura 15.

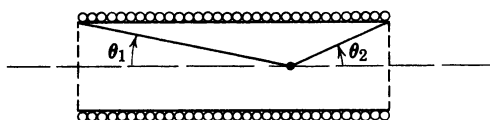


Figura 15: Solenoide

Usamos un sistema de coordenadas cilíndrico cuyo plano xy es aquel definido por la base del cilindro recto en el extremo izquierdo de la figura. Un punto cualquiera del manto del cilindro tiene las coordenadas (a, φ, z) con $0 \leq z \leq L$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. Calculamos la inducción magnética sobre el eje debido a una espira (anillo sin espesor) ubicada en (a, φ', z') con la Ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B}_o(z\hat{\mathbf{z}}, z') = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}') \wedge (z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}')}{|z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}'|^{3/2}},$$

donde la integración es sobre la espira. Tenemos $\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}') = a(d\varphi')\hat{\boldsymbol{\varphi}}'$, y con

$$z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}' = (z - z')\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\boldsymbol{\rho}}',$$

obtenemos

$$d\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}') \wedge (z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}') = a((z - z')\hat{\boldsymbol{\rho}}' + a\hat{\mathbf{z}}) d\varphi' = (a^2\hat{\mathbf{z}} + a(z - z')(\cos(\varphi')\hat{\mathbf{x}} + \sin(\varphi')\hat{\mathbf{y}})) d\varphi'.$$

Con esto,

$$\mathbf{B}_o(z\hat{\mathbf{z}}, z') = \frac{\mu_o I a^2}{2((z - z')^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}},$$

ya que la integración de la componentes perpendiculares al eje se anulan.

Volviendo al solenoide, este se modela no como un bobinado de espiras discretas sino como un continuo¹⁵ de “espiras” (infinitesimales) con densidad lineal N . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z\hat{\mathbf{z}}) &= \int_0^L N \mathbf{B}_o(z\hat{\mathbf{z}}, z') dz' = \frac{\mu_o I N a^2}{2} \left(\int_0^L \frac{dz'}{((z - z')^2 + a^2)^{3/2}} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\mu_o I N a^2}{2} \left(\frac{z' - z}{a^2((z - z')^2 + a^2)^{1/2}} \right)_0^L \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_o I N}{2} \left(\underbrace{\frac{L - z}{((L - z)^2 + a^2)^{1/2}}}_{\cos(\theta_1)} + \underbrace{\frac{z}{a^2(z^2 + a^2)^{1/2}}}_{\cos(\theta_2)} \right) \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Problema 5.8 *Un campo magnetoestático es producido completamente por una distribución localizada de magnetización permanente.*

a) Demostrar que

$$(5.8) \quad \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = 0$$

donde la integral es tomada en todo el espacio.

b) De la expresión para la energía potencial de un dipolo en un campo externo demuestre que para una distribución continua de magnetización permanente la energía magnetostática puede ser escrita como

$$(5.9) \quad W = \frac{\mu_o}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = -\frac{\mu_o}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} dv,$$

a menos de una constante aditiva, la cual es independiente de la orientación o la posición de los cuerpos magnéticos.

Las relaciones y ecuaciones básicas son $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{M} + \mathbf{H})$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = -\nabla\Psi$, $\Delta\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{M}$. Sea K el soporte de \mathbf{M} y $K' = \mathbb{R}^3 \setminus K$ su complemento. Entonces en K' se tiene: $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mu_o\mathbf{H}$ y $\Delta\Psi = 0$.

a) Tomemos $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que $K \subset V$ estrictamente de modo que $\partial V \subset K'$. Entonces, con $\nabla \cdot (\Psi\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla\Psi) + \Psi(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla\Psi)$,

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv &= - \int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla\Psi) dv = - \int_V \nabla \cdot (\Psi\mathbf{B}) dv \\ &= - \int_{\partial V} \Psi\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\mu_o \int_{\partial V} \Psi\mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mu_o \int_{\partial V} \Psi(\nabla\Psi) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

Bajo condiciones de decaimiento de Ψ para $r \rightarrow \infty$ se podrá demostrar que la integral de superficie se anula cuando $V \uparrow \mathbb{R}^3$. Por ejemplo consideremos para V la bola $B_R(\mathbf{0})$ de radio R centrada en $\mathbf{0}$. Entonces, si R es lo suficientemente grande como para cubrir propiamente a K , y $|\Psi(R, \theta, \varphi)(\partial\Psi/\partial r)(R, \theta, \varphi)| = O(1/R^{2+\epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, tenemos

$$\left| \int_{S_R(\mathbf{0})} \Psi(\nabla\Psi) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \right| \leq \int_S |\Psi(R, \theta, \varphi) \frac{\partial\Psi}{\partial r}(R, \theta, \varphi)| R^2 d\Omega = O\left(\frac{1}{R^\epsilon}\right).$$

b) Faltaría ver que la energía magnetostática es

$$W = \frac{1}{2\mu_o} \int \mathbf{B}^2 dv.$$

¹⁵La descripción de este límite como $NL \rightarrow \infty$ no es adecuada.

Pero si esto es cierto, tomamos un volumen V como en a) y obtenemos

$$(5.10) \quad W = \frac{\mu_o}{2} \int_V (\mathbf{M} + \mathbf{H})^2 dv + \frac{\mu_o}{2} \int_{V'} \mathbf{H}^2 dv = \frac{\mu_o}{2} \int \mathbf{H}^2 dv + \frac{\mu_o}{2} \int_V \mathbf{M}^2 dv + \mu_o \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} dv .$$

El segundo sumando de (5.10) es

$$\frac{\mu_o}{2} \int_V \mathbf{M}^2 dv = \frac{\mu_o}{2} \int_K \mathbf{M}^2 dv =: W_M ,$$

que es independiente de V (cuando V contiene propiamente a K) y es la energía magnética asociada con la magnetización. El último sumando de (5.10) es proporcional a

$$\int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = - \int_V \mathbf{M} \cdot (\nabla \Psi) dv = \int_V \Psi (\nabla \cdot \mathbf{M}) dv - \int_V \nabla \cdot (\Psi \mathbf{M}) dv = \int_V \Psi (\nabla \cdot \mathbf{M}) dv - \int_{\partial V} \Psi \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\sigma} .$$

Pero $\partial V \subset K'$ de modo que $\int_{\partial V} \Psi \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$. Entonces

$$\int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} dv = \int_V \Psi (\nabla \cdot \mathbf{M}) dv = - \int_V \Psi (\Delta \Psi) dv = - \int_K \Psi (\Delta \Psi) dv ,$$

que es constante (cuando V cubre propiamente a K) y está completamente determinado por la solución Ψ de la ec. de Poisson $\Delta \Psi = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, o sea por \mathbf{M} . Hemos obtenido

$$W = \frac{\mu_o}{2} \int \mathbf{H}^2 dv + W_M - \mu_o \int_K \Psi (\Delta \Psi) dv .$$

Con el resultado de a) $\int \mathbf{H}^2 dv = \int (\mu_o^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{H} dv = - \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} dv$.

Problema 5.9 *Un cilindro recto circular de radio a y conductor, tiene un agujero cilíndrico (circular y recto) de radio b paralelo al eje del cilindro conductor a una distancia d del mismo ($a > b+d$). La densidad de corriente fuera del agujero es uniforme y paralela al eje. Determine la densidad de flujo magnético en el agujero usando la ley de Ampère y el principio de superposición.*

Primeramente, calculamos el campo magnético asociado a una corriente paralela al eje de un cilindro recto de distribución uniforme j en la sección de este cilindro.

En tanto y en cuanto la densidad de corriente (\hat{z} es el vector unitario en el eje del cilindro con dirección en sentido del flujo de corriente y R es el radio del cilindro):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j\hat{z} \text{ si } \mathbf{r} \text{ cae dentro del cilindro ; } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \text{ sino ;}$$

no tiene componentes transversales al eje y es invariante ante traslaciones del eje y rotaciones alrededor de él, \mathbf{B} depende solamente de la distancia al eje. En coordenadas cilíndricas (r, φ, z) de eje \hat{z} coincidente con el del cilindro, tenemos $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_r(r)\hat{e}_r + B_\varphi(r)\hat{e}_\varphi + B_z(r)\hat{z}$. De $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$, obtenemos $B_r(r) = 0$. De la ley de Ampère $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j}$, obtenemos $B_z(r) = \text{const}$.

Si \mathcal{C}_a denota el círculo de radio a en el plano ortogonal al eje con centro en este eje, entonces la ley de Ampère en su forma integral es:

$$\int_{\mathcal{C}_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_o j |\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_R| ,$$

donde R es el radio del cilindro y \mathcal{F}_x denota el disco de radio x (cuyo borde es \mathcal{C}_x). Pero, en \mathcal{C}_a $r = a$ y $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot (\hat{e}_\varphi a d\varphi) = a B_\varphi(a) d\varphi$; por lo tanto

$$2\pi a B_\varphi(a) = \mu_o j \pi \text{ mín}\{a^2, R^2\} .$$

Entonces

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_o j}{2} \begin{cases} r & , \text{ si } 0 \leq r \leq R \\ R^2/r & , \text{ si } r > R \end{cases} .$$

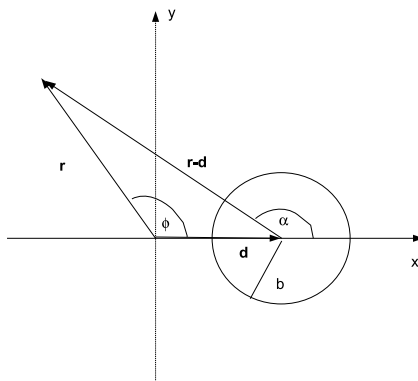


Figura 16: El agujero

La componente B_z que es constante no tiene nada que ver con la corriente y corresponde a un campo magnético uniforme y homogéneo en dirección \hat{z} . Desconsiderando este último campo, tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 j}{2} \widehat{e}_\varphi \begin{cases} r & , \text{ si } 0 \leq r \leq R \\ R^2/r & , \text{ si } r > R \end{cases} .$$

Atacamos ahora el problema planteado. Seleccionamos el eje \hat{x} coincidente con la recta que pasa por el centro del agujero y es perpendicular al eje del cilindro a alguna altura arbitraria; de modo que la posición del centro del agujero es $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ en coordenadas cilíndricas o cartesianas (vea la figura 16). La densidad de corriente \mathbf{j} dada es suma de las dos siguientes: una densidad de corriente uniforme en todo el cilindro de radio a

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) = j \hat{z} \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq r \leq a \\ 0 & , \text{ si } r > a \end{cases} ,$$

y una densidad de corriente de sentido contrario uniforme en el agujero

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -j \hat{z} \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{d}| \leq b \\ 0 & , \text{ si } |\mathbf{r} - \mathbf{d}| > b \end{cases} .$$

En efecto, $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = j \hat{z}$ si \mathbf{r} cae en el cilindro pero no en el agujero; y sino la suma es nula. Por lo tanto, el campo magnético es $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ donde \mathbf{B}_k es el campo asociado a la densidad de corriente \mathbf{j}_k ($k = 1, 2$). Desconsiderando un campo uniforme y homogéneo en dirección axial tenemos:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 j}{2} \widehat{e}_\varphi \begin{cases} r & , \text{ si } 0 \leq r \leq a \\ a^2/r & , \text{ si } r > a \end{cases} , \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{-\mu_0 j}{2} \widehat{e}_\alpha \begin{cases} |\mathbf{r} - \mathbf{d}| & , \text{ si } 0 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{d}| \leq b \\ b^2/|\mathbf{r} - \mathbf{d}| & , \text{ si } |\mathbf{r} - \mathbf{d}| > b \end{cases} ;$$

aquí, el ángulo α está definido por la siguiente figura 16.

En palabras: α es el ángulo azimutal correspondiente al vector $\mathbf{r} - \mathbf{d}$ en el sistema cilíndrico que se obtiene trasladando el elegido rigidamente por el vector \mathbf{d} al centro del agujero. Por el Teorema del Seno,

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) = r \sin(\varphi) / |\mathbf{r} - \mathbf{d}| ;$$

Con $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ y el Teorema del Coseno se obtiene

$$\cos(\alpha) = \frac{r \cos(\varphi) - d}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} .$$

Esto especifica a α univocamente. Tenemos

$$\widehat{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\widehat{x} + \cos(\varphi)\widehat{y},$$

y ya que la translación de la que hablamos no involucra rotación de ejes,

$$\widehat{e}_\alpha = -\sin(\alpha)\widehat{x} + \cos(\alpha)\widehat{y} = |\mathbf{r} - \mathbf{d}|^{-1}(-r \sin(\varphi)\widehat{x} + [r \cos(\varphi) - d]\widehat{y}) = \frac{r}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}\widehat{e}_\varphi - \frac{d}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}\widehat{y}.$$

Recordamos que

$$\widehat{y} = \sin(\varphi)\widehat{e}_r + \cos(\varphi)\widehat{e}_\varphi.$$

Usando las fórmulas obtenidas en el caso $|\mathbf{r} - \mathbf{d}| \leq b$ –vale decir dentro del agujero– tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{jd}{2}\widehat{y} = \frac{jd}{2}(\sin(\varphi)\widehat{e}_r + \cos(\varphi)\widehat{e}_\varphi).$$

También podemos calcular explícitamente el campo en cualquier otro lugar. Fuera del agujero pero dentro del cilindro –vale decir $|\mathbf{r} - \mathbf{d}| > b$ y $r \leq a$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{j}{2} \left\{ \left(r - \frac{rb^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} + \frac{db^2 \cos(\varphi)}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right) \widehat{e}_\varphi + \frac{db^2 \sin(\varphi)}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \widehat{e}_r \right\} \\ &= -(j/2)r \sin(\varphi) \left(1 - \frac{b^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right) \widehat{x} \\ &\quad + (j/2) \left(r \cos(\varphi) \left[1 - \frac{b^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right] + \frac{db^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right) \widehat{y}. \end{aligned}$$

Y, fuera del cilindro –o sea $r > a$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{j}{2} \left\{ \left(\frac{a^2}{r} - \frac{rb^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} + \frac{b^2 d \cos(\varphi)}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right) \widehat{e}_\varphi + \frac{b^2 d \sin(\varphi)}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \widehat{e}_r \right\} \\ &= -(j/2) \sin(\varphi) \left(\frac{a^2}{r} - \frac{rb^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right) \widehat{x} \\ &\quad + (j/2) \left(\cos(\varphi) \left[\frac{a^2}{r} - \frac{b^2 r}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right] + \frac{db^2}{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\varphi)} \right) \widehat{y}. \end{aligned}$$

Por último, el flujo por la sección circular del agujero es independiente de z e igual a:

$$\int_{\text{sección del agujero}} \mathbf{B} \cdot \widehat{z} d\sigma,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de superficie. Entonces $\mathbf{B} \parallel \widehat{y} \perp \widehat{z}$ implica que el flujo es nulo. También podemos analizar el flujo por las paredes del agujero considerando una porción (cilíndrica) de largo L arbitrario. El flujo por el manto es nulo ya que el flujo por un punto cualquiera del manto está compensado exactamente por el flujo a través del punto diametralmente opuesto (figura 17):

Problema 5.10 *Un disco circular de radio R con carga total Q homogéneamente distribuida, rota con velocidad angular ω alrededor de su centro. Determine el campo magnético generado:*

- Sobre el eje de rotación.
- en general, pero aproximadamente para distancias grandes.
- compare el resultado de a) con el de b).

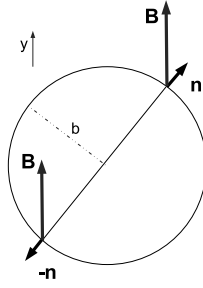


Figura 17: Flujo nulo

La densidad de carga superficial en el disco es constante e igual a $\sigma_o = Q/(\pi R^2)$. Entonces, la densidad de carga volumétrica es

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma_o \frac{\delta_{\pi/2}(\theta)}{r} \chi_{[0,R]}(r)$$

en coordenadas esféricas con eje polar coincidente con el eje de rotación (perpendicular al disco por su centro). La velocidad en cualquier punto del disco es $\omega r \widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma_o \omega \delta_{\pi/2}(\theta) \chi_{[0,R]}(r) \widehat{\mathbf{e}}_\varphi$$

es la densidad de corriente¹⁶. Recordamos que $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi)\widehat{\mathbf{y}}$.

a) Dada la simetría rotacional alrededor del eje polar, se puede intentar calcular el campo magnético sobre este eje por medio de la Ley de Biot-Savart.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z\widehat{\mathbf{z}}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge (z\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{x})}{|z\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{x}|^3} \\ &= \frac{\mu_o \sigma_o \omega}{4\pi} \int_0^R dx x^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{[-\sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi)\widehat{\mathbf{y}}] \wedge [z\widehat{\mathbf{z}} - x\cos(\varphi)\widehat{\mathbf{x}} - x\sin(\varphi)\widehat{\mathbf{y}}]}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_o \sigma_o \omega}{4\pi} \int_0^R dx x^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{z\cos(\varphi)\widehat{\mathbf{x}} + z\sin(\varphi)\widehat{\mathbf{y}} + x\widehat{\mathbf{z}}}{(z^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o \sigma_o \omega}{2} \int_0^R dx \frac{x^3}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \widehat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

El integrando tiene a $x \mapsto \sqrt{x^2 + z^2} + z^2(x^2 + z^2)^{-1/2}$ como primitiva, así que

$$(5.11) \quad \boxed{\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_o \sigma_o \omega}{2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| \right) \widehat{\mathbf{z}}}.$$

b) Determinamos el potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x} = \frac{\mu_o \sigma_o \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dx x^2 \frac{-\sin(\alpha)\widehat{\mathbf{x}} + \cos(\alpha)\widehat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{r}(r, \theta, \varphi) - \mathbf{r}(x, \pi/2, \alpha)|}$$

La expansión del denominador en armónicos esféricos nos da

$$(5.12) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_o \sigma_o \omega \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{2\ell + 1} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dx x^2 \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \overline{Y_{\ell,m}(\pi/2, \alpha)} [-\sin(\alpha)\widehat{\mathbf{x}} + \cos(\alpha)\widehat{\mathbf{y}}]$$

¹⁶es útil observar (ver Apéndice H.b) que $\mathbf{j}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{j}(\mathbf{r})$ y por esto -con la Ley de Biot-Savart- $\mathbf{B}(-\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$.

donde $r_< := \min\{x, r\}$ y $r_> := \max\{r, x\}$ como siempre. Ahora observamos tres hechos: 1) $Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell, m}(\theta, 0)e^{im\varphi}$ y $Y_{\ell, m}(\theta, 0)$ es real; 2) $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$ y $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$; y 3) $\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-ikt} dt = 2\pi\delta_{k, m}$ cualesquiera sean los enteros m y k . La integración anula el sumando $\ell = 0$. Para la integral angular cuando $\ell \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\alpha Y_{\ell, m}(\pi/2, \alpha) [-\sin(\alpha)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{y}}] &= Y_{\ell, m}(\pi/2, 0) \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-im\alpha} \left[-\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \hat{\mathbf{x}} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \hat{\mathbf{y}} \right] \\ &= 2\pi Y_{\ell, m}(\pi/2, 0) \left[-\frac{\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}}{2i} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}}{2} \hat{\mathbf{y}} \right] \end{aligned}$$

que en (5.12) nos produce

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 2\pi\mu_o\sigma_o\omega \sum_{\ell \geq 1} (2\ell + 1)^{-1} \left[-\frac{Y_{\ell,1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,1}(\theta, \varphi) - Y_{\ell,-1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,-1}(\theta, \varphi)}{2i} \hat{\mathbf{x}} \right. \quad (5.13)$$

$$\left. + \frac{Y_{\ell,1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,1}(\theta, \varphi) + Y_{\ell,-1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,-1}(\theta, \varphi)}{2} \hat{\mathbf{y}} \right] \underbrace{\int_0^R dx x^2 \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}}_{=: F_\ell(r)}.$$

Ahora usamos $Y_{\ell, -m} = (-1)^m \overline{Y_{\ell, m}}$ con la observación 1) para escribir

$$\begin{aligned} \frac{Y_{\ell,1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,1}(\theta, \varphi) - Y_{\ell,-1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,-1}(\theta, \varphi)}{2i} &= Y_{\ell,1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,1}(\theta, 0) \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \\ &= Y_{\ell,1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,1}(\theta, 0) \sin(\varphi); \end{aligned}$$

y procediendo análogamente con el factor de $\hat{\mathbf{y}}$ en (5.13) obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 2\pi\mu_o\sigma_o\omega \sum_{\ell \geq 1} \frac{Y_{\ell,1}(\pi/2, 0)Y_{\ell,1}(\theta, 0)}{2\ell + 1} F_\ell(r) [-\sin(\varphi) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi) \hat{\mathbf{y}}].$$

Introduciendo la definición de los armónicos esféricos via las funciones asociadas de Legendre P_ℓ^m y teniendo en cuenta que $P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(x)$, lo que implica que $P_\ell^m(0) = 0$ para $\ell + m$ impar, obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o\sigma_o\omega}{2} \sum_{\ell \geq 1, \ell \text{ impar}} \frac{1}{\ell(\ell + 1)} P_\ell^1(0) P_\ell^1(\cos(\theta)) F_\ell(r, R) \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Si $r \geq R$, entonces $r_< = x$ y $r_> = r$, luego

$$F_\ell(r) = r^{-(\ell+1)} \int_0^R x^{\ell+2} dx = \frac{R^{\ell+3}}{(\ell + 3)r^{\ell+1}}.$$

Si $0 < r < R$, y teniendo en cuenta solamente los ℓ que sean impares¹⁷

$$F_\ell(r) = r^{-(\ell+1)} \int_0^r x^{\ell+2} dx + r^\ell \int_r^R x^{-\ell+1} dx = \frac{r^2}{\ell + 3} + \frac{1}{2 - \ell} (R^2(r/R)^\ell - r^2) = \frac{(2\ell + 1)r^2}{(\ell + 3)(\ell - 2)} - \frac{R^2 r^\ell}{(\ell - 2)R^\ell}.$$

Ahora, recién, encaramos el problema planteado. Para $r \rightarrow \infty$ tomamos el sumando de \mathbf{A} de decaimiento más lento que corresponde a $\ell = 1$ (dipolo).

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{\mu_o\sigma_o\omega}{16} P_1^1(0) P_1^1(\cos(\theta)) \frac{R^4}{r^2}}_{=: a_1(r, \theta)} \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

¹⁷E.g.: para $\ell = 2$ aparece un logaritmo que no está presente en el desarrollo.

Pero $P_1^1(t) = -\sqrt{1-t^2}$ con lo cual

$$a_1(r, \theta) = \frac{\mu_o \sigma_o \omega}{16} \sin(\theta) \frac{R^4}{r^2} .$$

Entonces tenemos $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r})$ para $r \rightarrow \infty$ donde el campo dipolar es (haciendo el rotor en esféricas)

$$\mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}) = (\nabla \wedge \mathbf{A}_{dip})(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o \sigma_o \omega R^4}{16r^3} (\sin(\theta) \widehat{e}_\theta + 2 \cos(\theta) \widehat{e}_r) .$$

c) De nuestra expresión asintótica para \mathbf{B} del punto anterior obtenemos (observando que si $z > 0$ entonces $\theta = 0$ y $\widehat{e}_r = \widehat{z}$ mientras que si $z < 0$ se tiene $\theta = \pi$ y $\widehat{e}_r = -\widehat{z}$):

$$\mathbf{B}(0, 0, z) \sim \mathbf{B}_{dip}(0, 0, z) = \frac{\mu_o \sigma_o \omega R^4}{8|z|^3} \widehat{z} , \quad |z| \rightarrow \infty ;$$

Si en la fórmula (5.11), usamos la expansión de $(1+t)^{\pm 1/2}$ con $t = R^2/z^2$ (que es convergente para $|t| < 1$) hasta orden t^2 , obtenemos

$$\mathbf{B}(0, 0, z) \sim \frac{\mu_o \sigma_o \omega R^4}{8|z|^3} \widehat{z} , \quad |z| \rightarrow \infty .$$

Las expresiones coinciden (por supuesto).

Problema 5.11 Una esfera hueca no conductora de radio a y densidad de carga superficial $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_o \cos(\theta)$ gira en torno al eje polar \widehat{z} con velocidad angular constante ω .

a) Determine el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

b) Controle su resultado por medio de la Ley de Ampère.

Información suplementaria: $Y_2^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{\pm i\varphi}$.

a) La densidad volumétrica de carga es, en coordenadas esféricas con eje polar coincidente con el eje de rotación,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma_o \cos(\theta) \delta(r - a) .$$

Un punto cualquiera (a, θ, φ) sobre la esfera gira con velocidad $\mathbf{v} = \omega a \sin(\theta) \widehat{e}_\varphi$ y entonces

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma_o \omega a \cos(\theta) \sin(\theta) \delta(r - a) \widehat{e}_\varphi .$$

Recordamos que

$$\widehat{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \widehat{x} + \cos(\varphi) \widehat{y} .$$

De la expresión para $Y_2^{\pm 1}$ obtenemos

$$\sin(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} i (Y_2^1(\theta, \varphi) + Y_2^{-1}(\theta, \varphi)) , \quad \cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_2^{-1}(\theta, \varphi) - Y_2^1(\theta, \varphi)) .$$

Además,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^\ell}{(2\ell+1)r_{>}^{\ell+1}} \overline{Y_\ell^m(\Omega')} Y_\ell^m(\Omega) ;$$

donde $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, $\mathbf{r}' = (r', \theta', \varphi')$, $r_{<} = \min\{r, r'\}$, $r_{>} = \max\{r, r'\}$, $\Omega = (\theta, \varphi)$ y $\Omega' = (\theta', \varphi')$.

Para el potencial vector \mathbf{A} , con $\mu_o \omega \sigma_o = \kappa$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'$$

$$= \kappa a \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} Y_{\ell}^m(\Omega) \int_0^{\infty} (r')^2 dr' \int_{\mathcal{S}} d\Omega' \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \overline{Y_{\ell}^m(\Omega')} \delta(r' - a) \cos(\theta') \sin(\theta') [-\sin(\varphi') \hat{x} + \cos(\varphi') \hat{y}] ;$$

donde \mathcal{S} es la esfera unitaria. La integral radial es inmediata,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \kappa a^3 \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\min\{r, a\}^{\ell}}{(2\ell+1) \max\{r, a\}^{\ell+1}} Y_{\ell}^m(\Omega) \int_{\mathcal{S}} d\Omega' \overline{Y_{\ell}^m(\Omega')} \cos(\theta') \sin(\theta') [-\sin(\varphi') \hat{x} + \cos(\varphi') \hat{y}] .$$

La integral sobre \mathcal{S} es:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}} d\Omega' \overline{Y_{\ell}^m(\Omega')} \cos(\theta') \sin(\theta') [-\sin(\varphi') \hat{x} + \cos(\varphi') \hat{y}] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \int_{\mathcal{S}} d\Omega' \overline{Y_{\ell}^m(\Omega')} [i(Y_2^1(\Omega') + Y_2^{-1}(\Omega')) \hat{x} + (Y_2^{-1}(\Omega') - Y_2^1(\Omega')) \hat{y}] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [i(\delta_{\ell,2}\delta_{m,1} + \delta_{\ell,2}\delta_{m,-1}) \hat{x} + (\delta_{\ell,2}\delta_{m,-1} - \delta_{\ell,2}\delta_{m,1}) \hat{y}] . \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \kappa a^3 \frac{\min\{r, a\}^2}{5 \max\{r, a\}^3} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [i(Y_2^1(\Omega) + Y_2^{-1}(\Omega)) \hat{x} + (Y_2^{-1}(\Omega) - Y_2^1(\Omega)) \hat{y}] \\ &= \kappa a^3 \frac{\min\{r, a\}^2}{5 \max\{r, a\}^3} [-\sin(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) \hat{x} + \cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) \hat{y}] . \end{aligned}$$

En coordenadas esféricas,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{10} \sin(2\theta) \widehat{e}_{\varphi} \begin{cases} r^2 & , \quad r \leq a \\ a^5/r^3 & , \quad r \geq a \end{cases} .$$

En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{5} (-yz\hat{x} + xz\hat{y}) \begin{cases} 1 & , \quad r \leq a \\ a^5/r^5 & , \quad r \geq a \end{cases} .$$

Entonces, $B_{\varphi}(\mathbf{r}) = 0$ y

$$(5.14) \quad \boxed{B_r(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{10} (1 + 3 \cos(2\theta)) \begin{cases} r & , \quad r \leq a \\ a^5/r^4 & , \quad r \geq a \end{cases} , \quad B_{\theta}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{10} \sin(2\theta) \begin{cases} -3r & , \quad r \leq a \\ 2a^5/r^4 & , \quad r \geq a \end{cases} .}$$

y

$$\begin{aligned} B_x(\mathbf{r}) &= -\frac{\kappa}{5} \begin{cases} x & , \quad r \leq a \\ \frac{a^5 x}{r^5} (1 - 5xz/r^2) & , \quad r \geq a \end{cases} , \quad B_y(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa}{5} \begin{cases} y & , \quad r \leq a \\ \frac{a^5 y}{r^5} (1 - 5yz/r^2) & , \quad r \geq a \end{cases} , \\ B_z(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa}{5} \begin{cases} 2z & , \quad r \leq a \\ \frac{2a^5 z}{r^5} (1 - 5(x+y)z/r^2) & , \quad r \geq a \end{cases} . \end{aligned}$$

b) Si \mathcal{C}_t denota una círculo de radio t centrado en el eje y perpendicular a él con ángulo polar θ , entonces la ley de Ampère es

$$\int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} ,$$

cualquiera sea la superficie cerrada F de borde \mathcal{C}_t . Si tomamos F como el disco plano de borde \mathcal{C}_t , tendremos $d\mathbf{F} = r dr \hat{z} d\varphi$ y ya que $\hat{z} = \cos(\theta) \hat{e}_r - \sin(\theta) \hat{e}_{\theta}$, tenemos $\mathbf{j} \cdot \hat{z} = 0$ siempre porque $\mathbf{j} \perp \hat{z}$ donde $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Como la integral sobre F se anula y con $d\mathbf{s} = t \widehat{e}_{\varphi} d\varphi$,

$$0 = \int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = t \int_0^{2\pi} B_{\varphi}(t, \theta, \varphi) d\varphi .$$

Por otro lado, ya que la distribución de corriente es invariante ante rotación alrededor del eje, \mathbf{B} debe tener la misma propiedad y es por ende independiente de φ . Luego $B_{\varphi}(t, \theta, \varphi) = f(t, \theta)$ y por lo anterior, $2\pi t f(t, \theta) = 0$

cualquiera sea $t \geq 0$ y $\theta \in [0, \pi]$; de esto se desprende que $f \equiv 0$ y luego $B_\varphi \equiv 0$.

Solución alternativa Ya que la corriente está sobre la esfera, sabemos que hay potenciales Φ definido para $r < a$ y Ψ definido para $r > a$ tales que $\Delta\Phi = 0$ y $\Delta\Psi = 0$, y

$$\mathbf{B}^{(i)} = -\nabla\Phi, \quad r < a; \quad \mathbf{B}^{(e)} = -\nabla\Psi; \quad r > a.$$

Entonces, ya que \mathbf{B} no depende del ángulo azimutal,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell \geq 1} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos(\theta)), \quad \Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell \geq 1} B_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos(\theta)),$$

donde hemos desconsiderado términos constantes que no contribuyen al campo. Las condiciones sobre la esfera son (la normal es \widehat{e}_r):

$$\mathbf{B}^{(i)}(a, \theta) \cdot \widehat{e}_r = \mathbf{B}^{(e)}(a, \theta) \cdot \widehat{e}_r, \quad (\mathbf{B}^{(i)}(a, \theta) - \mathbf{B}^{(e)}(a, \theta)) \wedge \widehat{e}_r = \mu_o \mathbf{K} - \mu_o (\mathbf{K} \cdot \widehat{e}_r) \widehat{e}_r,$$

donde la densidad de corriente superficial es

$$\mathbf{K} = \sigma_o \omega a \cos(\theta) \sin(\theta) \widehat{e}_\varphi.$$

Equivalentemente,

$$B_r^{(i)}(a, \theta) = B_r^{(e)}(a, \theta), \quad B_\theta^{(e)}(a, \theta) - B_\theta^{(i)}(a, \theta) = \kappa a \cos(\theta) \sin(\theta);$$

lo que, en términos de los potenciales, es

$$(5.15) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r}(a, \theta) = \frac{\partial\Psi}{\partial r}(a, \theta), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(a, \theta) - \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(a, \theta) = \kappa a^2 \cos(\theta) \sin(\theta).$$

De la primera condición de (5.15) obtenemos inmediatamente $\ell A_\ell a^{\ell-1} = -(\ell+1) B_\ell a^{-(\ell+1)}$ o sea

$$(5.16) \quad B_\ell = \frac{-\ell}{\ell+1} a^{2\ell+1} A_\ell, \quad \ell \geq 1.$$

Utilizando esto en la segunda condición de (5.15) obtenemos

$$-\sum_{\ell \geq 1} \frac{2\ell+1}{\ell+1} A_\ell a^\ell P'_\ell(\cos(\theta)) \sin(\theta) = \kappa a^2 \cos(\theta) \sin(\theta).$$

Cancelando el factor $\sin(\theta)$ en ambos miembros y observando que $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ y, por ende, $P'_2(x) = 3x$ tenemos

$$\sum_{\ell \geq 1} \frac{2\ell+1}{\ell+1} A_\ell a^\ell P'_\ell(\cos(\theta)) = -\kappa a^2 \cos(\theta) = -\frac{\kappa a^2}{3} P'_2(\cos(\theta));$$

integrando con respecto a $\cos(\theta)$ y usando la independendencia lineal del sistema $\{P_\ell : \ell \geq 0\}$, deducimos que $A_\ell = 0$ para $\ell \neq 2$ y $A_2 = -\kappa/5$. Luego, con (5.16),

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{\kappa}{5} r^2 P_2(\cos(\theta)), \quad \Psi(r, \theta) = \frac{2\kappa a^5}{15r^3} P_2(\cos(\theta)).$$

De aquí entonces¹⁸ se obtiene (5.14).

¹⁸Con $\cos(\theta)^2 = (1 + \cos(2\theta))/2$, $P_2(\cos(\theta)) = (1 + 3 \cos(2\theta))/4$.

A. Cálculo vectorial

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores en \mathbb{R}^3 , su *producto escalar* es el número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{j=1}^3 a_j b_j$. $|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ es el largo del vector \mathbf{a} que es nulo si y solo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Se tiene la desigualdad del triángulo

$$(A.1) \quad ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|;$$

y la de Cauchy-Schwarz

$$(A.2) \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

El *producto vectorial* de \mathbf{a} con \mathbf{b} es el vector

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Usando el tensor tridimensional totalmente anti-simétrico ϵ definido por:

$$\epsilon_{jkl} := \begin{cases} 1 & , \text{ si } (jkl) \text{ es permutación cíclica de } (123) \\ -1 & , \text{ si } (jkl) \text{ es permutación pero no cíclica de } (123) \\ 0 & , \text{ todos los otros casos, i.e. al menos dos índices son iguales} \end{cases},$$

la componente j del producto vectorial es:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_j = \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{jkl} a_k b_\ell = \epsilon_{jkl} a_k b_\ell.$$

En los cálculos es de gran utilidad la fórmula

$$\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{jkl} \epsilon_{mnl} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

Aquí δ es el símbolo de Kronecker

$$\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & , \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 & , \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases},$$

siendo α y β elementos de un conjunto cualquiera (no vacío). También es cierto que

$$\sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{jkl} \epsilon_{mk\ell} = 2\delta_{jm}.$$

Observese que el producto vectorial no es ni simétrico (el orden importa) ni asociativo (la ubicación de paréntesis no es irrelevante).

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}); \end{aligned}$$

B. Análisis vectorial

Luis A. Sanataló: Vectores y tensores con sus aplicaciones. Eudeba, Buenos Aires, 1977. Las citas a la duodécima edición (julio 1981) se indican con [S].

Operadores diferenciales

$$(B.1) \quad \nabla \wedge (\nabla \phi) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0;$$

$$(B.2) \quad \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A};$$

$$(B.3) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B});$$

$$\nabla \wedge (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \wedge \mathbf{A} + \phi (\nabla \wedge \mathbf{A});$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B};$$

$$\nabla (\phi \psi) = \phi (\nabla \psi) + \psi (\nabla \phi);$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A});$$

$$(B.4) \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}.$$

Coordenadas curvilíneas ortogonales

Las coordenadas u_1, u_2, u_3 de \mathbb{R}^3 especificadas por $u_j(x_1, x_2, x_3)$ en términos de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) son *ortogonales* si $\nabla u_j \cdot \nabla u_k = 0$ para $j \neq k$; alternativa- y equivalentemente, si

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_\ell} = \delta_{k\ell} h_k^2$$

en términos de las funciones $x_j(u_1, u_2, u_3)$. En cada punto las tangentes a las tres curvas obtenidas como intersección de las tres superficies de coordenadas constante u_j ($j = 1, 2, 3$) son dos-a-dos ortogonales. Los *factores de escala* h_j , dados por

$$h_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_j}\right)^2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

son en general funciones de (u_1, u_2, u_3) . Se tiene

$$h_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial u_j}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Para cada punto del espacio los vectores

$$\widehat{\mathbf{e}}_j := h_j^{-1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j} \widehat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_j} \widehat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_j} \widehat{\mathbf{x}}_3 \right), \quad j = 1, 2, 3,$$

en términos de los versores cartesianos $\widehat{\mathbf{x}}_j$, son ortonormales (unitarios y dos-a-dos ortogonales) y podemos lograr permutando los índices de (u_1, u_2, u_3) que $\widehat{\mathbf{e}}_j \wedge \widehat{\mathbf{e}}_k = \epsilon_{jkl} \widehat{\mathbf{e}}_\ell$. El vector de desplazamiento infinitesimal en un dado punto es

$$d\mathbf{s} = \widehat{\mathbf{e}}_1 h_1 du_1 + \widehat{\mathbf{e}}_2 h_2 du_2 + \widehat{\mathbf{e}}_3 h_3 du_3.$$

El elemento infinitesimal de volumen en un dado punto es entonces $h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$.

La matriz Jacobiana normalizada

$$J = \begin{pmatrix} h_1^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & h_2^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & h_3^{-1} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ h_1^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & h_2^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & h_3^{-1} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ h_1^{-1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & h_2^{-1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & h_3^{-1} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

es ortogonal y su inversa es igual a su traspuesta J^T .

Cada vector $\mathbf{v} = V_1\widehat{\mathbf{x}}_1 + V_2\widehat{\mathbf{x}}_2 + V_3\widehat{\mathbf{x}}_3$ con componentes cartesianas (V_1, V_2, V_3) tiene entonces la representación

$$\mathbf{v} = U_1(u_1, u_2, u_3)\widehat{\mathbf{e}}_1 + U_2(u_1, u_2, u_3)\widehat{\mathbf{e}}_2 + U_3(u_1, u_2, u_3)\widehat{\mathbf{e}}_3$$

donde las coordenadas (U_1, U_2, U_3) se obtienen de

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} .$$

Para el gradiente, la divergencia, el laplaciano y la rotación se obtienen (ver Problema 1.4), respectivamente, la siguientes fórmulas (aquí el campo vectorial es $\mathbf{v} = v_1\widehat{\mathbf{e}}_1 + v_2\widehat{\mathbf{e}}_2 + v_3\widehat{\mathbf{e}}_3$):

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \sum_{j=1}^3 h_j^{-1} \frac{\partial\phi}{\partial u_j} \mathbf{e}_j . \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= (h_1 h_2 h_3)^{-1} \left\{ \frac{\partial(h_2 h_3 v_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 v_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 v_3)}{\partial u_3} \right\} . \\ \Delta\psi &= (h_1 h_2 h_3)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial u_3} \right) \right\} . \\ \nabla \wedge \mathbf{v} &= (h_2 h_3)^{-1} \left(\frac{\partial(h_3 v_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial u_3} \right) \mathbf{e}_1 + (h_1 h_3)^{-1} \left(\frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 v_3)}{\partial u_1} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (h_1 h_2)^{-1} \left(\frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial u_2} \right) \mathbf{e}_3 . \end{aligned}$$

La siguiente tabla explicita los factores de escala para los sistemas de coordenadas más utilizados. La numeración garantiza que el sistema (u_1, u_2, u_3) es dextrógiro: $\widehat{\mathbf{e}}_j \wedge \widehat{\mathbf{e}}_k = \epsilon_{jkl} \widehat{\mathbf{e}}_\ell$.

Nombre	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
Cartesiano	x	y	z	1	1	1
Esférico	r	θ	φ	1	r	$r \sin(\theta)$
Cilíndrico	r	ϕ	z	1	r	1

Las matrices Jacobianas normalizadas para las coordenadas esféricas y cilíndricas son, respectivamente:

$$J_{esf} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} , \quad J_{cil} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Con esto y las fórmulas para las coordenadas obtenemos las siguientes expresiones (que son de mucho uso cuando se integra)

- (Coordenadas esféricas (r, θ, φ)) $\widehat{\mathbf{e}}_r = \cos(\varphi) \sin(\theta)\widehat{\mathbf{x}}_1 + \sin(\varphi) \sin(\theta)\widehat{\mathbf{x}}_2 + \cos(\theta)\widehat{\mathbf{x}}_3$, $\widehat{\mathbf{e}}_\theta = \cos(\varphi) \cos(\theta)\widehat{\mathbf{x}}_1 + \sin(\varphi) \cos(\theta)\widehat{\mathbf{x}}_2 - \sin(\theta)\widehat{\mathbf{x}}_3$, $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}_1 + \cos(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}_2$.
- (Coordenadas cilíndricas (r, φ, z)) $\widehat{\mathbf{e}}_r = \cos(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}_1 - \sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}_2$, $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi = \sin(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}_1 + \cos(\varphi)\widehat{\mathbf{x}}_2$, $\widehat{\mathbf{e}}_z = \widehat{\mathbf{x}}_3$.

Teoremas fundamentales de integración

, , Los teoremas de integración básicos del análisis real en tres dimensiones son los de Gauss y Stokes y sus consecuencias.

Teorema 1 (Teorema de Gauss) Si $K \subset \mathbb{R}^3$ es cerrado y acotado con borde ∂K suave¹⁹ y \mathbf{A} es un campo vectorial sobre K que es continuamente diferenciable, entonces

$$\int_K \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) d^3x = \int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} .$$

La integral de superficie

$$\int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial K} A_n(\mathbf{x}) d\sigma ,$$

es el flujo del campo vectorial a través de la superficie; A_n es la componente de \mathbf{A} normal a la superficie ∂K y exterior a K , y $d\sigma$ el elemento de superficie. Tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lim_{K \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{V(K)} \int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} ,$$

donde $V(K)$ es el volumen de K . Esto provee una definición de la divergencia independiente de las coordenadas y exhibe a esta como flujo infinitesimal. Si $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ en alguna región entonces el flujo de \mathbf{A} a través de cualquier superficie dentro de la región se anula y el campo \mathbf{A} se denomina *solenoidal* (la región se dice libre de fuentes).

Los siguientes resultados surgen como corolarios del Teorema de Gauss.

Teorema 2 Si ϕ es un campo escalar continuamente diferenciable sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple las condiciones del teorema de Gauss entonces

$$\int_K \nabla \phi(\mathbf{x}) d^3x = \int_{\partial K} \phi(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\sigma} .$$

Teorema 3 Si \mathbf{A} y K cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss, entonces

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge d\boldsymbol{\sigma}$$

Teorema 4 Sea $T_{jk}(\mathbf{x})$ un campo tensorial continuamente diferenciable definido en K que cumple con las hipótesis del Teorema de Gauss entonces

$$\int_K \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) d^3x = \int_{\partial K} T_{jk}(\mathbf{x}) d\sigma_j .$$

Teorema 5 (Teorema de Green, o segunda identidad de Green) Si f y g son campos escalares dos veces continuamente diferenciables sobre K que cumple las hipótesis del Teorema de Gauss, entonces

$$\int_K (f(\mathbf{x})(\Delta g)(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})(\Delta f)(\mathbf{x})) d^3x = \int_{\partial K} (f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})) \cdot d\boldsymbol{\sigma} .$$

El Teorema de Green se extiende al caso donde K no es acotado si tanto f como g decaen lo suficientemente rápidamente a cero en el infinito²⁰.

Teorema 6 (Primera identidad de Green) Si f es un campo escalar dos veces continuamente diferenciable y g es un campo escalar continuamente diferenciable ambos definidos sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple con las condiciones del Teorema de Gauss entonces:

$$\int_K \{g(\mathbf{x})(\Delta f)(\mathbf{x}) + ((\nabla g) \cdot (\nabla f))(\mathbf{x})\} d^3x = \int_{\partial K} g(\mathbf{x})(\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} .$$

¹⁹La suavidad del borde significa que el vector normal a la superficie ∂K es función continua de la posición. La hipótesis de suavidad del borde puede reemplazarse por "suavidad a trozos", o sea ∂K es unión de un número finito de superficies suaves. En el caso en el cual K no es conexo, el miembro derecho ha de entenderse como suma de las integrales de superficie de cada componente conexa.

²⁰El Laplaciano es un operador "autoadjunto" actuando sobre funciones de módulo cuadrado integrable.

Teorema 7 (Tercera identidad de Green) Si f es un campo escalar dos veces continuamente diferenciable definido sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple con las condiciones del Teorema de Gauss entonces

$$f(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_K \frac{\Delta f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \int_{\partial K} \left\{ \frac{\nabla f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right\} \cdot d\sigma .$$

El Teorema de Stokes es un análogo bidimensional del de Gauss.

Teorema 8 (Teorema de Stokes) Sea F una superficie orientada, cerrada y acotada con borde ∂F suave y \mathbf{u} un campo vectorial continuamente diferenciable en una región G que contiene a F y ∂F . Entonces

$$\int_F (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$$

donde en la integral de línea el elemento de línea $d\mathbf{s}$ y la normal a la superficie se orientan canónicamente.

La integral de línea

$$\int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial F} u_t ds$$

(u_t es la componente de \mathbf{u} tangencial a la curva ∂F) corresponde a la circulación del campo vectorial a lo largo de la curva (cerrada) ∂F e indica cuanto el campo “enrolla a la superficie”. Se tiene

$$(\text{rot } \mathbf{u})(\mathbf{r}) = \lim_{F \rightarrow \mathbf{r}} \frac{1}{S(F)} \int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} ,$$

donde la superficie F de área $S(F)$ se contrae al punto \mathbf{r} . Lo que indica que $\text{rot } \mathbf{u}$ en \mathbf{r} es la densidad de circulación infinitesimal en \mathbf{r} . Esto provee una definición de la rotación independiente de las coordenadas cartesianas. Un campo vectorial \mathbf{a} para el cual $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ se dice *irrotacional* o bien *libre de vórtices*.

Un corolario es:

Teorema 9 Sea F , ∂F y G como en el Teorema de Stokes y ϕ un campo escalar continuamente diferenciable sobre G . Entonces

$$\int_F (\nabla \phi) \wedge d\mathbf{f} = - \int_{\partial F} \phi d\mathbf{s} ,$$

con la misma condición sobre el sentido de integración en la integral de línea que en el Teorema de Stokes.

Campos solenoidales, campos conservativos y descomposición de Helmholtz.

Si, dado un campo vectorial \mathbf{v} hay un campo escalar ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla \phi$ entonces el campo vectorial se llama *conservativo*. En tal caso por (B.1), $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y el campo es irrotacional. Inversamente ¿todo campo vectorial irrotacional es conservativo? La respuesta es no necesariamente aunque para regiones simplemente conexas el Teorema de Stokes nos entrega:

Teorema 10 Si $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en una región simplemente conexa G donde \mathbf{v} es continuamente diferenciable, entonces para $\mathbf{p} \in G$ fijo, la integral de línea

$$\phi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} , \quad \mathbf{x} \in G ,$$

es independiente de la curva (suave) que une a \mathbf{p} con \mathbf{x} y define un potencial para \mathbf{v} ; o sea $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende del punto \mathbf{p} .

En particular todo campo libre de vórtices en una región simplemente conexa es conservativo.

Si dado un campo vectorial \mathbf{v} hay otro campo vectorial \mathbf{a} tal que $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{a}$ entonces, por (B.1) $\text{div } \mathbf{v} = 0$ y \mathbf{v} es solenoidal. Al campo vectorial \mathbf{a} se le puede agregar por supuesto $\nabla\phi$, donde el campo escalar ϕ es arbitrario (diferenciable), ya que $\nabla \wedge (\mathbf{a} + \nabla\phi) = \mathbf{v}$.

Interesa la pregunta (inversa): ¿todo campo vectorial solenoidal es el rotor de algun campo vectorial? Como en el problema anterior la respuesta depende de la estructura geométrica de la región K donde esta definido el campo vectorial. Si K tiene la propiedad de que cualquier superficie cerrada contenida en K encierra un volumen enteramente contenido en K^{21} entonces todo campo solenoidal continuamente diferenciable en K es el rotor de otro campo vectorial en K . Pero si esta condición sobre K no se cumple entonces hay campos vectoriales continuamente diferenciables solenoidales en K que no son el rotor de otro campo.

La descomposición de un campo vectorial \mathbf{V} definido en un abierto de \mathbb{R}^3 en suma

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{Y}$$

de un campo vectorial \mathbf{W} solenoidal (i.e., $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$) y un campo vectorial \mathbf{Y} irrotacional (i.e., $\nabla \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{0}$) es siempre posible²². Pero esta descomposición llamada de Helmholtz, no es necesariamente unívoca. Además, como vimos, no tiene necesariamente que haber un potencial ϕ tal que $\mathbf{Y} = \nabla\phi$ o un potencial vector \mathbf{a} tal que $\mathbf{W} = \nabla \wedge \mathbf{a}$. Si el campo a descomponer decae lo suficientemente rápido en el infinito, todas estas máculas desaparecen:

Teorema 11 (Helmholtz) *Si el campo vectorial \mathbf{A} sobre \mathbb{R}^3 satisface*

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^{1+\epsilon}}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ con } |\mathbf{x}| > R,$$

donde $C > 0$, $\epsilon > 0$ y $R > 0$; entonces hay una descomposición única

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x}),$$

donde $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \wedge \mathbf{C} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B}, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{0}$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Se tiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \wedge \mathbf{A})(\mathbf{y}) \wedge \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y,$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y.$$

$\mathbf{C} = \nabla\phi$, y $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{D}$, donde

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y;$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y.$$

Otra pregunta relacionada es ¿podemos reconstruir un campo vectorial a partir de su divergencia y de su rotación? La respuesta general es negativa. Pero si la divergencia y la rotación decaen en el infinito como $r^{2+\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$ entonces la respuesta es afirmativa si queremos que el campo decaiga a cero en el infinito y este campo está dado por las fórmulas del teorema de Helmholtz.

Soluciones de la ecuación de Laplace (funciones armónicas) y de Poisson.

Una *función armónica* en un abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un campo escalar que resuelve la ecuación de Laplace

$$\Delta f = 0, \quad \text{en } K$$

y que es continua en la clausura \overline{K} de K .

²¹Esto se cumple si K es convexo; vale decir el segmento de recta que une cualquier par de puntos de K está contenido en K . Para mas información consulte [S; §23.3 y p. 196]

²²Consulte [S; §23.4] para condiciones más precisas.

Teorema 12 (Teorema del valor medio) Si f sobre K es armónica y B es una bola de radio R contenida en \overline{K} y centrada en \mathbf{x} , entonces

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B} f(\mathbf{y}) d\sigma .$$

Como consecuencia de este resultado tenemos: Si ϕ es armónica en \mathbb{R}^3 y decae a cero en el infinito entonces $\phi \equiv 0$. Otra consecuencia es:

Teorema 13 Si ϕ es armónica en el abierto acotado K entonces asume su valor máximo y su valor mínimo en el borde de K :

$$\min_{\mathbf{y} \in \partial K} \phi(\mathbf{y}) < \phi(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{y} \in \partial K} \phi(\mathbf{y}) ,$$

para todo $\mathbf{x} \in K$. En particular, ϕ es idénticamente nula si se anula en ∂K .

Teorema 14 Si el campo escalar ϕ es solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) , \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 ,$$

y para $|\mathbf{r}| =: r \rightarrow \infty$ se tiene

$$\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0 , \quad r \nabla \phi(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} ,$$

entonces

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3x$$

cuando la integral existe.

Teorema 15 Si el campo escalar f sobre \mathbb{R}^3 es continuo y la integral $\int |f(\mathbf{x})| d^3x$ existe entonces existe

$$\phi(\mathbf{r}) := -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3x ,$$

y es la única solución de la ecuación de Poisson $\Delta \phi = f$ para la cual $\phi(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(1/r)$ para $r \rightarrow \infty$.

C. Polinomios de Legendre

Para $\ell = 0, 1, 2, \dots$, la única solución regular en todo el intervalo $[-1, 1]$ de la ec. dif. $(1-x^2)P_\ell''(x) - 2xP_\ell'(x) + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0$ es un múltiplo del polinomio de Legendre P_ℓ que tiene grado ℓ dado por (Fórmula de Rodrigues):

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell .$$

$$(C.1) \quad \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_m(x) dx = \delta_{\ell,m} \frac{2}{2\ell+1}$$

$$(C.2) \quad P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) ; \quad P_\ell(1) = 1 ; \quad P_\ell(0) = \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^\ell} \binom{\ell}{\ell/2} \quad (\ell \text{ par}) .$$

$$(C.3) \quad (\ell+1)P_{\ell+1}(x) = (2\ell+1)xP_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) .$$

$$(C.4) \quad (1-x^2)P_\ell'(x) = -\ell x P_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) , \quad P'_{\ell+1} - P'_{\ell-1} = (2\ell+1)P_\ell .$$

$$(C.5) \quad \int_{-1}^1 x^k P_\ell(x) dx = 0, \quad \text{si } \mathbb{N} \ni k < \ell.$$

$$(C.6) \quad f(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_\ell P_\ell(x), \quad A_\ell = \frac{2}{2\ell + 1} \int_{-1}^1 f(x) P_\ell(x) dx.$$

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, $P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$.
 $x^2 = (2P_2(x) + P_0(x))/3$, $x^3 = (2P_3(x) + 3P_1(x))/5$, $x^4 = (8P_4(x) + 20P_2(x) + 7P_0(x))/35$, $x^5 = (8P_5(x) + 28P_3(x) + 27P_1(x))/63$.

C.1. Funciones asociadas de Legendre

Las funciones asociadas de Legendre P_ℓ^m , $\ell = 0, 1, \dots$, $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$ son soluciones regulares en todo el intervalo $[-1, 1]$ de la ecuación diferencial de Legendre modificada:

$$\left((1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) y(x) \right) = 0.$$

Para $m \geq 0$,

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x);$$

que muestra que P_ℓ^m no es un polinomio cuando m es impar. El factor $(-1)^m$ es por supuesto cuestión de convenciones (muchos autores lo omiten) pero útil para la teoría de los armónicos esféricos. Para, $m < 0$,

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} P_\ell^{-m}(x).$$

O, alternativamente, cualquiera sea el signo de m :

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell.$$

$P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$ el polinomio de Legendre del apartado anterior.

$$P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(x), \quad P_\ell^m(0) = \frac{2^m \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-m-\ell}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-\ell+m}{2}\right)}.$$

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{2(\ell + m)!}{(2\ell + 1)(\ell - m)!} \delta_{\ell,k}, \quad |m| \leq \min\{\ell, k\}.$$

$$P_0^0(x) = 1; \quad P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2} P_1^1(x), \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^1(x) = -(1 - x^2)^{1/2};$$

$$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{24} P_2^2(x), \quad P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6} P_2^1(x), \quad P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = -3x(1 - x^2)^{1/2}, \quad P_2^2(x) = 3(1 - x^2).$$

$$P_1^1(\cos(\theta)) = -\sin(\theta); \quad P_2^1(\cos(\theta)) = -3 \cos(\theta) \sin(\theta), \quad P_2^2(\cos(\theta)) = 3 \sin(\theta)^2;$$

$$P_3^1(\cos(\theta)) = -\frac{3}{2}(5 \cos(\theta)^2 - 1) \sin(\theta), \quad P_3^2(\cos(\theta)) = 15 \cos(\theta) \sin(\theta)^2, \quad P_3^3(\cos(\theta)) = -15 \sin(\theta)^3.$$

Para mas información consultar: http://en.wikipedia.org/wiki/Associated_Legendre_polynomial y <http://dlmf.nist.gov/14>.

D. Armónicos esféricos

$$(D.1) \quad Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi},$$

siendo P_ℓ^m las funciones de Legendre asociadas definidas en el apartado anterior.

$$(D.2) \quad r^2 \Delta Y_\ell^m = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m.$$

$$(D.3) \quad Y_\ell^{-m} = (-)^m \overline{Y_\ell^m}; \quad Y_\ell^m(-\theta + \pi, \varphi + \pi) = (-)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi); \quad Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi) = (-1)^{\ell+m} Y_\ell^m(\theta, \varphi).$$

$$(D.4) \quad Y_\ell^m(\pi/2, \varphi) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \ell + m \text{ es impar} \\ \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!(\ell+m)!}{4\pi}} \frac{(-1)^{(\ell+m)/2} e^{im\varphi}}{2^\ell ((\ell-m)/2)! ((\ell+m)/2)!} & , \text{ si } \ell + m \text{ es par} \end{cases}.$$

$$(D.5) \quad \operatorname{Re}(Y_\ell^m) = \begin{cases} \frac{Y_\ell^m + Y_\ell^{-m}}{2} & , \quad m \text{ par} \\ \frac{Y_\ell^m - Y_\ell^{-m}}{2} & , \quad m \text{ impar} \end{cases}; \quad \operatorname{Im}(Y_\ell^m) = \begin{cases} \frac{Y_\ell^m - Y_\ell^{-m}}{2i} & , \quad m \text{ par} \\ \frac{Y_\ell^m + Y_\ell^{-m}}{2i} & , \quad m \text{ impar} \end{cases}$$

$$(D.6) \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \overline{Y_\ell^m(\theta, \varphi)} Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin(\theta) = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}.$$

Si γ es el ángulo entre las direcciones (θ, φ) y (θ', φ') entonces $\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi')$ y

$$(D.7) \quad P_\ell(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_\ell^m(\theta', \varphi')} Y_\ell^m(\theta, \varphi).$$

Si $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ y $\mathbf{r}' = (r', \theta', \varphi')$ en coordenadas esféricas entonces

$$(D.8) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \overline{Y_\ell^m(\theta', \varphi')} Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} P_\ell(\cos(\gamma)),$$

donde $r_{<} := \min\{r, r'\}$ y $r_{>} := \max\{r, r'\}$.

$$Y_0^o(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}; \quad Y_1^o(\theta, \varphi) = \sqrt{3/8\pi} \cos(\theta), \quad Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{3/8\pi} \sin(\theta) e^{i\varphi}; \\ Y_2^o(\theta, \varphi) = \sqrt{5/16\pi} (3 \cos(\theta)^2 - 1), \quad Y_2^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\varphi}, \quad Y_2^2(\theta, \varphi) = \sqrt{15/32\pi} \sin(\theta)^2 e^{2i\varphi}.$$

Para mas información consulte: http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonic.

E. Funciones de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel

$$(E.1) \quad x^2 f'' + x f' + (x^2 - \nu^2) f = 0$$

tiene como soluciones linealmente independientes a la función de Bessel (de primera especie) J_ν y la función de Neumann (o de Weber) N_ν (también anotada Y_ν).

$$(E.2) \quad J_\nu(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} (x/2)^{2k+\nu}, \quad N_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes salvo para ν entero donde $J_{-\nu} = (-)^\nu J_\nu$. $J_\nu(-x) = (-)^\nu J_\nu(x)$.

El comportamiento asintótico es:

Cuando $x \rightarrow 0$

$$(E.3) \quad J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (x/2)^\nu + \mathcal{O}(x^{\nu+2}) \quad \& \quad N_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln(x) + \mathcal{O}(1) & , \quad \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} (2/x)^\nu + \mathcal{O}(x^{1-\nu}) & , \quad \nu > 0 \end{cases};$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$,

$$(E.4) \quad \left. \begin{matrix} J_\nu(x) \\ N_\nu(x) \end{matrix} \right\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \begin{cases} \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \\ \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \end{cases} + \mathcal{O}(x^{-3/2}).$$

Relaciones de recurrencia:

$$(E.5) \quad 2\nu J_\nu(x) = x(J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x)), \quad 2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x).$$

Ceros y relaciones de ortogonalidad: Si ν es real, J_ν , J'_ν , N_ν y N'_ν tienen infinitos ceros reales todos simples con la posible excepción de $x = 0$. Para $\nu \geq 0$, J_ν tiene infinitos ceros positivos (son simples y no se acumulan). Si a y b son ceros de J_ν entonces

$$(E.6) \quad \int_0^1 x J_\nu(ax) J_\nu(bx) dx = \begin{cases} 0 & , \quad a \neq b \\ J_{\nu+1}(a)^2/2 = J_{\nu-1}(a)^2/2 & , \quad a = b \end{cases}.$$

F. Funciones de Bessel modificadas (o hiperbólicas)

La ecuación diferencial de Bessel modificada

$$(F.1) \quad x^2 f'' + x f' - (x^2 + \nu^2) f = 0$$

tiene como soluciones linealmente independientes a la función de Bessel modificada (de primera especie) I_ν y la función de Bessel modificada de segunda especie K_ν .

$$(F.2) \quad I_\nu(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} (x/2)^{2k+\nu}, \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

I_ν y $I_{-\nu}$ son linealmente independientes salvo para ν entero. $I_\nu(-x) = (-)^\nu I_\nu(x)$. Tanto K_ν como I_ν toman valores positivos si $\nu > -1$ y $x > 0$.

El comportamiento asintótico es:

Cuando $x \rightarrow 0$

$$(F.3) \quad I_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (x/2)^\nu + \mathcal{O}(x^{\nu+2}) \quad \& \quad K_\nu(x) \sim \begin{cases} -\ln(x) & , \quad \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} (2/x)^\nu & , \quad \nu > 0 \end{cases};$$

cuando $x \rightarrow \infty$,

$$(F.4) \quad I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad \& \quad K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

Relaciones de recurrencia:

$$(F.5) \quad 2\nu I_\nu(x) = x(I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)), \quad 2I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x).$$

G. Simetrías

Sea T es una transformación lineal y ortogonal de \mathbb{R}^3 . La ortogonalidad de T es equivalente a $(T\mathbf{a}) \cdot (T\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ o, equivalentemente a $|T\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$. Si T es ortogonal entonces $(T\mathbf{a}) \wedge (T\mathbf{b}) = \det(T) T(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. Con estas propiedades se ve rápidamente que:

- a) Si ρ es una densidad volumétrica de carga definida en todo \mathbb{R}^3 que es invariante para la transformación T – o sea $\rho(T\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$; entonces:

- a₁) el potencial electrostático asociado a ρ ,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}$$

es invariante: $\Phi(T\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

- a₂) el campo electrostático asociado a ρ , $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, satisface $T\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(T\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

- a₃) el momento 2^ℓ -polar cartesiano $Q_{j_1, j_2, \dots, j_\ell}^{[\ell]}$ satisface:

$$Q_{j_1, j_2, \dots, j_\ell}^{[\ell]} = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_\ell=1}^3 T_{j_1, m_1} T_{j_2, m_2} \cdots T_{j_\ell, m_\ell} Q_{m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{[\ell]},$$

donde $T_{j,k}$ son los elementos de la matriz asociada a T en la base cartesiana usada para definir los momentos. En particular:

- ($\ell = 1$) el momento dipolar cartesiano \mathbf{p} asociado a ρ es invariante: $T\mathbf{p} = \mathbf{p}$;
- ($\ell = 2$) el momento cuadrupolar cartesiano $\mathbb{Q} = [Q_{j,k}]$ satisface $\mathbb{T}\mathbb{Q}\mathbb{T}^\dagger = \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{T} = [T_{j,k}]$.

- b) Si \mathbf{J} es una densidad volumétrica de corriente tal que $T\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(T\mathbf{r})$, entonces el campo magnetostático asociado

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3\mathbf{x}$$

satisface $T\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \det(T) \mathbf{B}(T\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

Si, en cambio, $T\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \det(T) \mathbf{J}(T\mathbf{r})$ entonces $T\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(T\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

Índice alfabético

- Ampère, ley de, 94, 99, 100
armónica, función, 19
Armónicos esféricos, 53, 110
- Bessel modificada, ecuación diferencial de, 111
Bessel modificadas, funciones de, 111
Bessel, ecuación diferencial de, 110
Bessel, funciones de, 110
Biot-Savart, ley de, 85, 92
- Campos, conservativos, 106
Campos, solenoidales, 106
Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 9
circulación, 8
Coordenadas curvilineas ortogonales, 103
- Delta de Dirac, aproximación gaussiana, 13
densidad, de carga, 24, 29, 34, 35, 38, 44, 47, 51, 63, 65, 67, 71, 73, 97, 99
densidad, de corriente, 94, 95
densidad, de flujo magnético, 94
Descomposición de Helmholtz, 106
divergencia, 102, 104
- ecuación de Klein-Gordon, 21
ecuación de ondas, 20
energía electromagnética, 22
- Fórmulas de Green, 104
fuentes, 2
Función de Green, 59, 71
Función de Green-Dirichlet para el exterior de una esfera, 47
Función de soporte compacto infinitamente diferenciable, 12
Funciones asociadas de Legendre, 109
Funciones de Bessel, 110
- gradiente, 102, 104
Green, función de, 47, 59, 71
Green, primera identidad de, 18, 20, 21, 33, 105
Green, segunda identidad de, 105
Green, tercera identidad de, 106
- irrotacional, 6
- Klein-Gordon, ecuación de, 21
- laplaciano, 102, 104
Legendre, funciones asociadas, 109
Legendre, polinomios de, 108
- método de las imágenes, 35, 63, 66
- ondas, ecuación de, 20
- Pitagoras, Teorema de, 9
Poisson, ecuación de, 18
Polinomios de Legendre, 108
Primera identidad de Green, 18, 20, 21, 33, 105
producto escalar, 9, 102
producto vectorial, 102
promedio esférico, 19
- rotación, 10, 102, 104
- Segunda identidad de Green, 105
Simetría, 112
simplemente conexo, 8
solenoidal, 8
solenoides cilíndrico, campo en el eje, 92
- Teorema de Gauss o de la divergencia, 104
Teorema de Green, 104
Teorema de Stokes, 8, 104
Teorema del Valor Medio para funciones armónicas, 108
Teoremas de integración, 104
Tercera identidad de Green, 106
toro, volumen, 6
Transformación lineal ortogonal, 112
- vórtices, 2