

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

---

**SERIE “C”**

**TRABAJOS DE FÍSICA**

**Nº 9/15**

**Análisis de Datos e Incertidumbres  
en Física Experimental – Parte II**

**Silvina Pérez - Clemar Schurrer - Guillermo Stutz**



Editor: Miguel A. Chesta

---

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

# Análisis de Datos e Incertidumbres en Física Experimental – Parte II

Silvina C. Pérez, Clemar A. Schürerer, Guillermo E. Stutz

# Índice general

<b>1. Tratamiento estadístico de datos experimentales con muestras pequeñas</b>	<b>2</b>
1.1. Muestras pequeñas . . . . .	2
1.1.1. Intervalos de confianza basados en una población con distribución normal pero con muestras pequeñas . . . . .	2
1.1.2. Comparación de un valor determinado experimentalmente para una muestra pequeña con un valor de referencia . . . . .	4
1.1.3. Comparación de valores determinados experimentalmente para muestras pequeñas . . . . .	6
<b>2. Cantidades correlacionadas</b>	<b>10</b>
<b>3. Ajuste de un polinomio por el método de cuadrados mínimos</b>	<b>15</b>
3.1. Solución matricial para los parámetros de ajuste . . . . .	15
3.2. Desviación estándar de los parámetros de ajuste . . . . .	17
<b>4. Intervalo de confianza para una cantidad determinada indirectamente</b>	<b>20</b>
4.1. La fórmula de Welch–Satterthwaite . . . . .	20
<b>5. Distribución Binomial y de Poisson</b>	<b>24</b>
5.1. Distribución Binomial . . . . .	24
5.1.1. Valor medio y desviación estándar . . . . .	26
5.1.2. Aproximación Gaussiana a la distribución binomial . . . . .	27
5.2. Distribución de Poisson . . . . .	28
5.2.1. Valor medio y desviación estándar . . . . .	30
5.2.2. Aproximación Gaussiana a la distribución de Poisson . . . . .	31
5.3. Comparación de las distribuciones de Poisson y binomial con la distribución normal . . . . .	32
<b>6. Incertidumbres de medición. Guía GUM</b>	<b>33</b>
6.1. Introducción . . . . .	33
6.2. Definición de algunos términos metrológicos . . . . .	34
6.3. Evaluación de incertidumbres de medición . . . . .	35
6.3.1. Etapas de la evaluación de incertidumbres . . . . .	35
6.3.2. Síntesis del procedimiento de evaluación . . . . .	36
<b>A.</b>	<b>40</b>
A.1. Valores críticos para la distribución $t$ de Student . . . . .	40
A.2. Valores críticos para la distribución $F$ . . . . .	41

# Capítulo 1

## Tratamiento estadístico de datos experimentales con muestras pequeñas

### 1.1. Muestras pequeñas

#### 1.1.1. Intervalos de confianza basados en una población con distribución normal pero con muestras pequeñas

Cuando el número de datos es  $N < 30$  (muestras pequeñas) no es posible usar el teorema central del límite y hay que hacer una suposición específica acerca de la forma de la distribución (gamma, Weibull, etc), para luego poder encontrar un intervalo de confianza para esa distribución en particular. Aquí nos centraremos solo en el caso de distribuciones normales, que son las más comunes en las mediciones experimentales.

Si  $N$  es pequeño, ya no es tan cierto que  $s$  sea cercana a  $\sigma$  y la variable aleatoria estandarizada presenta aleatoriedad tanto en el numerador como en el denominador. Esto implica que la distribución de la nueva variable estandarizada

$$(1.1) \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$$

estará más dispersa que la distribución normal estándar. Esta nueva distribución es la familia de distribuciones  $t$ .

Existe un teorema que establece lo siguiente:

Cuando  $\bar{X}$  es la media de una muestra aleatoria de tamaño  $N$ , de una distribución normal con media  $\mu$ , la variable aleatoria  $T$  tiene una distribución de probabilidad llamada **distribución  $t$ -Student** con  $\nu = N - 1$  grados de libertad.

Una distribución  $t$ -Student está regida por un único parámetro, el número de grados de libertad de la distribución. Cada valor diferente de  $\nu$  corresponde a una distribución  $t_\nu$  diferente, que tiene las siguientes propiedades:

Cada curva  $t_\nu$  tiene forma de campana con centro en  $t = 0$ .

Cada curva  $t_\nu$  está más dispersa que la curva normal estándar.

A medida que  $\nu$  aumenta, la dispersión de la curva  $t_\nu$  correspondiente disminuye, como se observa en la Figura 1.1.

A medida que  $\nu \rightarrow \infty$ , la secuencia de la curva  $t_\nu$  se aproxima a la curva normal estándar.

La densidad de probabilidad  $p(t, \nu)$  de la distribución  $t$ , para  $\nu$  grados de libertad, está dada por:

$$(1.2) \quad p(t, \nu) = \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\Gamma(\nu/2)} \sqrt{1/\pi\nu} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

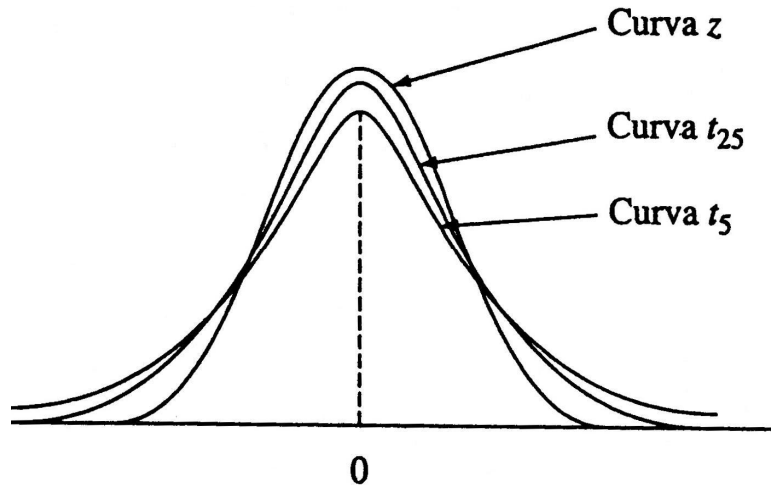


Figura 1.1: Curva  $t$ -Student para diferentes grados de libertad ( $\nu=5, 25$ ). La curva  $z$  representa la curva normal estándar.

El área bajo la curva de densidad de probabilidad, con  $\nu$  grados de libertad, entre  $-t_{\alpha/2, \nu}$  y  $t_{\alpha/2, \nu}$  es  $1 - \alpha$  (ver Figura 1.2). Esto implica que

$$(1.3) \quad \bar{x} \pm t_{\alpha/2, \nu} \frac{s}{\sqrt{N}}$$

es el intervalo de confianza asociado a la magnitud medida, con nivel de confianza  $100(1 - \alpha)$  %.

---

**Ejemplo:** Una agencia de protección ambiental hizo mediciones de CL50 (concentración letal que mata al 50 % de los animales de experimentación) para ciertos productos químicos que se pueden encontrar en ríos y lagos. Para cierta especie de peces, las mediciones de CL50 para DDT en 12 experimentos arrojaron los siguientes datos (expresados en partes por millón):  $\bar{x} = 9,0$  y  $s = 6,4$ . Obtener el intervalo de confianza del 90 %.

Como se quiere un intervalo de confianza (IC) del 90 %, resulta:

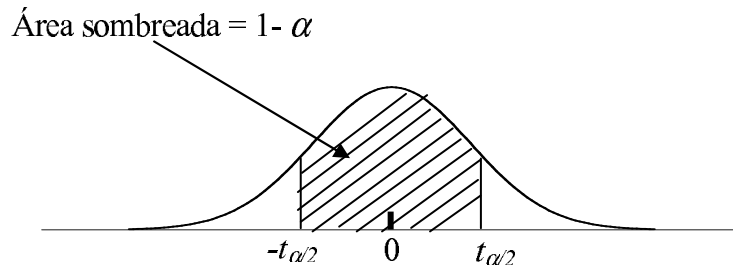


Figura 1.2: Distribución de probabilidad  $t$ . El área sombreada representa la probabilidad  $P(-t_{\alpha/2,\nu} < T < t_{\alpha/2,\nu}) = 1 - \alpha$ .

$$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \alpha/2 = 0,05$$

El valor de  $t_{\alpha/2,\nu}$  correspondiente a  $\alpha/2 = 0,05$  y  $\nu = N - 1 = 11$  es  $t_{0,05;11} = 1,796$  (ver Tabla A.1), resultando un intervalo de confianza:

$$IC(90\%) = 9,0 \pm t_{0,05;11} \frac{6,4}{\sqrt{12}} = 9,0 \pm 1,796 \frac{6,4}{\sqrt{12}} \simeq 9 \pm 3$$

### 1.1.2. Comparación de un valor determinado experimentalmente para una muestra pequeña con un valor de referencia

En este caso el procedimiento de prueba es equivalente al seguido en la sección 3.10 de la primera parte de este trabajo, pero en lugar de usar la variable estandarizada  $Z$ , se hace uso de la variable estandarizada  $T$ . Por lo tanto si queremos realizar un procedimiento de prueba que nos permita decidir si el valor medido es igual o distinto al valor aceptado universalmente, se debe plantear la hipótesis nula y la hipótesis alternativa correspondiente:

Hipótesis nula:  $H_0 : \mu = \mu_0$

Hipótesis alternativa:  $H_a : \mu \neq \mu_0$

El estadístico de prueba:

$$(1.4) \quad t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

surge de considerar que se ha trabajado con una muestra pequeña de una población con distribución normal.

La región de rechazo correspondiente, para un nivel de significancia  $\alpha$ , resulta en este caso:

$$(1.5) \quad RR = \{t \geq t_{\alpha/2, \nu} \text{ o } t \leq -t_{\alpha/2, \nu}\}$$

Así, para un nivel de significancia  $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha/2 = 0,025$ , y  $N = 12$  se debe determinar  $t_{\alpha/2, \nu}$  tal que  $P(t > t_{\alpha/2, \nu}) = 0,025$ , resultando  $t_{\alpha/2, \nu} = 2,201$ , y

$$(1.6) \quad RR = \{t \geq 2,201 \text{ o } t \leq -2,201\}$$

De esta manera si el estadístico de prueba calculado con los datos muestrales cae en la región de rechazo, se debe rechazar la hipótesis nula a favor de la alternativa. Por ejemplo, en el caso de estar verificando el funcionamiento o la calibración de un equipo de medición, realizando medidas sobre una referencia aceptada, debemos concluir que nuestras mediciones son inaceptables y tratar de encontrar el origen de la discrepancia.

Existen otras dos posibles hipótesis alternativas cuyas respectivas regiones de rechazo con un nivel de significancia  $\alpha$  son:

$$\text{Hipótesis alternativa: } H_a : \mu < \mu_0 \quad RR = \{t \leq -t_{\alpha, \nu}\}$$

$$\text{Hipótesis alternativa: } H_a : \mu > \mu_0 \quad RR = \{t \geq t_{\alpha, \nu}\}$$

Ejemplo: De una muestra de 10 lentes para anteojos se determina que el grosor promedio muestral es de 3,05 mm y que la desviación estándar muestral es de 0,34 mm. Se desea que el grosor promedio de las lentes que se fabrican sea de 3,20 mm. ¿Sugieren los datos muestrales que el grosor promedio de las lentes es diferente al deseado? Pruebe con  $\alpha = 0,05$ .

1. Establecer la hipótesis nula y la hipótesis alternativa adecuada:

$$\text{Hipótesis nula: } H_0 : \mu = 3,20$$

$$\text{Hipótesis alternativa: } H_a : \mu \neq 3,20$$

2. Calcular el estadístico de prueba

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{3,05 - 3,20}{\frac{0,34}{\sqrt{10}}} = -1,395$$

3. Establecer la región de rechazo para el nivel de significancia seleccionado. En este caso  $\alpha = 0,05$  y por lo tanto  $RR = \{t \geq t_{0,025,9} \text{ o } t \leq -t_{0,025,9}\} = \{t \geq 2,262 \text{ o } t \leq -2,262\}$ .
4. Como el estadístico de prueba  $t = -1,395$  no pertenece a la región de rechazo, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, el grosor promedio de las lentes fabricadas no es diferente al deseado con un nivel de significancia de 0,05.

### 1.1.3. Comparación de valores determinados experimentalmente para muestras pequeñas

Veremos ahora como se procede cuando se desean comparar dos valores de una magnitud, determinados a partir de muestras pequeñas de poblaciones normales, siendo los resultados obtenidos:

$$\bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{n_x}} \quad \text{y} \quad \bar{y} \pm \frac{s_y}{\sqrt{n_y}}$$

En este caso, hay que distinguir dos casos dependiendo si las varianzas son o no son homogéneas, es decir, si pueden, o no, considerarse iguales.

#### Inferencias en relación con dos varianzas poblacionales

Para el caso de las poblaciones normales, los procedimientos de prueba están basados en una nueva familia de distribuciones de probabilidad: la distribución  $F$ . Esta distribución tiene dos parámetros que la caracterizan:  $\nu_1$  que es el número de grados de libertad del numerador y  $\nu_2$  que es el número de grados de libertad del denominador. Como la función es complicada y no la usaremos explícitamente, omitimos la fórmula.

En forma análoga a la notación  $t_{\alpha,\nu}$ , usamos  $F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$  para el punto sobre el eje de las abscisas que indica que el área bajo la curva de densidad de probabilidad  $F$ , con grados de libertad  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , en la cola superior es  $\alpha$  (ver Figura 1.3).

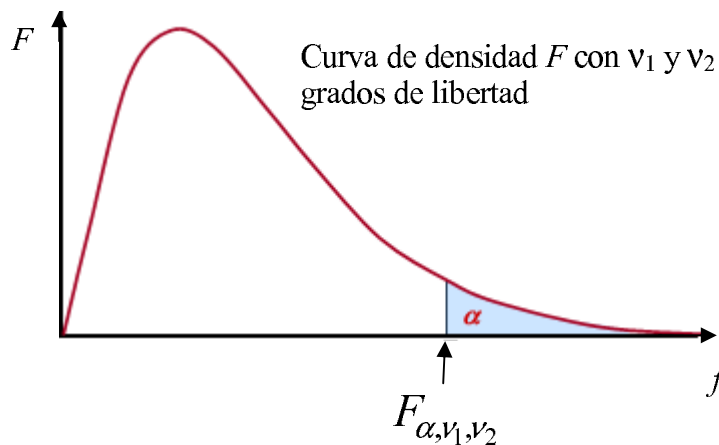


Figura 1.3: Curva de densidad de probabilidad  $F$ . El área sombreada representa la probabilidad  $P(f > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}) = \alpha$

La curva no es simétrica, por lo que podría parecer que debe calcularse tanto el valor crítico de cola superior, como el de cola inferior. Sin embargo esto no es necesario debido a la siguiente propiedad:

$$(1.7) \quad F_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha,\nu_2,\nu_1}}$$

Un teorema expresa lo siguiente:



Sea  $X_1, X_2, \dots, X_{n_x}$  una muestra aleatoria de una distribución normal con varianza  $\sigma_x^2$ , sea  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y}$  una muestra aleatoria de una distribución normal con varianza  $\sigma_y^2$ , y sean  $S_x^2$  y  $S_y^2$  las respectivas varianzas muestrales. Entonces, la variable aleatoria:

$$F = \frac{S_x^2/\sigma_x^2}{S_y^2/\sigma_y^2}$$

tiene una distribución  $F$  con  $\nu_1 = n_x - 1$  y  $\nu_2 = n_y - 1$  grados de libertad.

Debido a que  $F$  implica un cociente, el estadístico de prueba es el cociente de las varianzas muestrales. La hipótesis  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$  es rechazada si el cociente difiere demasiado de 1. En este caso la prueba de hipótesis se realiza de la siguiente manera:

Hipótesis nula:  $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

Estadístico de prueba:  $f = s_x^2/s_y^2$

Hipótesis alternativa:      Región de rechazo con nivel de significancia  $\alpha$ :

$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$        $RR = \{f \geq F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}\}$

$H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$        $RR = \{f \leq F_{1-\alpha, \nu_1, \nu_2}\}$

$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$        $RR = \{f \geq F_{\alpha/2, \nu_1, \nu_2} \text{ o } f \leq F_{1-\alpha/2, \nu_2, \nu_1}\}$

De este modo si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa.

### Varianzas homogéneas

Si las varianzas son homogéneas, el procedimiento de prueba es el siguiente:

Hipótesis nula  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \quad \text{con} \quad s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{\nu}$$

siendo el número de grados de libertad  $\nu = n_x + n_y - 2$ .

Hipótesis alternativa:      Región de rechazo con nivel de significancia  $\alpha$ :

$H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0$        $RR = \{t \leq -t_{\alpha, \nu}\}$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$        $RR = \{t \geq t_{\alpha, \nu}\}$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$        $RR = \{t \geq t_{\alpha/2, \nu} \text{ o } t \leq -t_{\alpha/2, \nu}\}$

## Varianzas no homogéneas

Si las varianzas no son homogéneas, se debe realizar el siguiente procedimiento de prueba:

Hipótesis nula  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}}$$

El número de grados de libertad, en este caso, está definido por:

$$\nu = \left( \frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y} \right)^2 \bigg/ \left[ \frac{(s_x^2/n_x)^2}{n_x - 1} + \frac{(s_y^2/n_y)^2}{n_y - 1} \right]$$

Hipótesis alternativa:      Región de rechazo con nivel de significancia  $\alpha$ :

$H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0$        $RR = \{t \leq -t_{\alpha, \nu}\}$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$        $RR = \{t \geq t_{\alpha, \nu}\}$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$        $RR = \{t \geq t_{\alpha/2, \nu} \text{ o } t \leq -t_{\alpha/2, \nu}\}$

Ejemplo: Se realizó un estudio para determinar la cantidad de residuos químicos encontrados en los tejidos cerebrales de pelícanos cafés. En una prueba sobre DDT, muestras aleatorias de 10 pelícanos jóvenes y 13 polluelos dieron los resultados indicados en la siguiente tabla (las cantidades están expresadas en partes por millón):

	Jóvenes (1)	Polluelos (2)
$n$	10	13
$\bar{x}$	0.041	0.026
$s$	0.017	0.006

a) Verificar la homogeneidad de las varianzas con  $\alpha = 0,01$ .

Suponiendo que la cantidad de DDT, tanto en pelícanos jóvenes como en polluelos, tiene una distribución aproximadamente normal, queremos probar:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Donde  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  son las varianzas de la cantidad de DDT en pelícanos jóvenes y en polluelos, respectivamente. El estadístico de prueba, en este caso, es:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(0,017)^2}{(0,006)^2} = 8,028$$

En esta prueba, la región de rechazo resulta:  $RR = \{f \geq F_{0,05,9,12} \text{ o } f \leq F_{0,95,9,12}\} = \{f \geq F_{0,05,9,12} \text{ o } f \leq 1/F_{0,05,12,9}\} = \{f \geq 2,796 \text{ o } f \leq 1/3,073 = 0,3254\}$

Como  $f$  pertenece a la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula, es decir, estamos en presencia de varianzas no homogéneas.

b) Probar la hipótesis que no existe diferencia en la cantidad media poblacional de DDT encontrada en pelícanos jóvenes y en polluelos, contra la hipótesis alternativa que los pelícanos jóvenes presentan un promedio mayor, con un nivel de significancia de 0,05.

En este caso la prueba de hipótesis a llevar a cabo es la siguiente:

Hipótesis nula:  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Hipótesis alternativa:  $H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$

Como las varianzas no son homogéneas, el estadístico de prueba es:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = 2,665$$

y el número de grados de libertad:

$$\nu = \left( \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2 \Bigg/ \left[ \frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1} \right] = 10,73 \approx 10$$

La región de rechazo es  $RR = \{t > t_{0,05,10}\} = \{t > 1,812\}$ .

Como  $t = 2,665$  pertenece a la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula en favor de la alternativa, es decir, hay evidencia suficiente para concluir que los pelícanos jóvenes presentan un promedio de DDT mayor que los polluelos, para un nivel de significancia de 0,05.

---

# Capítulo 2

## Cantidades correlacionadas

Se estableció, sin ninguna demostración, que cuando las cantidades son independientes y aleatorias, la mejor estimación para la desviación estándar de una cantidad  $q(x_1, \dots, x_n)$  es la suma cuadrática:

$$(2.1) \quad s_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} s_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n} s_{x_n}\right)^2}$$

También se dijo que ya sea que las cantidades sean o no independientes y aleatorias, siempre se cumple que:

$$(2.2) \quad s_q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x_1} s_{x_1}\right| + \dots + \left|\frac{\partial q}{\partial x_n} s_{x_n}\right|,$$

es decir, siempre existe una cota superior para  $s_q$ .

En esta capítulo obtendremos una expresión para  $s_q$  para el caso de cantidades aleatorias pero no independientes (cantidades correlacionadas) y demostraremos que se cumple la desigualdad (2.2).

Supongamos, por simplicidad, que la cantidad a medir depende de sólo dos variables,  $q = q(x, y)$ , y que medimos  $x$  e  $y$  repetidas veces, obteniendo  $N$  pares de datos  $(x_i, y_i)$ . A partir de estas medidas podemos calcular los valores medios de  $x$  e  $y$  ( $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ ) y las respectivas desviaciones estándares muestrales ( $s_x$  y  $s_y$ ). También podemos obtener  $N$  valores de la cantidad de interés:

$$(2.3) \quad q_i = q(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, N$$

y con ellos es posible calcular  $\bar{q}$  y  $s_q$ . Suponiendo que todas las incertidumbres son pequeñas y que todos los valores son próximos a sus valores medios, se puede escribir, a primer orden:

$$(2.4) \quad q_i = q(x_i, y_i) \simeq q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} (y_i - \bar{y})$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \bar{q} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i \\
 &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ q(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} (x_i - \bar{x}) + \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} (y_i - \bar{y}) \right] \\
 (2.5) \quad &= q(\bar{x}, \bar{y})
 \end{aligned}$$

debido a que:

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}) = 0$$

Usando (2.4) y (2.5), obtenemos la siguiente expresión para la varianza asociada a  $q$ :

$$\begin{aligned}
 s_q^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (q_i - \bar{q})^2 \\
 &\simeq \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[ \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} (x_i - \bar{x}) + \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} (y_i - \bar{y}) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 (x_i - \bar{x})^2 + \left( \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 (y_i - \bar{y})^2 \right. \\
 (2.7) \quad &\left. + 2 \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]
 \end{aligned}$$

Definiendo la **covarianza** de  $x$  e  $y$

$$(2.8) \quad s_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

podemos escribir:

$$(2.9) \quad s_q^2 = \left( \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_x^2 + \left( \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_y^2 + 2 \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} s_{xy}$$

Esta expresión es válida ya sea que las medidas de  $x$  e  $y$  sean o no independientes y estén o no normalmente distribuidas. Observe que  $s_{xy}$  puede ser negativa y, por lo tanto, si no se tuviera en cuenta la correlación se estaría sobrevaluando la incertidumbre.

Si las medidas de  $x$  e  $y$  fueran independientes, después de realizar muchas mediciones, la covarianza debería aproximarse a cero y la ecuación (2.9) se reduciría a

$$(2.10) \quad s_q^2 = \left( \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_x^2 + \left( \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_y^2$$

que es el resultado esperado para incertidumbres independientes y aleatorias.

Se puede demostrar que la covarianza satisface la desigualdad de Schwarz:  $|s_{xy}| \leq s_x s_y$ . Usando este resultado y la ecuación (2.9) se obtiene:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} s_q^2 &\leq \left( \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_x^2 + \left( \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_y^2 + 2 \left| \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| \left| \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| |s_{xy}| \\ s_q^2 &\leq \left( \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_x^2 + \left( \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_y^2 + 2 \left| \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| \left| \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| s_x s_y \\ s_q^2 &\leq \left[ \left| \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| s_x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| s_y \right]^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple que:

$$(2.12) \quad s_q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| s_x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right| s_y,$$

con lo que se demuestra la existencia de una cota para  $s_q$  sean o no independientes y aleatoria las medidas de  $x$  e  $y$ .

Si  $q = q(x_1, \dots, x_n)$ , la forma más general para su varianza es:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} s_q^2 &= \left( \frac{\partial q}{\partial x_1} \right)^2 s_{x_1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial q}{\partial x_n} \right)^2 s_{x_n}^2 + \\ &2 \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_2} s_{x_1 x_2} + 2 \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_3} s_{x_1 x_3} + \dots + 2 \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_j} s_{x_i x_j} + \dots \end{aligned}$$

en donde el subíndice  $j$  es siempre mayor que el subíndice  $i$ .

---

Ejemplo: La Figura 2.1 representa esquemáticamente una fotografía de una cámara de burbujas en donde una partícula neutra se crea en el punto A y viaja hasta el punto B, sin dejar ninguna traza. En este punto, al colisionar con otra partícula, se crean dos nuevas partículas cargadas, dejando trazas visibles de sus trayectorias.

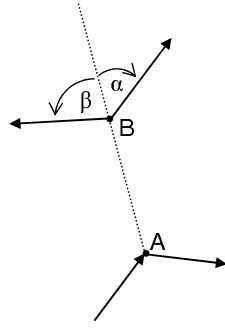


Figura 2.1: Esquema de una fotografía de una cámara de burbujas mostrando trayectorias de partículas cargadas (líneas continuas).

Se desean conocer los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que forman las trayectorias de las partículas cargadas creadas en el punto B con respecto a la trayectoria de la partícula neutra. Para su determinación es necesario dibujar la línea que une los puntos A y B. Suponga que se hacen cinco copias de la fotografía obtenida en la cámara de burbujas, sobre cada copia se traza una línea uniendo los puntos A y B y se realiza una medición del par de ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Se puede suponer que la principal fuente de incertidumbre en la medición de  $\alpha$  y  $\beta$  es el trazado de la línea AB debido a que los puntos A y B están próximos uno de otro y a que las trazas de las partículas cargadas que definen los puntos A y B son relativamente gruesas. Los valores obtenidos son los siguientes:

$\alpha$ [grados]	$\beta$ [grados]
35	50
31	55
33	51
32	53
34	51

a) Obtener el valor medio y la desviación estándar de  $\alpha$  y  $\beta$ .

A partir de los datos medidos obtenemos:

$$\bar{\alpha} = 33,0^\circ, \quad s_\alpha = 1,6^\circ, \quad \bar{\beta} = 52,0^\circ, \quad s_\beta = 2,0^\circ$$

b) Evaluar la covarianza entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_i - \bar{\beta}) = -3$$

c) Encontrar el mejor estimador para el ángulo  $\delta = \alpha + \beta$  que forman las trayectorias de las dos partículas cargadas y su desviación estándar.

El mejor estimador para el ángulo suma es:

$$\bar{\delta} = \delta(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = 85^\circ$$

y su desviación estándar:

$$s_\delta = \sqrt{s_\alpha^2 + s_\beta^2 + 2 \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta}{\partial \beta} s_{\alpha\beta}} = 0,7^\circ$$

en donde  $\partial \delta / \partial \alpha = \partial \delta / \partial \beta = 1$ .

Si hubiéramos considerado a los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  como cantidades independientes, habríamos obtenido para la desviación estándar del ángulo suma:

$$s_{\delta} = \sqrt{s_{\alpha}^2 + s_{\beta}^2} = 2,6^{\circ}$$

La covarianza negativa entre  $\alpha$  y  $\beta$  es responsable de la reducción de la desviación estándar del ángulo suma con respecto al caso de cantidades independientes. Una variación positiva en el ángulo  $\alpha$ , con respecto a su valor medio, está asociada a una variación negativa en el ángulo  $\beta$  y vice versa. Estas variaciones tienden a cancelarse en el ángulo suma dando lugar a una desviación estándar reducida para  $\delta$ , la cual, en el presente ejemplo, resulta aún menor que la desviación estándar de  $\alpha$  y de  $\beta$ .

---



# Capítulo 3

## Ajuste de un polinomio por el método de cuadrados mínimos

### 3.1. Solución matricial para los parámetros de ajuste

En el capítulo 4 de la primera parte de este trabajo<sup>1</sup> hemos discutido el ajuste de una recta a un conjunto de puntos que satisfacen una relación lineal. Supongamos ahora que los datos  $(x_i, y_i)$  no son consistentes con una relación lineal. En este caso podríamos construir otra función, con más parámetros de ajuste, para describir más adecuadamente la distribución de puntos. Esta función podría ser, por ejemplo, un polinomio en serie de potencias de la variable  $x$ :

$$(3.1) \quad y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j$$

Con el fin de determinar los coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  aplicaremos el método de cuadrados mínimos. Puede observarse que el método presentado en este capítulo puede extenderse fácilmente al ajuste de cualquier función  $y(x)$  que dependa linealmente de los parámetros  $a_j$ :

$$(3.2) \quad y(x) = \sum_{j=0}^n a_j f_j(x)$$

en donde las funciones  $f_j(x)$  no dependen de los parámetros  $a_j$ , solo dependen de la variable  $x$ .

Supongamos que tenemos un conjunto de pares de valores  $(x_i, y_i)$ , con  $i = 1, \dots, N$ . Asumimos que cada valor  $y_i$  está distribuido normalmente alrededor de su valor medio, con desviación estándar  $s_i$ , y que los valores  $x_i$  son exactos (esto quiere decir que toda la variabilidad observada en los puntos  $(x_i, y_i)$  alrededor de la función  $y(x)$  se debe a las incertidumbres en la variable  $y$ ). Como ya hemos visto, el método de cuadrados mínimos requiere minimizar la suma del cuadrado de las distancias de cada punto  $(x_i, y_i)$  a la curva de ajuste  $(x_i, y(x_i))$ ,

---

<sup>1</sup>Silvina Pérez, Clemar Schürer, Guillermo Stutz, *Análisis de Datos e Incertidumbres en Física Experimental*, Trabajos de Física, serie C, No. 4/11 (FaMAF-UNC, 2011).

$$(3.3) \quad S(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} [y_i - y(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} \left[ y_i - \sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right]^2,$$

con respecto a los coeficientes  $a_0, \dots, a_n$ . En la suma se ha introducido un factor de peso  $1/s_i^2$  para contemplar el caso en el que las incertidumbres de los valores  $y_i$  no sean aproximadamente iguales.

El valor mínimo de  $S$  lo determinamos igualando a cero las derivadas parciales con respecto a los parámetros  $a_k$ :

$$(3.4) \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i^k}{s_i^2} \left[ y_i - \sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right] = 0 \quad k = 0, \dots, n$$

Este conjunto de  $n + 1$  ecuaciones, acopladas linealmente, para los  $n + 1$  parámetros puede reescribirse de la siguiente manera:

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{s_i^2} x_i^k = \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} x_i^k x_i^j \right] a_j \quad k = 0, \dots, n$$

Definiendo

$$(3.6) \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \beta_k = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{s_i^2} x_i^k, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

y

$$(3.7) \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \alpha_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} x_i^k x_i^j,$$

el conjunto de ecuaciones (3.5) puede expresarse en forma matricial como

$$(3.8) \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}$$

La solución para este sistema de ecuaciones será

$$(3.9) \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

siendo  $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$  la inversa de la matriz  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Por lo tanto, cada parámetro se lo puede determinar a partir de

$$(3.10) \quad a_j = \sum_{k=0}^n (\alpha^{-1})_{jk} \beta_k$$

en donde  $(\alpha^{-1})_{jk}$  representa el elemento  $(j, k)$  de la matriz  $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ .

### 3.2. Desviación estándar de los parámetros de ajuste

Teniendo en cuenta que en cada punto medido toda la incertidumbre está asociada a la variable  $y$  y que los parámetros  $a_j$  dependen de los valores  $y_i$  la covarianza de los parámetros  $a_k$  y  $a_l$  está dada por

$$(3.11) \quad s_{a_k a_l}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_k}{\partial y_i} \frac{\partial a_l}{\partial y_i} s_i^2$$

en donde hemos utilizado el hecho que los valores  $y_i$  no están correlacionados entre sí. Si  $k = l$  obtenemos la varianza del parámetro  $a_k$

$$(3.12) \quad s_{a_k}^2 = s_{a_k, a_k}^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial a_k}{\partial y_i} \right)^2 s_i^2$$

A partir de las ecuaciones (3.10) y (3.6) podemos evaluar las derivadas parciales

$$(3.13) \quad \frac{\partial a_k}{\partial y_i} = \sum_{p=0}^n (\alpha^{-1})_{kp} \frac{x_i^p}{s_i^2}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (3.11) obtenemos para la covarianza

$$(3.14) \quad \begin{aligned} s_{a_k a_l}^2 &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{p=0}^n (\alpha^{-1})_{kp} \frac{x_i^p}{s_i^2} \right) \left( \sum_{q=0}^n (\alpha^{-1})_{lq} \frac{x_i^q}{s_i^2} \right) s_i^2 \\ &= \sum_{p=0}^n (\alpha^{-1})_{kp} \sum_{q=0}^n (\alpha^{-1})_{lq} \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} x_i^p x_i^q \\ &= \sum_{p=0}^n (\alpha^{-1})_{kp} \sum_{q=0}^n (\alpha^{-1})_{lq} \alpha_{pq} \\ &= \sum_{p=0}^n (\alpha^{-1})_{kp} \left( \sum_{q=0}^n (\alpha^{-1})_{lq} \alpha_{pq} \right) \\ &= \sum_{p=0}^n (\alpha^{-1})_{kp} I_{pl} = (\alpha^{-1})_{kl} \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la propiedad que  $\alpha$  y  $\alpha^{-1}$  son matrices simétricas.

Por lo tanto, la matriz  $\alpha^{-1}$  es la matriz de covarianza, cuyos elementos de la diagonal son las varianzas de los parámetros de ajuste

$$(3.15) \quad (\alpha^{-1})_{kk} = s_{a_k, a_k}^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial a_k}{\partial y_i} \right)^2 s_i^2$$

La matriz de covarianza es útil cuando se necesita evaluar la incertidumbre de un valor  $y$  calculado a partir de la función ajustada, para un valor específico de la variable  $x$ . Propagando las incertidumbres de los parámetros a partir de la ecuación (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
 s_y^2 &= \sum_{k=0}^n \frac{\partial y}{\partial a_k}^2 s_{a_k}^2 + \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{\partial y}{\partial a_k} \frac{\partial y}{\partial a_l} s_{a_k, a_l}^2 \\
 (3.16) \quad &= \sum_{k=0}^n x^{2k} (\alpha^{-1})_{kk} + \sum_k \sum_{l \neq k} x^k x^l (\alpha^{-1})_{kl}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Valores experimentales de la concentración de glucosa de un cierto licor en función del tiempo de fermentación se presenta en la siguiente tabla:

tiempo [días]	concentración [g/l]
1	74
2	54
3	52
4	51
5	52
6	53
7	58
8	71

Todas las concentraciones se han medido con una incertidumbre de 1 g/l.

a) Represente los datos medidos de concentración de glucosa en función del tiempo por un polinomio de segundo grado.

Si la variable  $x$  representa el tiempo de fermentación y la variable  $y$  a la concentración de glucosa, ajustaremos la función  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  a los datos medidos por el método de los cuadrados mínimos. La matriz  $\alpha$ , para este caso, es:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 8,000E+00 & 3,600E+01 & 2,040E+02 \\ 3,600E+01 & 2,040E+02 & 1,296E+03 \\ 2,040E+02 & 1,296E+03 & 8,772E+03 \end{pmatrix}$$

y la matriz de covarianza:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1,946429E+00 & -9,107143E-01 & 8,928571E-02 \\ -9,107143E-01 & 5,059524E-01 & -5,357143E-02 \\ 8,928571E-02 & -5,357143E-02 & 5,952381E-03 \end{pmatrix}$$

Todos los valores numéricos en las matrices corresponden a expresar la concentración de glucosa en g/l y el tiempo en días.

A partir de  $\mathbf{a} = \alpha^{-1}\beta$ , con

$$\beta = \begin{pmatrix} 4,6500E+02 \\ 2,0940E+03 \\ 1,2168E+04 \end{pmatrix},$$

obtenemos los parámetros del ajuste:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,448214E + 01 \\ -1,587500E + 01 \\ 1,767857E + 00 \end{pmatrix}$$

La incertidumbre del parámetro  $a_i$  es la raíz cuadrada del elemento de la diagonal  $(i, i)$  de la matriz de covarianza:  $u_{a_0} = 1,395$  g/l,  $u_{a_1} = 7,113 \times 10^{-1}$  g/l/días y  $u_{a_2} = 7,715 \times 10^{-2}$  g/l/días<sup>2</sup>.

Finalmente, los coeficientes del polinomio de segundo grado  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  que ajusta a los datos son:

$$a_0 = (84,5 \pm 1,4) \text{ g/l} \quad a_1 = (-15,9 \pm 0,7) \text{ g/l/días} \quad a_2 = (1,77 \pm 0,08) \text{ g/l/días}^2$$

El polinomio ajustado, junto a los datos experimentales, se encuentran graficados en la Figura 3.1.

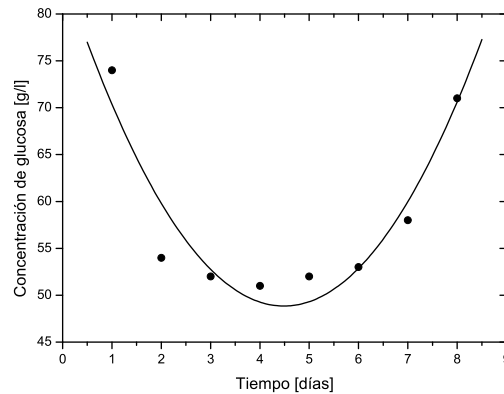


Figura 3.1: Concentración de glucosa en función del tiempo de fermentación: datos experimentales (●) y polinomio de segundo grado ajustado (—).

b) Determine el valor de concentración de glucosa al cuarto día y medio de fermentación.

Evaluando el polinomio ajustado en  $x = 4,5$  días, obtenemos  $y = 48,843750$  g/l, y utilizando la expresión 3.16 la correspondiente incertidumbre es  $u_y = 5,376 \times 10^{-1}$  g/l. Por lo tanto, la concentración de glucosa al cabo de 4.5 días de iniciada la fermentación es  $(48,8 \pm 0,5)$  g/l.

Puede notarse que si no hubiésemos considerado la correlación entre parámetros de ajuste, la incertidumbre habría sido apreciablemente mayor:  $u_y = 3,825$  g/l. La correlación negativa entre los parámetros  $a_0$  y  $a_1$  y entre  $a_1$  y  $a_2$ , como puede observarse en la matriz de covarianza, es responsable de la reducción de la incertidumbre de la concentración de glucosa a los 4,5 días.

# Capítulo 4

## Intervalo de confianza para una cantidad determinada indirectamente

### 4.1. La fórmula de Welch–Satterthwaite

Hemos visto como encontrar un intervalo de confianza para una cantidad medida, tanto para el caso de muestras grandes como pequeñas. La pregunta que naturalmente surge es cómo encontrar un intervalo de confianza para una cantidad  $q$  que depende de la medición de varias cantidades, es decir,  $q = q(x_1, \dots, x_n)$ .

Para el caso que las cantidades  $x_1, \dots, x_n$  no estén correlacionadas (covarianza nula), la incertidumbre  $s_q$  asociada a la cantidad  $q$  viene dada por la expresión:

$$(4.1) \quad s_q^2 = c_1^2 s_{\bar{x}_1}^2 + \dots + c_n^2 s_{\bar{x}_n}^2$$

donde los coeficientes  $c_i$ , denominados coeficientes de sensibilidad, están definidos por las derivadas parciales:

$$(4.2) \quad c_i = \left| \frac{\partial q(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n}$$

Cada una de las incertidumbres  $s_{\bar{x}_i}$  está asociada con  $\nu_i$  grados de libertad. Así por ejemplo si  $\bar{x}_i$  es la media de 12 valores, que tienen una desviación estándar  $s_i$ , entonces  $s_{\bar{x}_i} = s_i/\sqrt{12}$  tiene  $\nu_i = 11$  grados de libertad.

Para poder definir un intervalo de confianza para  $q$ , debemos saber cuántos grados de libertad deberían asociarse a  $s_q$ . La respuesta a esta pregunta está dada por la fórmula de Welch–Satterthwaite que, aunque aproximada, es adecuada en la mayoría de los casos. Antes de obtener esta fórmula vamos a considerar algunas características de la varianza.

Lo primero que hay que tener presente es que la distribución muestral de una varianza  $s^2$ , la cual está asociada a  $\nu$  grados de libertad, puede caracterizarse también por una varianza, que llamaremos  $u^2(s^2)$  y que está dada por:

$$(4.3) \quad u^2(s^2) = \frac{2s^4}{\nu}$$

Esta expresión es exacta para poblaciones normales. Se observa que mientras más grande es el número de grados de libertad, más pequeña es la varianza de la varianza.

Se puede demostrar que la varianza de la desviación estándar y la desviación estándar de la desviación estándar son, respectivamente, y de manera aproximada<sup>1</sup>:

$$(4.4) \quad u^2(s) = \frac{s^2}{2\nu} \quad \text{y} \quad u(s) = \frac{s}{\sqrt{2\nu}}$$

La primera de estas ecuaciones tiene una aplicación práctica muy importante, que es la de asignar grados de libertad a una incertidumbre de tipo B. Para ello reescribimos (4.4):

$$(4.5) \quad \nu = \frac{s^2}{2u^2(s)} = \frac{1}{2} \left( \frac{u(s)}{s} \right)^{-2}$$

Es claro, entonces, que el número de grados de libertad puede determinarse, en este caso, con la incertidumbre relativa de la incertidumbre. Para una evaluación de incertidumbres de tipo B, aquella incertidumbre relativa es una cantidad subjetiva, cuyo valor puede determinarse a partir de un análisis crítico de toda la información disponible. Así, por ejemplo, si para la incertidumbre de tipo B que estamos analizando es  $u(s)/s \approx 0,2$ , resulta que el número de grados de libertad asociado es  $\nu = 12$ .

Con esta información, volvamos al problema planteado de encontrar el número de grados de libertad asociados a la determinación de una cantidad que depende de varias cantidades. Por simplicidad vamos a considerar que depende sólo de dos cantidades  $x_1$  y  $x_2$ . En este caso:

$$(4.6) \quad s_q^2 = c_1^2 s_{x_1}^2 + c_2^2 s_{x_2}^2$$

y las incertidumbres  $s_{x_1}$  y  $s_{x_2}$  están asociadas a  $\nu_1$  y  $\nu_2$  grados de libertad, respectivamente.

Calculemos entonces la varianza a ambos lados de la ecuación (4.7):

$$(4.7) \quad u^2(s_q^2) = u^2(c_1^2 s_{x_1}^2) + u^2(c_2^2 s_{x_2}^2)$$

Teniendo presente que si  $k$  es una constante  $u^2(kx) = k^2 u^2(x)$ , entonces resulta:

$$(4.8) \quad u^2(s_q^2) = c_1^4 u^2(s_{x_1}^2) + c_2^4 u^2(s_{x_2}^2)$$

Haciendo uso de (4.3) obtenemos:

$$(4.9) \quad \frac{2s_q^4}{\nu_{ef}} = \frac{2c_1^4 s_{x_1}^4}{\nu_1} + \frac{2c_2^4 s_{x_2}^4}{\nu_2}$$

donde  $\nu_{ef}$  representa el número efectivo de grados de libertad que podrían asociarse a  $s_q$ .

Para escribir la expresión anterior se ha supuesto lo siguiente:

<sup>1</sup>L. Kirkup, B. Frenkel, *An Introduction to Uncertainty in Measurement* (Cambridge University Press, 2006).

- Tanto las variables como las varianzas asociadas son independientes. Si estuvieran correlacionadas esta expresión tendría un tercer término que involucraría la covarianza de las varianzas.
- Las variables tienen una distribución normal. Esta suposición es razonable aún cuando las incertidumbres puedan ser de tipo B (obtenidas, por ejemplo, de un reporte de calibración de un instrumento de medición) porque hay que tener presente que para especificar una incertidumbre en un reporte, seguramente se hicieron muchas medidas. Esta incertidumbre, originalmente de tipo A, se convierte en tipo B al ser usada esta información por otras personas. En consecuencia, es posible suponer que el valor obtenido de un reporte tiene una distribución normal, aún cuando la incertidumbre estándar asociada es del tipo B.
- $q$  también tiene una distribución normal, de tal manera que se le puede asignar un número efectivo de grados de libertad.

Finalmente, a partir de (4.9), se obtiene para el número efectivo de grados de libertad:

$$(4.10) \quad \nu_{ef} = \frac{s_q^4}{\frac{c_1^4 s_{\bar{x}_1}^4}{\nu_1} + \frac{c_2^4 s_{\bar{x}_2}^4}{\nu_2}}$$

Generalizando para muchas variables se tiene:

$$(4.11) \quad \nu_{ef} = \frac{s_q^4}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^4 s_{\bar{x}_i}^4}{\nu_i}}$$

Esta expresión recibe el nombre de fórmula de Welch–Satterthwaite. El número efectivo de grados de libertad no es necesariamente un entero. En la práctica,  $\nu_{ef}$  se trunca al menor entero con el propósito de poder calcular el intervalo de confianza asociado a  $q$ , el cual, para un nivel de confianza  $100(1 - \alpha)\%$ , está dado por:

$$(4.12) \quad \bar{q} \pm t_{\alpha/2, \nu_{ef}} s_q$$

Debe observarse que para encontrar este intervalo de confianza es necesario conocer lo siguiente:

- Los valores de las  $n$  cantidades.
- Sus desviaciones estándares.
- El número de grados de libertad asociado a cada una de ellas.
- Los coeficientes de sensibilidad.



Cuando hay muchas variables es práctico resumir todos estos datos en una tabla, como se acostumbra en metrología.

---

Ejemplo: Se desea determinar el momento de inercia ( $I$ ) de un cilindro sólido, con respecto a su eje principal, y el intervalo que contenga a  $I$  con un nivel de confianza del 95 %. Para ello se realizan 8 medidas de su masa ( $M$ ), obteniéndose un valor medio de 252.6 g y una desviación estándar de la media de 2.5 g. El valor medio de 5 medidas de su radio ( $R$ ) es 6.35 cm, con un desviación estándar para el radio medio de 0.005 cm.

El mejor estimador del momento de inercia del cilindro, con respecto a su eje principal, es:

$$I = \frac{MR^2}{2} = 5092,7 \text{ g cm}^2$$

Como  $M$  y  $R$  son cantidades independientes, obtenemos para la incertidumbre estándar del momento de inercia:

$$u_I = \sqrt{(c_M u_{\overline{M}})^2 + (c_R u_{\overline{R}})^2} = 94,7 \text{ g cm}^2$$

donde  $c_M = \partial I / \partial M = R^2 / 2 = 20,16125 \text{ cm}^2$ ,  $c_R = \partial I / \partial R = MR = 1604,01 \text{ g cm}$ ,  $u_{\overline{M}} = 2,5 \text{ g}$  y  $u_{\overline{R}} = 0,05 \text{ cm}$ .

Por lo tanto, el momento de inercia del cilindro, con su incertidumbre estándar es:

$$I = (5,09 \pm 0,09) \times 10^3 \text{ g cm}^2$$

A fin de calcular el intervalo de confianza para el momento de inercia, es necesario evaluar el número efectivo de grados de libertad asociado a su incertidumbre. Utilizando la fórmula de Welch-Satterthwaite obtenemos:

$$\nu_{ef} = \frac{u_I^4}{\frac{c_M^4 u_{M_1}^4}{\nu_M} + \frac{c_R^4 s_{R_2}^4}{\nu_R}} = 7,1 \approx 7$$

donde  $\nu_M = 7$  y  $\nu_R = 4$  son los números de grados de libertad de la masa y el radio, respectivamente, y  $\nu_{ef}$  ha sido truncado con el propósito de calcular el intervalo de confianza.

Para un nivel de confianza  $100(1 - \alpha) \% = 95 \%$  resulta  $\alpha = 0,05$ . El valor de  $t_{\alpha/2, \nu}$  para 7 grados de libertad y un nivel de significancia de 0,05 es  $t_{0,025;7} = 2,365$ . Finalmente, el intervalo que contiene al valor del momento de inercia del cilindro con un nivel de confianza del 95 %, expresado con un número apropiado de cifras significativas, es:

$$I \pm t_{0,025;7} u_I = (5,09 \pm 0,22) \times 10^3 \text{ g cm}^2$$

---

# Capítulo 5

## Distribución Binomial y de Poisson

### 5.1. Distribución Binomial

En la física experimental, la distribución de Gauss es la más importante de las distribuciones límites, sin embargo existen otras distribuciones que tienen gran importancia práctica y teórica. Tal es el caso de la distribución binomial, que por su simplicidad es una excelente introducción a muchas propiedades de las distribuciones.

Supongamos que realizamos un experimento que consiste en arrojar 3 dados (todos de 6 caras) y llamamos  $E$  (éxito) cuando se obtiene un 3 y  $F$  (fracaso) cuando se obtiene cualquier otro número. La probabilidad de obtener cada uno de los números al arrojar un dado es  $1/6$ . Los resultados posibles de este experimento son:

- que no salga ningún 3:  $FFF$
- que salga un 3:  $EFF, FEF, FFE$
- que salgan dos 3:  $EEF, EFE, FEE$
- que salgan tres 3:  $EEE$

Si repetimos el experimento muchas veces, encontraremos una distribución límite que nos dará la probabilidad que en una tirada obtengamos  $\nu$  tres con  $\nu = 0, 1, 2$  o  $3$ .

Calculemos entonces la probabilidad de obtener cada uno de estos resultados. Comencemos primero con la probabilidad de obtener tres 3 arrojando tres dados. Como los dados son independientes la probabilidad de obtener tres 3 será:

$$P(\nu = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \simeq 0,46 \times 10^{-2}$$

Calculemos ahora la probabilidad de obtener dos 3. Cómo vimos más arriba hay tres formas de obtener dos 3. Calculemos la probabilidad de que ocurra una de ellas, por ejemplo  $EEF$ . La probabilidad de que el primer dado muestre un 3 es  $1/6$  y lo mismo vale para el segundo. La probabilidad de que el tercero no muestre un 3 es  $5/6$ . Luego:

$$P(EEF) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) \simeq 2,3 \times 10^{-2}$$

La probabilidad para las otras dos opciones es la misma:

$$P(EFE) = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \simeq 2,3 \times 10^{-2}$$

$$P(FEE) = \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \simeq 2,3 \times 10^{-2}$$

por lo tanto la probabilidad de obtener dos 3 será:

$$P(\nu = 2) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) \simeq 6,9 \times 10^{-2}$$

De la misma manera podemos calcular la probabilidad de obtener un solo 3, o ninguno:

$$P(\nu = 1) = 3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 \simeq 34,7 \times 10^{-2}$$

$$P(\nu = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 57,9 \times 10^{-2}$$

Este experimento es un ejemplo de la distribución binomial porque posee las siguientes propiedades:

- El experimento consta de  $n$  ensayos idénticos ( $n = 3$  dados idénticos).
- Cada ensayo tiene dos resultados posibles (que salga el número que quiero (E) o que no salga (F)).
- La probabilidad de tener éxito  $p$  es constante de un ensayo a otro y la probabilidad de un fracaso es  $q = (1 - p)$ .
- Los ensayos son independientes (lo que sale en un dado no depende de lo que sale en otro).
- La variable aleatoria es el número de éxitos que se obtienen en  $n$  ensayos.

Por ejemplo el lanzamiento de  $n$  monedas es también un experimento binomial porque satisface las propiedades enunciadas anteriormente.

Deduzcamos entonces la distribución de probabilidad binomial. Imaginemos que realizamos  $n$  pruebas independientes tal como arrojar  $n$  dados o  $n$  monedas. Cada prueba puede tener varios resultados. Un dado de seis caras puede mostrar números del 1 al 6, las monedas pueden mostrar cara o seca. Vamos a llamar éxito (E) al resultado que nos interesa y fracaso (F) a cualquier otro resultado. De este modo en el ejemplo anterior un éxito era obtener un 3, en las monedas el éxito puede ser obtener cara. Llamaremos  $p$  a la probabilidad de éxito y  $q = 1 - p$  a la probabilidad de falla. Un resultado posible se puede representar de la siguiente manera:

$$\underbrace{EEFFEEEFEEEE \dots FFF}_{n \text{ posiciones}}$$

Nos preguntemos ahora cuál es la probabilidad de obtener  $\nu$  éxitos en  $n$  pruebas. Una representación particular de esa situación es:

$$\underbrace{EEE \cdots EEE}_{\nu \text{ éxitos}} \underbrace{FFF \cdots FFF}_{n - \nu \text{ fracasos}}$$

Como los ensayos son independiente y la probabilidad de éxitos  $p$  es constante, la probabilidad de esta situación es:

$$\underbrace{ppp \cdots ppp}_{\nu \text{ términos}} \underbrace{qqq \cdots qqq}_{n - \nu \text{ términos}} = p^\nu q^{n-\nu}$$

Cualquier otra situación con  $\nu$  éxitos aparecerá como un arreglo de letras  $E$  y  $F$  y tendrá la probabilidad que acabamos de calcular. La pregunta es entonces cuántos arreglos de  $\nu$  letras  $E$  y  $n - \nu$  letras  $F$  son posibles. La respuesta es:

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

que representa el número de formas en que se pueden extraer un subconjunto  $\nu$  a partir de un conjunto dado  $n$ . Resulta entonces que la distribución de **probabilidad binomial** está dada por la siguiente expresión:

$$(5.1) \quad P(\nu) = B_{n,p}(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

Esta distribución recibe el nombre de binomial por su conexión con la bien conocida expansión binomial:

$$(p + q)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

Obsérvese que como  $p + q = 1$ , la distribución de probabilidad binomial satisface la condición de normalización:

$$\sum_{\nu=0}^n B_{n,p}(\nu) = 1$$

### 5.1.1. Valor medio y desviación estándar

Si repetimos nuestro experimento que consiste en  $n$  pruebas muchas veces, es natural preguntarse cual será el número promedio de éxitos  $\bar{\nu}$ . Para obtener este valor medio sumamos sobre todos los posibles valores de  $\nu$  cada uno multiplicado por su probabilidad.

$$\mu = \bar{\nu} = \sum_{\nu=0}^n \nu B_{n,p}(\nu) = \sum_{\nu=0}^n \nu \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

Como el primer término de la suma es 0:

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad \mu = \bar{\nu} &= \sum_{\nu=1}^n \nu \frac{n!}{\nu! (n-\nu)!} p^\nu q^{n-\nu} = \sum_{\nu=1}^n \frac{n!}{(\nu-1)! (n-\nu)!} p^\nu q^{n-\nu} \\
 &= np \sum_{\nu=1}^n \frac{(n-1)!}{(\nu-1)! (n-\nu)!} p^{\nu-1} q^{n-\nu} \\
 &= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{m! (n-1-m)!} p^m q^{n-1-m} \\
 &= np
 \end{aligned}$$

De la misma forma se puede calcular la varianza:

$$(5.3) \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

Cuando  $p = 1/2$ , el número promedio de éxitos es  $n/2$  y es fácil demostrar que en este caso  $B_{n,1/2}(\nu) = B_{n,1/2}(n-\nu)$ . Esto quiere decir que en este caso la distribución es simétrica alrededor del valor medio  $n/2$ . En general la distribución binomial no es simétrica. Esto significa que, en general,  $\bar{\nu}$  no es el valor más probable.

---

Ejemplo: Suponga que un comercio que vende productos electrónicos recibe 1000 fusible de 2A y sabe que un 5% son defectuosos. Si se toman aleatoriamente 16 fusibles, cuál es la probabilidad que 2 de ellos sean defectuosos?

Es claro que la probabilidad de éxito, es decir que un fusible sea defectuoso es  $p = 0,05$ , por lo tanto debo calcular:

$$P(\nu = 2) = B_{16,0,05}(2) = \binom{16}{2} (0,05)^2 0,95^{14} = 0,146$$

---

Por lo tanto hay una probabilidad del 14.6% de que 2 de los 16 fusibles sean defectuosos.

### 5.1.2. Aproximación Gaussiana a la distribución binomial

A pesar de sus diferencias, la distribución normal y la binomial tienen una conexión importante. En la Figura 5.1 se muestra una distribución binomial con  $p = 1/4$  y tres valores distintos de  $n$  ( $n = 3$ ,  $n = 12$  y  $n = 48$ ). En cada caso se muestra también, superpuesta, la correspondiente distribución normal con la misma media y desviación estándar. Se observa que para  $n = 48$  las dos distribuciones son casi indistinguibles. Esto quiere decir que para un valor fijo de  $p$ , cuando  $n$  es grande, la distribución binomial se aproxima a la distribución normal con el mismo valor medio y la misma desviación estándar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,p}(\nu) = G_{\mu,\sigma}(\nu) \quad \mu = np \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Esta propiedad es muy útil ya que hacer cálculos con la distribución binomial para  $n > 20$  es bastante tedioso, mientras que los cálculos con la función Gaussiana son siempre más simple.

Ejemplo: Se quiere conocer la probabilidad de obtener 25 caras al arrojar 40 monedas. Debemos calcular:

$$B_{40,1/2}(25) = \frac{40!}{25!15!} \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = 3,66 \times 10^{-2}$$

Por el otro lado, si queremos usar la aproximación Gaussiana sabemos que:

$$\bar{x} = 40 \frac{1}{2} = 20 \quad \sigma = \sqrt{40 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 3,16$$

$$P(24,5 < X < 25,5) = P(1,42 < Z < 1,74) = 3,69 \times 10^{-2}$$

Para todo fin práctico esta aproximación es muy buena para el presente caso.

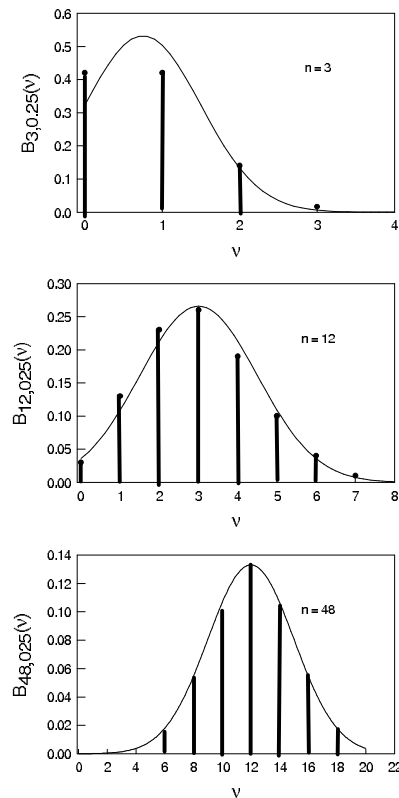


Figura 5.1: Distribución binomial para  $p = 0,25$  y diferentes valores de  $n$ . La línea continua representa, en cada caso, una distribución normal con la misma media y desviación estándar.

## 5.2. Distribución de Poisson

Supongamos que se cuenta con una muestra radiactiva y un detector capaz de contar el número  $\nu$  de partículas emitidas durante el proceso de decaimiento en un intervalo de

tiempo  $t$ . Si el detector no introduce errores en el conteo,  $\nu$  no tendrá incertidumbre asociada. Pero si se repite el experimento, seguramente se obtendrá un valor diferente de  $\nu$ . Esta variación en el número  $\nu$  no refleja incertidumbres en el conteo sino que refleja el carácter aleatorio del proceso de decaimiento radiactivo.

Cada núcleo radiactivo tiene una probabilidad definida de decaimiento en cualquier intervalo de tiempo  $t$ . Si conociéramos esta probabilidad y el número de núcleos en la muestra se podría calcular el número promedio de decaimientos esperados en el tiempo  $t$ . Sin embargo cada núcleo decae en un tiempo aleatorio y por lo tanto en un dado intervalo de tiempo  $t$  el número de decaimientos puede diferir del número medio esperado.

Uno se pregunta entonces que pasa si repetimos el experimento muchas veces. Es de esperar que la distribución de resultados sea la distribución binomial. Si hay  $n$  núcleos y la probabilidad de que cada uno decaiga es  $p$ , entonces la probabilidad de obtener  $\nu$  decaimientos es la probabilidad de  $\nu$  éxitos en  $n$  pruebas. En estos experimentos  $n$  es muy grande ( $n \sim 10^{20}$ , que es el número de núcleos) y la probabilidad de éxitos (decaimientos) es muy chica ( $p \ll 1$ ), lo que hace muy difícil la evaluación de la distribución binomial. Peor aún, en general ni el número  $n$  de eventos posibles ni la probabilidad  $p$  son conocidas. Lo que se puede conocer usualmente es el número medio de eventos esperados ( $\mu$ ) en un intervalo de tiempo o su estimación  $\bar{\nu}$ .

Calculemos entonces el límite de la distribución binomial cuando  $n$  es infinitamente grande,  $p \ll 1$  y  $\mu = np > 0$  permanece constante:

$$B_{n,p}(\nu) = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu q^{n-\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{-\nu} (1-p)^n$$

Para el segundo factor de este producto se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-\nu)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-\nu-1) = n^\nu$$

Pues  $\nu \ll n$  en la región de interés. Para el cuarto factor resulta:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{-\nu} = \lim_{p \rightarrow 0} (1 + \nu p + \cdots) = 1$$

Para el último factor:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^n = \lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{\mu/p} = e^{-\mu}$$

Combinando estas aproximaciones, encontramos que la distribución binomial tiene como límite a la distribución de Poisson:

$$(5.4) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} B_{n,p}(\nu) = \frac{1}{\nu!} (np)^\nu e^{-\mu} = e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = P_\mu(\nu)$$

La distribución de Poisson es una distribución límite que describe los resultados de experimentos en los cuales es necesario contar eventos que ocurren de manera aleatoria pero a una tasa promedio definida. Obviamente esa función distribución cumple con la condición de normalización:

$$(5.5) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\mu(\nu) = e^{-\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = e^{-\mu} e^\mu = 1$$

### 5.2.1. Valor medio y desviación estándar

Para establecer el significado del parámetro  $\mu$ , calculemos el número medio de conteo, que se esperaría obtener después de repetir el experimento muchas veces.

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu P_{\mu}(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu e^{-\mu} \frac{\mu^{\nu}}{\nu!}$$

El primer término de esta suma es cero, por lo tanto:

$$\bar{\nu} = \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

pero:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \dots = e^{\mu}$$

resultando finalmente:

$$(5.6) \quad \bar{\nu} = \mu$$

Esto quiere decir que el parámetro  $\mu$  que caracteriza la distribución de Poisson es el número medio de conteo esperado si se repite el experimento muchas veces.

Calculemos ahora la desviación estándar asociada a los conteos. Se sabe que:

$$\sigma_{\nu}^2 = \overline{(\nu - \bar{\nu})^2} = \overline{\nu^2} - (\bar{\nu})^2 = \overline{\nu^2} - \mu^2$$

De la misma manera que se calculó  $\bar{\nu}$ , es posible calcular  $\overline{\nu^2} = \mu^2 + \mu$ , resultando finalmente:

$$(5.7) \quad \sigma_{\nu} = \sqrt{\mu}$$

Se puede demostrar que si uno realiza un solo experimento y obtiene un valor  $\nu$  para el número de eventos en un intervalo  $T$ , la respuesta para el conteo medio esperado en ese intervalo es:

$$n\nu \pm \sqrt{\nu}$$

Algunas veces se conoce la tasa media  $R$  a la cual los eventos que estamos contando deberían ocurrir. En este caso, el número medio de eventos esperados en un tiempo  $T$  es  $\mu = \text{tasa} \times \text{tiempo} = RT$ .

**Ejemplo:** Decaimiento radiactivo. Supongamos que un contador Geiger detecta a una razón promedio de 6 partículas por minuto.

¿Cuál es el valor medio esperado para el número de partículas emitidos en medio minuto? Como conocemos  $R$ , resulta  $\mu = RT = 3$ .

¿Cuál es la probabilidad de observar a lo sumo 2 partículas en medio minuto?



$$P_3(\nu \leq 2) = \sum_{\nu=0}^2 e^{-3} \frac{3^\nu}{\nu!} = e^{-3} + e^{-3}3 + e^{-3} \frac{3^2}{2!} = 0,418$$

¿Cuál es la probabilidad de observar al menos 3 partículas en medio minuto?

$$P_3(\nu \geq 3) = 1 - P_3(\nu \leq 2) = 0,582$$

### 5.2.2. Aproximación Gaussiana a la distribución de Poisson

Se puede observar claramente en la Figura 5.2 que a medida que  $\mu$  crece, la distribución de Poisson adquiere una forma de campana, bastante simétrica alrededor de su valor medio. Recuerde que la función solo está definida para valores enteros y que las líneas que conectan los puntos son una guía para su ojo. De hecho se puede demostrar que cuando  $\mu$  tiene a infinito, la distribución de Poisson se aproxima a la Gaussiana con el mismo valor medio y desviación estándar. Esto es:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} P_\mu(\nu) = G_{\mu, \sigma}(\nu) \quad \text{con} \quad \mu = \bar{\nu} \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\bar{\nu}}$$

Esta aproximación, como en el caso de la distribución binomial, puede ser útil para realizar cálculos que de otra manera podrían ser tediosos.

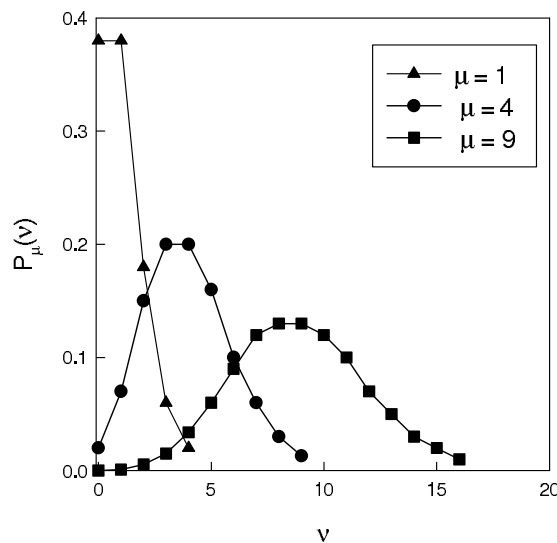


Figura 5.2: Distribución de Poisson para distintos valores de  $\mu$ .

Ejemplo: Consideremos una muestra radiactiva con un número medio de decaimientos por minuto  $\mu = 64$ . Deseamos conocer la probabilidad de medir 72 decaimientos en un minuto. Para ello debemos calcular:

$$P_{64}(72) = e^{-64} \frac{64^{72}}{72!} = 0,029$$

Por otro lado, utilizando la aproximación Gaussiana, con  $\mu = \bar{v} = 64$  y  $\sigma = \sqrt{\bar{v}} = 8$ , obtenemos:

$$P(71,5 \leq X \leq 72,5) = P(0,937 \leq Z \leq 1,063) \approx 0,03$$

Este ejemplo muestra que, a los fines prácticos, cuando  $\mu$  es grande resulta útil usar la aproximación Gaussiana.

### 5.3. Comparación de las distribuciones de Poisson y binomial con la distribución normal

La Tabla 5.1 resume las principales características y presenta un cuadro comparativo entre las distribuciones binomial, de Poisson y normal.

Tabla 5.1: Comparación entre las distribuciones binomial, de Poisson y normal.

	Binomial	Poisson	Gaussiana
Variable	Discreta	Discreta	Continua
Simetría	Solo para $p = 1/2$	Siempre asimétrica alrededor de $\mu$	Siempre simétrica alrededor de $\mu$
Valor más probable	No es el valor medio, excepto cuando $p = 1/2$	No es el valor medio	Siempre es el valor medio
Especificada por	Dos parámetros: $n$ y $p$	Un parámetro: $\mu$	Dos parámetros: $\mu$ y $\sigma$

# Capítulo 6

## Incertidumbres de medición. Guía GUM

### 6.1. Introducción

Al expresar el resultado de una medición de una cantidad física se debe dar una indicación cuantitativa de la calidad de aquel resultado. Sin tal indicación los resultados de diferentes mediciones no podrían ser comparados entre ellos, ni con valores de referencia. Es por lo tanto necesario que exista un procedimiento claro, fácil de implementar y aceptado universalmente para caracterizar la calidad de un resultado de una medición, es decir, para evaluar y expresar la incertidumbre de medición.

Ante la falta de un consenso internacional para la expresión de incertidumbres en medición, en la década de 1970, el Comité International des Poids et Mesures (CIPM), la máxima autoridad mundial en metrología, solicitó al Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) abordar este problema con laboratorios nacionales de estandarización. Como resultado de este trabajo conjunto, en la década de 1990, un comité integrado por varias organizaciones internacionales<sup>1</sup> elabora la primera versión de la guía GUM<sup>2</sup>.

La guía GUM establece reglas generales para evaluar y expresar incertidumbres de medición de una cantidad física bien definida (el mensurando), que puede ser caracterizado por un valor esencialmente único. Los principios de esta guía pretenden ser aplicables a un amplio espectro de mediciones, incluyendo control de calidad en producción, calibración de estándares e instrumentos, investigación básica y aplicada, etc. En este capítulo se presenta una síntesis de los aspectos más importantes de la guía GUM en relación a un curso de grado de física experimental.

---

<sup>1</sup>Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry (IFCC), International Organization for Standardization (ISO), International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP), International Organization of Legal Metrology (OIML). Estas organizaciones conformaron luego el Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM).

<sup>2</sup>*Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*, JCGM 100:2008.

## 6.2. Definición de algunos términos metrológicos

En esta sección se presentan las definiciones de algunos términos metrológicos generales, relevantes para la guía GUM. Estas definiciones fueron tomadas de VIM, tercera edición<sup>3</sup>.

### magnitud

Propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede expresarse cuantitativamente mediante un número y una referencia.

NOTA: La referencia puede ser una unidad de medida, un procedimiento de medición o una combinación de ellos.

### medición

Proceso que consiste en obtener experimentalmente uno o varios valores que puedan atribuirse razonablemente a una magnitud.

### mensurando

Magnitud que se desea medir.

Magnitud sujeta a medición.<sup>4</sup>

NOTA: La especificación de un mensurando requiere el conocimiento de la naturaleza de la magnitud y la descripción del estado del fenómeno, cuerpo o sustancia cuya magnitud es una propiedad, incluyendo las componentes pertinentes y las entidades químicas involucradas.

### modelo de medición

Relación matemática entre todas las magnitudes conocidas que intervienen en una medición.

NOTA: Una forma general del modelo de medición es la ecuación  $h(Y, X_1, \dots, X_N) = 0$ , donde  $Y$ , la magnitud de salida del modelo de medición, es el mensurando, cuyo valor debe deducirse a partir de la información sobre las magnitudes de entrada en el modelo de medición  $X_1, \dots, X_N$ .

### incertidumbre

Parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de valores atribuidos a un mensurando, a partir de la información que se utiliza.

### incertidumbre estándar

Incetidumbre de medida expresada como una desviación estándar.

### incertidumbre estándar combinada

Incetidumbre estándar obtenida a partir de las incertidumbres estándar individuales asociadas a las magnitudes de entrada de un modelo de medición.

Incetidumbre estándar del resultado de una medición cuando este resultado se obtiene a partir de los valores de otras cantidades, igual a la raíz cuadrada positiva de una suma de términos, los cuales son las varianzas o covarianzas de estas cantidades, pesadas de

---

<sup>3</sup>*International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, JCGM 200:2008; *Vocabulario internacional de metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM)*, JCGM 200:2008, primera edición en español, 2008.

<sup>4</sup>Definición según *International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM)*, second edition (1993). International Organization for Standardization (Ginebra, Suiza).

acuerdo a cómo varía el resultado de la medición con cambios en estas cantidades.<sup>4</sup>

## 6.3. Evaluación de incertidumbres de medición

### 6.3.1. Etapas de la evaluación de incertidumbres

La evaluación de incertidumbres de medición se puede dividir en dos etapas principales, la de formulación y la de cálculo. Esta última, a su vez, consiste en dos subetapas, la de propagación y la de expresión del resultado final.

La etapa de formulación comprende los siguientes pasos:

- 1) Definir la cantidad  $Y$  (el mensurando), acerca de la cual se quiere obtener información,
- 2) identificar las cantidades  $X$  de las cuales depende  $Y$ ,
- 3) desarrollar un modelo que relaciona  $Y$  con las cantidades  $X$ , y
- 4) sobre la base de la información disponible, asignar distribuciones de probabilidad (Gaussiana, rectangular, etc.) a las cantidades  $X$ .

La etapa de cálculo consiste en la propagación de las distribuciones de probabilidad de las cantidades  $X$ , a través del modelo, para obtener una distribución de probabilidad para  $Y$ , y en la expresión del resultado final, haciendo uso de esta distribución. En esta etapa se obtiene:

- 1) El valor estimado  $y$  de  $Y$ ,
- 2) la incertidumbre estándar  $u(y)$  asociada con  $y$ , y
- 3) un intervalo de cobertura que contiene a  $Y$  con una probabilidad determinada.

Para la etapa de propagación de distribuciones existen diferentes aproximaciones, entre ellas se pueden mencionar las siguientes:

- a) El procedimiento GUM, que consiste en la aplicación de la ley de propagación de incertidumbres, y la caracterización de la cantidad  $Y$  por una distribución Gaussiana o una distribución  $t$ ,
- b) métodos analíticos para derivar una forma algebraica para la distribución de probabilidad para  $Y$ , y
- c) método Monte Carlo, mediante el cual se determina numéricamente una función distribución aproximada para  $Y$ .

Si el modelo que relaciona  $Y$  con  $X$  es lineal y las distribuciones de probabilidad para las cantidades  $X$  son Gaussianas, el procedimiento GUM para evaluar incertidumbres es exacto. Aun cuando estas condiciones no se cumplen, la aproximación GUM puede funcionar suficientemente bien para los fines prácticos.

### 6.3.2. Síntesis del procedimiento de evaluación

El procedimiento a seguir para evaluar y expresar la incertidumbre de un resultado de una medición, de acuerdo a las pautas fijadas por la guía GUM, puede resumirse en los siguientes pasos:

1) Expresar matemáticamente la relación entre el mensurando  $Y$  (denominado también cantidad de salida) con las cantidades  $X_i$  (denominadas cantidades de entrada), de las cuales él depende:

$$(6.1) \quad Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

La función  $f$  debe incluir todas las correcciones y factores de corrección que puedan contribuir a la incertidumbre del resultado de la medición. Las cantidades  $X_i$  pueden, a su vez, depender de otras cantidades, incluyendo factores de corrección por efectos sistemáticos, y ser consideradas como mensurandos.

2) Determinar el valor estimado  $x_i$  de cada cantidad de entrada  $X_i$ .

Las cantidades  $X_i$  pueden clasificarse en dos grupos:

- Cantidades cuyos valores e incertidumbres son determinados en la medición. Estos valores pueden obtenerse, por ejemplo, de una única observación, de observaciones repetidas, etc., y pueden incluir factores de corrección a las lecturas de los instrumentos o correcciones por influencia de otras cantidades (tales como temperatura, presión, humedad, etc.).
- Cantidades cuyos valores e incertidumbres son tomados de fuentes externas, como cantidades asociadas a estándares de medición calibrados, materiales de referencia certificados, datos de referencia, etc.

3) Evaluar la incertidumbre estándar  $u(x_i)$  de cada estimación  $x_i$ . Para esto se hará uso de evaluaciones de incertidumbres tipo A o tipo B, según sea el caso.

4) Evaluar la covarianza asociada con las cantidades de entrada  $X_i$  que estén correlacionadas.

5) Obtener el resultado de la medición, es decir, el valor estimado  $y$  del mensurando  $Y$ , a partir de la relación funcional (6.1) y usando los valores estimados  $x_1, x_2, \dots, x_N$  para las  $N$  cantidades de entrada  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , obtenidos en el paso (2):

$$(6.2) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

NOTA: En algunos casos, el valor estimado  $y$  puede obtenerse del promedio de  $M$  determinaciones  $Y_k$  de  $Y$ :

$$(6.3) \quad y = \bar{Y} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M Y_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}),$$

cada una de las cuales se basa en un conjunto completo de observaciones de las  $N$  cantidades  $X_i$ , obtenidas al mismo tiempo, y cada una tiene la misma incertidumbre. Esta forma de promediar, en lugar de evaluar  $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ , en donde  $\bar{X}_i$  es el promedio aritmético de  $M$  observaciones individuales  $X_{i,k}$ ,  $k = 1, \dots, M$ , puede preferirse cuando  $f$  es una función no lineal. Ambas aproximaciones son idénticas si  $f$  es una función lineal de las cantidades  $X_i$ .

6) Determinar la incertidumbre combinada estándar  $u_c(y)$  del resultado de la medición  $y$  a partir de las incertidumbres estándar y las covarianzas de las cantidades de entrada.

a) Cantidades independientes: En el caso en que todas las cantidades de entrada sean independientes, la incertidumbre estándar combinada es la raíz cuadrada de la varianza combinada:

$$(6.4) \quad u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

donde  $u(x_i)$  es la incertidumbre estándar del valor estimado de entrada  $x_i$ , evaluado en el paso (3), y  $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i |_{x_1, x_2, \dots, x_N}$ . Estas derivadas parciales se denominan coeficientes de sensibilidad ( $c_i$ ) y describen cómo varía  $y$  ante cambios pequeños en  $x_i$ . La ecuación (6.4) se la denomina ley de propagación de incertidumbres.

Cuando la no linealidad de  $f$  es significativa, deben incluirse en la expresión para  $u_c^2(y)$  términos de mayor orden de la expansión en serie de Taylor. Cuando la distribución de cada  $X_i$  es normal, los términos más importantes del orden siguiente son:

$$(6.5) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j^2} u^2(x_i) u^2(x_j) \right]$$

b) Cantidades correlacionadas: Cuando las cantidades de entrada están correlacionadas, la expresión apropiada para la varianza combinada es:

$$(6.6) \quad u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

donde  $u(x_i, x_j)$  es la covarianza de  $x_i$  y  $x_j$ .

La covarianza de dos cantidades  $X_i$  y  $X_j$  puede estimarse a partir de  $n$  pares independientes de observaciones simultáneas, y bajo las mismas condiciones de medición,  $x_{i,k}$ ,  $x_{j,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , de  $X_i$  y  $X_j$ , a partir de:

$$(6.7) \quad u(x_i, x_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)$$

donde  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  son las medias aritméticas de  $x_i$  y  $x_j$ . La covarianza estimada de las dos medias  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  está dada por

$$(6.8) \quad u(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{n}$$

7) Si es necesario dar una incertidumbre expandida  $U$ , con el fin de proporcionar un intervalo  $(y - U, y + U)$ , el cual se espera que abarque una gran fracción de valores que podrían razonablemente ser atribuidos al mensurando  $Y$ , se debe multiplicar la incertidumbre estándar combinada por un factor de cobertura  $k$  (usualmente en el rango de 2 a 3) para obtener  $U = k u_c(y)$ . El valor de  $k$  se debe seleccionar sobre la base de un nivel de confianza requerido para el intervalo.

El método de cálculo de la incertidumbre expandida puede resumirse en los siguientes pasos:

- a) Obtener  $y$  y  $u_c(y)$  de acuerdo a los puntos (5) y (6).
- b) El factor de cobertura se lo determina aproximando la distribución de la variable  $(y - Y)/u_c(y)$  por una distribución  $t$  con un grado de libertad efectivo  $\nu_{ef}$  obtenido a partir de la fórmula de Welch–Satterthwaite:

$$(6.9) \quad \nu_{ef} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}},$$

asumiendo que las cantidades de entrada son mutuamente independientes.

Si  $u(x_i)$  se obtiene de una evaluación de incertidumbres tipo A,  $\nu_i$  se lo determina a partir de consideraciones estadísticas. Si  $u(x_i)$  se obtiene de una evaluación de incertidumbres tipo B, y se puede considerar que se la conoce exactamente, que es el caso frecuente en la práctica,  $\nu_i \rightarrow \infty$ ; en otro caso se puede utilizar la ecuación (4.5) para estimar  $\nu_i$ .

- c) Obtener el factor  $t_p(\nu_{ef})$  para el nivel de confianza  $p$ . Si  $\nu_{ef}$  no es un entero, truncarlo al entero menor más próximo.
- d) Tomar  $k_p = t_p(\nu_{ef})$  para calcular la incertidumbre expandida  $U_p = k_p u_c(y)$ .

8) Expresar el resultado de la medición  $y$  junto con su incertidumbre estándar combinada  $u_c(y)$  o expandida  $U$ . Describir cómo fueron obtenidos  $y$  y  $u_c(y)$  o  $U$ .

Los valores numéricos de  $y$ ,  $u_c$  o  $U$  no deben darse con un número excesivo de dígitos. Usualmente es suficiente expresar  $u_c$  y  $U$  con dos dígitos significativos, como máximo. En algunos casos puede ser necesario retener dígitos adicionales para evitar errores de redondeo en cálculos posteriores.

Cuando se presenta el resultado de la medición con su incertidumbre estándar combinada, el resultado numérico se debe indicar en alguna de las siguientes formas (a modo de ejemplo se considera  $y = 100,002147$  g y  $u_c = 0,35$  mg):



-  $y = 100,002147$  g con (una incertidumbre estándar combinada)  $u_c = 0,35$  mg.

Si  $u_c$  fue previamente definida la frase entre paréntesis puede omitirse.

-  $y = 100,002147(35)$  g.

-  $y = 100,002147(0,00035)$  g.

-  $y = (100,002147 \pm 0,00035)$  g.

Cuando se utiliza la incertidumbre expandida como medida de la incertidumbre de medición, el resultado numérico de la medición se debe expresar de la siguiente manera:

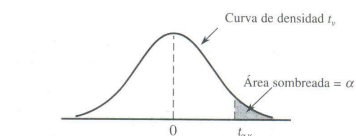
-  $y = (100,002147 \pm 0,00079)$  g. La incertidumbre expandida  $U$  se determinó a partir de (una incertidumbre estándar combinada)  $u_c = 0,35$  mg y de (un factor de cobertura)  $k = 2,26$ , basado en una distribución  $t$  para  $\nu = 9$  grados de libertad y un nivel de confianza de 95 %.

En la elaboración del informe final se deben atender las siguientes pautas en relación a la información que es necesario suministrar:

- a) Describir claramente los métodos usados para calcular el resultado de la medición y su incertidumbre a partir de las observaciones experimentales y datos de entrada.
- b) Listar todas las componentes de incertidumbre y describir cómo fueron evaluadas.
- c) Presentar el análisis de datos de tal forma que cada uno de los pasos importantes pueda seguirse fácilmente y los cálculos puedan repetirse, en caso de ser necesario.
- d) Dar todas las correcciones y las constantes usadas, indicando las fuentes.

# Apéndice A

## A.1. Valores críticos para la distribución $t$ de Student



$\nu$	$\alpha$						
	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Tabla A.1: Valores críticos ( $t_{\alpha, \nu}$ ) para la distribución  $t$  para  $\nu$  grados de libertad<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Tabla extraída de J.L. Devore, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, 5ta. ed. (International Thomson, 2001), pág. 713

## A.2. Valores críticos para la distribución $F$

F0.05(n1, n2)										
n2 \ n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.882	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348

n2 \ n1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242.983	243.906	244.690	245.364	245.950	246.464	246.918	247.323	247.686	248.013
2	19.405	19.413	19.419	19.424	19.429	19.433	19.437	19.440	19.443	19.446
3	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.908	3.896	3.884	3.874
7	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124

F0.10(n1, n2)										
n2 \ n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937

Tabla A.2: Valores críticos ( $F_{\alpha, n_1, n_2}$ ) de la distribución  $F$  para  $n_1$  grados de libertad del numerador y  $n_2$  grados de libertad del denominador.

F0.05(n1, n2)										
n2 \ n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.882	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348

n2 \ n1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242.983	243.906	244.690	245.364	245.950	246.464	246.918	247.323	247.686	248.013
2	19.405	19.413	19.419	19.424	19.429	19.433	19.437	19.440	19.443	19.446
3	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.908	3.896	3.884	3.874
7	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124

F0.10(n1, n2)										
n2 \ n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937

Tabla A.2: Continuación.

# Bibliografía

L. Kirkup y B. Frenkel, *An Introduction to Uncertainty in Measurements* (Cambridge University Press, 2006).

J.R. Taylor, *An introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, 2da. ed. (University Science Book, 1997).

P. Bevington y D. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science*, 3ra. ed. (Mc. Graw Hill, 2003).

*Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*, JCGM 100:2008.

*Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement and related documents"*, JCGM 104:2009.

*International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, JCGM 200:2008. *Vocabulario internacional de metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM)*, JCGM 200:2008, primera edición en español, 2008.

J.L. Devore, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, 5ta. ed. (International Thomson, 2001).

D. Wackerly, W. Mendenhall III y R. Scheaffer, *Estadística Matemática con Aplicaciones*, 6ta. ed. (International Thomson, 2002).