FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN
(USO Y TEORÍA CLÁSICA)

PABLO PANZONE

RESUMEN. Probaremos, haciendo uso de la función zeta de Riemann, el siguiente teorema clásico: la cantidad de primos entre 1 y x es aproximadamente $\frac{x}{\ln x}$. Daremos algunas aplicaciones extras de esto y miscelánea.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El Teorema de los Números Primos (TNP) dice que si:

$$\pi(x) = \text{ cantidad de primos } p \leq x$$

entonces

Teorema 1 (TNP).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1.$$

Esto fue conjeturado por Legendre y Gauss. Fue probado en forma independiente por Hadamard y De la Vallée Poussin.

2. CONVOLUCIÓN ARITMÉTICA

Si $a=\{a_n\}, b=\{b_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$ son dos sucesiones, la convolución aritmética se define como:

$$a*b=c=\{c_n\},$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión y

$$c_n = \sum_{d|n} a_d \, b_{\frac{n}{d}}.$$

Es fácil ver que valen las siguientes propiedades que se dejan al lector.

Lemma 2.1.
i) $a * b = b * a$,
ii) $(a * b) * c = a * (b * c)$,
iii) $a * (1, 0, 0, 0, \ldots) = a$.

La convolucion aritmética es el análogo del producto de Cauchy para series de potencias, pero para series de Dirichlet, i.e. series de la forma

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Así el lector puede chequear que formalmente si $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, entonces

$$f(s)g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

con c_n definido como arriba.

La función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

se llama la *zeta de Riemann* (conocida y usada por Euler). Es fácil ver que define una función analítica si $Res > 1$. Es, quizás, la serie de Dirichlet mas "simple" en algún sentido.

Teorema 2.0. *Sean $f_i(z) : \Omega \to C$, tal que Ω es abierto y las funciones son analíticas allí de modo que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ convergen casi uniformemente en Ω. Entonces*

(i) $f(z) := \prod_{i=1}^{\infty}(1 + f_i(z))$ converge casi uniformemente en Ω y es cero sólo si algún factor es cero.

(ii) si $(1 + f_i(z)) \neq 0$ para todo $i, z \in \Omega$ entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i'(z)}{1 + f_i(z)}.$$

Demostración. (idea) Basta probar que para una sucesión real $a_i \geq 0$ tal que $\sum_1^{\infty} a_i < \infty$, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i),$$

existe pues

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) = e^{\sum_{i=1}^{n} \ln(1+a_i)} \leq e^{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

pues $\ln(1 + a_i) \leq a_i$ si $a_i \geq 0$ y la sucesión $\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)$ es creciente en n. El caso general se deja al lector. $\square$

Con este teorema se puede probar que (aquí y en adelante p se usa para primos)

$$\zeta(s) = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s - 1}),$$

válido si $Re\, s > 1$ de modo que $\zeta(s) \neq 0$ para esa región. La igualdad de arriba sigue de los productos parciales

$$\prod_{p \leq m} (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots) = \sum' \frac{1}{n^s},$$

donde la $\sum'$ significa la suma sobre los naturales n divisibles solo por primos $p \leq m$ (algunos o todos).

Definición. la *función de von Mangoldt* esta definida por:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si}\, n = p^r, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se puede ver usando teorema 2.0 ii) que si $Re\, s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{p^{-s} \ln p}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_p \sum_{1 \leq e} p^{-es} \ln p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

La siguiente identidad, que corresponde a $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.\zeta(s) = -\zeta'(s)$, es importante:

Lemma 2.2. *Si* $L = \{\ln n\}$, $1 = \{1\}$ *entonces*

$$\Lambda * 1 = L.$$

Demostración. $\sum_{d | p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} = n} \Lambda(d) = r_1 \Lambda(p_1) + \cdots + r_k \Lambda(p_k) = \ln n.$ □

Finalmente damos la siguiente

Definición. la *función de Möbious* se define así, (aquí p_i son distintos primos)

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^\ell & \text{si}\, n = p_1 \cdots p_\ell, \\ 0 & \text{si}\, p^2/n, \\ 1 & \text{si}\, n = 1. \end{cases}$$

Lemma 2.3.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu * 1 = \begin{cases} 0 & \text{si}\, 1 < n \\ 1 & \text{si}\, n = 1. \end{cases}$$

Demostración. Se tiene que

$$\sum_{d | p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} = n} \mu(d) = \sum_{d | p_1 \cdots p_k = n} \mu(d) = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots = (1-1)^n$$

de donde el lema sigue. □

El TNP se prueba usando los siguientes teoremas (usamos $\sim$ significando que el cociente tiende a 1 cuando x tiende a infinito)

Teorema 2.1. *Son equivalentes:*
i) TNP es decir $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$,
ii) $\psi(x) \sim x$,
iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$.

Nota: nosotros vamos a probar la equivalencia entre i) y ii) y que iii) implica ii). Esto es suficiente para probar TNP.

Teorema 2.2.
i) $\zeta(s)$ *es analítica en* $Res > 0$ *y tiene un polo en 1 de orden 1.*
ii) $\zeta(1+it) \neq 0$ *en* $t \neq 0$.

Teorema 2.3. *Sea* $|a_n| \leq 1$ *y* $F(z) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^z}$. *Supongamos que* $F(z)$ *tiene para cada* z_0, $Rez_0 = 1$ *un entorno donde es analitica. Entonces la serie converge a* $F(z)$ *en la recta* $1 + it$.

Demostración. (del TNP). Tomar

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \frac{1}{\zeta(z)}.$$

Por el teorema 2.2 está en las condiciones del teorema 2.3. Además $F(1) = 0$. Luego la siguiente serie converge con suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$. Por el teorema 2.1 el TNP sigue. □

En las secciones probaremos estos teoremas.

3. Método de la hipérbola de Dirichlet

Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ se llama una *función aritmética* (los coeficientes de una serie de Dirichlet son una función aritmética). Conviene esta notación pues definimos

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$$

(F mayúscula por "primitiva" de f. Idem con g y G).

Teorema 3.1.

$$\sum_{k \leq x} f * g(k) = \sum_{d \leq x/y} f(d) G(x/d) + \sum_{d \leq y} g(d) F(x/d) - F(x/y) G(y).$$

Demostración. Como

$$\sum_{k \leq x} f * g(k) = \sum_{k \leq x} \sum_{d_1 d_2 = k} f(d_1) g(d_2),$$

la suma en cuestión es la suma de los pares $f(d_1)g(d_2)$ sobre los pares (d_1, d_2) en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ debajo de la curva $d_1 d_2 = x$. Esto se descompone en tres factores y es el teorema (ver figura 1). □

Teorema 3.2 (formula de Euler). *Si a, b son enteros y $f(t)$ tiene derivada continua en el intervalo $[a, b]$ entonces*

$$f(a+1) + \cdots + f(b) = \int_a^b (t - [t]) f'(t) dt + \int_a^b f(t) dt.$$

Demostración. Usar integración por partes en $\int_n^{n+1} (t - [t]) f'(t)\, dt$ con $n = a, a+1, \ldots, b$. □

Ahora daremos un par de ejemplos que serán importantes en lo que sigue pero que son aplicación directa de los teoremas de arriba.

Ejemplo 1: Usando el teorema 3.2 se puede ver que $(f(t) = \ln(t))$

$$\sum_{m \leq z} \ln m = z \ln z - z + O(\ln z).$$

Ejemplo 2: Usando los teoremas 3.1 y 3.2 se puede ver que

$$\sum_{m \leq z} 1 * 1 = 2 \sum_{d \leq \sqrt{z}} [z/d] - [\sqrt{z}]^2 = 2z \sum_{d \leq \sqrt{z}} \frac{1}{d} - z + O(\sqrt{z}).$$

Pero usando la formula de Euler

$$\sum_{d \leq \sqrt{z}} \frac{1}{d} = \ln \sqrt{z} + 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + O(1/\sqrt{z}).$$

Observar que $1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2} dt = \gamma$ es la constante de Euler.

4. Demostración del Teorema 2.1

Demostración que ii) es equivalente a i). Usaremos una función intermedia

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Vale

$$\vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \cdots + \vartheta(x^{1/k}) = \psi(x),$$

con $k = [\frac{\ln x}{\ln 2}]$. Pero

$$\vartheta(x^{1/2}) \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \leq \frac{\ln(x)}{2} \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \leq \sqrt{x} \ln(x)/2.$$

Luego

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) \leq c \ln^2(x) \sqrt{x},$$

es decir ambas funciones son asintóticamente similares.

Por otro lado

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \leq \ln x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{\ln x} \leq \ln x \cdot \pi(x),$$

y ademas

$$\pi(x) \leq \frac{1}{\ln x} \sum_{\frac{x}{\ln^2 x} < p \leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p + \sum_{p \leq \frac{x}{\ln^2 x}} 1 \leq$$

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{\frac{x}{\ln^2 x}<p\leq x}\frac{\ln x}{\ln x-\ln\ln^2 x}\ln p+\frac{x}{\ln^2 x}=$$
$$\frac{1}{\ln x-\ln\ln^2 x}\sum_{\frac{x}{\ln^2 x}<p\leq x}\ln p+\frac{x}{\ln^2 x}\leq$$
$$\frac{\vartheta(x)}{\ln x-\ln\ln^2 x}+\frac{x}{\ln^2 x}.$$

De esto sigue la equivalencia. □

Demostracion que iii) implica ii): Defínase
$$M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n).$$
La siguiente formula se llama sumación por partes
$$\sum_{n_0}^{m_0}a_nb_n=a_{n_0}(b_{n_0}-b_{n_0+1})+(a_{n_0}+a_{n_0+1})(b_{n_0+1}-b_{n_0+2})+$$
$$\cdots+(a_{n_0}+\cdots+a_{m_0-1})(b_{m_0-1}-b_{m_0})+(a_{n_0}+\cdots+a_{m_0})b_{m_0}.$$

Se puede ver usando esta fórmula que la condición iii) del teorema implica $M(x)=o(x)$ (Sugerencia: $\mu(n)/n=a_n$, $b_n=n$).

Defínase
$$F(z):=\sum_{m\leq z}\ln z-1*1(z)+2\gamma,$$
donde γ es la constante de Euler. Se puede ver usando el ejercicio 1 y 2 de la sección 3 que
$$F(z)=O(\sqrt{z}).$$
Por otro lado usando
$$\Lambda-1=(L-1*1)*\mu,$$
y sumando
$$\psi(x)-[x]=\sum_{m\leq x}(L-1*1\pm 2\gamma 1)*\mu.$$

Pero usando el teorema 3.1:
$$\psi(x)-[x]=\sum_{m\leq y}F(\frac{x}{m})\mu(m)+\sum_{m\leq x/y}(\log(m)-1*1(m)+2\gamma)M(x/m)$$
$$-F(x/y)M(y)-2\gamma,$$
con $1<y<x$.

El primer sumando es $O(\sum_{m\leq y}\sqrt{x/m})=O(\sqrt{xy})$.

Para el segundo, observar que (aquí $M(x/m)\leq\delta x/m$ si $x/m\geq y$, δ chico)
$$O(\sum_{m\leq x/y}m\cdot(\delta x/m))=O(\delta x^2/y).$$

El tercero es $O(\sqrt{xy})$.

La elección de las variables involucradas es: si δ es chico y z_0 es tal que $M(z)\leq\delta z$ si $z_0\leq z$. Sea $z_0/\sqrt{\delta}\leq x$, entonces elegir $z_0\leq\sqrt{\delta}x:=y<x$.

Esta elección da
$$\psi(x)-[x]=o(x).$$

y concluye la demostración. □

5. Demostración del Teorema 2.2

i) Por el teorema 3.2 con $a = 1, f(t) = t^{-s}$ sigue que

$$\frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{b^s} = (-s) \int_1^t \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt - \frac{1}{1-s} + \frac{b^{1-s}}{1-s},$$

si $\sigma = Res > 1$. Haciendo $b \to \infty$ da

$$\zeta(s) = (-s) \int_1^t \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt + s/(s-1),$$

que es una formula valida para $\sigma > 0$. □

ii) Se tiene que $3 + 4\cos x + \cos 2x = 2(1 + \cos x)^2 \geq 0$, y

$$\zeta(s) = exp(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}),$$

$$|\zeta(s)| = exp(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{cos(mt \ln p)}{mp^{m\sigma}}).$$

Luego

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma+it)^4 \zeta(\sigma+i2t)| = exp(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4cos(mt\ln p) + cos(2mt \ln p)}{mp^{m\sigma}}),$$

es ≥ 1 con $1 < \sigma$. Si $\zeta(1+it) = 0$ para $t \neq 0$ entonces como

$$\zeta(\sigma)^3 = O((\sigma-1)^{-3}),$$
$$\zeta(\sigma+it) = O((\sigma-1)).$$

Esto contradice la formula de arriba pues $\zeta(1+2it)$ tendría un polo. □

6. Demostración del Teorema 2.3

Observar que

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(-z)dz,$$

donde $-\gamma$ es la curva reflejo por el origen (no es la curva inversa!).

Sea $Re\, w = 1$. Entonces

$$2\pi i F(w) = \int_{A+B} F(z+w)\{\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\} N^z dz,$$

donde A, B son las curvas del dibujo 2.

También la suma parcial de $F(z)$ hasta N términos que llamamos $S_N(z)$ da usando la primer observacion y C es la curva reflejo por el origen (dibujo 2)

$$2\pi i S_N(w) = \int_{A+C} S_N(z+w)\{\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\} N^z dz =$$

$$\int_A S_N(z+w)\{\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\} N^z dz + \int_A S_N(-z+w)\{\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\} N^{-z} dz,$$

y restando

$$2\pi i(F(w)-S_N(w))=\int_A\{F(z+w)-S_N(z+w)\}\{\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\}N^z dz+$$

$$-\int_A S_N(-z+w)\{\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\}N^{-z}dz+\int_B F(z+w)\{\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\}N^z dz$$

$$=I+II+III.$$

Pero i) $\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}=\frac{2x}{r^2}$ si $|z|=r, z=x+iy$.
ii) $|\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}|\leq\frac{1}{\delta}+\frac{1}{r}\leq\frac{2}{\delta}$ si $Re z=-\delta, |z|\leq r$ con $\delta>0$.
iii) $|F(z+w)-S_N(z+w)|\leq\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+x}}\leq\int_N^{\infty}\frac{dn}{n^{1+x}}=\frac{1}{xN^x}$ si $x>0$.
iv) $|S_N(-z+w)|\leq\sum_1^N\frac{1}{n^{1-x}}\leq\int_0^N\frac{dn}{n^{1-x}}=\frac{N^x}{x}$ si $x>0$.
Sea M el supremo de $|f(z)|$ sobre la curva $A+B$. Usando esto y

$$|\int_\gamma f|\leq \text{supremo}_\gamma|f|\cdot\text{long}(\gamma)$$

tenemos que:

$$|I|\leq \text{supremo sobre } x \text{ de } \frac{1}{xN^x}.\frac{2x}{r^2}.N^x.r\pi=\frac{2\pi}{r}.$$

Idem con integral II.

La integral III se separa en dos pedazos: los dos pedazos sobre el circulo que llamamos IV de radio r y el otro sobre el segmento que llamamos V. Entonces

$$|V|\leq\frac{M4r}{\delta N^\delta}.$$

Para las integrales sobre IV, se tiene parametrizando la curva respecto de x que (aquí $y(x)$ es la parametrización con $-\delta\leq x\leq 0$)

$$|IV|\leq 2\int_{-\delta}^0 M\frac{2|x|}{r^2}N^x\sqrt{1+y'(x)^2}dx\leq 6\frac{M}{r^2}\int_{-\delta}^0|x|N^x dx\leq 6\frac{M}{r^2}\frac{1}{\ln^2 N}.$$

La elección de los parámetros es así: primero r grande, luego δ pequeño de modo que F esté definida y luego N grande. □

7. Algunas aplicaciones

Para lo que sigue notaremos a_n, $n=1,2,3,\ldots$ una sucesión de números naturales. Escribimos

$$A(x)=\sum_{a_n\leq x}1.$$

Teorema 7. *Si*

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{A(2x)-A(x)}{\ln x}=+\infty,$$

entonces para todo m natural existe un número c natural tal que

$$a_n+c,$$

es un número primo al menos m veces cuando n recorre los naturales.

Demostración. Sea

$$z(x) = \text{número de soluciones de } 0 < a_n - p \leq 2x \ (p \text{ primo}).$$

Vale

$$z(x) \geq (A(2x) - A(x))\pi(x) \geq \frac{A(2x) - A(x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x\pi(x)}{x} \cdot x \geq 2m \cdot x,$$

con esta última desigualdad válida con x un valor grande. Es decir se puede encontrar un entero c perteneciente a $[1, 2x]$ tal que $c = a_n - p$ para al menos m primos p. □

Ejercicio: Mostrar que dados N, $m \geq 2$ existe c (N, c, m naturales) tal que $x^m + c$ representa N primos cuando x varía en los naturales.

8. Miscelánea

Algunos conjeturaron formas asintóticas ligeramente diferentes del TNP. Vale

Teorema 8.1. *Si*

$$\psi(x) = Cx + \frac{(D + o(1))x}{\log x},$$

entonces $C = 1, D = 0$.

Demostración. Se tiene

$$x \log x - x + O(\log x) = \log[x]! = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)[\frac{x}{n}] =$$

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n)([\frac{x}{n}] - \frac{x}{n}) + x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} =$$

$$O(x) + x\{\int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt + \frac{\psi(x)}{x}\} =$$

$$O(x) + x\{C \int_2^x \frac{1}{t} dt + D \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt + o(1) \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt\}.$$

□

También se puede probar de manera totalmente elemental la siguiente desigualdad que implica $\psi(x) \leq Cx$ (tomar logaritmos en la formula del teorema 8.2 y ver demostracion de la equivalencia i), ii) del teorema 2.1).

Teorema 8.2. *(Erdös) Vale*

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$$

Demostración. Cierto para $n = 2, 3$. Inducción, suponiendo que vale para para todo número hasta n. Si $n+1$ es par entonces es cierto. Si es impar entonces $n+1 = 2m+1$. Observar que $\binom{2m+1}{m} < 4^m$ y que $\binom{2m+1}{m}$ es un múltiplo de todos los primos satisfaciendo $m + 2 < p < 2m + 1$. Luego

$$\prod_{p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} \prod_{p \leq m+1} p < 4^m \prod_{p \leq m+1} p \leq 4^{2m+1}$$

□

8.1. Algunas cosas que se saben de la zeta de Riemann.

– Vale la fórmula espejo (Riemann). Si

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}}{2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

entonces

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

– De la fórmula espejo sale que tiene ceros simples en $s = -2, -4, -6, \ldots$ (llamados ceros triviales)

– Tiene infinitos ceros en la recta crítica $1/2 + it$ (Hardy, 1914). Al menos $1/3$ de los ceros están allí (Selberg 1942, Levinson 1974).

8.2. La Hipótesis de Riemann es que todos los ceros están en la recta $1/2 + it$. Si notamos por

$$\rho = \beta + i\gamma$$

a un cero no trivial en la franja crítica $(0 < \sigma < 1)$ y ponemos

$$N(T) = \sum_{\rho; 0 \le \gamma \le T} 1,$$

contando la multiplicidad del cero tenemos que (dado por Riemann y probado por von Mangoldt)

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log(T)).$$

– Hardy y Littlewood probaron que

$$|\zeta(1/2 + it)| \le O(t^{1/6}),$$

y también

$$\int_1^T |\zeta(1/2 + it)|^2 dt = O(TlogT).$$

– Si la Hipótesis de Riemann es cierta entonces vale para todo $0 < \epsilon$

$$|\zeta(1/2 + it)| \le O_\epsilon(t^\epsilon).$$

Esta última condición es conocida como la hipótesis de Lindelöf.

– Existen muchas formulaciones equivalentes para la hipótesis de Riemann. Aquí nombramos una de ella (Hardy-Littlewood 1918): La RH es equivalente a que la siguiente función es $O(x^{-1/4})$ si $x \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!\zeta(2n+1)}.$$

8.3. Relación entre la zeta y la distribución de primos. Se tiene la siguiente relación. Recordar

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{p^r \le x} logp.$$

Entonces vale (Riemann probada por von Mangoldt) si $1 < x$,

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - log(2\pi) - \frac{1}{2}log(1 - x^{-2}).$$

La hipótesis de Riemann es equivalente a

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{logt} + O(\sqrt{x}logx),$$

o también a

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x}log^2x).$$

Demostración. (idea) Vale la formula

$$-\frac{\zeta(s)'}{\zeta(s)} = -\frac{1}{1-s} + 1 + s\int_1^\infty (\psi(t) - t)t^{-s-1}dt.$$

$\square$

8.4. Porqué puede ser importante saber la distribución de primos?

– Respuesta: muchos problemas pueden resolverse sabiendo la distribución de primos.

– Ejemplo: (Goldbach) Todo número impar suficientemente grande es suma de tres primos (Vinogradov).

La demostración usa la distribución asintótica de primos en clases.

8.5. Algunos resultados recientes y curiosidades relacionadas con los primos.

– ¿Existen fórmulas para primos? ¿o algo parecido? RTA: Si.

Un ejemplo

$$F(j) = [\cos^2 \pi \frac{(j-1)!+1}{j}],$$

$$\pi(m) = -1 + \sum_{j=1}^{m} F(j).$$

Aquí se usa el teorema de Wilson: j es primo si y solo si $(j-1)! \equiv -1 \pmod{j}$.

– Existe un polinomio explícito en 27 variables con coeficientes en $\mathbb{Z}$ tal que su imagen positiva es exactamente el conjunto de los números primos (relacionado al 10mo problema de Hilbert: existe un algoritmo para decidir si un polinomio de varias variables con coeficientes en $\mathbb{Z}$ tiene solución?)

– Una curiosidad: sean dos enteros tomados random. La probabilidad que sean primos es $6/\pi^2$.

– Existen sucesiones aritméticas arbitrariamente largas de primos (Terence Tao).

Referencias

[1] Newman D. J., *Simple analytic proof of the prime number theorem*, American Mathematical Monthly **87**, (1980) 693-696.

[2] Apostol T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate texts in Mathematics, Springer, 1976.

[3] Titchmarsh E.C. , *The theory of the Riemann Zeta-Function*, preface by Heath-Brown (revised edition), Clarendon Press, 1986.

[4] H. Iwaniec, E. Kowalski *Analytic Number Theory*, AMS Colloquium Publications, Vol. 53, 2004.

[5] Pintz J. , *On Legendre's prime number formula*, American Math. Monthly **87**, (1980) 733-735.

[6] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 46, 1995.

Departamento e Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, ARGENTINA.

E-mail address: ppanzone@uns.edu.ar

Cursos Avanzados

PROGRAMA DEL MODELO MINIMAL DE MORI: UNA BREVE INTRODUCCIÓN

IVÁN PAN

Índice

Introducción

A título de prefacio. El material de estas notas tiene como principal objetivo el servir de apoyo para el cursillo homónimo de la quinta edición de la Escuela Nacional de Álgebra. No hay ninguna pretensión de originalidad en la redacción de las mismas, ya que por un lado su autor no es, ni de lejos, un especialista del área y, por otro lado, existen hoy en día excelentes referencias sobre el tema, algunas de ellas bastante accesibles, escritas por algunos de los principales exponentes de éste.

El cursillo está dirigido principalmente a estudiantes de doctorado y jóvenes investigadores. Pensando en los primeros, se ha hecho un esfuerzo especial para incluir detalles en algunas de las construcciones básicas y en la exposición de los ejemplos.

Por otro lado, hubo sí una cierta pretensión de escribir una introducción rápida y mínima, valga la redundancia, a las ideas de base de la teoría de los modelos minimales. No esperamos sin embargo que este material pueda ser expuesto en su totalidad, mucho menos asimilado, en la corta duración prevista para el curso; la idea que nos motivó, fue la de producir algo que vaya un poco más allá de un simple resumen de la teoría.

Con este fin, el desarrollo teórico del tema principal viene acompañado de una serie de ejercicios que tienen, como objetivo único y específico, el de servir como apoyo al mismo. En otras palabras, los ejercicios no están propuestos para ayudar al lector en la asimilación de los conceptos ni para ejercitarlo en la utilización de las herramientas que va adquiriendo en el transcurso de la lectura; para este fin, el lector tendrá que recurrir a los libros texto de las referencias. El contenido de los ejercicios aquí es considerado esencial para el entendimiento de lo que se pretende desarrollar y no son más que prerequisitos para esto y/o parte integrante de las demostraciones; es también por esta razón que una gran parte de sus enunciados contiene sugerencias. Por lo tanto, aquellos que sepan hacer los ejercicios, sea por conocimiento previo, sea porque se tomaron el trabajo para ello, deberían de poder seguir sin mucha dificultad, es lo que esperamos, el resto de las notas.

En lo que respecta a los conocimientos previos, necesarios para seguir la lectura de estas notas: se espera que los lectores conozcan lo básico sobre geometría algebraica y posean destreza en el manejo de los conceptos fundamentales, por ejemplo conociendo el material de los primeros dos capítulos del libro de I. Shafarevich [Sh] o el capítulo I del libro de R. Hartshorne [Ha]. Además, asumiremos que éstos tienen (por lo menos) conocimientos vagos sobre divisores, haces y cohomología de haces. Cualquier experiencia previa sobre la teoría de superficies proyectivas lisas será, no obstante, de mucha ayuda.

Describimos a continuación el contenido de estas notas.

La sección 1 está dedicada a introducir gran parte de los prerequisitos necesarios para el cursillo. Se incluyen aquí los conceptos de ciclo, divisor, forma de intersección y nociones relacionadas, así como la formulación de las principales relaciones entre todos éstos. También hacemos una breve "revisión" de la teoría de superficies proyectivas lisas, donde enunciamos los teoremas fundamentales de que haremos uso más adelante.

En la sección 2 se desarrolla el programa de Mori en el contexto de las superficies proyectivas no singulares. Para redactarlo seguimos, esencialmente, las notas de M. Reid [Re] y el capítulo 1 del libro de K. Matsuki [Ma].

En la última sección, se comentan rápidamente las diferencias que surgen en relación a la generalización de la teoría para el caso de dimensión superior, apenas enunciando los resultados más importantes y se desarrolla una serie de ejemplos que esperamos sirvan de motivación para el abordaje sistemático de la teoría general.

Para terminar, dedicamos algunas palabras en relación a las referencias sobre el programa de Mori, que fueron utilizadas para escribir este material. Por un lado, nos gustaría citar el libro de Olivier Debarre [De] donde, a nuestro entender, se encuentra una excelente introducción al tema, en el contexto de variedades proyectivas no singulares de dimensión arbitraria. Por otro lado, la teoría general se puede estudiar en [KoMo] de János Kollár y Shigefumi Mori, dos de los mayores especialistas (y desarrolladores) del tema, escrito con la colaboración de C.H Clemens y A. Corti; allí se encuentra una exposición muy buena aunque por momentos bastante árida, en nuestra opinión. Finalmente, en el libro más reciente [Ma], de Kenji Matsuki, se encuentra un material más o menos equivalente al de [KoMo], en lo que respecta a los fundamentos de la teoría, pero bastante más digerido y donde se puede observar un esfuerzo mayor en elaborar un libro texto, como lo sugiere además el tipo de edición.

A título de introducción. Dedicaremos unas palabras a explicar en que consiste el *Programa del Modelo Minimal* de Mori.

En la clasificación (birracional) de variedades proyectivas no singulares, dada una clase de equivalencia birracional $\mathcal{B}(X)$ de una variedad compleja no singular X, digamos de dimensión n, uno espera encontrar un representante de esa clase que sea lo más simple posible.

Por otro lado, si $\phi : X \to X'$ es un morfismo birracional no trivial (i.e. no es isomorfismo), digamos con X' también no singular, entonces ϕ contrae una subvariedad $\mathrm{Exc}(\phi) \subset X$ de codimensión 1, a saber, el conjunto de los puntos $x \in X$ tales que la aplicación diferencial $d_x\phi : T_xX \to T_{\phi(x)}X'$ no es un isomorfismo ([Sh, Chap. II, §4.4, Thm. 2]); las componentes irreducibles de $\mathrm{Exc}(\phi)$ son las componentes (o divisores) excepcionales de ϕ. Por esta razón, si pensamos en X como una variedad analítica real de dimensión $2n$, las componentes excepcionales de ϕ son subconjuntos analíticos de dimensión real $2n-2$ y es intuitivamente evidente que

$$\rho(X) := \dim \mathrm{H}_{2n-2}(X, \mathbb{Q}) > \dim \mathrm{H}_{2n-2}(X', \mathbb{Q}) =: \rho(X'),$$

lo que es un fuerte argumento para pensar que la primera variedad es más complicada que la segunda.

Por lo tanto, si podemos identificar las subvariedades de codimensión 1 que son excepcionales para algún morfismo birracional, teniendo en cuenta las que dimensiones de los grupos de homología son invariantes (por isomorfismos) y tienen dimensión finita, uno puede soñar con encontrar un elemento distinguido $X_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\rho(X_0)$ sea minimal, en algún sentido, y esto podría indicarnos que el objeto obtenido es el que buscamos. Luego precisamos preguntarnos si hay alguna relación entre dos tales objetos minimales en la misma clase de equivalencia birracional; si éstos fueran isomorfos podríamos decir, además, que el objeto encontrado es "canónico".

Por ejemplo, en el caso de superficies no singulares, es sabido que todo morfismo birracional $\varphi : X \to X'$ es composición de un número finito de explosiones de puntos, digamos $\varphi = \phi_\ell \circ \cdots \circ \phi_1$, con $\phi_i : X_i \to X_{i+1}$ y $X_1 = X$ ([Sh, Chap. IV, §3.4, Thm. 4]). En particular, para que una curva irreducible $E \subset X$ sea contraída por φ, tiene que existir i tal que $E_i := \phi_{i-1} \circ \cdots \circ \phi_1(E)$ sea la curva excepcional de la explosión de un punto de X_{i+1}, o sea, $E_i \simeq \mathbb{P}^1$ y $E_i^2 = -1$; decimos por esto que E_i es una (-1)-curva.

El razonamiento anterior nos muestra el camino para alcanzar el objetivo de nuestro sueño. En otras palabras, en este caso (de superficies), para encontrar un elemento distinguido en $\mathcal{B}(X)$, como el que procuramos, lo que hay que hacer es buscar una (-1)-curva en $X_1 = X$; si existe la contraemos y obtenemos $\phi_1 : X_1 \to X_2$, que es la explosión de X_2 en un punto; luego recomenzamos con X_2. Encontramos así una sucesión finita de morfismos birracionales

$$X = X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \longrightarrow X_{m-1} \xrightarrow{\phi_{m-1}} X_m =: X_0 \ ,$$

con $m \geq \ell$, de forma que $X_0 \in \mathcal{B}(X)$ no tiene más curvas excepcionales. Se dice que X_0 es una *superficie mínima*. En general estas superficies mínimas son canónicas en el sentido de arriba, salvo cuando X_0 es racional; observar que $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ son superficies sin (-1)-curvas, birracionalmente equivalentes y no isomorfas.

Supongamos ahora que $\dim X \geq 3$. Si pretendemos generalizar lo que hicimos en el caso de superficies, el primer obstáculo que encontramos es que la noción de (-1)-curva no tiene más sentido (al interceptar una curva con otra en una variedad de dimensión ≥ 3 no podemos esperar encontrar un número no nulo).

Por otro lado, la fórmula de adjunción para una superficie Z, nos dice que si $C \subset Z$ es una curva lisa y racional ($C \simeq \mathbb{P}^1$), entonces

$$K_Z \cdot C + C^2 = 2g(C) - 2,$$

donde K_Z es el divisor canónico y $g(C)$ es el género de C (o sea $g(C) = 0$). Por lo tanto $K_Z \cdot C \geq -2$ siendo este número negativo apenas en dos situaciones: cuando $K_Z \cdot C = -1$ y entonces C es una (-1)-curva, o cuando $K_Z \cdot C = -2$ entonces $C^2 = 0$;

si $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ uno puede constatar que es exactamente la segunda opción la que ocurre, siendo C cualquier fibra de la fibración $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Es precisamente esta la llave para tratar el caso de dimensión superior; o sea, uno se pregunta por curvas que interceptan negativamente el divisor canónico, lo que además es una noción naturalmente canónica.

Cuando $K_X \cdot C \geq 0$ para toda curva irreducible $C \subset X$ se dice que X es un *modelo minimal* (para su clase de equivalencia birracional).

Retomemos el caso bidimensional bajo esta nueva óptica. Si X es un superficie no singular que es un modelo minimal, entonces la superficie es mínima en el sentido de antes. Sin embargo, hay superficies mínimas que no son minimales: es el caso, en general, de las superficies regladas (ver §3.3.1), o sea, cuando existe un morfismo sobreyectivo $\varphi : X \to B$ sobre una curva lisa B, tal que cada fibra es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ (ya habíamos considerado el caso $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). En esta situación, si $b \in B$, la fórmula de adjunción de arriba implica

$$F = \varphi^{-1}(b) \implies K_X \cdot F = -2.$$

Como veremos, una superficie mínima X_0 asociada a X, o es un modelo minimal, o es una superficie reglada. Es precisamente este resultado que se quiere generalizar en el caso de dimensión > 2.

Desafortunadamente, las cosas no se resuelven de manera simple. De hecho, ya en dimensión 3, para obtener lo que queremos es necesario debilitar algunas de las hipótesis. Más concretamente, debemos permitir que algunos de los morfismos $\phi_i : X_i \to X_{i-1}$ puedan no estar bien definidos y que las variedades X_j puedan ser singulares si $j > 1$. De todas formas, como fue probado por Mori en su trabajo fundamental [Mo82], cuando estas excepciones ocurren, las aplicaciones birracionales $\phi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ y las singularidades de las variedades $X_j, j > 1$, son de tipos bien particulares.

El resultado que se obtiene al final del procedimiento propuesto por Mori (y desarrollado por él en el caso tridimensional: [Mo82] y [Mo88]) es una variedad X_0 cuyas singularidades, si las hay, son del tipo llamado *terminal.* Más concretamente, si $\dim X = 3$, en cuyo caso el número de singularidades que puedan aparecer en el proceso, es finito, se presenta una de las siguientes situaciones:

a) X_0 es un modelo minimal.
b) Existe un morfismo sobreyectivo con fibras conexas $\varphi : X_0 \to Y$, donde $\dim Y < \dim X_0$ y $\rho(X_0) = \rho(Y) + 1$, tal que:
   i) si $\dim Y = 2$, la fibra genérica de φ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$;
   ii) si $\dim Y = 1$, la fibra genérica de φ es una superficie de del Pezzo (o sea, una superficie proyectiva no singular tal que el opuesto del divisor canónico es amplio);
   iii) si $\dim Y = 0$, entonces $\varphi : X \to Y = \{pt.\}$ es el morfismo de estructura y X es una variedad de Fano (o sea, $-K_X$ es amplio).

Observación 0.1. 1) En el caso b) arriba, si C es una curva contenida en una fibra genérica de ϕ, como veremos $K_{X_0} \cdot C < 0$. Por lo tanto a) y b) no pueden presentarse al mismo tiempo.
2) Una superficie de del Pezzo es $\mathbb{P}^2$ o es $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ o es la explosión de $\mathbb{P}^2$ en r puntos en posición general con $r \leq 8$.
3) Las variedades de Fano no singulares con número de Picard 1 fueron clasificadas por Iskovskih en [Is77] y [Is78].

1. Preliminares

En toda esta sección X designará una variedad casi-proyectiva irreducible y normal sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos; $\mathbb{C}(X)$ designará el cuerpo de funciones racionales de X. Recordemos que cuando X es normal y $V \subset X$ es una subvariedad de codimensión 1, entonces el anillo local $\mathcal{O}_{V,X}$ de X en V es un anillo de valuación discreta.

El objetivo de esta sección es fijar notaciones e introducir los conceptos necesarios para el desarrollo de los capítulos subsecuentes; con algunas pocas excepciones, los resultados evocados en esta sección serán enunciados sin demostración; también reservamos una parte de éstos para ser formulados como ejercicios, con el fin de motivar e introducir en el tema a los lectores con menos experiencia. Las referencias consultadas son, fundamentalmente [Sh], [Ii], [Ha] y [De]. Siempre que sea posible haremos uso del abordaje más elemental que es el de [Sh] y en el momento introducir conceptos o de utilizar notaciones trataremos de seguir [Ha] que es la referencia más generalmente aceptada y utilizada por la comunidad.

Por otro lado, sobreentendemos que el lector tenga nociones elementales de haces y, aunque no es absolutamente imprescindible, será de ayuda un conocimiento mínimo sobre cohomología de haces; en este sentido, si $\mathcal{F}$ es un haz sobre X, $\mathcal{F}(X) = \mathrm{H}^0(X;\mathcal{F})$ es el conjunto de secciones globales de $\mathcal{F}$, que también denotaremos $\mathrm{H}^0(\mathcal{F})$ cuando no haya lugar a confusión.

1.1. Divisores y ciclos.

1.1.1. **Divisores de Cartier.** Designamos $\mathcal{O}_X$ el haz estructural de X, que es un haz de dominios de integridad; sea $\mathcal{K} = \mathcal{K}_X$ el haz de fracciones asociado a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$, o sea, el haz constante $\mathcal{K}(U) = \mathbb{C}(X)$ para todo abierto no vacío $U \subset X$. Claramente el sub-haz $\mathcal{O}^*$ de los invertibles de $\mathcal{O}$ es un subhaz de grupos multiplicativos del subhaz de los invertibles $\mathcal{K}^*$ de $\mathcal{K}$ por lo que tiene sentido considerar el haz cociente $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.

Un *divisor de Cartier* de X se define de manera abstracta como siendo una sección global del haz $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$. Denotamos $\mathrm{Div}(X) := \mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ el conjunto de divisores de Cartier, que es naturalmente un grupo abeliano cuya operación será designada con notación aditiva. Más concretamente, un divisor de Cartier está representado por una familia $\{(U_i, f_i)\}$ donde $\{U_i\}$ es un cubrimiento por abiertos (no vacíos) de X con $f_i \in \mathcal{K}(U_i) = \mathbb{C}(X)$, $\forall\, i$, tales que

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset \implies \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j).$$

Otra familia $\{(U'_j, f'_j)\}$ representa el mismo divisor si existe un refinamiento $\{V_k\}$ de ambos cubrimientos tal que $f'_k/f_k \in \mathcal{O}^*(V_k)$, donde f_k y f'_k son inducidas de f_i y las f'_j por restricción.

Si $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ están representados por $\{(U_i, f_i)\}$ y $\{(U_i, f'_i)\}$ respectivamente (donde siempre es posible utilizar el mismo cubrimiento, a menos de refinamiento), la suma $D + D'$ está representada por $\{(U_i, f_i f'_i)\}$.

Convención Un divisor de Cartier será simplemente llamado *divisor*. Además, cometiendo un pequeño abuso de notación, si $\{(U_i, f_i)\}$ representa un divisor D, escribiremos $D = \{(U_i, f_i)\}$, en otras palabras, identificaremos D con cualquiera de las familias que lo representa. Queda como ejercicio verificar que las nociones introducidas en términos de éstas son de hecho independientes de la representación particular del divisor.

Sea $D = \{(U_i, f_i)\} \in \mathrm{Div}(X)$. Introducimos los siguientes conceptos:

- El *soporte* de D es el subconjunto $\mathrm{Sop}(D)$ de los puntos $x \in X$ tales que
$$x \in U_i, \implies f_i \text{ no es regular en } x \text{ o } f_i^{-1} \text{ no es regular en } x.$$
- Decimos que D es *efectivo* si $f_i \in \mathcal{O}(U_i), \forall\, i$; en este caso escribimos $D \geq 0$.
- Decimos que D es *principal* si existe $f \in \mathbb{C}(X)$ tal que $D = \{(U_i, f)\}$; equivalentemente, si D está en la imagen de la aplicación canónica $\mathrm{H}^0(\mathcal{K}^*) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. Escribimos $\mathrm{div}(f) = \{(U_i, f)\}$ el divisor principal asociado a f e denotamos $\mathrm{PDiv}(X) \subset \mathrm{Div}(X)$ al subconjunto de divisores principales; evidentemente $\mathrm{PDiv}(X)$ es un subgrupo.
- Decimos que dos divisores $D, D \in \mathrm{Div}(X)$ son *linealmente equivalentes* si $D - D' \in \mathrm{PDiv}(X)$, lo que indicaremos escribiendo $D \sim D'$.
- Por último, la familia de submódulos $\mathcal{O}(U_i)f_i^{-1} \subset \mathcal{K}(U_i)$ define un subhaz invertible $\mathcal{O}(D)$ de $\mathcal{K}$ (i.e. localmente generado por un elemento de $\mathbb{C}(X)$). Recíprocamente, todo subhaz invertible de $\mathcal{K}$ define un divisor de X.

El ejercicio a continuación no es imprescindible para entender lo esencial de lo desarrollado en las notas, pero es importante si uno pretende entender la demostración de la proposición 1.17 (que dicho sea de paso, no es en absoluto esencial para entender el resto de estas notas).

Ejercicio 1.1. Sea $D = \{(U_i, f_i)\}$ un divisor. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, denotamos $U_{ij} := U_i \cap U_j$ y $f_{ij} := f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$.

a) Observar que $f_{ij}f_{jk}f_{ki} = 1$ en $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ y deducir que la familia $\{(U_{ij}, f_{ij})\}$ define un 1-cociclo de Check en relación al cubrimiento $\{U_i\}$ (ver definición en [Ha, Chap. III, §4] y tener en cuenta que $\mathcal{O}^*$ está pensado como un haz de grupos donde la operación de grupo es la multiplicación).
b) Probar que existe un epimorfismo canónico $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ cuyo núcleo es precisamente $\mathrm{PDiv}(X)$.
c) Si $D' \in \mathrm{Div}(X)$, probar que los subhaces $\mathcal{O}(D), \mathcal{O}(D') \subset \mathcal{K}$ son (abstractamente) isomorfos si y sólo si $D \sim D'$.

El *grupo de Picard* de X es el grupo cociente
$$\mathrm{Pic}(X) := \frac{\mathrm{Div}(X)}{\mathrm{PDiv}(X)}.$$

Comportamiento bajo morfismos. Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo dominante (i.e. $\pi(X)$ es denso en Y) entre variedades. Si $D = \{(U_i, f_i)\}$ es un divisor (de Cartier) en Y, la *imagen inversa* de D o, (con su denominación anglosajona), el *pullback* de D, es $\pi^*(D) = \{(\pi^{-1}(U_i), f_i \circ \pi)\}$. Evidentemente $\pi^*(\mathrm{PDiv}(Y)) \subset \mathrm{PDiv}(X)$, entonces tenemos un homomorfismo de pullback a nivel de los grupos de Picard
$$\pi^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X).$$

Sistemas lineales. Sea D un divisor en X. El conjunto de secciones globales del haz $\mathcal{O}(D) \subset \mathcal{K}$ es
$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(D)) = \mathrm{H}^0(X, D) = \{f \in \mathbb{C}(X)^*; \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Ejercicio 1.2. Probar que todo elemento $0 \neq s \in \mathrm{H}^0(X, D)$ define un divisor efectivo D_s que es linealmente equivalente a D. Además, dos tales divisores $D_s, D_{s'}$ satisfacen
$$D_s \sim D_{s'} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* : s' = \lambda s.$$

Un *sistema lineal* de D es el proyectivizado $|W| = \mathbb{P}(W)$ de un subespacio vectorial W de $\mathrm{H}^0(X, D)$; por el ejercicio arriba los elementos de $|W|$ corresponden a divisores efectivos que son linealmente equivalentes a D. Si $\dim W = 0$, el sistema lineal es vacío y si $\dim W > 0$, toda base ordenada $g_0, \ldots, g_n$ de W define una aplicación racional $\phi_{|W|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, dada por

$$\phi_{|W|}(x) = (g_0(x) : \cdots : g_n(x));$$

evidentemente $\phi_{|W|}$ depende de la elección de la base ordenada de W: para dos elecciones posibles obtenemos dos aplicaciones racionales que se corresponden vía composición por un automorfismo (lineal) de $\mathbb{P}^n$.

Ejercicio 1.3. Sea $|W|$ un sistema lineal de D y sea $x \in X$. Suponiendo que $\dim W > 1$, demostrar:

a) Existe un abierto de Zariski U de X tal que, si $x \in U$, el conjunto
$$\{f \in W; f \text{ regular en } x, f(x) = 0\}$$
define un hiperplano en el espacio proyectivo $|W|$.

b) Deducir que existe una aplicación racional $X \dashrightarrow |W|^\vee$, donde $|W|^\vee = \mathbb{P}(W^\vee)$ es el espacio proyectivo dual de $|W|$; esta es la manera intrínseca de definir $\phi_{|W|}$.

Un sistema lineal también es llamado de *serie lineal*. El *sistema lineal completo* es el sistema lineal $|\mathrm{H}^0(X, D)|$, que denotaremos $|D|$ y que corresponde al conjuntos de (todos) los divisores efectivos que son linealmente equivalentes a D (ejercicio 1.2).

Decimos que D es *libre* si su sistema lineal completo no tiene puntos base, o sea, si la aplicación racional asociada $\phi_{|D|}$ está definida en todo punto de X. Denotamos $\mathrm{Base}(D)$ al conjunto de puntos de indeterminación, o puntos base, de la aplicación $\phi_{|D|}$. Entonces D es libre si y sólo si $\mathrm{Base}(D) = \emptyset$.

Un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ es *muy amplio* si es libre y el morfismo $\phi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^{\dim |D|}$ es una inmersión cerrada (i.e. induce un isomorfismo entre X y una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^{\dim |D|}$); en particular X es una variedad proyectiva.

Finalmente, $D \in \mathrm{Div}(X)$ es *amplio*, si existe un entero positivo m tal que mD es muy amplio.

Ejercicio 1.4. Probar que una variedad X (arbitraria) es proyectiva si y solamente si admite un divisor amplio.

1.1.2. **Ciclos.** Sea $k \leq \dim X$. Un *k-ciclo* en X es una combinación lineal (finita) formal $\sum_i a_i V_i$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y $V_i \subset X$ es una subvariedad (cerrada en X) irreducible de dimensión $k, \forall\, i$; denotamos $\mathrm{Z}_k(X)$ el $\mathbb{Z}$-módulo generado por los k-ciclos.

Sea $Z = \sum_{i=1}^{\ell} a_i V_i$ un k-ciclo. Introducimos los siguientes conceptos:

- El soporte de Z es el conjunto $\mathrm{Sop}(Z) := \cup_{a_i \neq 0} V_i$.
- Decimos que Z es efectivo si $a_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, \ell$; en este caso escribimos $Z \geq 0$.

1.1.3. **Divisores de Weil.** Un *divisor de Weil* es un $(n-1)$-ciclo, donde $n = \dim X$. Denotamos $\mathrm{WDiv}(X) = \mathrm{Z}_{n-1}(X)$.

Tenemos un homomorfismo canónico de grupos

$$\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{WDiv}(X), D \mapsto [D] := \sum_V \mathrm{ord}_V(D) V$$

donde $\mathrm{ord}_V(D)$ se define así: si $D = \{(U_i, f_i)\}$ y $V \cap U_i \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{ord}_V(D)$ es el valor de f_i en relación a la valuación discreta $\nu_{_V} : \mathbb{C}(X)^* \to \mathbb{Z}$ del anillo local $\mathcal{O}_V$ de $\mathcal{O}$ en V.

Ejercicio 1.5. Probar que el conjunto de subvariedades irreducibles

$$\{V \subset X; \mathrm{codim}\,(V, X) = 1, \mathrm{ord}_V(D) \neq 0\}$$

es finito.

Si $f \in \mathbb{C}(X)^*$, tenemos un divisor de Weil

$$(f) = \sum_V \mathrm{ord}_V(D)V,$$

donde D es el divisor principal $\{(U_i, f)\}$ (se puede incluso poner $U_i = X$). En este caso $\mathrm{ord}_V(D) \neq 0$ si y sólo si V es una componente irreducible del conjunto de ceros o de polos de la función racional f; a veces se escribe $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$, donde las notaciones son auto-explicativas.

Un divisor de Weil es *principal* si es de la forma (f) para $f \in \mathbb{C}(X)^*$. Más generalmente, un divisor de Weil $D = \sum_i a_i V_i$ es *localmente principal* si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto $U \ni x$ tal que la restricción de $D|_U = \sum_i a_i(V_i \cap U)$ de D a U es principal.

Vale el siguiente resultado (recordemos que X es normal), cuya demostración puede ser encontrada, por ejemplo, en [].

Proposición 1.6. *El homomorfismo canónico $D \mapsto [D]$ es inyectivo y su imagen es el conjunto de los divisores de Weil que son localmente principales. En particular, si X es no singular, tenemos un isomorfismo canónico* $\mathrm{Div}(X) \simeq \mathrm{WDiv}(X)$.

Ejercicio 1.7. Probar que el homomorfismo de la proposición induce un isomorfismo entre $\mathrm{PDiv}(X)$ y el subgrupo de los divisores de Weil que son principales; en otras palabras, podemos identificar $\mathrm{div}(f)$ con (f).

Justificados por el ejercicio precedente, también denotaremos $\mathrm{PDiv}(X)$ al conjunto de los divisores de Weil principales. Análogamente, si $f \in \mathbb{C}(X)^*$, denotamos $\mathrm{div}(f)$ el divisor principal asociado a f, sea como divisor de Cartier, sea como divisor de Weil.

Para dos divisores de $D, D' \in \mathrm{WDiv}(X)$ también decimos que son linealmente equivalentes cuando $D - D' \in \mathrm{PDiv}(X)$.

Si X es no singular, de la proposición 1.6 y el ejercicio 1.7 concluimos

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \frac{\mathrm{WDiv}(X)}{\mathrm{PDiv}(X)}$$

Comportamiento bajo morfismos. Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo entre variedades. Supongamos además, que X es proyectiva; entonces $\pi(X)$ es cerrado en Y. Si $Z = \sum_i a_i V_i$ un k-ciclo de en X, la restricción de π a cada subvariedad irreducible V_i induce un morfismo $V_i \to \pi(V_i)$, donde $\dim V_i \geq \dim \pi(V_i)$, para todo i; denotemos I el conjunto de índices i tales que $\dim V_i = \dim \pi(V_i)$. La *imagen directa* de Z es el k-ciclo de Weil

$$\pi_*(Z) = \sum_{i \in I} a_i \pi(V_i).$$

Se puede demostrar que $\pi_*(\mathrm{PDiv}(X)) \subset \mathrm{PDiv}(Y)$ lo que induce un homomorfismo

$$\pi_* : \frac{\mathrm{WDiv}(X)}{\mathrm{PDiv}(X)} \to \frac{\mathrm{WDiv}(Y)}{\mathrm{PDiv}(X)}$$

1.1.4. **Clase canónica.** Comenzamos proponiendo el ejercicio siguiente que tiene como objetivo introducir los llamados divisores canónicos.

Ejercicio 1.8. Sea $n := \dim X$. Denotemos $X_0 \subset X$ el conjunto de puntos no singulares de X. Si $x \in X_0$, fijamos un sistema de parámetros locales $u_{x,1}, \dots, u_{x,n}$ (i.e. $u_{x,1}, \dots, u_{x,n}$ son funciones racionales en X, regulares en x, tales que generan el ideal maximal $\mathfrak{m}_{x,X}$ del anillo local $\mathcal{O}_{x,X}$ de X en x.

a) Probar que para todo $x \in X_0$ existe un entorno (abierto) U_x de x en X, tal que $u_{x,1}, \dots, u_{x,n} \in \mathcal{O}_X(U_x)$ y las funciones regulares
$$v_{y,i} := u_{x,i} - u_{x,i}(y), i = 1, \dots, n$$
definen un sistema de parámetros locales de X en $y \in U_x$ (sugerencia: $u_1, \dots, u_n$ es un sistema de parámetros locales en x si y solo si están definidos en x y las diferenciales $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ en el espacio vectorial $T_x X^\vee = \mathrm{Hom}(T_x X, \mathbb{C})$.

b) Deducir que existe un cubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos de X_0 y, para cada i, n funciones regulares $u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)} \in \mathcal{O}(U_i)$, tales que $d_x u_1^{(i)}, \dots, d_x u_n^{(i)}$ es una base de $T_x X^\vee$, para todo $x \in U_i$.

c) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, probar que existen $h_{rs} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ tales que
$$du_r^{(i)} = \sum_s h_{rs} du_s^{(j)}, \ \det(h_{rs})(z) \neq 0 \ \forall\, z \in U_i \cap U_j;$$
deducir
$$du_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge du_n^{(i)} = \det(h_{rs}) du_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge du_n^{(j)}$$

d) Sea $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}(X)$ una base de trascendencia de $\mathbb{C}(X)$ sobre $\mathbb{C}$. Considere la n-forma diferencial racional $\omega := df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$. Probar que, para todo U_i, existe $g_i \in \mathbb{C}(X)^*$, tal que
$$\omega = g_i du_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge du_n^{(i)}.$$

e) Concluir que $\{(U_i, g_i)\}$ define un divisor en X_0.

Un *divisor canónico* de X se define de la forma siguiente: sean $n = \dim X$ y X_0 el conjunto de puntos no singulares de X, que es un abierto de codimensión ≥ 2 puesto que X es normal. El divisor en X_0 definido en el ejercicio precedente corresponde a un divisor de Weil $\sum_i a_i V_i$ en X_0 (1.6). Si $\overline{V_i}$ denota la adherencia de V_i en X, el divisor de Weil $\sum_i a_i \overline{V_i}$ es, por definición, un *divisor canónico* en X.

Ejercicio 1.9. Probar que dos divisores canónicos en X difieren por un elemento de $\mathrm{PDiv}(X)$, o sea, son divisores linealmente equivalentes.

Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo dominante entre variedades no singulares de la misma dimensión. Si $K_Y = \{(V_i, g_i)\}$, como sabemos, $\pi^*(K_Y) = \{(\pi^{-1}(V_i), g_i \circ \pi)\}$. Por otro lado, con las notaciones del ejercicio 1.8, si $v_1 - v_1(y), \dots, v_n - v_n(y)$ definen parámetros locales en todo punto y de un abierto de Y, entonces, para cada i existe un cubrimiento por abiertos de $\pi^{-1}(V_i)$ de forma que en cada uno de estos abiertos, digamos U_ℓ's, podemos elegir parámetros locales $u_1 - u_1(x), \dots, u_n - u_n(x)$ de todo punto $x \in U_\ell$ y funciones g_{ij} regulares en U_ℓ, tales que
$$d(v_i \circ \pi) = \sum_j g_{ij} du_j.$$
Por lo tanto
$$d(v_1 \circ \pi) \wedge \cdots \wedge d(v_n \circ \pi) = \det(g_{ij}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.$$

Si $f_\ell := (g_i \circ \pi) g_{ij}|_{U_\ell}$, de lo hecho en el ejercicio 1.8 se deduce que K_X puede ser representado por la familia $\{(U_\ell, f_\ell)\}$. El divisor $\{(U_\ell, f_\ell)\}$ es de hecho la suma de dos divisores, uno de ellos, corresponde a $\pi^*(K_Y)$ y otro está definido por las funciones regulares $\det(g_{ij})$, razón por la cual es efectivo; este divisor depende únicamente de π y se llama el *divisor de ramificación* de π, que denotaremos R_π.

Ejercicio 1.10. Probar que el soporte de R_π es el conjunto de los puntos de X donde π no induce un isomorfismo local.

En la situación de arriba, obtenemos la siguiente *Fórmula de Ramificación* ([Ii, Thm. 5.5]):

$$\pi^*(K_X) + R_\pi - K_X \in \mathrm{PDiv}(X) \tag{1.1}$$

La *clase canónica* de X es la clase en $\mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PDiv}(X)$ definida por K_X. Por abuso de notación, y como es habitual, designaremos también K_X tanto a la clase canónica como a cualquier divisor canónico en X.

En términos de clases canónicas, la fórmula de ramificación se escribe:

$$K_X = \pi^*(K_X) + R_\pi$$

Ejercicio 1.11. Probar que la clase canónica de una variedad irreducible normal es invariante por isomorfismos.

Por último, si X es no singular, el divisor canónico define un haz invertible $\mathcal{O}(K_X)$. La dimensión $p_g(X)$ del espacio vectorial de secciones globales $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(K_X))$ es el *género geométrico* o simplemente *género* de X.

Ejercicio 1.12. Sean X_1, X_2 variedades proyectivas lisas. Si $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ es la proyección canónica sobre X_i, $i = 1, 2$, probar que $p_1^*(K_{X_1}) + p_2^*(K_{X_2}) - K_{X_1 \times X_2} \in \mathrm{PDiv}(X_1 \times X_2)$.

1.2. Números de intersección y cono de curvas. En esta sección, X es una variedad (irreducible y normal) proyectiva.

Sea $D = \{(U_i, f_i)\}$ un divisor (de Cartier) en X y $C \subset X$ una curva irreducible con normalización $\sigma : C_0 \to C$ (o sea, σ es la desingularización de C). Supongamos $C \not\subset \mathrm{Sop}(D)$. Por restricción, D define un divisor D_C en C. La imagen inversa $\sigma^*(D_C)$ es un divisor $D_0(C)$ en C_0, cuyo divisor de Weil asociado es de la forma

$$[D_0(C)] = \sum_{i=1}^{\ell} a_i p_i$$

para ciertos enteros $a_i = a_i(D)$ y puntos $p_i \in C_0$, $i = 1, \ldots, \ell$. El *número de intersección* de D y C es

$$D \cdot C = \sum_{i=1}^{\ell} a_i.$$

La suma $\sum_{i=1}^{\ell} a_i$ es el *grado* del divisor de Weil $\sum_{i=1}^{\ell} a_i p_i$; este grado es invariante por equivalencia lineal de divisores en la curva lisa C_0.

Si $C \subset \mathrm{Sop}(D)$, podemos substituir $\{(U_i, f_i)\}$ por $\{(U_i, f f_i)\}$ para alguna función $f \in \mathbb{C}(X)^*$ adecuada (ver como se hace esto en [Sh, Chap. III, §1.3, Thm. 1]), de forma que el soporte de $D' := \{(U_i, f f_i)\}$ no contenga C; así $D' \cdot C$ estará bien definido. Por lo tanto el número de intersección de divisores y curvas irreducibles queda bien definido a menos de equivalencia lineal en los divisores.

Ejercicio 1.13. Usando la idea de arriba, definir la noción de grado de un haz invertible sobre una curva proyectiva $C \subset X$, de forma que si D es un divisor de Cartier en X entonces $\deg \mathcal{O}_C(D) = D \cdot C$, donde $\mathcal{O}_C(D) = \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_C$ es la restricción del haz $\mathcal{O}_X(D)$ a C.

El ejercicio permite definir $D \cdot C$ pata cualquier divisor D, incluso cuando su soporte contiene C, como siendo

$$D \cdot C := \deg \mathcal{O}_C(D).$$

Ahora, si $Z = \sum_i b_i C_i$ es un 1-ciclo arbitrario, C_i curva irreducible para todo i, definimos el *número de intersección* de D y Z como

$$D \cdot Z = \sum_i b_i (D \cdot C_i).$$

De esta forma, tenemos una forma bilineal $\cdot : \mathrm{Div}(X) \times \mathrm{Z}_1(X) \to \mathbb{Z}$, que llamamos la *forma de intersección* en X. Si no queremos usar el ejercicio 1.13 para definir $D \cdot C$ en el caso $C \subset \mathrm{Sop}(D)$, podemos igualmente definir la forma de intersección directamente en $\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Z}_1(X)$, por lo dicho antes de ese ejercicio. Tenemos además:

Ejercicio 1.14. Si $D = \mathrm{div}(f)$ es un divisor principal en X, $f \in \mathbb{C}(X)^*$, y $Z \in \mathrm{Z}_1(X)$ probar que $D \cdot Z = 0$ (sugerencia: si $f \notin \mathbb{C}$ y B es una curva irreducible y no singular, $B \not\subset \mathrm{Sop}(\mathrm{div}(f))$, la aplicación racional inducida por restricción de f a B induce un morfismo sobreyectivo $\nu : B \to \mathbb{P}^1$; se muestra que $D \cdot B$ es la diferencia de puntos de dos fibras genéricas de ν; el caso en que B es singular se trata como en el ejemplo 1.15 abajo).

Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo sobreyectivo entre variedades proyectivas. Tenemos dos fórmulas muy útiles:
Fórmula de proyección. Si $D \in \mathrm{Div}(Y)$ y $Z \in \mathrm{Z}_1(X)$, entonces ([Ii, Lem. 2.29] o [Fu2, Prop. 2.3(c)])

$$\pi^*(D) \cdot Z = D \cdot \pi_*(Z). \tag{1.2}$$

Pullback de intersección. Si $D \in \mathrm{Div}(Y)$, $Z \in \mathrm{Z}_1(Y)$ y π es finito, entonces ([Ii, Lem. 2.29] o [Fu2, Prop.2.3(d)])

$$\pi^*(D) \cdot \pi^*(Z) = \pi^*(D \cdot Z). \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.15. Consideramos la superficie $X = C \times C'$ donde C y C' son curvas proyectivas lisas no racionales; denotemos $\pi : X \to C$ la proyección sobre el primer factor. Si $p, q \in C$, el divisor $D_C := p - q \in \mathrm{Div}(C)$ no es principal, puesto que C no es una curva racional, por definición. Denotamos $D := \pi^*(D_C) \in \mathrm{Div}(X)$.

Sea $B \subset X$ una curva irreducible, arbitraria. Si π contrae B en un punto (i.e. si B es una fibra de π), la formula de proyección nos dice que $D \cdot B = 0$.

Supongamos ahora que B no es una fibra de π, entonces $\pi(B) = C$; la restricción de π a B induce un morfismo finito $\nu : B \to C$. Si B es no singular, $D \cdot B$ es el grado del divisor $\nu^*(D_C) = \nu^*(p) - \nu^*(q) = 0$. Si B es singular, consideramos la normalización $\sigma : \widetilde{B} \to B$ de B y utilizamos la fórmula (1.2), obteniendo nuevamente $D \cdot B = 0$.

Juntando todo, concluimos $D \cdot Z = 0$ para todo 1-ciclo $Z \in \mathrm{Z}_1(X)$.

Sean $D, D' \in \mathrm{Div}(X), Z, Z' \in \mathrm{Z}_1(X)$. Introducimos los siguientes conceptos:

- Decimos que D y D' son numéricamente equivalentes si $D \cdot Z'' = D' \cdot Z''$ para todo 1-ciclo Z''; en este caso escribimos $D \equiv D'$. Denotamos $N^1(X)$ el grupo cociente $\mathrm{Div}(X)/\equiv$.

- Decimos que Z y Z' son numéricamente equivalentes si $D'' \cdot Z = D'' \cdot Z$ para todo divisor D''; en este caso escribimos $Z \equiv Z'$ Denotamos $N_1(X)$ el grupo cociente $\mathrm{Z}_1(X)/\equiv$.
- Decimos que D (respectivamente Z) es numéricamente trivial, si $D \equiv 0$ (respectivamente $Z \equiv 0$).

Por definición, la forma de intersección pasa al cociente definiendo una forma bilineal no degenerada

$$\cdot : N^1(X) \times N_1(X) \to \mathbb{Z},$$

que continuamos llamando *forma de intersección*.

Observación 1.16.

a) La forma de intersección $\mathrm{Div}(X) \times \mathrm{Z}_1(X) \to \mathbb{Z}$ induce una una forma bilineal $\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Z}_1(X) \to \mathbb{Z}$ que puede ser degenerada como muestra el ejemplo 1.15.
b) Si $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$, $D \sim D'$ implica $D \equiv D'$ (ejercicio 1.14). Deducimos que la relación de equivalencia numérica induce una relación de equivalencia en $\mathrm{Pic}(X)$, que continuamos denotando $\equiv$. Tenemos entonces un isomorfismo canónico $N^1(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)/\equiv$.

Proposición 1.17. *El grupo de $N^1(X)$ es un grupo abeliano libre finitamente generado.*

Demostración. Haremos la demostración en el caso en que X es no singular.

La sucesión exacta exponencial (de haces sobre X)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 1\ ,$$

donde la aplicación exp es la aplicación $f \mapsto e^{2\pi\imath f}$, induce una sucesión exacta larga de cohomología y, en particular, un homomorfismo de conexión $\delta : \mathrm{H}^1(\mathcal{O}^*) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$. Como X es una variedad analítica compacta se sabe que $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ es finitamente generado, por lo tanto también lo es el cociente $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}^*)/\ker(\delta)$.

Por otro lado, identificando $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}^*)$ con $\mathrm{Pic}(X)$ (ver ejercicio 1.1) y observando que $\delta(D) = 0$ implica $D \equiv 0$, concluimos que existe un monomorfismo canónico

$$\frac{\mathrm{Pic}(X)}{\equiv} \to \frac{\mathrm{Pic}(X)}{\ker(\delta)}.$$

De la observación 1.16b) deducimos la afirmación relativa a la finitud de $N^1(X)$. La ausencia de torsión es consecuencia directa de la definición de equivalencia numérica. □

Corolario 1.18. $N_1(X)$ *es un grupo abeliano libre finitamente generado.*

El *número de Picard* de X es el rango $\rho(X)$ de $N^1(X)$; por lo tanto $\rho(X)$ también es el rango de $N_1(X)$.

Denotamos $N^1(X)_{\mathbb{Q}} = N^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $N^1(X)_{\mathbb{R}} = N^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ y, análogamente $N_1(X)_{\mathbb{Q}} = N_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ y $N_1(X)_{\mathbb{R}} = N_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Todos espacios vectoriales, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente, de dimensión $\rho(X)$.

Recordemos que un subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ que contiene el origen es un *cono convexo* si $u + v \in \mathcal{C}$ para todos $u, v \in \mathcal{C}$. Las caras de un cono $\mathcal{C}$ son los subconjuntos F de $\mathcal{C}$ tales que existe un funcional lineal $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaciendo:

$$\mathcal{C} \subset \{h \geq 0\},\ F = \mathcal{C} \cap \{h = 0\};$$

en particular F es un cono convexo.

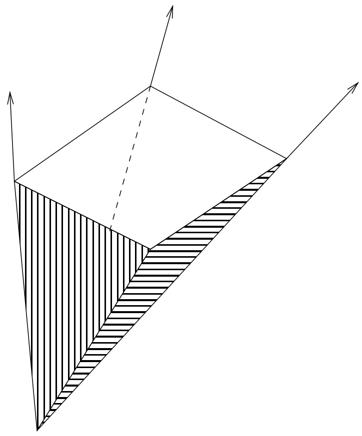

FIGURA 1. Caras de un cono convexo

Ejercicio 1.19. Probar que F es cara de un cono $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ si y solamente si

$$u, v \in \mathcal{C}, u + v \in F \Longrightarrow u, v \in F.$$

Es fácil ver que el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes reales no negativos de (clases de equivalencia numérica de) ciclos efectivos en $N_1(X)$, es un cono convexo en $N_1(X)_{\mathbb{R}}$, que denotaremos $\mathrm{NE}(X)$ y llamaremos *cono de curvas* de X. Una construcción análoga puede ser hecha en $N^1(X)_{\mathbb{R}}$, usando divisores afectivos, pero no estaremos interesados en ella en estas notas.

El *cono cerrado de curvas* es la adherencia $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ de $\mathrm{NE}(X)$ en $N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)}$.

La primera observación importante que tenemos para hacer sobre $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ es la siguiente:

Lema 1.20. *Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo sobreyectivo entre variedades proyectivas. Denotemos $\mathrm{NE}(\pi)$ el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes reales no negativos de elementos $[C] \in N_1(X)_{\mathbb{R}}$, con $C \subset X$ curva irreducible tal que $\pi(C)$ es un punto. Entonces $\mathrm{NE}(\pi)$ es una cara de $\mathrm{NE}(X)$.*

Demostración. Comencemos observando que $\mathrm{NE}(\pi)$ está bien definido: en efecto, supongamos que $C' \in [C]$ es una curva irreducible numéricamente equivalente a C; si $\pi(C')$ no es un punto, entonces una sección hiperplana de Y intercepta este conjunto (que es un curva). Por otro lado, si $\pi(C)$ es un punto, existe una sección hiperplana de Y que no intercepta $\pi(C)$. Como dos secciones hiperplanas son numéricamente equivalentes, obtenemos una contradicción. Así $\pi(C')$ es un punto para toda curva irreducible $C' \in [C]$.

Ahora utilizaremos el ejercicio 1.19. Sean $\sum_i a_i[C_i], \sum_j a'_j[C'_j]$ dos elementos de $\mathrm{NE}(X)$, con C_i, C_j curvas irreducibles. Como los coeficientes son no negativos, que la suma de ambos esté en $\mathrm{NE}(\pi)$ implica que π contrae todas las curvas en puntos, de donde sigue el resultado. $\square$

El *cono de curvas* de $\pi : X \to Y$ es el cono $\mathrm{NE}(\pi)$. Se puede demostrar que si π tiene fibras conexas, entonces su cono de curvas lo determina a menos de isomorfismos del codominio ([De, Prop.1.14]).

Una de las piedras fundamentales de la teoría de Mori reposa sobre la posibilidad de determinar que ciertas caras de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ son de hecho conos de curvas de morfismos de un tipo relativamente simple.

1.3. Revisión de superficies. Supongamos ahora que X es una variedad proyectiva no singular de dimensión 2. En este caso, $\mathrm{Div}(X) \simeq \mathrm{WDiv}(X) = \mathrm{Z}_1(X)$ y por lo tanto la forma de intersección es simétrica.

El género aritmético de una variedad completa arbitraria Z se define en general como

$$p_a(Z) = (-1)^{\dim Z}(\chi(\mathcal{O}_Z) - 1),$$

donde $\mathcal{O}_Z$ es el haz estructural y $\chi(\mathcal{O}_Z) = \sum_i (-1)^i \mathrm{h}^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ es la *característica de Euler* de $\mathcal{O}_Z$; análogamente, se define la característica de Euler de cualquier otro haz. En el caso de la superficie X obtenemos

$$p_a(X) = \mathrm{h}^2(\mathcal{O}_X) - \mathrm{h}^1(\mathcal{O}_X).$$

Pasamos ahora a enunciar una serie de importantes resultados de la teoría de superficies proyectivas (no singulares).

Teorema de Riemann-Roch. Si $D \in \mathrm{Div}(X)$, entonces

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K) + 1 + p_a(X).$$

Sea $D = \sum_i a_i C_i$ un divisor efectivo, con C_i irreducible; si $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{O}_X$ es el haz de ideales asociado a la curva C_i, entonces el haz de ideales $\mathcal{I}_D = \Pi_i \mathcal{I}_i^{a_i}$ define una estructura de "esquema" en el soporte $\mathrm{Sop}(D)$ de D. El divisor D puede de esta forma ser pensado como un "esquema" de dimensión 1 con haz estructural $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_D$ (si somos muy quisquillosos, sería más correcto decirlo de la forma siguiente: si $\jmath : \mathrm{Sop}(D) \to X$ es el morfismo de inclusión, entonces $\mathcal{O}_D := \jmath^*(\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_D)$, donde $\jmath^*$ indica imagen inversa en el sentido de haces, que es compatible con el pullback de divisores de Cartier).

En particular, y aunque no esté muy claro lo que se entiende por la palabra "esquema", podemos dar una definición de género aritmético que incluya divisores efectivos: $p_a(D) = \mathrm{h}^1(\mathrm{Sop}(D), \mathcal{O}_D)$. Como aplicación del teorema de Riemann-Roch se puede demostrar:

Fórmula de adjunción. Si $K = K_X$ es la clase canónica de X y D es un divisor efectivo, entonces

$$2p_a(D) - 2 = D \cdot (D + K).$$

En efecto, para el lector que tiene un poco más de destreza en argumentos de cohomología de haces, se ve que $\mathcal{I}_D = \mathcal{O}_X(-D)$, de donde se obtiene una sucesión exacta de haces en X

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0;$$

entonces $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_X(-D)) + \chi(\mathcal{O}_D)$ y la afirmación sigue de aplicar el teorema de Riemann-Roch a $-D$.

También precisaremos de dos resultados profundos sobre la cohomología de haces en superficies proyectivas no singulares, que dicho sea de paso, valen en toda dimensión. El primero es la llamada *dualidad de Serre* que nos dice:

Dualidad de Serre. Si $D \in \mathrm{Div}(X)$, existe un isomorfismo canónico

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}(D)) \simeq \mathrm{H}^{\dim X - i}(X, \mathcal{O}(K - D)), \forall\ i = 0, \ldots, \dim X.$$

Una consecuencia inmediata es $\mathrm{h}^0(\mathcal{O}(K)) = \mathrm{h}^{\dim X}(\mathcal{O})$; en el caso en que X es una curva no singular esto nos dice que el género aritmético es igual al género geométrico.

El segundo es un resultado de anulación debido a Kodaira que se utiliza mucho en conjunto con la dualidad de Serre:

Teorema de anulación de Kodaira. Si $A \in \mathrm{Div}(X)$ es un divisor amplio, entonces

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}(K + A)) = 0, \forall\, i > 0.$$

La condición para un divisor A en X ser amplio puede ser caracterizada en términos de cohomología, pero no precisaremos de esto. Tendremos sin embargo necesidad de conocer la caracterización de este concepto en términos del comportamiento del divisor en relación a la forma de intersección.

Si $m \in \mathbb{N}$ es tal que mA es muy amplio, entonces es fácil probar que $mA \cdot C > 0$ para toda curva irreducible, de donde se deduce $A \cdot C > 0$ para tales curvas. Por lo tanto $A \cdot D > 0$ para todo divisor efectivo no trivial; en particular $A^2 = A \cdot A > 0$. Este comportamiento es el que caracteriza el concepto de amplitud:

Criterio de Nakai-Moishezon. Un divisor D en X es amplio si y sólo si $D^2 > 0$ y $D \cdot C > 0$ para toda curva irreducible C en X.

Para terminar, precisaremos del famoso criterio de contractibilidad de Castelnuovo. Antes de enunciarlo correctamente, recordemos que si $\sigma : \mathrm{Bl}_x(X) \to X$ es la explosión de X en un punto $x \in X$, entonces el conjunto $E := \sigma^{-1}(x)$ es una curva isomorfa a $\mathbb{P}^1$, llamada *divisor excepcional* de σ, tal que

$$E \cdot E = -1.$$

Una (-1) *curva* en X es una curva $C \subset X$ que es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ y tal que $C^2 = -1$.

Criterio de contractibilidad de Castelnuovo. Sea X una superficie proyectiva no singular. Si $E \subset X$ es una (-1)-curva, existe una superficie no singular Y, un punto $y \in Y$ y un morfismo $\sigma : X \to Y$ tal que σ es explosión de Y en y con divisor excepcional E.

Observación 1.21. Si E es una (-1)-curva en X, como en el criterio de contractibilidad, la fórmula de adjunción implica que $K_X \cdot E = -1$. Recíprocamente, si $C \simeq \mathbb{P}^1$ es tal que $K_X \cdot C = -1$, la fórmula de adjunción implica $C^2 = -1$ (i.e., C es una (-1)-curva).

Si $\sigma : X \to Y$ es la explosión de Y en un punto $y \in Y$, es fácil ver que $\mathrm{Div}(X) \simeq \mathrm{Div}(Y) \oplus \mathbb{Z}E$, donde $\mathbb{Z}E$ es el subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$ generado por el divisor excepcional E. De esto se deduce sin dificultad que $N^1(X) = N^1(Y) \oplus \mathbb{Z}[E]$. Como el rango de $N^1(X)$ es finito, el criterio de contractibilidad implica inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 1.22. *Existe una sucesión finita de explosiones de puntos en superficies no singulares*

$$X = X_n \xrightarrow{\phi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\phi_n} \cdots \xrightarrow{\phi_2} X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_0$$

tal que X_0 *no contiene* (-1)*-curvas.*

Definición 1.23. Una superficie mínima es una superficie proyectiva no singular que no contiene (-1)-curvas.

2. Programa de Mori em dimensión 2

En esta sección seguiremos fundamentalmente [Re] y [Ma]; también consultamos [De] y [KoMo] para los ejemplos. Instamos al lector a recurrir al apéndice para las nociones básicas de divisores, ciclos, forma de intersección y los resultados básicos de la teoría de superficies proyectivas no singulares.

2.1. Criterio de amplitud de Kleiman. Denotemos $K = K_X$ la clase (de equivalencia lineal) canónica y pongamos $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$. El teorema de Riemann-Roch (RR) dice

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(D - K) \cdot D.$$

Por otro lado, la dualidad de Serre implica

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \mathrm{h}^0(D) - \mathrm{h}^1(K - D) + \mathrm{h}^2(K - D).$$

Recordemos que todo divisor en X puede ser pensado como un divisor de Weil o de Cartier, indistintamente. Además, en el caso de superficies $\mathrm{Div}(X) = \mathrm{Z}_1(X)$, entonces tiene sentido considerar D^2 para $D \in \mathrm{Div}(X)$.

En el ejercicio siguiente y de ahí en más, será útil recordar el ejercicio 1.2.

Ejercicio 2.1. Sean D_1, D_2 divisores en X y $s_0 \in \mathrm{H}^0(D_2) \subset \mathbb{C}(X)$ una sección no nula. La aplicación $\mathrm{H}^0(D_1) \to \mathrm{H}^0(D_1 + D_2)$, $s \mapsto ss_0$, es inyectiva.

Proposición 2.2. *Sea D un divisor tal que $D^2 > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{h}^0(nD) \neq 0$ o $\mathrm{h}^0(-nD) \neq 0$; en particular* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{h}^0(nD) = \infty$ *o* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{h}^0(-nD) = \infty$.

Demostración. Supongamos $\mathrm{h}^0(nD) = \mathrm{h}^0(-nD) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \chi(\pm nD) &= \mathrm{h}^0(\pm nD) - \mathrm{h}^1(K \mp nD) + \mathrm{h}^2(K \mp nD) \\ &\leq \mathrm{h}^2(K \mp nD) \end{aligned}$$

Por otro lado, como $D^2 > 0$, RR implica que el crecimiento de $\chi(\pm nD)$ en n está gobernado por el término $D^2n^2/2$. Como $\mathrm{h}^0(2K) < \infty$, la desigualdad de arriba junto con el ejercicio 2.1 conllevan a una contradicción. Por lo tanto, existe $n_0 \in N$, tal que $\mathrm{h}^0(n_0D) \neq 0$ o $\mathrm{h}^0(-n_0D) \neq 0$. La última afirmación es otra consecuencia del ejercicio 2.1. $\square$

Ejercicio 2.3 (Teorema del índice de Hodge)**.** Sean A, D divisores en X con A amplio. Probar las siguientes afirmaciones:

a) $A \cdot D = 0 \Rightarrow D^2 \leq 0$.
b) $A \cdot D = D^2 = 0 \Rightarrow D \equiv 0$ (sugerencia: considere una curva irreducible C y defina $D_0 = xC - yA$ donde $x = A^2, y = A \cdot C$. Entonces $A \cdot D_0 = 0$ y para C adecuada $D \cdot D_0 \neq 0$; existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nD + D_0$ contradice a).

Sea A un divisor amplio en X. Como $N_1(X) = N^1(X)$ en el caso de superficies, podemos elegir una base de $N_1(X)_\mathbb{R}$ constituida por (la clase d)el propio A y (clases de) divisores linealmente independientes $E_1, \ldots, E_{\rho-1}$, $\rho = \dim_\mathbb{R} N_1(X)_\mathbb{R}$, contenidos en $A^\perp := \{z \in N_1(X)_\mathbb{R}; A \cdot z = 0\}$. El Teorema del Índice de Hodge (TIH) nos dice entonces que podemos elegir los $E_i's$ de tal forma que $E_i \cdot E_j = 0$, si $i \neq j$ y $E_i^2 < 0$ para todo i. La matriz asociada a la forma (cuadrática) de intersección en esa base es diagonal con un autovalor positivo y los restantes negativos, o sea, es una forma cuadrática con signatura $(1, \rho - 1)$. Una consecuencia de esto es lo que se pide para demostrar en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.4. Sean D_1, D_2 divisores tales que $(a_1D_1 + a_2D_2)^2 > 0$ para ciertos números reales a_1, a_2.

a) Probar $D_1^2D_2^2 - (D_1D_2)^2 \leq 0$, con igualdad si y sólo si D_1 y D_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

b) Deducir que si $D_1^2 > 0$ y $D_1 \cdot D_2 = 0$, entonces $D_2^2 < 0$.

Definición 2.5. Un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ en numéricamente efectivo, lo que abreviaremos "nef" si $D \cdot C \geq 0$ para toda curva irreducible $C \subset X$.

Evidentemente el concepto de divisor nef puede ser extendido al de clase (de equivalencia numérica) nef.

Un $\mathbb{Q}$-divisor es un elemento de $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, que corresponde, vía tensorización del homomorfismo canónico de la proposición 1.6, a un elemento de $\mathrm{WDiv}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ de la forma $\sum_i a_i V_i$ con $a_i \in \mathbb{Q}$. Diremos que un $\mathbb{Q}$-divisor H es *amplio* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mH \in \mathrm{Div}(X)$ es un divisor amplio. Teniendo en cuenta el concepto de $\mathbb{Q}$-divisor, se dice a veces que los elementos de $\mathrm{Div}(X)$ son *divisores enteros*, lo que responde a la inclusión natural $\mathrm{Div}(X) \subset \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Corolario 2.6. *Sean D, A divisores en X. Si D es nef y A es amplio, entonces:*

a) $D^2 \geq 0$.
b) $D + \epsilon A$ *es amplio* $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Demostración. Consideremos el polinomio cuadrático $p(t) = (D + tA)^2 \in \mathbb{Z}[t]$. Evidentemente $p'(t) = 0$ si y sólo si $t = -D \cdot A / A^2 \leq 0$. Como $p(0) \geq 0$, entonces $p(t) > 0$ si $t > 0$.

Por otro lado $A \cdot (D + tA) > 0$, de donde sigue $\mathrm{h}^0(-n(D + tA)) = 0$ si $n >> 0$. De la Proposición 2.2 deducimos que $n(D + tA) > 0$ es linealmente equivalente a un divisor efectivo; por lo tanto $n(D + tA) \cdot D \geq 0$, o sea,

$$(D + tA) \cdot D = D^2 + tA \cdot D \geq 0, \forall t > 0,$$

lo que prueba a).

Ejercicio 2.7. Probar b) utilizando el criterio de Nakai-Moishezon.

□

Observación 2.8. La parte b) del corolario se evoca diciendo que todo divisor nef es límite de divisores amplios.

Teorema 2.9 (Criterio de Kleiman)**.** *Sea D un divisor en X. Entonces*

$$D \text{ es amplio } \Leftrightarrow D \cdot z > 0, \forall z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\}.$$

Demostración. Fijamos un divisor amplio A en X.

($\Leftarrow$) Sean $f_D, f_A : N_1(X)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{R}$ los funcionales lineales asociados a D y A vía la forma de intersección; o sea, $f_D(z) = D \cdot z$, $f_A(z) = A \cdot z$, $z \in N_1(X)_{\mathbb{R}}$.

El conjunto $S := \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X); f_D(z) = 1\}$ es compacto, pues es homeomorfo al proyectivizado real $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{NE}}(X)) \subset \mathbb{P}(N_1(X)_{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\rho-1}$. Por un lado f_D es positiva en S por hipótesis; por otro lado, f_A es acotada en S por continuidad. Por lo tanto existe $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, tal que $f_D - \epsilon f_A$ es no negativa en D, si $\epsilon \in (0, s) \cap \mathbb{Q}$; luego $D - \epsilon A$ es nef si $\epsilon \in (0, s) \cap \mathbb{Q}$. Para un tal ϵ, el divisor

$$D = D - \epsilon A + \epsilon A$$

es amplio, por el corolario 2.6.

($\Rightarrow$) Para comenzar, consideremos el siguiente:

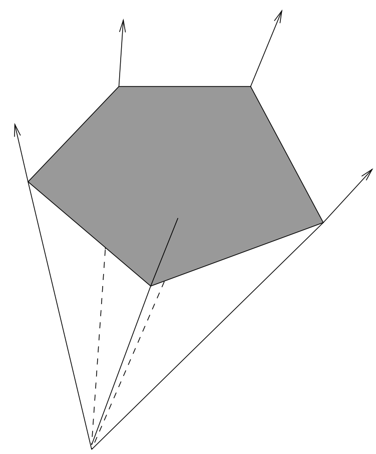

FIGURA 2. Cono estrictamente convexo

Ejercicio 2.10. Si E es un divisor en X, entonces $A + tE$ es amplio para $t \in \mathbb{Q}$ suficientemente pequeño (sugerencia: inspirarse de la parte de la proposición que ya fue demostrada).

Supongamos que D es amplio y que existe $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\}$ tal que $D \cdot z \leq 0$; entonces $D \cdot z = 0$. Como la forma de intersección es no degenerada, existe un divisor E tal que $E \cdot z \neq 0$; sin pérdida de generalidad podemos suponer $E \cdot z < 0$. Por lo tanto $(D + tE) \cdot z < 0, \forall t > 0$, lo que implica que $D + tE$ no es amplio para ningún $t > 0$, contradiciendo el ejercicio 2.10.

□

Observación 2.11.

a) El criterio (de amplitud) de Kleiman implica que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ es un cono (cerrado y convexo) estrictamente convexo, i.e., que no contiene rectas por el origen.
b) Podemos interpretar geométricamente el criterio de Kleiman así: A es amplio si y sólo si $\overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\}$ está estrictamente contenido en el semi-espacio abierto $\{z \in N_1(X)_{\mathbb{R}}; f_A(z) > 0\}$.

El Teorema de Kleiman permite extender la noción de amplitud para elementos en $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ (o $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ si preferimos): basta con decir que $A \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ es amplio si $A \cdot z > 0$ para todo $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\}$. Análogamente, diremos que $D \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ es nef si $D \cdot z \geq 0$ para todo $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$ (en este caso podemos substituir $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ por $\mathrm{NE}(X)$).

Nota 2.12. Es un resultado no trivial probar que la noción de $\mathbb{R}$-divisor amplio puede ser caracterizada como en el criterio de Nakai-Moishonzon.

2.2. Límite nef de un divisor amplio.

Sea A un divisor amplio en X. Supongamos que K_X no sea nef. Definimos el *límite nef* de A (*nef threshold* en inglés) como el número real

$$t_0(A) := \sup\{t; A + tK_X \text{ es nef}\};$$

entonces $t_0 = t_0(A) > 0$ (ejercicio 2.10).

Ejercicio 2.13. Sea A un divisor amplio en X cuyo límite nef es t_0.

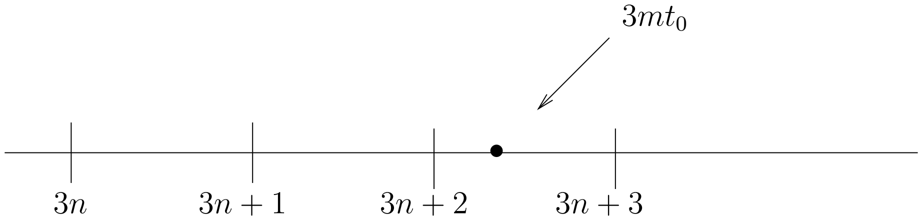

FIGURA 3. Eligiendo m y n.

a) Probar que $A + t_o K_X$ no es amplio.
b) Probar que $A + (t_o - \epsilon)K_X$ es amplio si $0 < \epsilon < t_o$ (sugerencia: el proyectivizado de $\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap (A + t_o K_X)^{\perp}$ es un conjunto compacto, no vacío, donde A es positivo y $A + t_o K_X$ se anula).

Observación 2.14. Supongamos que $D_1 := n(A + t_1 K_X)$ sea efectivo para ciertos $t_1 > t_0(A)$, $t_1 \in \mathbb{Q}$, y $n \in \mathbb{N}$; por definición D_1 no es nef y por lo tanto existe una curva C, componente irreducible del soporte $\mathrm{Sop}(D_1)$ de D_1 tal que $K_X \cdot C < 0$. Si $t \in \mathbb{Q}$, $0 < t < t_1$, el divisor

$$A + tK_X = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) A + \frac{t}{nt_1} D_1,$$

que es combinación linear positiva de A y D_1, no es nef si y sólo si existe componente irreducible C de $\mathrm{Sop}(D_1)$ tal que $K_X \cdot C < 0$. Concluimos que $t_0(A)$ es entonces el menor de los cocientes $-A \cdot C / K_X \cdot C$, donde C varía en el conjunto de componentes irreducibles del soporte de D_1. En particular, $t_0(A)$ es un número racional en este caso.

Lema 2.15 (de Racionalidad). *El límite nef de un divisor amplio es un número racional.*

Demostración. Supongamos, por absurdo, que $t_0 \notin \mathbb{Q}$. Entonces existen infinitos números naturales n y m tales que (ver figura 3)

$$\frac{n}{m} < t_0 < \frac{n+1}{m}, \quad \frac{n+1}{m} - t_0 < \frac{1}{3}.$$

Por el ejercicio 2.13, sabemos que $mA + nK_X$ es amplio y por construcción que $mA + (n+1)K_X$ no es nef. Aplicando el Teorema de Anulación de Kodaira (TAK de aquí en más) junto con RR al divisor amplio $mA + nK_X$ deducimos

$$\begin{aligned} \mathrm{h}^0(mA + (n+1)K_X) &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(mA + (n+1)K_X) \cdot (mA + nK_X) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left[m^2 A^2 + m(2n+1) A \cdot K_X + n(n+1) K_X^2\right]. \end{aligned}$$

Escribiendo $D_0 = A + t_0 K_X$, $mt_0 = n + \alpha$ y $\ell_0 = \ell_0(m,n) := \mathrm{h}^0(mA + (n+1)K_X)$, obtenemos

$$\ell_0 = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left[m^2 D_0^2 + m(1 - 2\alpha) D_0 \cdot K_X - \alpha(1-\alpha) K_X^2\right].$$

Gracias a la observación 2.14, para obtener una contradicción es suficiente probar que ℓ_0 es positivo para ciertos m y n, lo que haremos en tres etapas:

- Si $D_0^2 > 0$, evidentemente $\ell_0 > 0$ si $m >> 0$.

- Si $D_0^2 = 0$ y $D_0 \not\equiv 0$, entonces $D_0 \cdot K_X < 0$ puesto que $D_0 \cdot (A + t_0 K_X) = 0$ y $D_0 \cdot A > 0$ por el Teorema del índice de Hodge (TIH de aquí en más). Entonces $\ell_0 > 0$ si $m >> 0$ y $1 - 2\alpha$ tiene cota superior negativa.
- Si $D_0^2 = 0$ y $D_0 \equiv 0$, entonces $-K_X$ es amplio y

$$mA + nK_X = m\left(\frac{n+1}{m} - t_o\right) K_X,$$

luego $\ell > 0$.

□

Decimos que un divisor D es *libre* si es efectivo y el sistema lineal $|D| = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(D))$ no tiene puntos base; en otras palabras, si no existe $p \in X$ que pertenece al soporte de todo divisor efectivo linealmente equivalente con D. En el caso en que D es libre, tenemos entonces un morfismo $\phi_D : X \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(D)^\vee)$ definido de la siguiente manera: si $p \in X$, entonces $\phi_D(p)$ es el punto de $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(D)^\vee)$ que corresponde al hiperplano $\{s \in \mathrm{H}^0(D); s(p) = 0\}$.

Si A es un divisor amplio, entonces mA es muy amplio para $m >> 0$, lo que significa que existe una inmersión cerrada $\varphi : X \to \mathbb{P}^N$, con $N = \mathrm{h}^0(mA) - 1$, tal que mA es linealmente equivalente a $\varphi^*(H)$ para un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^N$; en particular mA es libre.

Ejercicio 2.16 (Lema de Zariski)**.** Sea $\phi : X \to V$ un morfismo sobreyectivo con fibras conexas, donde V es una curva lisa. Sea D un divisor cuyo soporte es unión de fibras.

a) Probar que $D^2 \leq 0$ (sugerencia: Si H es muy amplio en V, entonces $\phi^* H \cdot D = 0$ y $(\phi^* H)^2 = 0$; aplicar el ejercicio 2.4).
b) Probar que $D^2 = 0$ implica $\exists\, p_1, \ldots, p_r \in V, \exists\, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Q}_{>0}$: $D \equiv \phi^*(\sum_{i=1}^r a_i p_i)$.

Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo sobreyectivo entre variedades proyectivas irreducibles, donde asumiremos que X es lisa; consideremos la extensión de cuerpos $\phi^* : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$ asociada, que sin pérdida de generalidad supondremos como siendo una inclusión. Si $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$ es finita, el grado de trascendencia de esta extensión es $d = 0$ y sigue del *teorema de la dimensión de las fibras* ([Sh, Chap. I, §6.3]) que una fibra genérica $X_y := \phi^{-1}(y)$ de ϕ, $y \in Y$, es finita con tantos puntos como $\dim_{\mathbb{C}(Y)} \mathbb{C}(X)$. En caso contrario, tenemos $d > 0$ y el teorema de la dimensión de las fibras nos dice en este caso que toda componente irreducible X_y, con y genérico, es una subvariedad de X de dimensión d; supongamos de ahora en más que estamos en esta situación y denotemos X_y una fibra genérica de ϕ.

El segundo teorema de Bertini [Sh, Chap. II, §6.2, Thm. 2] implica que X_y es no singular; en particular, X_y es conexa si y sólo si es irreducible. En este caso, si $u \in \mathbb{C}(X)$ es algebraico sobre $\mathbb{C}(Y)$, digamos que satisface una ecuación de dependencia

$$u^\ell + a_1 u^{\ell-1} + \cdots + a_\ell = 0, a_i \in \mathbb{C}(Y)\ \forall\ i,$$

para $x \in X_y$ tenemos

$$u(x)^\ell + a_1(y) u(x)^{\ell-1} + \cdots + a_\ell(x) = 0,$$

lo que implica que existe un conjunto finito $B \subset \mathbb{C}$ tal que $u(x) \in B$ para todo $x \in X_y$. Como X_y es una variedad proyectiva conexa deducimos que u es constante en X_y, luego que $u = \phi^*(v)$ para cierta función racional $v \in C(Y)$, puesto que y es un punto genérico de Y. En otras palabras, si ϕ tiene fibras conexas (genéricamente) entonces el cuerpo $\mathbb{C}(Y)$ es algebraicamente cerrado en $\mathbb{C}(X)$. La recíproca de esta afirmación también es verdadera (ver [Sh, Chap. II, §6.1]).

Cuando $\mathbb{C}(Y)$ no es algebraicamente cerrado en $\mathbb{C}(X)$, consideramos su clausura algebraica, digamos $\mathbb{C}(Y) \subsetneq K \subseteq \mathbb{C}(X)$ (recordar que $d > 0$). Entonces ϕ se factoriza como composición de aplicaciones racionales

$$X \dashrightarrow Y' \dashrightarrow Y,$$

donde Y' es alguna variedad no singular con cuerpo de fracciones K. Aquí la aplicación racional $X \dashrightarrow Y'$ tiene fibras genéricas conexas mientras en $Y' \dashrightarrow Y$ estas son finitas.

Esperamos que las ideas desarrolladas más arriba sirvan de motivación para introducir el resultado siguiente que caracteriza el hecho de un morfismo tener fibras conexas:

Factorización de Stein. Todo morfismo sobreyectivo $\phi : X \to Y$ entre variedades proyectivas admite una factorización $\phi = g \circ \phi'$, donde $\phi' : X \to Y'$ tiene fibras conexas y $g : Y' \to Y$ es finito ([Ha, Cor. 11.5] o [Ii, Thm. 2.26]).

Proposición 2.17 (Ausencia de puntos base)**.** *Sea D un divisor nef que no es amplio y tal que $D - \epsilon K_X$ es amplio para algún $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$. Entonces mD es libre si $m >> 0$; en otras palabras, el sistema lineal completo $|mD|$ no tiene punto base.*

Demostración. Dividimos la prueba en tres etapas, de acuerdo a los siguientes tres casos:

Caso $D^2 > 0$. Por el criterio de Nakai-Moishezon, existe una curva irreducible L tal que $D \cdot L = 0$; en particular $\mathrm{Base}(mD) \cap \mathrm{Sop}(L) = \emptyset$ para todo $m > 0$. Como además $D - \epsilon K_X$ es amplio, $K_X \cdot L < 0$. Por otro lado, una aplicación del TIH implica $L^2 < 0$ (ejercicio 2.4b)).

De la formula de adjunción concluimos que L tiene género aritmético nulo; en particular, L es no singular, pues en caso contrario su género geométrico sería $< p_a(L)$. Por lo tanto L es una (-1)-curva. El criterio de contractibilidad de Castelnuovo nos dice que existe una superficie lisa X', un punto $p \in X'$ y un morfismo $\sigma : X \to X'$ tal que σ es la explosión de X' en p con $\sigma^{-1}(p) = L$.

Por la Proposición 2.2 existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que nD es efectivo. Substituyendo D por nD obtenemos $\mathrm{Sop}(D) \cap L = \emptyset$; en particular, los puntos base de $|D|$ están fuera de L. Por lo tanto, si $D' := \sigma_*(D)$, tenemos $D = \sigma^*(D')$ y D' es un divisor nef tal que $(D')^2 > 0$ y $D' - \epsilon K_X$ es amplio para algún $\epsilon > 0$.

Si D' no es amplio, repetimos el procedimiento precedente. Como $\rho(X') = \rho(X) - 1$, después de, si fuera necesario, aplicar ese procedimiento un número finito de veces, terminaremos con un divisor amplio; entonces el resultado vale para D' y por lo tanto vale para D.

Caso $D^2 = 0$ y $D \not\equiv 0$. Existe curva irreducible C tal que $D \cdot C > 0$. Como D es nef, el TIH aplicado al divisor amplio $D - \epsilon K_X$ proporciona

$$(D - \epsilon K_X) \cdot D > 0;$$

luego $K_X \cdot D < 0$. Por el criterio de amplitud de Kleiman el divisor

$$nD - K_X = \frac{1}{\epsilon}(D - \epsilon K_X) + \frac{n\epsilon - 1}{\epsilon} D$$

es amplio para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n\epsilon - 1 > 0$. El Teorema de RR implica

$$\chi(\mathcal{O}_X(nD)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{n}{2}(nD - K) \cdot D.$$

Además, como $nD - K_X$ es amplio, del TAK sigue $\mathrm{h}^i(nD) = 0$ si $i > 0$. Entonces $\mathrm{h}^0(nD)$ crece linealmente puesto que $D \cdot K_X < 0$.

Sea $n >> 0$. Entonces $|nD| = |M| + \Delta$, donde M denota la parte móvil del divisor y Δ la parte fija; en particular M es nef. Así

$$0 \leq M^2 \leq M \cdot (M + \Delta) = M \cdot (nD) \leq (M + \Delta) \cdot (nD) = D^2 = 0,$$

de donde sigue $M^2 = M \cdot \Delta = \Delta^2 = 0$.

La anulación de M^2 implica que el divisor M es libre; sea $\phi_M : X \to X'$ el morfismo sobreyectivo asociado; por construcción la imagen de ϕ_M tiene dimensión 1, pues las curvas del sistema lineal $|M|$ son contraídas en puntos y $M \not\equiv 0$. El Teorema de la *factorización de Stein* dice que ϕ_M se factoriza como $X \to V \to X'$ donde $\phi : X \to V$ tiene fibras conexas y $\psi : V \to X'$ es finita.

Si $M \cdot \Delta = 0$, entonces Δ esta contenido en una unión finita de fibras de ϕ. Por el Lema de Zariski (ejercicio 2.16) $\Delta^2 = 0$ implica que existem $p_1, \ldots, p_r \in V$ tales que

$$\Delta \equiv \phi^*(\sum_i a_i p_i), a_i \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

Por lo tanto, si H es una sección hiperplana en X' el sistema lineal

$$|\ell nD)| = |\ell \phi^*(\psi^*(H) + \sum_i a_i p_i)|$$

es libre para ℓ suficientemente divisible, ya que $\psi^*(H) + \sum_i a_i p_i$ es amplio en V.

Caso $D^2 = 0$ y $D \equiv 0$. Por lo hecho en el caso precedente, basta con probar $\mathrm{h}^0(nD) \neq 0$ para $n >> 0$.

Como $nD - K_X \equiv -K \equiv (1/\epsilon)(D - \epsilon K_X)$ es amplio, el TAK implica $\mathrm{h}^0(nD) = \chi(\mathcal{O}_X(nD))$ y $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$. El resultado sigue de RR.

□

Corolario 2.18 (Acotación de denominadores). *Supongamos que K_X no es nef. Si A es amplio, $t_0(A) = p/q \in \mathbb{Q}$ con $1 \leq q \leq 3$.*

Demostración. Escribimos $t_0 = t_0(A)$, como antes y $K = K_X$. El divisor $D := A + t_0 K$ es nef, no es amplio y $D - \epsilon K$ es amplio si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño (ejercicio 2.13). Consideramos los mismos tres casos de la demostración de la proposición.

Caso $D^2 > 0$. Si L es la (-1)-curva tal que $D \cdot L = 0$, tenemos $t_0 = A \cdot L$.

Caso $D^2 = 0$ y $D \not\equiv 0$. Sea $\phi : X \to V$ la factorización de Stein de $|nD|, n >> 0$. Denotemos F una fibra genérica de ϕ; entonces $D \cdot F = 0$. Por la fórmula de adjunción

$$\begin{aligned} 2p_a(F) - 2 &= (K + F) \cdot F \\ &= K \cdot F \\ &\geq -2, \end{aligned}$$

puesto que $p_a(F) = \mathrm{h}^1(\mathcal{O}_F) \geq 0$. Por lo tanto $-K \cdot F \leq 2$. Además, $D \cdot F = 0$ implica

$$t_0 = -\frac{A \cdot F}{K \cdot F}.$$

Caso $D^2 = 0$ y $D \equiv 0$. En este caso $-K$ es amplio y, en particular, el TAK implica

$$\mathrm{h}^i(K - K) = \mathrm{h}^i(\mathcal{O}_X) = 0, \forall\, i > 0,$$

luego $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$.

Dado que $A + t_0 K \equiv 0$, si $t_0 = p/q$ con $(p, q) = 1$, obtenemos que q divide K en $N^1(X)$.

Supongamos ahora que $-K = dH$ con H amplio (podríamos terminar la prueba por aquí: ver nota 2.20 más abajo) y consideremos la aplicación racional $\phi = \phi_{|H|} : X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^{\mathrm{h}^0(H)-1}$, siendo Y la adherencia de $\mathrm{Im}(\phi)$.

Ejercicio 2.19. Si $\mathrm{h}^0(H) \geq 4$, entonces $\dim Y = 2$ (sugerencia: si $m \in \mathbb{N}$ es tal que mH es muy amplio, entonces $\phi_{|mH|} : X \to \mathbb{P}^{\mathrm{h}^0(mH)-1}$ es una inmersión; luego Y es proyección de la superficie no singular $X' := \phi_{|mH|}(X)$ desde un centro de dimensión $\mathrm{h}^0(mH) - \mathrm{h}^0(H) - 1$ que corta X' en un número finito de puntos).

Supongamos que $\mathrm{h}^0(H) \geq 4$. Si $W \subset \mathbb{P}^{\mathrm{h}^0(H)-1}$ es un subespacio proyectivo genérico de codimensión 2, por el ejercicio de arriba $W \cap Y \neq \emptyset$ y $\phi^{-1}(W)$ está contenido en la intersección de dos elementos genéricos de $|H|$, por lo tanto

$$0 < \#\phi^{-1}(W) \leq H^2 < \infty.$$

Utilizando la cota inferior para el grado de una variedad proyectiva no degenerada (ver por ejemplo [Hr, Cor. 18.12]), obtenemos

$$\begin{aligned} H^2 &\geq \deg(Y) \\ &\geq \mathrm{h}^0(H) - 1 - (\dim(Y) - 1) \\ &\geq \mathrm{h}^0(H) - \dim(Y). \end{aligned}$$

Así $\mathrm{h}^0(H) \leq H^2 + 2$; además esta condición es automáticamente válida cuando $\mathrm{h}^0(H) < 4$.

Por otro lado, RR y TAK implican

$$\mathrm{h}^0(H) = 1 + \frac{d+1}{2} H^2.$$

Deducimos

$$(d - 1)H^2 \leq 2,$$

luego $d \leq 3$, lo que termina la demostración.

□

Nota 2.20. Que $-K_X$ sea amplio equivale a que X sea isomorfa a una superficie de del Pezzo (ver observación 0.1). De la descripción de tales superficies sigue fácilmente que las únicas para las cuales $-K_X = dH$ es divisible son $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, siendo $d = 3$ en el primer caso y $d = 2$ en el segundo.

2.3. Los teoremas del cono y de la contracción. Las caras de dimensión uno de un cono convexo en $\mathbb{R}^n$ se llaman los rayos extremales del cono; todo cono es suma de sus rayos extremales. En el caso del cono cerrado de curvas $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ de una variedad X, un rayo R se dice que es K_X-negativo, si para todo $z \in R - \{0\}$ se tiene $K_X \cdot z < 0$.

Antes de enunciar y demostrar el teorema del cono, introducimos dos ingredientes necesarios para ese fin. Sean A un divisor amplio y M un divisor nef; entonces $\nu M + A$

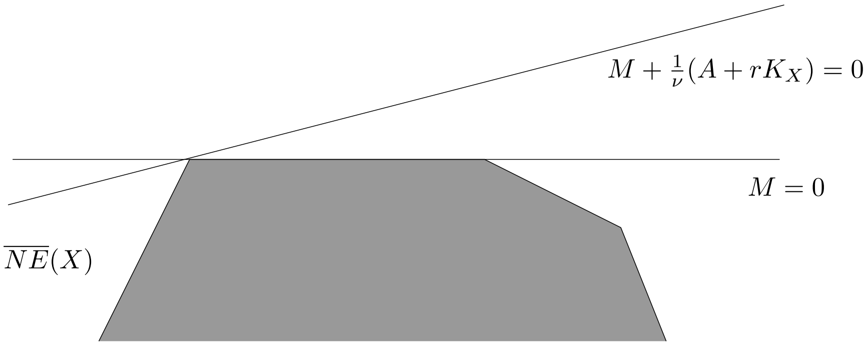

FIGURA 4. Perturbando M por una parte pequeña de un divisor amplio

es amplio para todo $\nu \geq 0$. Definimos

$$r_M(\nu, A) := t_0(\nu M + A), \nu \geq 0$$

o sea, el límite nef del divisor amplio $\nu M + A$. Como M es nef, si $\nu_1 < \nu_2$, entonces $r_M(\nu_1, A) \leq r_M(\nu_2, A)$, o sea r_M no decrece como función de ν.

Para $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0} \cap M^\perp$ fijo,

$$r_M(\nu, A) \leq -\frac{A \cdot z}{K_X \cdot z},$$

esto es, $r_M(\nu, A)$ queda acotado superiormente cuando un tal z existe; dado que los denominadores de $r_M(\nu, A)$ están acotados concluimos lo siguiente:

Afirmación 1. Si $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0} \cap M^\perp \neq \emptyset$, existen $r_M(A)$ y ν_A tales que

$$r_M(\nu, A) = r_M(A), \forall\ \nu \geq \nu_A.$$

Un *rayo extremal* de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ es una cara de dimensión 1 de este cono, esto es, una semirecta $R = \mathbb{R}_{\geq 0} v$ generada por un elemento no nulo $v \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Un rayo extremal $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ se dice que es *K_X-negativo* si $K_X \cdot z < 0$ para todo $z \in R - \{0\}$.

Teorema 2.21 (Teorema del Cono). *Sea X una superficie proyectiva no singular; denotemos $K = K_X$. Entonces*

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K \geq 0} + \sum_{\ell \in \mathcal{R}} R_\ell,$$

donde $\mathcal{R}$ es la familia de rayos extremales en $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ que son K-negativos. Además, el conjunto $\mathcal{R}$ es discreto en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0}$.

Demostración. Si K es nef entonces $\mathcal{R} = \emptyset$ y no hay nada para demostrar. Supongamos entonces que existe $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$ tal que $K \cdot z < 0$; en particular $K \not\equiv 0$ y podemos incluir la clase de este divisor en una base de $N^1(X)_\mathbb{Q}$.

Fijemos divisores amplios $A_1, \ldots, A_{\rho-1}$ de forma que

$$K, A_1, \ldots, A_{\rho-1}$$

induzcan una base de $N^1(X)_\mathbb{Q}$.

Afirmación 2. Si M es un divisor nef tal que $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0} \cap M^\perp \neq \emptyset$, existe una rayo extremal K-negativo R tal que $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap M^\perp$.

En efecto, denotemos $\nu_i = \nu_{A_i}$ y $r_i = r_M(A_i)$ donde $i = 1, \ldots, \rho - 1$. Elegimos $\nu_0 \geq \nu_i + 1\ \forall\ i$, tal que los divisores

(2.1) $$D_1 := \nu_o M + A_1 + r_1 K, \ldots, D_{\rho-1} := \nu_o M + A_{\rho-1} + r_{\rho-1} K,$$

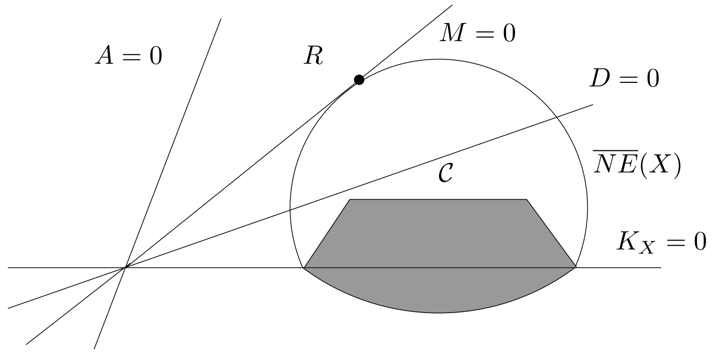

FIGURA 5. Comparando $\mathcal{C}$ con $\overline{\mathrm{NE}}(X)$

que son numéricamente efectivos por la afirmación 1, sean además linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Observemos que si $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$,

$$D_i \cdot z = [(\nu_0 - \nu_i)M + \nu_i M + A_i + r_i K] \cdot z = 0 \implies M \cdot z = 0;$$

o sea,

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap D_i^\perp \subset \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap M^\perp, \forall\, i.$$

Ejercicio 2.22. Si M es como en la afirmación 2, probar que existe i tal que

$$\emptyset \neq \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0} \cap D_i^\perp \subsetneq \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap M^\perp$$

(sugerencia: D_i es nef pero no amplio; además $\nu_0 M + A$ es amplio).

La afirmación 2 sigue entonces por inducción en la dimensión de la cara $\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap M^\perp$, gracias al ejercicio 2.22.

Ahora demostremos que el conjunto de rayos extremales es discreto en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0}$. En efecto, sea $R \in \mathcal{R}$. Existe un divisor nef L tal que $R = \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap L^\perp$, por definición de cara de un cono convexo. Tomando $M = L$ en lo que hicimos anteriormente, obtenemos

$$0 \neq \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap (\nu_0 M + A_i + r_i K)^\perp = \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap M^\perp = R, \forall\, i,$$

puesto que todo divisor en (2.1) es nef pero no amplio.

Tenemos un isomorfismo lineal $\varphi : N_1(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^\rho$,

$$z \mapsto (K \cdot z, A_1 \cdot z, \ldots, A_{\rho-1} \cdot z).$$

La intersección de R con el hiperplano $K = -1$ en $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ corresponde por ese isomorfismo al punto

$$(-1, r_1, \ldots, r_{\rho-1}).$$

Como los denominadores de los r_i's son ≤ 3, deducimos

$$6\varphi(\{K = -1\} \cap R) \subset \mathbb{Z}^\rho$$

de donde concluimos lo que queríamos; de esta parte de la prueba sigue el ejercicio siguiente:

Ejercicio 2.23. El cono $\mathcal{C} := \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K\geq 0} + \sum_{\ell \in \mathcal{R}} R_\ell$ es un cono convexo cerrado.

Para terminar, supongamos, por absurdo, que $\mathcal{C} \subsetneq \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Entonces existe un divisor D tal que $\mathcal{C} - \{0\} \subset \{D > 0\}$ y $D \cdot z < 0$ para un $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$ (ver figura 5).

Ejercicio 2.24. Existe $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $A = m(D - aK)$ es entero y amplio para m suficientemente divisible en $\mathbb{N}$ (sugerencia: fijar una norma en $N_1(X) = \mathbb{R}^\rho$; sea $B(0;1)$ la bola de centro 0 y radio 1. En el compacto $\{z \in B(0;1) : D \cdot z \leq 0\}$ el divisor K es negativo).

Por el lema de racionalidad, existe un divisor nef $M := \ell(A + rK)$ para ciertos $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\ell \in \mathbb{N}$, tales que

$$\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0} \cap M^\perp \neq \{0\}, \mathcal{C} \cap M^\perp = \{0\},$$

lo que contradice la afirmación 1 y termina la demostración.

□

Observación 2.25. Geométricamente, el teorema del cono significa que la parte de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ que yace en el abierto de $N_1(X)_\mathbb{R}$ definido por la condición $K_X \cdot z < 0$ es poliedral. Puede ocurrir sin embargo que el conjunto $\mathcal{R}$ se acumule en puntos del conjunto cerrado $\{z \in N_1(X)_\mathbb{R}; K_X \cdot z = 0\}$: es lo que pasa en el caso en que X es la explosión de $\mathbb{P}^2$ en nueve puntos que están en posición general (ver [De, Chap. 6, §6.6]).

Como sabemos (ver capítulo 1, §3), si $\phi : X \to Y$ es un morfismo con fibras conexas, el cono $\mathrm{NE}(\phi) \subset N_1(X)$ define una cara del cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. El Teorema de la contracción afirma que la recíproca de esta afirmación también es verdadera si la cara en cuestión yace en la parte K_X-negativa del cono. Demostraremos esta afirmación en el caso en que una tal cara es un rayo extremal, lo que constituye el caso más importante.

Teorema 2.26 (Teorema de la Contracción)**.** *Para cada rayo extremal R en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K<0}$ existe un morfismo sobreyectivo $\phi = cont_R : X \to Y$ con fibras conexas, Y una variedad (proyectiva) normal, tal que si $C \subset X$ es una curva irreducible, entonces ϕ contrae C si y solamente si $[C] \in R$.*

Demostración. Para cada rayo extremal R existe un divisor nef L tal que

$$R = \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap L^\perp.$$

Entonces $A := L - rK_X$ es amplio para algún $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ suficientemente pequeño, por el Criterio de amplitud de Kleiman. Por lo tanto $L = A + rK_X$ tiene la propiedad que si m es suficientemente (grande y) divisible, el divisor mL es entero y el sistema lineal $|mL|$ es libre de puntos base por la proposición 2.17. Denotemos $\phi : X \to Y$ la factorización de Stein del morfismo (sobreyectivo) $\phi_{|mL|} : X \to Y_0$ asociado a $|mL|$; entonces $Y \to Y_0$ s un morfismo finito.

Para probar la normalidad de Y, consideremos un abierto afín no vacío $V \subset Y$ y demostremos que V es normal. Si $\mathbb{C}[V]$ es el anillo de funciones regulares de V, entonces $A := \phi^*(\mathbb{C}[V])$ es subanillo del anillo $B := \mathbb{C}[\phi^{-1}(V)]$ de las funciones racionales en $\mathbb{C}(X)$ que son regulares en todo punto de $\phi^{-1}(V)$. Tenemos

$$A \subset B \subset \mathbb{C}(X).$$

Supongamos que sabemos demostrar que $\phi^{-1}(V)$ es un abierto afín (lo que es parte de los ingredientes en la demostración del teorema de factorización de Stein). Entonces este conjunto es una subvariedad (abierta) de X y por lo tanto es normal, ya que X lo es; luego B es integralmente cerrado en $\mathbb{C}(X)$. Por otro lado, un razonamiento análogo al que desarrollamos a continuación del ejercicio 2.16 muestra que el hecho de ϕ tener fibras conexas implica que A es integralmente cerrado en B. Deducimos entonces que A es integralmente cerrado en $\mathbb{C}(X)$, lo que implica V normal.

Ahora, si $[C] \in R$, entonces $L \cdot [C] = 0$. Por lo tanto, la restricción de $|mL|$ a C define un sistema lineal (sin puntos base) de dimensión (proyectiva) cero, o sea, $\phi_{|mL|}(C)$ es un punto y entonces C está contenida en una fibra de $\phi_{|mL|}$, luego en una fibra de ϕ.

Recíprocamente, supongamos que $\phi(C) = \{p\}$, con $p \in Y$. Luego $\phi_{|mL|}(C)$ es un punto, por lo tanto $mL \cdot [C] = 0$, luego $[C] \in R$.

□

Observación 2.27. Sigue del teorema de la contracción que $\mathrm{NE}(cont_R) = R$. Esto, conjuntamente con el hecho de poseer fibras conexas implica implica que $cont_R$ es única ([De, Prop. 1.14]).

Analizando los detalles de la prueba de la proposición 2.17 se concluye también que existen, *grosso modo*, dos tipos de morfismo $cont_R$, en acuerdo con $\dim X = \dim Y$ o $\dim X > \dim Y$. En el primer caso $cont_R$ es la explosión de un punto de Y y en el segundo $cont_R$ puede ser una fibración sobre una curva lisa o el mismísimo morfismo de estructura $X \to Y = \{pt\}$ (que también es considerado una fibración), como veremos en los ejemplos 2.32.

Definición 2.28. El morfismo $cont_R : X \to Y$ es la contracción del rayo extremal K_X-negativo R. Decimos que la contracción es divisorial si $\dim X = \dim Y$ y que es un espacio fibrado de Mori (o fibración de Mori) si $\dim X > \dim Y$

Antes de proporcionar ejemplos de conos cerrados de curvas, damos dos resultados que brindan alguna información adicional sobre el cono cerrado de curvas.

Lema 2.29. *Sea A un divisor amplio en X. El conjunto $Q := \{z \in N_1(X); z^2 > 0\}$ tiene dos componentes conexas*

$$Q^+ := \{z \in Q; A \cdot z > 0\} \quad y \quad Q^- := \{z \in Q; A \cdot z < 0\}.$$

Además, $Q^+ \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$

Demostración. Por el teorema del índice de Hodge, podemos elegir una base de $N_1(X)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^\rho$ de forma que $[A] = (\sqrt{A \cdot A}, 0, \ldots, 0)$ y que la forma de intersección se escriba

$$x_1^2 - \sum_{i=2}^{\rho} x_i^2.$$

Entonces

$$Q^+ = \{x_1 > \left(\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\}, Q^- = \{x_1 < \left(\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\}$$

Si $[D] \in Q$, la proposición 2.2 implica que nD o $-nD$ es efectivo si $n >> 0$. Como A intercepta positivamente toda curva efectiva, entonces los elementos de Q efectivos son precisamente los de Q^+. Como $m[D] = [mD] \in Q^+$, $m \in \mathbb{Z}$, implica $[D] \in Q^+$, concluimos $Q^+ \subset \mathrm{NE}(X) - \{0\}$ de donde sigue el resultado.

□

Lema 2.30. *Para una curva irreducible $C \subset X$ valen las siguientes afirmaciones:*

a) *Si $C^2 \leq 0$, entonces $[C]$ está en el borde de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.*
b) *Si $C^2 < 0$, entonces $[C]$ genera un rayo extremal (no necesariamente K_X-negativo).*

Demostración. Para probar *b*) observemos que $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathbb{R}_{\geq 0}[C] + \overline{\mathrm{NE}}(X)_{C\geq 0}$. Si $C^2 < 0$, entonces $[C] \notin \overline{\mathrm{NE}}(X)_{C\geq 0}$, de donde deducimos que $[C]$ genera un rayo extremal; en particular $[C]$ está en la frontera de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Si $C^2 = 0$, el funcional lineal de $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ que consiste en multiplicar por C es no negativo en $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ y vale 0 en $[C]$, entonces$[C]$ está en la frontera de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, de donde deducimos a).

□

Definición 2.31. Una superficie proyectiva no singular es un modelo minimal si K_X es nef.

Ejemplos 2.32.

a) (Ver 3) Si $\phi_n : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ es la fibración asociada a la superficie de Hirzebruch-Nagata $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$, entonces $N_1(\mathbb{F}_n) = \mathbb{R}[C_n] \oplus \mathbb{R}[F]$, donde C_n es la sección especial, $C_n^2 = -n$, y F es una fibra. Se sabe que $K_{\mathbb{F}_n} \sim -2C_n - (n+2)F$ de donde se constata que ϕ_n es la contracción extremal del rayo ($K_{\mathbb{F}_n}$-negativo) R generado por $[F]$. Además $F \cdot C_n = 1$ implica que $C_n \notin [F]$, de donde sigue que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ no es un cono de dimensión 1 (o sea, una semi-recta).

Como todo cono convexo (cerrado) en $N_1(X)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, que no es de dimensión 1, es generado por sus dos rayos extremales, entonces $\overline{\mathrm{NE}}(\mathbb{F}_n) = \langle [F], a[C_n] + b[F] \rangle$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, sea $C \subset \mathbb{F}_n$ una curva irreducible; $C \equiv aC_n + bF$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces $a = C \cdot F \geq 0$ y $-an + b = C \cdot C_n \geq 0$; en otras palabras, toda curva irreducible es numéricamente equivalente a un 1-ciclo de la forma $aC_n + bF$ con $a \geq 0$ y $b \geq an$. Deducimos

$$\mathrm{NE}(\mathbb{F}_n) = \overline{\mathrm{NE}}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{R}_{\geq 0}[F] + \mathbb{R}_{\geq 0}[C_n]$$

b) Consideremos la superficie $X = \mathbb{P}^2$. Entonces $K_{\mathbb{P}^2} \sim -3L$, donde $L \subset \mathbb{P}^2$ es una recta. Luego $N_1(\mathbb{P}^2)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[L]$ y $\mathrm{NE}(\mathbb{P}^2) = \overline{\mathrm{NE}}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{R}_{\geq 0}[L]$. En este caso $\mathbb{P}^2 \to pt$ es la única contracción de rayo extremal $K_{\mathbb{P}^2}$-negativo.

c) Sea $X \subset \mathbb{P}^3$ una superficie cúbica no singular. Como se sabe, X es explosión de $\mathbb{P}^2$ en seis puntos $p_1, \ldots, p_6$ que están en posición general; más aun, si $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ es la explosión de $p_1, \ldots, p_6$, la aplicación birracional $\sigma^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$ viene definida por el sistema lineal de las curvas cúbicas (planas) que pasan por estos seis puntos. Si $E_i = \sigma^{-1}(p_i), i = 1, \ldots, 6$, la fórmula de ramificación implica $K_X = \sigma^*(K_{\mathbb{P}^2}) + \sum_i E_i$.

Ejercicio 2.33. Probar que toda recta de $\mathbb{P}^3$ que está contenida en X es una (-1)-curva. Deducir que X contiene exactamente 27 rectas, entre las cuales se encuentran $E_1, \ldots, E_6$.

Del criterio de amplitud de Nakai-Moishezon sigue que $-K_X$ es un divisor amplio y de esto, que $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ tiene una base dada por las clases de los divisores $E_1, \ldots, E_6$ y $-K_X$.

Utilizando el ejercicio 2.33 y un poco de trabajo se demuestra que si L_i, $i = 1, \ldots, 27$, designan las 27 rectas de X mencionadas en ese ejercicio, entonces

$$\mathrm{NE}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X) = \sum_{i=1}^{27} \mathbb{R}_{\geq 0}[L_i].$$

d) Sea $X = C \times C$ donde C es una curva elíptica. En este caso $K_X \sim 0$, entonces no hay rayos extremales K_X-negativos y X es un modelo minimal. Más aun, como X tiene una estructura de grupo algebraico (i.e., es una variedad abeliana), entonces $z^2 \geq 0$ para todo $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Por lo tanto $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{Q^+}$, donde Q^+ es como en el lema 2.29. En este caso $\rho(X) = \dim N_1(X)_{\mathbb{R}} \geq 3$, ya que entre los tres 1-ciclos
$$C \times \{pt.\}, \{pt.\} \times C, \{(t,t); t \in C\}$$
no hay dos que sean numéricamente equivalentes; entonces el cono cerrado de curvas es "redondo", donde todo punto no nulo de la frontera define un rayo extremal (K_X-nulo).

Nota 2.34. Existen ejemplos de superficies donde $\mathrm{NE}(X)$ no es cerrado y entonces $\mathrm{NE}(X) \neq \overline{\mathrm{NE}}(X)$ (ver [De, Exa. 1.35]).

2.4. Programa de Mori en dimensión 2. El programa del modelo minimal consiste en el siguiente algoritmo: partimos de una superficie lisa X. Nos preguntamos si K_X es nef. Caso afirmativo, tenemos um modelo minimal y el programa terminó. Caso negativo, por el teorema del cono existe un rayo extremal R que es K_X-negativo. El teorema de la contracción nos da un morfismo $\phi = cont_R : X \to Y$, con Y no singular. Si $\dim X > \dim Y$, el morfismo ϕ es un espacio fibrado de Mori y consideramos el programa terminado: estas fibraciones se pueden clasificar; si $\dim X = \dim Y$, entonces ϕ es la explosión de un punto de Y, entonces recomenzamos el programa con Y en lugar de X: como el número de Picard de Y es $\rho(X) - 1$, esta etapa no se puede repetir más que un número finito de veces.

La conclusión es que siempre, a la salida del programa, o encontramos un modelo minimal, o encontramos un espacio fibrado de Mori.

Observamos que los modelos minimales no tienen ninguna (-1)-curvas, razón por la cual son superficies mínimas en el sentido clásico (definición 1.23). No obstante, hay superficies mínimas cuyo divisor canónico no es nef, como es el caso de las superficies de Hirzebruch-Nagata del ejemplo 2.32a)

El programa del Modelo minimal para superficies puede resumirse en el diagrama de la página siguiente.

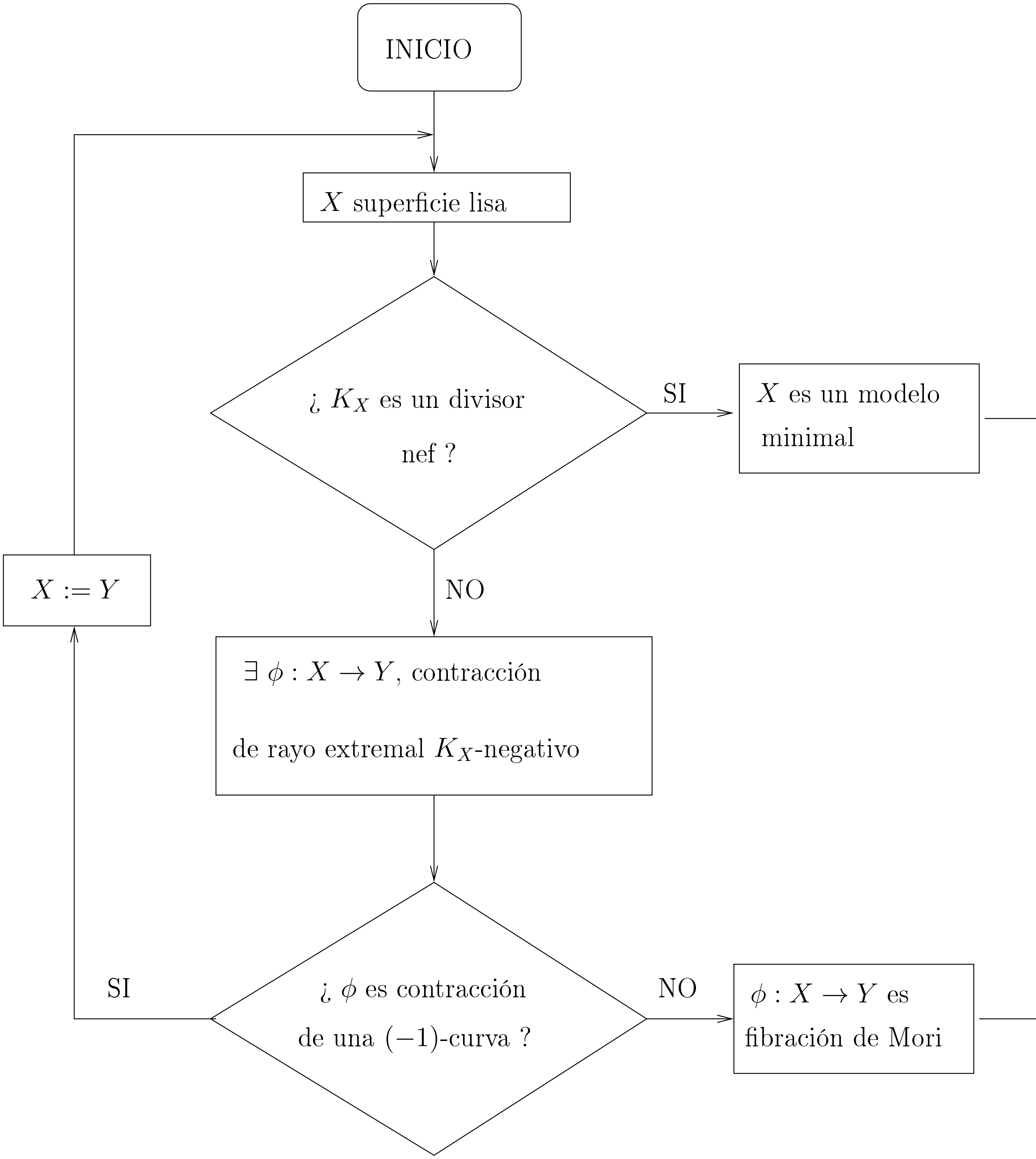

FIGURA 6. Esquema del Programa de Mori para superficies

3. Dimensión superior

Los teoremas del cono y de la existencia de contracción pueden ser generalizados en el caso de variedades proyectivas no singulares de dimensión arbitraria (y mismo para variedades con cierto tipo de singularidades). Las demostraciones correspondientes, aunque siguen las mismas ideas, precisan de tecnicismos bastante sofisticados y no entraremos en detalles; en [De] el lector podrá encontrar las demostraciones con una exposición muy clara y detallada para el caso no singular. En [KoMo] y [Ma] se encuentra el abordaje general, siendo la primera referencia la más técnica y la segunda, más reciente, que hace un esfuerzo considerable para presentar un texto elemental y auto-contenido.

Como vimos, en el caso de superficies hay dos tipos de contracciones de rayos extremales K-negativos: las birracionales que contraen un divisor, que son (inversas de) explosiones de puntos y las que contraen toda la superficie, sea en una curva, sea en un punto; del segundo tipo encontramos fibraciones con fibras racionales (de hecho isomorfas a $\mathbb{P}^1$) y el propio morfismo de estructura, que por abuso también consideraremos como una fibración. No obstante, en dimensión superior, aparece un nuevo tipo de contracción y es precisamente en este punto que radica una de las principales dificultades de la teoría. En efecto, existen contracciones de rayos extremales $\phi : X \to Y$ que son morfismos birracionales (no isomorfismos) cuyo conjunto excepcional (i.e. donde ϕ deja de ser un isomorfismo local) tiene codimensión > 1; esto implica que Y no puede ser una variedad lisa, mismo que X lo sea: en efecto, si Y fuera lisa, $K_X = \phi^* K_Y$, ya que no hay divisor de ramificación en este caso. Si $R \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$ es el rayo extremal asociado a la contracción ϕ y $z \in R$, la fórmula de proyección implica

$$0 < K_X \cdot z = K_Y \cdot \phi(z) = 0. \tag{3.1}$$

De hecho, se puede probar que Y es normal, pero sus singularidades la hacen inmanejable en términos de teoría de intersección: el divisor (de Weil) canónico K_Y tiene la "mala" propiedad que ninguna de sus potencias positivas mK_Y es de Cartier, como se deduce fácilmente de la igualdad (3.1), que continuaría valiendo al substituir K_X por mK_X. En este punto, el proceso en la dirección de obtener un modelo minimal o una fibración, queda bloqueado. La solución encontrada por Mori, fue construir una variedad normal X^+ y un morfismo birracional $\phi^+ : X^+ \to Y$ cuyo conjunto excepcional también tiene codimensión > 1 y que corresponde a un rayo extremal $R^+ \in \overline{\mathrm{NE}}(X^+)$, ahora con $K_{X^+} \cdot z > 0$ para todo $z \in R^+ - \{0\}$. Esta propiedad de positividad del rayo extremal implica que las singularidades de X^+ quedan controladas y que la teoría de intersección para X^+ es manejable. La contracción ϕ se dice que es *pequeña* y ϕ^+ es el *flip* asociado a ϕ; también se llama flip a la aplicación birracional $\varphi = \phi^+ \circ \phi^{-1} : X \dashrightarrow X^+$ que tiene la siguiente propiedad: existen conjuntos cerrados $V \subset X, V^+ \subset X^+$ de codimensión > 1 tales que $\varphi : X \backslash V \to X^+ \backslash V^+$ es un isomorfismo. Los morfismos birracionales que poseen esta última propiedad son llamados, genéricamente, de *contracciones pequeñas*; los flips son entonces ejemplos de contracciones pequeñas.

En esta sección, no contentaremos con enunciar los teoremas del cono y de la contracción para variedades proyectivas no singulares de cualquier dimensión, explicar como funciona el programa de Mori y dar ejemplos de contracciones en el contexto de variedades lisas.

3.1. Teoremas del cono y de la contracción. Ahora vamos a enunciar, sin demostración, los teoremas más importantes de la teoría en el caso de dimensión superior, siempre en el contexto de variedades proyectivas no singulares. Seguiremos [De].

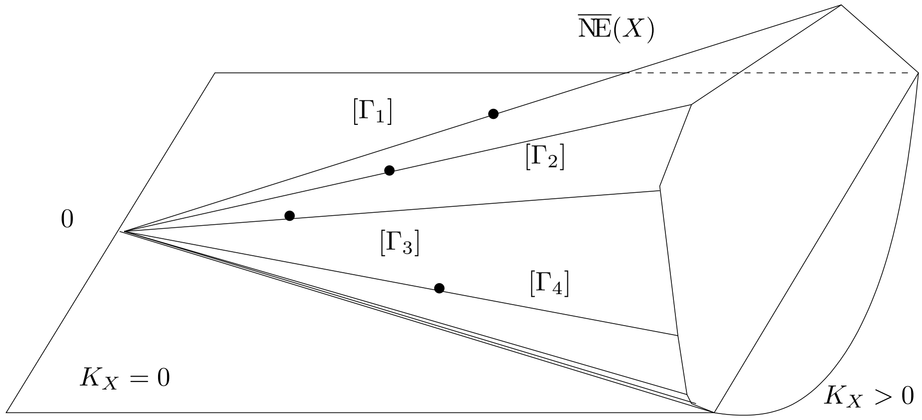

FIGURA 7. Cono cerrado de curvas

Teorema 3.1 (Teorema del Cono)**.** *Sea X una variedad proyectiva no singular. Existe una familia numerable de curvas racionales $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ en X tal que*

$$0 < -K_X \cdot \Gamma_i \leq 1 + \dim X$$

y

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_{i\in I} \mathbb{R}^+[\Gamma_i]$$

donde $\mathbb{R}^+[\Gamma_i]$ son todos los (distintos) rayos extremales de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ que encuentran $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$. El conjunto $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ es localmente discreto en ese semi-espacio.

Supongamos ahora que K_X no sea nef. Por el teorema del cono existe un rayo extremal R de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ tal que $K_X \cdot z < 0$ para todo $z \in R - \{0\}$. Por el criterio de amplitud de Kleiman existe un divisor nef L tal que

$$R = \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap L^{\perp}.$$

De la misma forma que lo hicimos en la sección 2, se demuestre que $L - rK_X$ es amplio si $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ es suficientemente pequeño.

Para poder contraer el rayo R mediante un morfismo con fibras conexas, siguiendo las ideas que desarrollamos en la sección 2, hay que demostrar primero que mL es libre si m es suficientemente grande. Si $\phi_{|mL|} : X \to Y$ es el morfismo definido por $|mL|$, la contracción requerida será el morfismo asociado a $\phi_{|mL|}$ vía la factorización de Stein, para algún $m >> 0$.

Teorema 3.2 (Teorema de la contracción)**.** *Sea X una variedad proyectiva no singular. Si R es un rayo extremal K_X-negativo de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, entonces, existe un morfismo sobreyectivo con fibras conexas $cont_R : X \to Y$, donde Y es normal y $\rho(Y) = \rho(X) - 1$, tal que $cont_R$ contrae una curva irreducible $C \subset X$, si y solamente si $[C] \in R$.*

Existen esencialmente tres tipos de contracción si $\dim X > 2$. Las contracciones divisoriales, las fibraciones de Mori (o contracción tipo fibradas) y lsd contracciones pequeñas (que aceptan flips) ([De, §6.12]). Cada tipo queda determinado en función de la dimensión del conjunto excepcional de ϕ, como lo dijimos antes. Como también dijimos, se puede demostrar que si $\dim X = 3$, con X no singular, entonces no existen contracciones pequeñas ([De, Prop. 6.10(c)]). Sin embargo, la noción de contracción pequeña en dimensión 3 continúa siendo relevante aún cuando comencemos con X no singular; veamos porqué:

3.2. Descripción del programa en dimensión superior. Sea X una variedad proyectiva no singular. Si K_X es nef , entonces X es un modelo minimal y el programa terminó antes de comenzar. Sino, el teorema del cono implica que existe un rayo extremal K_X-negativo R. Por el teorema de la contracción, existe $cont_R : X \to Y$ con fibras conexas tal que $\overline{\mathrm{NE}}(cont_R) = R$. Si $\dim X > 2$, la variedad Y puede ser singular aún cuando la contracción sea divisorial o tipo fibrada.

Si $cont_R$ es una fibración de Mori, el programa se considera terminado. Supongamos que esto no ocurra. Tenemos dos opciones:

a) $cont_R$ es divisorial. En este caso, uno demuestra que las singularidades que, eventualmente, puedan aparecer, son de un tipo muy especial. En efecto, primeramente se prueba que para todo divisor de Weil $D \in \mathrm{WDiv}(Y)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mD \in \mathrm{Div}(X)$ es de Cartier; decimos por esto que Y es *$\mathbb{Q}$-factorial.* Si $\sigma : Z \to Y$ es una resolución de las singularidades de Y y $r \in \mathbb{N}$ es tal que rK_Y es de Cartier, se ve sin mucha dificultad que tenemos una fórmula de ramificación "generalizada" que nos dice

$$rK_Z = \sigma^*(rK_Y) + \sum_{i=1}^{\ell} b_i E_i$$

donde $b_i \in \mathbb{Z}$ y E_i es componente irreducible del divisor de ramificación de σ, para todo $i = 1, \ldots, \ell$, o sea, divisores contraídos por σ; en términos de divisores de Weil (o clases de equivalencia numérica) tenemos

$$K_Z = \sigma^*(K_Y) + \sum_{i=1}^{\ell} a_i E_i,$$

donde $a_i = b_i/r$, $i = 1, \ldots, \ell$. Los números racionales $a_1, \ldots, a_\ell$ se llaman las *discrepancias* de Y y no dependen de la resolución de singularidades σ elegida, o sea, son invariantes del conjunto singular de Y. Se dice que Y tiene singularidades *terminales* si $a_i > 0$ para todo i; es importante resaltar que Y puede efectivamente ser singular ([De, §6.6, example 6.18])

Después de haber obtenido Y mediante la contracción de R, se demuestra que Y tiene singularidades terminales. Entonces nos preguntamos si K_Y es nef. Si la respuesta es sí, entonces Y es un modelo minimal de X y el programa está terminado. Si la respuesta es no, entonces nos gustaría recomenzar. Bueno, para esto hay que demostrar primero que los teoremas del cono y de la contracción son válidos para variedades proyectivas normales que son $\mathbb{Q}$-factoriales y cuyas singularidades son terminales, lo que es verdad (ver por ejemplo [Ma, Thm 7-2-1 y Thm. 8-1-3]).

b) Ahora supongamos que el morfismo $\phi^- := cont_R$ es una contracción pequeña; pongamos $X^- := X$. Como vimos al inicio de esta sección, en este caso Y no es $\mathbb{Q}$-factorial, razón por la cual no tenemos ninguna posibilidad de generalizar los teoremas del cono y de la contracción, ya que no tenemos mucho control de la teoría de intersección en relación a divisores que no son de Cartier. La idea de Mori fue la de construir el llamado *flip* de ϕ^-, esto es, un morfismo sobreyectivo con fibras conexas $\phi^+ : X^+ \to Y$ (único a menos de isomorfismos de Y) tal que X^+ es una variedad normal, proyectiva, $\mathbb{Q}$-factorial y con singularidades terminales, de forma que satisface las siguientes propiedades ([Mo88] y [Ma, Prop.9-1-2]):

i) ϕ^+ es una contracción pequeña, o sea, es birracional y $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Exc}(\phi^+), X^+) > 1$.

ii) toda curva contraída por ϕ^+ es K_{X^+}-positiva;

iii) existe una curva irreducible $C \subset X^+$ tal que $\mathrm{NE}(\phi^+) = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$; en particular $R^+ := \mathrm{NE}(\phi^+)$ es un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X^+)$.

Tenemos así una aplicación birracional $\phi^+ \circ (\phi^-)^{-1} : X^- \dashrightarrow X^+$ que induce un isomorfismo

$$X^-\backslash\mathrm{Exc}(\phi^-) \to X^+\backslash\mathrm{Exc}(\phi^+),$$

y que substituye, en cierto sentido, el rayo K_{X^-}-negativo $R = \mathrm{NE}(\phi^-)$ por otro que el rayo extremal $R^+ := \mathrm{NE}(\phi^+)$ que ahora es K_{X^+}-positivo; como ya dijimos esta aplicación también es llamada de flip. Entonces recomenzamos el programa con la variedad X^+.

Para demostrar que el programa de Mori termina, hay que probar que el procedimiento descripto no admite más que un número finito de flips, lo que fue demostrado por Mori en el caso de dimensión 3 y que ahora se conoce en toda dimensión.

3.3. Ejemplos de contracciones extremales. Una *contracción extremal* o contracción de Mori de X es un morfismo sobreyectivo $\phi : X \to Y$ tal que $\mathrm{NE}(\phi)$ es un rayo extremal $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ que es K_X-negativo, o sea, $K_X \cdot z < 0$ para todo $z \in R - \{0\}$.

El *conjunto excepcional* $\mathrm{Exc}(\phi)$ de una contracción extremal $\phi : X \to Y$ es el subconjunto de los puntos $x \in X$ tal que la aplicación (lineal sobre $\mathbb{C}$) diferencial $d_x\phi : T_xX \to T_{\phi(x)}Y$ de ϕ en x no es un isomorfismo; T_xX y $T_{\phi(x)}Y$ son los espacios tangentes de Zariski de X e Y en x e $\phi(x)$ respectivamente. Es un ejercicio demostrar que $\mathrm{Exc}(\phi)$ es un cerrado de X y que $\dim \phi(\mathrm{Exc}(\phi)) < \dim \mathrm{Exc}(\phi)$. Decimos que la contracción ϕ es una *fibración de Mori* o *espacio fibrado de Mori* si $\mathrm{Exc}(\phi) = X$. Si $\mathrm{codim}\,\mathrm{Exc}(\phi) = 1$ (i.e. $\mathrm{Exc}(\phi)$ es el soporte de un divisor), decimos que ϕ es *divisorial.* Finalmente, si $\mathrm{codim}\,\mathrm{Exc}(\phi) > 1$, decimos que ϕ es una *contracción pequeña.*

3.3.1. **Ejemplos de fibraciones de Mori.**

Fibrados proyectivos: caso general. Sea X una variedad proyectiva no singular, como en todo esta sección; denotemos $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ el haz estructural. Sea $\mathcal{E}$ un haz sobre X que es localmente libre de rango $r+1$, o sea, existe un cubrimiento por abiertos $X = \cup U_i$, tal que para todo índice i tenemos un isomorfismo $\varphi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \to \mathcal{O}^{r+1}|_{U_i}$.

En este parágrafo asumiremos que el lector posee alguna idea de la definición de esquema proyectivo definido a partir de haces de álgebras graduadas; en el caso que esto no sea así, esperamos que el desarrollo que haremos proporcione al menos una noción intuitiva del contexto en que estamos trabajando.

El *álgebra simétrica* $\mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ asociada a $\mathcal{E}$ es el haz de álgebras graduadas definido de la siguiente forma: si

$$\mathcal{T}_{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \oplus (\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \oplus (\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \oplus \cdots$$

es el *álgebra tensorial* de $\mathcal{E}$, consideramos el haz de ideales bilaterales $\mathcal{I}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ definido localmente por elementos de la forma $u \otimes v - v \otimes u$, con u, v secciones locales de $\mathcal{E}$. Entonces

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}{\mathcal{I}_{\mathcal{E}}}.$$

El álgebra simétrica $\mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ define un esquema proyectivo que se denota $\mathbb{P}(\mathcal{E})$: del isomorfismo canónico

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{O}^{r+1}|_{U_i}) \simeq \mathcal{O}_{U_i}[T_0, \ldots, T_r]$$

obtenemos isomorfismos $\mathbb{P}(\mathcal{O}^{r+1}|_{U_i}) \simeq U_i \times \mathbb{P}^r$; el esquema $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ puede entonces ser construido pegando los esquemas proyectivos $U_i \times \mathbb{P}^r$ vía los isomorfismos "de trivialización" $\mathrm{Sym}(\mathcal{E})|_{U_i} \simeq \mathrm{Sym}(\mathcal{O}^{r+1}|_{U_i})$ inducidos por los φ_i's.

Las proyecciones canónicas $U_i \times \mathbb{P}^r \to U_i$ inducen un morfismo sobreyectivo $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ tal que para todo $x \in X$ tenemos que $\pi^{-1}(x)$ es el espacio proyectivo asociado al anillo de polinomios $\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_x) \simeq \mathrm{Sym}(\mathcal{O}_x[T_0, \ldots, T_r]) = \{x\} \times \mathbb{P}^r$.

Por construcción, la variedad proyectiva $Z = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ es no singular de dimensión $r + \dim X$. Decimos que $\pi : Z \to X$ es un *fibrado proyectivo* sobre X.

Por otro lado, consideremos el cubrimiento estándar $\mathbb{P}^r = \cap_{j0}^r V_j$ donde $V_j = \{T_j \neq 0\}$. Para cada i definimos un divisor en $U_i \times \mathbb{P}^r$ vía la familia $\{(U_i \times V_j, T_j/T_i)\}_{0\leq j\leq r}$, donde la función racional T_i/T_j en V_j es considerada como función racional en $U_i \times V_j$. Estos divisores se pegan para definir un divisor en $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ cuyo haz asociado denotamos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$: claramente el divisor de Weil correspondiente, cuando restringido a la fibra $\pi^{-1}(x)$ de un punto $x \in U_i$, corresponde al "hiperplano" $\{x\} \times \{T_i = 0\}$ de $\{x\} \times \mathbb{P}^r$. Observemos que el producto exterior máximo del haz $\mathcal{E}$ determina un haz invertible $\det(\mathcal{E})$. Si ξ designa la clase de equivalencia numérica del divisor definido arriba y η la del divisor asociado al haz $\det(\mathcal{E})$, del ejercicio 1.12 deducimos

$$[K_Z] = (r+1)\xi + \pi^*([K_X] + \eta).$$

Ahora, si ℓ es la clase de una recta en una fibra de π, entonces $K_Z \cdot \ell = -(r+1)$, gracias a la fórmula de proyección. Además, una curva en Z es contraída por π en un punto $x \in X$ si y solamente si corresponde a una curva $\{x\} \times C \subset \{x\} \times \mathbb{P}^r$, luego, si y solamente si la curva es numéricamente equivalente a un múltiplo entero de ℓ. Entonces, la clase ℓ genera un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(Z)$ que es K_Z-negativo y cuya contracción asociada es π.

Superficies regladas. Si $\mathcal{E}$ es un haz localmente libre de rango 2 sobre una curva lisa proyectiva C, entonces toda fibra del morfismo $\pi : Z = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ y Z es una *superficie reglada.*

Si C es racional, entonces $C \simeq \mathbb{P}^1$ (como en el ejemplo 2.32a). Es un hecho conocido (que es un teorema de Grothendieck) que todo haz localmente libre sobre $\mathbb{P}^1$ se descompone como suma directa de haces localmente libres de rango 1. Por lo tanto $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2)$, para ciertos enteros a_1, a_2. Tensorizando por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ para un a adecuado, obtenemos $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) =: \mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, con $n \geq 0$. Dado que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}')$, concluimos que $Z \simeq \mathbb{F}_n$ para cierto $n \geq 0$, donde denotamos $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$: esta es la n-ésima *superficie de Hirzebruch-Nagata.*

Separando rectas por un punto. Aquí vamos a utilizar la noción de explosión de un punto en un espacio proyectivo arbitrario; en el próximo parágrafo incluimos la definición de este concepto así como la generalización del mismo.

Sean $p \in \mathbb{P}^{N+1}$ un punto y $H \subset \mathbb{P}^{N+1}$ un hiperplano tal que $p \notin H$. Designemos $\varphi_p : \mathbb{P}^{N+1} \dashrightarrow H = \mathbb{P}^N$ la proyección sobre H de centro p, que es una aplicación racional no definida en p. Si $\sigma : Z = \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^{N+1}) \to \mathbb{P}^{N+1}$ es la explosión de $\mathbb{P}^{N+1}$ en p, entonces $\pi := \varphi_p \circ \sigma$ es una aplicación bien definida en todo punto de Z, o sea, $\pi : Z \to \mathbb{P}^N$ es un morfismo. Por construcción, la fibra de π en un punto $q \in \mathbb{P}^N$ es la transformada estricta (inversa) en Z, vía σ, de la recta $pq \subset \mathbb{P}^N$; todas las fibras de π son entonces isomorfas a $\mathbb{P}^1$, lo que nos hace pensar que π es un fibrado proyectivo.

En efecto, interceptando las transformadas estrictas de rectas por p con el divisor excepcional $E = \sigma^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^N$, obtenemos una identificación de H con este divisor y $Z = \mathbb{P}(\mathcal{O}_E(-1) \oplus \mathcal{O}_E)$, siendo que $\mathcal{O}_E(-1) = \mathcal{O}_E(E)$, por definición de explosión.

3.3.2. **Ejemplos de contracciones divisoriales.** El prototipo de contracción extremal divisorial es la explosión de centro una subvariedad no singular. Veamos algunos casos simples.

Explosión de un punto. Si $x \in X$, la explosión $\mathrm{Bl}_x(X)$ de X en x se puede definir de manera elemental de la forma siguiente:

Si $n = \dim X$, elegimos un sistema de parámetros locales $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathbb{C}(X)$ de X en x, o sea, un conjunto de generadores del ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ del punto x. Existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $u_1, \ldots, u_n$ están bien definidas en U y para todo $x' \in U$ las funciones $u_i - u_i(x')$ definen parámetros locales en x' (ver ejercicio 1.8a)). Consideramos el morfismo $\varphi : U \to \mathbb{P}^{n-1}$ definido por $\varphi = (u_1 : \ldots : u_n)$. La explosión $\mathrm{Bl}_x(U)$ de U en x es la adherencia en $U \times \mathbb{P}^{n-1}$ del gráfico de φ; esta variedad (irreducible) viene junto con el morfismo birracional $\sigma_U : \mathrm{Bl}_x(U) \to U$ obtenido por restricción de la primera proyección del producto cartesiano $U \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Por definición $\mathrm{Bl}_x(U)$ es el conjunto de ceros de las funciones regulares en $U \times \mathbb{P}^{n-1}$ siguientes

$$u_i y_j - u_j y_i, i, j = 1, \ldots, n-1$$

siendo $y_1, \ldots, y_{n-1}$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^{n-1}$ (aunque no sea absolutamente trivial mostrar que ese conjunto de ceros está contenido en $\mathrm{Bl}_x(U)$). Luego $\sigma_U^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ es un divisor de Cartier, que es el llamando *divisor excepcional* E_U de σ_U: por ejemplo en el abierto $U \times \{y_1 = 1\}$, E_U está definido por la única ecuación $u_1 = 0$.

Esta construcción puede ser extendida a X de la forma que explicamos a continuación.

Podemos suponer $X \subset \mathbb{P}^N$ para algún N. Elegimos coordenadas homogéneas $x_0, \ldots, x_N$ en $\mathbb{P}^N$ de forma que $x = (1 : 0 : \cdots : 0)$; entonces, las funciones x_i/x_0 definen parámetros locales de $\mathbb{P}^N$ en x, como arriba, definidas en el abierto $x_0 \neq 0$.

Definimos la explosión $\mathrm{Bl}_x(\mathbb{P}^N)$ de $\mathbb{P}^n$ en x como la adherencia en $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ del gráfico de la proyección

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_N) \mapsto (x_1 : \cdots : x_N) = (x_1/x_0 : \cdots : x_N/x_0),$$

junto con el morfismo birracional $\sigma = \sigma_{\mathbb{P}^N} : \mathrm{Bl}_x(\mathbb{P}^N) \to \mathbb{P}^N$ que proviene de la primera proyección del producto cartesiano $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$. Sea $\widetilde{X}$ la transformada estricta de X en relación a σ, o sea, $\widetilde{X}$ es la adherencia del conjunto abierto $\sigma^{-1}(X - \{x\})$. Tenemos el morfismo $\widetilde{\sigma}_X : \widetilde{X} \to X$ obtenido por restricción de σ a $\widetilde{X}$.

Si $\widetilde{U}$ es la transformada estricta de U vía σ, es un ejercicio constatar que existe un isomorfismo $\rho : \mathrm{Bl}_x(U) \to \widetilde{U}$ tal que $\sigma_U = \widetilde{\sigma}_X \circ \rho$. Ahora el divisor excepcional es $E_X := \sigma_X^{-1}(x) = \sigma^{-1}(x) \cap \widetilde{X}$; por construcción $E_X \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, es la transformada estricta en relación a σ del espacio tangente (proyectivo, digamos) $\mathbb{T}_x X \subset \mathbb{P}^N$. Utilizando la definición de divisor canónico dada en el ejercicio 1.8, uno muestra sin mucha dificultad que $\sigma_X^* K_X + (n-1)E$ es un divisor canónico para $\widetilde{X}$; esto corresponde a la fórmula de proyección relativa al morfismo σ_X (fórmula 1.1 de §1.2).

Sea $Y \subset X$ una subvariedad irreducible proyectiva y lisa de codimensión c; denotemos $\mathcal{I}_Y$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_X$ que define Y como subvariedad. Dado que Y es lisa, en el entorno de cada uno de sus puntos, uno puede encontrar parámetros locales $u_1, \ldots, u_n$ de X en ese punto de forma $u_1, \ldots, u_c$ generen $\mathcal{I}_Y$ localmente y se puede hacer una definición de explosión local de X en Y, pero es difícil de globalizar la construcción, y las cosas se tornan artificiales, me parece. Lo que uno hace en estos casos es servirse de la definición general de explosión, en la cuál las propiedades cohomológicas y su comportamiento en relación a la teoría de intersección son bastante transparentes. Ésta es más o menos como sigue (no daremos muchos detalles):

Consideremos el haz de $\mathcal{O}_X$-álgebras graduadas $\oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{I}_Y^r$. La explosión de X en Y es la variedad (esquema) $\mathrm{Bl}_Y(X) := \mathrm{Proj}(\oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{I}_Y^r)$, que viene junto con el morfismo $\sigma : \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$ inducido por el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_X \to \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{I}_Y^r$.

En este contexto general, si $E = \sigma^{-1}(Y)$ es el divisor excepcional, podemos demostrar que E es la subvariedad (subesquema) de codimensión 1 definida por $\mathcal{I}_Y$ en $\mathrm{Bl}_Y(X)$, o sea, definida por el ideal localmente principal asociado a la extensión (en el sentido del álgebra conmutativa) del este ideal en relación al homomorfismo canónico $\mathcal{O}_X \to \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{I}_Y^r$: en efecto, sea U un abierto afín de X tal que $a_1, \dots, a_c \in \mathcal{O}_X(U)$ generan $\mathcal{I}_{Y\cap U}$; si t es una indeterminada tenemos

$$\mathcal{B}_{Y\cap U}(U) := \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{I}_{Y\cap U}^r \simeq \mathcal{O}_U[ta_1, \dots ta_c],$$

donde los coeficientes de términos de grado r en t de elementos en $\mathcal{O}_U[ta_1, \dots ta_c]$ corresponden a elementos de $\mathcal{I}_{Y\cap U}^r$; entonces $\mathrm{Bl}_{Y\cap U}(U) = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_U[ta_1, \dots ta_c])$ y la extensión de $\mathcal{I}_Y$ en $\mathcal{B}_{Y\cap U}(U)$ es el ideal generado por $a_1, \dots, a_c \in \mathcal{O}_U$ en esa álgebra. Ahora consideremos, por ejemplo, el abierto $\{ta_1 \neq 0\} \subset \sigma^{-1}(U)$ de esta explosión local; en este abierto, la funciones racionales $ta_j/ta_1 = a_j/a_1$, están bien definidas para todo $j = 2, \dots, c$, por lo tanto

$$ta_j = \frac{a_j}{a_1} ta_1.$$

Como $\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_U[ta_1, \dots ta_c])$ es unión de los abiertos $\{ta_i \neq 0\}$, concluimos que $\mathcal{I}_{Y\cap U}$ es localmente principal.

Observación 3.3. No utilizamos todavía que el conjunto de generadores tenga exactamente $\mathrm{codim}\,(Y, X)$ elementos, esto es, no estamos usando aun que Y sea una subvariedad lisa.

Que Y sea no singular, implica que $\mathrm{Bl}_Y(X)$ también lo es; en efecto, como σ induce un isomorfismo $\mathrm{Bl}_Y(X)\backslash E \simeq X\backslash Y$, basta con mostrar que los puntos E son no singulares, lo que se puede hacer localmente. Para mostrar esto, comencemos observando que el homomorfismo graduado (de grado 0) canónico

$$\mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_c] \to \mathcal{O}_U[ta_1, \dots, ta_c], t_i \mapsto a_i \;\forall\, i,$$

es sobreyectivo y entonces induce una inmersión cerrada $\sigma^{-1}(U) \subset U \times \mathbb{P}^c$; más precisamente, si $x_1, \dots, x_n$ son parámetros locales en un entorno en X de un punto $x \in Y$, de forma que $x_i = a_i$ si $i = 1, \dots, c$, entonces $\sigma^{-1}(U)$ queda definido en un entorno de $\sigma^{-1}(x)$ por las ecuaciones

$$x_i t_j = x_j t_i, i, j = 1, \dots, c. \tag{3.2}$$

Entonces, por ejemplo, en el abierto $t_1 \neq 0$, las funciones

$$x_1, \frac{t_2}{t_1}x_2, \dots, \frac{t_c}{t_1}x_1, x_{c+1}, \dots, x_n$$

definen parámetros locales en un entorno de $\sigma^{-1}(x) \cap \{t_1 \neq 0\}$.

Observemos que, por construcción de $Z := \mathrm{Bl}_Y(X)$ como un "esquema proyectivo" , el haz de ideales $\mathcal{I}_E$ de E es precisamente $\mathcal{O}_Z(1)$: en el abierto $\sigma^{-1}(U)$ de más arriba, $\mathcal{I}_E$ es localmente generado por ta_j, para algún j. Como $ta_1, \dots, ta_c$ son las secciones globales del haz $\mathcal{O}_Z(1)$ en ese abierto, concluimos $\mathcal{I}_E = \mathcal{O}_Z(1)$. De esto se deduce que

$$\mathcal{O}_Z(E) = \mathcal{O}_Z(-1),$$

ya que para todo abierto $V \subset Z$ se tiene

$$\mathrm{H}^0(V, \mathcal{O}_Z(-E)) = \{f \in \mathbb{C}(Z)^*; \mathrm{div}(f) - E \geq 0\} \cup \{0\}$$

que coincide con $\mathrm{H}^0(V, \mathcal{I}_E)$, o sea, $\mathcal{I}_E = \mathcal{O}_Z(-E)$.

Observemos además que, utilizando la descripción de la explosión dada por las ecuaciones (3.2), obtenemos $\sigma^{-1}(x) \simeq \{x\} \times \mathbb{P}^c$ para todo $x \in Y$.

Por lo tanto, a nivel de haces, tenemos $\mathcal{O}_Z(E) = \mathcal{O}_Z(-1)$; en otras palabras, la restricción de $\mathcal{O}_Z(E)$ a una curva $L \subset E$ de la forma $L \simeq \{x\} \times \ell \subset U \times \mathbb{P}^c$, donde $\ell \subset \mathbb{P}^c$ es una recta, es isomorfa a $\mathcal{O}_\ell(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$; deducimos $E \cdot L = -1$.

Por otro lado, trabajando en cartas locales se demuestra que $K_{\mathrm{Bl}_Y(X)} = \sigma^*(K_X) + (c-1)E$, que es la fórmula de ramificación para el morfismo de explosión σ, con $c = \mathrm{codim}\,(Y, X)$. Como las curvas $C \subset E$ que son contraídas por σ en un punto $x \in Y$, digamos con x en el abierto U de antes, son de la forma $C \simeq \{x\} \times C_x \subset U \times \mathbb{P}^c$, para alguna curva $C_x \subset \mathbb{P}^c$, obtenemos

$$K_{\mathrm{Bl}_Y(X)} \cdot C = \deg(C_x)(1-c);$$

por lo tanto,

$$\mathrm{codim}\,(Y, X) > 1 \Longrightarrow K_{\mathrm{Bl}_Y(X)} \cdot C < 0.$$

Así, σ es la contracción extremal asociada al rayo extremal $\mathbb{R}_{\geq 0}\ell$.

Ejercicio 3.4. Probar que si Y es no singular de codimensión $c = 1$, entonces $\mathrm{Bl}_Y(X)$ es canónicamente isomorfo a X (sugerencia: Y es un divisor (de Cartier) efectivo).

Para terminar esta sección sobre explosiones, nos gustaría comentar que la definición más general de explosión que dimos, continúa valiendo para una variedad proyectiva X que es singular e $Y \subset X$ un subesquema arbitrario con haz de ideales $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$. Obtenemos un esquema $\mathrm{Bl}_Y(X)$ proyectivo, siendo el divisor excepcional E todavía un divisor de Cartier. Para que la fórmula de ramificación que exhibimos continúe válida, precisamos sin embargo que X sea por lo menos normal y que el haz de ideales $\mathcal{I}$ satisfaga la siguiente propiedad: para todo $x \in Y$ existe un abierto afín $U \ni x$ de X tal que $\mathcal{I}|_U$ está generado por una sucesión regular de elementos en $\mathcal{O}_U$ (se dice que Y es localmente intersección completa en X). En particular, si Y es un divisor de Cartier efectivo, o sea, un subesquema de codimensión 1, obtenemos $\mathrm{Bl}_Y(X) \simeq X$, donde dejamos las verificaciones para el lector interesado.

Una referencia interesante para estudiar las construcciones relativas a fibrados proyectivos, explosiones, etc, aparte de la referencia estándar [Ha], es [Fu2, Appendix B, §'s B.3, B.4, B.5 y B.6], donde no hay muchas demostraciones pero se encuentra un buen resumen de "todo lo que uno debería saber acerca de".

3.3.3. **Ejemplo de contracciones pequeñas.** Una contracción pequeña (no necesariamente extremal y K-negativa) es un morfismo birracional $\phi : X \to Y$ tal que $\mathrm{Exc}(\phi)$ tiene codimensión > 1. Cuando el cono $\overline{\mathrm{NE}}(\phi)$ es un rayo extremal K_X-negativo, como dijimos antes existe el flip de ϕ. Si X es no singular, la existencia de una contracción pequeña de un rayo extremal K_X-negativo sólo es posible a partir de $\dim X > 3$ (ver [De, Prop. 6.10(c)]).

El ejemplo tal vez más conocido de contracción pequeña es el siguiente:

Consideremos $\mathbb{P}^4$ con coordenadas homogéneas $x_0, \ldots, x_4$. Sea $X \subset \mathbb{P}^4$ un cono cuadrático de ecuación

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 0,$$

que es un cono de vértice $O = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ sobre la cuádrica lisa Q de ecuaciones

$$x_0 = x_1x_2 - x_3x_4 = 0,$$

$Q \subset \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^4$. Denotemos $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}^4$, respectivamente, los planos

$$\{x_1 = x_4 = 0\} \text{ y } \{x_1 = x_3 = 0\},$$

que pasan por O e interceptan Q en rectas transversales; tenemos $\Pi_i \subset X$, $i = 1, 2$.

La variedad X tiene entonces un único punto singular en O que es un punto doble ordinario. Denotemos $\pi : \mathrm{Bl}_O(\mathbb{P}^4) \to \mathbb{P}^4$ es la explosión de $\mathbb{P}^4$ en O, cuyo divisor excepcional es $E_O \simeq \mathbb{P}^3$, es fácil ver que la transformada estricta $\widetilde{X} \subset \mathrm{Bl}_O(\mathbb{P}^4)$ de X es no singular; denotemos $\sigma : \widetilde{X} \to X$ el morfismo obtenido por restricción; evidentemente $\widetilde{X} = \mathrm{Bl}_O(X)$ en el sentido más general de explosión de variedades no necesariamente lisas. Por construcción, el divisor excepcional $E = \sigma^{-1}(O) \subset \mathbb{P}^3$ es canónicamente isomorfo a Q, siendo $\mathbb{P}^3 = \pi^{-1}(O)$; más precisamente:

Ejercicio 3.5. Probar que la transformada estricta $\widetilde{X}$ es no singular y que $\widetilde{X} \cap E_O \simeq Q$ (sugerencia: en una carta local $\mathbb{C}^4$, con coordenadas t, x, y, z, podemos suponer $X = \{tx - yz = 0\}$ y $O = (0, 0, 0, 0)$; podemos describir la explosión π con cuatro cartas locales $(t, x, y, z) \mapsto (t, tx, ty, tz)$, $(t, x, y, z) \mapsto (xt, x, xy, xz)$, etc).

Análogamente, denotemos $\pi_i : \mathrm{Bl}_{\Pi_i}(\mathbb{P}^4) \to \mathbb{P}^4$ la explosión de $\mathbb{P}^4$ en Π_i, $i = 1, 2$; entonces la explosión de X en Π_i es el morfismo $\sigma_i : X_i = \mathrm{Bl}_{\Pi_i}(X) \to X$ obtenido por restricción de π_i a la transformada estricta X_i de X en relación a π_i, $i = 1, 2$. Tenemos isomorfismos inducidos $X_i \backslash \sigma_i^{-1}(O) \to X \backslash \{O\}, i = 1, 2$.

Cuidado: Aquí Π_i no es un divisor de Cartier en X ya que no es posible definirlo mediante una única ecuación en el entorno del punto singular de X. Por lo tanto σ_i no tiene por que ser un isomorfismo. De hecho, X_i es no singular:

Ejercicio 3.6. a) Probar que X_i es no singular (sugerencia: con las notaciones como en el ejercicio de arriba, podemos suponer $\Pi_1 = \{t - z = 0\}$ y describir la explosión π_1 con las dos cartas $(t, x, y, z) \mapsto (t, x, y, tz)$ y $(t, x, y, z) \mapsto (zt, x, y, z)$).
b) Probar que el morfismo $\sigma_i^{-1}(\Pi_i) \to \Pi_i$, inducido por σ_i, es la explosión de un punto de Π_i (sugerencia: trabajar de nuevo en cartas locales).

Como el ideal de definición de O contiene los ideales de definición de $\Pi_i, i = 1, 2$, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\sigma_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

de aplicaciones birracionales, donde $\pi = \sigma_i \circ \phi_i, i = 1, 2$.

Ahora, la transformada estricta $\widetilde{\Pi_1}$ del plano Π_1 en relación a σ, es por definición la explosión de ese plano en O, cuyo divisor excepcional es $L_1 := E_O \cap \widetilde{\Pi_1} \simeq \mathbb{P}^1$. Utilizando el ejercicio 3.6b), deducimos que ϕ_1 induce un isomorfismo de $\widetilde{\Pi_1}$ en $\sigma_i^{-1}(\Pi_i)$ y entonces que ϕ_1 no contrae L_1; pongamos $C_1 := \phi_1(L_1) \simeq \mathbb{P}^1$.

Por otro lado, del ejercicio 3.5 sigue que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq E \subset \widetilde{X}$ tiene dos familias de rectas, las curvas del tipo $\{pt.\} \times \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^1 \times \{pt.\}$. Como cada familia varía en el conjunto de fibras de un morfismo, uno puede mostrar que todas las curvas en cada familia son numéricamente equivalentes. Dado que L_1 pertenece, por construcción, a una de estas dos familias, deducimos que ϕ_1 no contrae ninguna de las curvas de esa familia.

Finalmente, puesto que π contrae las curvas de ambas familias, en particular las que interceptan L_1, necesariamente estas últimas son contraídas por ϕ_1 en los puntos de C_1. A *posteriori* ϕ_1 contrae el divisor E en la curva C_1 y $\sigma_1(C_1) = \{O\}$ (dejamos los detalles para el lector).

Un razonamiento completamente análogo implica que ϕ_2 contrae las curvas de la familia de rectas de E que contiene L_1 en un los puntos de una curva racional y lisa $C_2 \subset X_2$ y que $\sigma_2(C_2) = \{O\}$.

Por lo tanto σ_1 y σ_2 son contracciones pequeñas y la aplicación birracional φ establece un isomorfismo

$$X_1 \backslash C_1 \to X_2 \backslash C_2.$$

Sin embargo, las contracciones σ_i no son K_{X_i}-negativas, o sea, ninguna de ellas es un flip. De hecho, se puede ver que $K_{X_i} \cdot C_i = 0$ para $i = 1, 2$. En efecto, si uno asume que K_X es un divisor de Cartier (bastaría con que mK_X lo sea; ambas cosas son verdaderas aunque X no sea $\mathbb{Q}$-factorial) entonces la fórmula de ramificación implica

$$K_{X_i} = \sigma^*(K_X), i = 1, 2$$

pues, como σ_i no contrae ningún divisor, el divisor de ramificación R_{σ_i} es nulo para $i = 1, 2$. La afirmación sigue entonces del hecho que σ_i contrae C_i.

Para construir un ejemplo de flip hay que trabajar bastante todavía. No vamos a hacer eso, pero la idea es la siguiente (ver [KoMo, Exa. 2.7]): se considera la acción del grupo cíclico μ_n (multiplicativo) en $\mathbb{P}^4$, $n \geq 2$, donde $\eta \in \mu_n$ opera por

$$(x_0 : \eta x_1 : x_2 : \eta x_3 : x_4).$$

Entonces μ_n opera en X, dejando O fijo y estabilizando los planos Π_i. Por lo tanto la acción de μ_n se levanta a una acción en $\widetilde{X}, X_1$ y X_2 de forma que los morfismos del diagrama son equivariantes (esto se puede verificar "a mano", trabajando localmente). Haciendo los cocientes respectivos, la aplicación σ_1 da lugar a una contracción pequeña de rayo extremal K-negativo cuyo flip asociado corresponde a σ_2. Más concretamente, pasando al cociente el diagrama de arriba obtenemos otro diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X_n} \arrow[dl, "\phi_{n,1}"'] \arrow[dr, "\phi_{n,2}"] & \\ X_{n,1} \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma_{n,1}"'] & & X_{n,2} \arrow[dl, "\sigma_{n,2}"] \\ & X_n & \end{tikzcd}$$

donde el subíndice n indica que hicimos el cociente por el grupo finito μ_n. Se puede entonces demostrar que $X_{n,1}$ es (normal pero) singular, $X_{n,2}$ es lisa y se tiene

$$K_{X_{n,1}} \cdot C_{n,1} = -\frac{n-1}{n}, \; K_{X_{n,2}} \cdot C_{n,2} = n - 1.$$

Cabe resaltar que en la presente situación ninguna potencia del divisor canónico de X_n será de Cartier, razón por la cual no tenemos más la fórmula de ramificación para relacionar la clase canónica de esta variedad con las clases canónicas de $X_{n,1}$ o $X_{n,2}$.

El morfismo $\sigma_{n,2}$ es entonces el flip asociado a $\sigma_{n,1}$. Los morfismos σ_1, σ_2, que presentan simetría en relación a la intersección de la clase canónica con las curvas contraídas, se dice que son *flops*; tanto σ_1 como σ_2 son llamados de *flop de Atiyah* ([At]).

Observación 3.7. Para quién conoce la teoría de variedades tóricas, las construcción del flop de Atiyah, junto con la demostración de sus propiedades, se pueden hacer de manera bastante elemental (ver [Fu1, pag. 49 y segundo ejercicio en pag. 61]).

3.3.4. **Otras contracciones divisoriales y fibraciones de Mori.** En este parágrafo seguimos de cerca [De, §6.16].

Sea C una curva proyectiva lisa de género g y d un entero positivo. Denotemos $J^d(C)$ el conjunto de divisores $D = \sum a_i p_i \in \mathrm{Div}(C)$, $p_i \in C$, tales que $\deg(D) = \sum a_i = d$. Se puede demostrar que este conjunto tiene una estructura de variedad proyectiva no singular.

Por otro lado, el grupo simétrico de d elementos actúa de manera natural y sin puntos fijos sobre el producto cartesiano $C^d = C \times \cdots \times C$, cuyo espacio de órbitas es entonces una variedad proyectiva lisa que designaremos por C_d, llamada el *producto simétrico* de d copias de C. Tenemos un morfismo canónico $\phi : C_d \to J_d(C)$. Si $D \in \mathrm{Div}(C)$ tiene grado d, entonces la fibra $\phi^{-1}(D)$ es isomorfa al sistema lineal completo $|D|$, que es un espacio proyectivo.

Si $d > 2g - 2$, todo divisor de grado d es no *especial* ([Ha, Chap. IV, Example 1.3.4]) y el teorema de Riemann-Roch (para curvas lisas) implica $|D| \simeq \mathbb{P}^{d-g}$; luego ϕ es un fibrado proyectivo como en 3.3.1 y entonces una contracción K_{C_d}-negativa; en particular, si ℓ_d es una recta dentro de una fibra, entonces

$$K_{C_d} \cdot \ell_d = g - d - 1. \tag{3.3}$$

La fórmula 3.3 continúa valiendo para d arbitrario. En efecto, si d es suficientemente grande ya sabemos que es válida. Supongamos que sea verdadera para un cierto d y demostremos que vale para $d - 1$: fijando un punto de C construimos una inmersión cerrada $\imath : C_{d-1} \to C_d$, donde $Y_d := \imath(C_{d-1})$ es una subvariedad lisa de codimensión 1 de C_d tal que $Y_d \cdot \ell_d = 1$. La fórmula de adjunción general ([Ha, Chap. II, Prop. 8.20]) implica $K_{C_{d-1}} = \imath^*(K_{C_d} + Y_d)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} K_{C_{d-1}} \cdot \ell_{d-1} &= \imath^*(K_{C_d} + Y_d) \cdot \ell_{d-1} \\ &= (K_{C_d} + Y_d) \cdot \imath_*(\ell_{d-1}) \\ &= (K_{C_d} + Y_d) \cdot \ell_d \\ &= (g - d - 1) + 1, \end{aligned}$$

de donde sigue la afirmación.

Si $2g - 1 \geq d \geq g$, el morfismo ϕ continúa siendo una contracción K_{C_d}-negativa. Es la contracción del rayo extremal $\mathbb{R}_{\geq 0}[\ell_d]$. Pero ahora existen fibras $\phi^{-1}(D)$ de dimensión $> g - d$ cuando $\mathrm{h}^0(C, K_C - D) > 0$; esto pasa cuando el divisor D es especial (ver [Ha, Chap. IV, Example 6.4.2] para ejemplos de curvas C donde $\mathcal{O}_C(1)$ es especial). En este caso, cuando $g > d$ tendremos un ejemplo de fibración de Mori que no es un fibrado proyectivo.

Por otro lado, si además $g = d$, las fibras genéricas tendrán dimensión 0 y por lo tanto ϕ es una contracción divisorial. El conjunto de puntos de $J^d(C)$ que pertenecen al divisor contraído es

$$\{D \in J^d(C); \mathrm{h}^0(C, K_C - D) > 0\}.$$

Nuevamente, la ocurrencia de divisores no especiales de grado d implica que esta contracción divisorial no es una explosión.

Referencias

[At] M. Atiyah, *On analytic surfaces with double points*,Proc. Roy. Soc. London A-247 (1958), 237-244.

[De] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Universitext, Springer, (2001).

[Fu1] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies, Number 131, 1993.

[Fu2] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer, 1998.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Sixth edition (1993).

[Hr] J. Harris, *Algebraic Geometry, A First Course*, GTM 133, Springer-Verlag, (1992).

[Ii] S. Iitaka, *Algebraic Geometry, An introducción of Birational Geometry of Algebraic Varieries*, Springer,

[Is77] V. Iskovskih, *Fano 3-folds I*, Math. USSR Izvestija, Vol. 11, N^o 3 (1977), pp. 485-527.

[Is78] V. Iskovskih, *Fano 3-folds II*, Math. USSR Izvestija, Vol. 12, N^o 3 (1978), pp. 469-503.

[KoMo] J. Kollar and S. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge University Press, 1998. 1982.

[Ma] K. Matsuki, *Intoduction to the Mori Program*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Mo82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), pp. 133-176.

[Mo88] S. Mori, *Flips Theorem and the existence of Minimal Models for Threfolds*, Jour. of Amer.Math.Soc. **1** (1988), pp. 117-253.

[Re] M. Reid, *Chapters on algebraic surfaces*, arXiv:alg-geom/9602006v1, 2006.

[Sh] I. Shafarevich, *Basil Algebraic Geometry 1*, Springer, 1988.

Centro de Matemáticas, Universidad de la República, Uruguay
E-mail address: `ivan@cmat.edu.uy`

FUNCIONES ZETA DE GRUPOS

DIEGO SULCA Y PAULO TIRAO

RESUMEN. Un grupo finitamente generado G tiene para cada $n \in \mathbb{N}$ sólo un número finito de subgrupos de índice n, denotado $a_G(n)$. La función zeta de subgrupos de G es la serie de Dirichlet

$$\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_G(n)}{n^s}, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Si la sucesión $\{a_G(n)\}$ es de crecimiento polinomial, entonces $\zeta_G(s)$ converge en un semiplano del plano complejo y define en éste una función analítica.

En el curso mostraremos algunos resultados fundamentales para grupos nilpotentes finitamente generados y libres de torsión, llamados τ-grupos.

Probaremos que el crecimiento de subgrupos de un τ-grupo es polinomial y por lo tanto su función zeta es un objeto analítico y no sólo formal. Además probaremos que la función zeta de un τ-grupo admite una descomposición como producto de Euler

$$\zeta_G(s) = \prod_{p \text{ primo}} \zeta_{G,p}(s), \quad \text{donde} \quad \zeta_{G,p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_G(p^k)}{p^{ks}}.$$

Luego introduciremos los grupos pro-finitos y pro-p y las completaciones pro-finita y pro-p de un grupo para relacionar la función zeta de un τ-grupo G y la de su completación pro-p, $\widehat{G_p}$. Esto permite representar a la función zeta de G como una integral p-ádica. Mostraremos cómo a partir de esta representación se deduce uno de los resultados más relevantes para éstas funciones zeta: las funciones zeta locales de un τ-grupo, $\zeta_{G,p}(s)$, son funciones racionales de p^{-s}. Es decir, para cada primo p existen polinomios racionales P y Q tales que

$$\zeta_{G,p}(s) = \frac{P(p^{-s})}{Q(p^{-s})}.$$

ÍNDICE

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E07, 11M41.

Introducción

Un grupo abstracto finitamente generado tiene para cada natural n sólo un número finito de subgrupos de índice n y en particular sólo un número finito de subgrupos normales de índice n. La idea de entender a un grupo a través de sus imágenes (finitas) es un problema típico de la teoría asintótica de grupos. Entender cuántos subgrupos o cuántos subgrupos normales de índice n tiene un grupo finitamente generado y cómo crecen estas cantidades son preguntas naturales.

Muchas veces en matemática, para entender una sucesión de números enteros no negativos una buena idea es la de incorporarla como coeficientes de series de potencias, de series de Dirichlet o de formas automorfas.

El estudio del crecimiento de la cantidad de subgrupos de grupos infinitos es una área de investigación que ha crecido y se ha desarrollado rápidamente desde que se instaló cómo tema en la conferencia "Groups St. Andrews" en 1985. Un área con un desarrollo espectacular en los últimos años es el estudio de las funciones zeta de grupos con crecimiento polinomial de subgrupos. Éstas fueron introducidas por Grunewald, Segal y Smith en 1988 en un trabajo fundacional [3] en el que prueban propiedades analíticas fundamentales de las funciones zeta de grupos nilpotentes finitamente generados y libres de torsión.

La clase de grupos con crecimiento polinomial de subgrupos fue caracterizada por Lubotzky, Mann y Segal [11, 12]. Las pruebas usan la teoría de grupos analíticos p-ádicos, la teoría de grupos algebraicos y el Teorema del Número Primo. Los grupos solubles de rango finito son de crecimiento polinomial de subgrupos y esta clase contiene a la clase de los grupos nilpotentes finitamente generados y libres de torsión. Ahora mientras que para los últimos existen una gran cantidad de resultados y el conocimiento de sus funciones zeta es profundo, para los primeros sus funciones zeta son casi desconocidas.

Una descripción del estado del área, de su desarrollo, los progresos alcanzados y los problemas abiertos pueden verse en los libros "Subgroup growth" de Alex Lubotzky y Dan Segal [13] y "Zeta functions of groups and ring" de Marcus du Sautoy y Luke Woodward [10]. Además los libros [4] y [15] son también muy relevantes en el desarrollo del área y [5, 7, 8, 9, 6] son algunos otros trabajos fundamentales en la teoría de funciones zeta de grupos.

1. Series de Dirichlet

Una serie de Dirichlet es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde los coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$ y $s \in \mathbb{C}$. Estas series son más relevantes como objetos analíticos que como objetos formales. Algunos de los resultados básicos son sobre series de Dirichlet son los que siguen. Para una exposición más amplia incluyendo las pruebas se pueden consultar por ejemplo [14] y [1].

Proposición 1.1. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *una serie de Dirichlet.*

Si la serie converge en el punto $s = s_0$*, entonces converge en el semiplano* $Re(s) > Re(s_0)$ *y la convergencia es uniforme sobre compactos.*

Si la serie converge absolutamente en el punto $s = s_0$*, entonces converge absolutamente en el semiplano* $Re(s) > Re(s_0)$ *y la convergencia es uniforme sobre compactos.*

Esta proposición permite definir las abscisas de convergencia σ_c y de convergencia absoluta σ_a de una serie de Dirichlet.

Definición 1.2.
- $\sigma_c = \text{ínf}\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{ la serie converge en } \alpha\}$.
- $\sigma_a = \text{ínf}\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{ la serie converge absolutamente en } \alpha\}$.

Si la serie converge (absolutamente) en todo el plano definimos $\sigma_c = -\infty$ ($\sigma_a = -\infty$). Si la serie no converge (absolutamente) en ningún punto definimos $\sigma_c = \infty$ ($\sigma_a = \infty$).

Observación 1.3. Si σ_c es la abscisa de convergencia de una serie de Dirichlet dada, entonces tal serie converge en cualquier punto s con $Re(s) > \sigma_c$ y no converge en ningún punto s con $Re(s) < \sigma_c$. Como la convergencia de la serie es uniforme sobre compactos, entonces ésta define una función analítica en la región $Re(s) > \sigma_c$.

Análogamente si σ_a es la abscisa de convergencia absoluta de una serie de Dirichlet dada, entonces tal serie converge absolutamente en cualquier punto s con $Re(s) > \sigma_a$ y no converge absolutamente en ningún punto s con $Re(s) < \sigma_a$.

Proposición 1.4. *Sean* σ_c *y* σ_a *respectivamente las abscisas de convergencia y convergencia absoluta de una serie de Dirichlet. Entonces*

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1.$$

1.1. Funciones aritméticas y series de Dirichlet.

Una función aritmética es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. A cada función aritmética f le podemos asociar una serie de Dirichlet, aquella con coeficientes $f(n)$. Ésta es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Una función aritmética f se dice multiplicativa si no es idénticamente nula y satisface $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo m, n con $(m, n) = 1$ y se dice completamente multiplicativa si no es idénticamente nula y $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.5. *Sea* f *una función aritmética y* σ_a *la abscisa de convergencia absoluta de la serie de Dirichlet asociada.*

- *Si* f *es multiplicativa, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right), \quad \textit{para } Re(s) > \sigma_a. \tag{1.1}$$

- *Si* f *es completamente multiplicativa, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s} \right)^{-1}, \quad \textit{para } Re(s) > \sigma_a.$$

Todos las series y productos son absolutamente convergentes.

La factorización (1.1) se conoce como *producto de Euler* y los factores que aparecen en dicha descomposición son los *factores locales* de la serie.

Proposición 1.6. *Sea f una función aritmética. Entonces la serie de Dirichlet asociada tiene abscisa de convergencia finita si y sólo si f tiene crecimiento polinomial, es decir si existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(n)| \leq n^c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 1.7. El ejemplo más famoso de series de Dirichlet es la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Esta es la serie de Dirichlet asociada a la función aritmética $f \equiv 1$. Para esta serie se tiene que $\sigma_a = \sigma_c = 1$ y además

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

es su descomposición como producto de Euler.

2. Funciones zeta de grupos

Teorema 2.1. *Si G es un grupo finitamente generado, entonces para cada natural n hay a lo sumo una cantidad finita de subgrupos de índice n.*

Demostración. Dado H un subgrupo de G de índice n identifiquemos al conjunto de coclases a izquierda de H en G con el conjunto $\{1, \dots, n\}$ de modo que a H le corresponda el 1. Hay $(n-1)!$ formas distintas de hacer esta identificación y para cada una de éstas el grupo G actúa en $\{1, \dots, n\}$ por $g \cdot xH = gxH$. Por lo tanto cada subgrupo H de índice n define $(n-1)!$ homomorfismos $\varphi : G \to S_n$ con las siguientes propiedades:

- Cada φ es transitivo en $\{1, \dots, n\}$, es decir, para cada par i, j en $\{1, \dots, n\}$ existe $g \in G$ tal que $\varphi(g)(i) = j$;
- $\mathrm{Stab}_{G,\varphi}(1) = \{g \in G : \varphi(g)(1) = 1\} = H$.

Recíprocamente para cada homomorfismo transitivo $\varphi : G \to S_n$, el subgrupo $H = \mathrm{Stab}_{G,\varphi}(1)$ es de índice n en G. En efecto si para cada i elegimos un $g_i \in G$ tal que $\varphi(g_i)(1) = i$, entonces $G = g_1H \dot\cup g_2H \dot\cup \dots \dot\cup g_nH$.

Luego si G es generado por m elementos, entonces el número de homomorfismos de G en S_n es a lo sumo $(n!)^m$ y la cantidad de subgrupos de G de índice n es menor o igual que $(n!)^m/(n-1)!$. □

Definición 2.2. Si G es un grupo finitamente generado, sea $a_G(n)$ la cantidad de subgrupos de G de índice n. La *función zeta del grupo G* es la serie de Dirichlet

$$\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_G(n)}{n^s}.$$

Otras series de Dirichlet asociadas a un grupo G finitamente generado son

$$\zeta_G^{\triangleleft}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_G^{\triangleleft}(n)}{n^s} \qquad y \qquad \zeta_{G,p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_G(p^k)}{p^{ks}},$$

donde $a_G^{\triangleleft}(n)$ denota la cantidad de subgrupos normales de índice n y p es un número primo. La serie $\zeta_G^{\triangleleft}$ es la *función zeta de subgrupos normales de* G y $\zeta_{G,p}$ es la *función zeta local de* G *en* p.

Ejemplo 2.3. Si $G = \mathbb{Z}$, entonces $a_G(n) \equiv 1$. Luego la función zeta de $\mathbb{Z}$ es la función zeta de Riemann.

Las funciones zeta de grupos finitamente generados son series formales que no necesariamente convergen en algún semiplano, es decir no necesariamente definen una función analítica. Como los coeficientes de las funciones zeta de grupos son números naturales, las abscisas de convergencia y de convergencia absoluta coinciden. Ésta abscisa es denotada α_G. En natural preguntarse para qué grupos finitamente generados G es $\alpha_G < \infty$. Antes de contestar esta pregunta cabe una consideración previa.

Definición 2.4. Un grupo G se dice residualmente finito si la intersección de todos los subgrupos normales de G de índice finito es la identidad.

Observación 2.5. Dado un grupo G, si H es la intersección de todos los subgrupos normales de G de índice finito, entonces G/H es residualmente finito y la proyección $G \longrightarrow G/H$ induce una biyección entre los subgrupos de G de índice finito y los subgrupos de G/H de índice finito. Esto se sigue del hecho que todo subgrupo de índice finito contiene un subgrupo normal de índice finito. En efecto para todo subgrupo K de G de índice finito, si $\{e, g_1, \dots, g_s\}$ es un conjunto de representantes de todas las coclases de K, el subgrupo

$$K \cap g_1 K g_1^{-1} \cap \cdots \cap g_s K g_s^{-1}$$

está contenido en K, es normal y de índice finito en G.

Luego si G es finitamente generado, para estudiar la función aritmética $a_G(n)$ podemos suponer que G es residualmente finito.

2.1. Grupos con crecimiento polinomial de subgrupos.

Dado un grupo G su función zeta define una función analítica en algún semiplano del plano complejo si tiene abscisa de convergencia α_G finita y $\alpha_G < \infty$ si y sólo si G tiene crecimiento polinomial de subgrupos, es decir, si existe un número real c tal que $a_G(n) \leq n^c$ para todo n. Estos grupos fueron caracterizados en una serie de trabajos que culminó con [11, 12].

Teorema 2.6 (Lubotzky-Mann-Segal)**.** *Sea G un grupo finitamente generado y residualmente finito. Entonces G tiene crecimiento polinomial de subgrupos si y sólo si G tiene un subgrupo soluble de índice finito y de rango finito.*

Recordamos que un grupo G se dice de rango finito si existe un entero positivo r tal que todo subgrupo de G puede ser generado por r elementos.

Una familia importante de grupos con crecimiento polinomial de subgrupos son los τ-grupos.

Definición 2.7. Un grupo G es un τ-grupo si es nilpotente, finitamente generado y libre de torsión.

Muchos de los resultados más importantes sobre la teoría de funciones zeta de grupos se refieren exclusivamente a esta familia. Los primeros resultados aparecieron en [3], un trabajo fundacional en el area.

En lo que resta describiremos algunos de los primeros resultados sobre funciones zeta de τ-grupos.

3. Funciones zeta de τ-grupos

En esta sección presentamos los primeros resultados fundamentales sobre funciones zeta de grupos. Mostraremos que las funciones zeta de τ-grupos tienen las siguientes propiedades generales:

- tienen abscisa de convergencia finita,
- tienen descomposición como producto de Euler y
- los factores locales son funciones racionales de p^{-s}.

Hacemos notar que el primer resultado se sigue del Teorema 2.6, sin embargo este resultado fue probado con anterioridad en [3] y la prueba que daremos permite calcular explícitamente la función zeta en algunos casos particulares.

3.1. Abscisa de convergencia finita.

Definición 3.1. La longitud de Hirsch, $h(G)$, de un grupo soluble finitamente generado G, es el número de factores cíclicos infinitos que aparece en cualquier serie de composición de G.

Tal número resulta bien definido por el Teorema de Schreirer sobre refinamientos equivalentes de series subnormales de un grupo. En efecto, cualquier refinamiento de una serie subnormal con factores cíclicos tiene la misma cantidad de factores cíclicos infinitos que la original.

Proposición 3.2. *Sea G un τ-grupo con centro Z. Entonces G/Z es libre de torsión. Además existe una serie central $1 = C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_h = G$, donde $h = h(G)$ es la longitud de Hirsch de G, tal que $C_i/C_{i+1} \cong \mathbb{Z}$. En particular, un τ-grupo con longitud de Hirsch igual a 1 es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Teorema 3.3. *Si G es un τ-grupo, entonces $\alpha_G < \infty$. Más aún $\alpha_G \leq h(G)$.*

La prueba de este resultado, aunque no es inmediata, sólo requiere herramientas de la teoría elemental de grupos. Comenzamos con algunos resultados preliminares que permiten reescribir a la función zeta de G de manera adecuada para probar este teorema.

Sea G un grupo arbitrario y $N \lhd G$. Para cada par de subgrupos A y B tales que $B \leq N \leq A \leq G$, sea

$$\mathcal{U}_N(A,B) = \{H \leq G : H \cap N = B,\ HN = A\}.$$

Lema 3.4. *Si G es un grupo y $N \lhd G$, entonces*

$$\{H : H \leq_f G\} = \dot{\bigcup_{\substack{N \leq A \leq_f G \\ B \leq_f N}}} \mathcal{U}_N(A,B). \tag{3.1}$$

Además $[G : H] = [G : A][N : B]$ para todo $H \in \mathcal{U}_N(A,B)$.

Demostración. Si $H \leq_f G$, entonces $H \cap N \leq_f N \leq HN \leq_f G$ y $H \in \mathcal{U}_N(HN, H \cap N)$.

Si $H \in \mathcal{U}_N(A,B)$ con $B \leq_f N \leq A \leq_f G$, entonces $H \leq G$ y

$$[G : H] = [G : HN][HN : H] = [G : HN][N : H \cap N] = [G : A][N : B] < \infty.$$

Por último es claro que los conjuntos $\mathcal{U}_N(A,B)$ son disjuntos dos a dos. $\square$

Usando la descomposión (3.1) se sigue que la función zeta de subgrupos de G en el semiplano de convergencia tiene las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\zeta_G(s) &= \sum_{H\leq_f G} [G:H]^{-s} \\
&= \sum_{\substack{N\leq A\leq_f G\\ B\leq_f N}} \left(\sum_{H\in\mathcal{U}_N(A,B)} [G:H]^{-s} \right) \\
&= \sum_{\substack{N\leq A\leq_f G\\ B\leq_f N}} |\mathcal{U}_N(A,B)|[G:A]^{-s}[N:B]^{-s} \\
&= \sum_{N\leq A\leq_f G} [G:A]^{-s} \sum_{B\leq_f N} |\mathcal{U}_N(A,B)|[N:B]^{-s} \\
&= \sum_{A/N\leq_f G/N} [G/N:A/N]^{-s} \sum_{B\leq_f N} |\mathcal{U}_N(A,B)|[N:B]^{-s}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\zeta_G(s) = \sum_{A/N\leq_f G/N} [G/N:A/N]^{-s} \sum_{B\leq_f N} |\mathcal{U}_N(A,B)|[N:B]^{-s}. \tag{3.2}$$

Tomamos ahora un subgrupo Z del centro de G, consideramos los conjuntos $\mathcal{U}_Z(A,B)$ con $B\leq_f Z\leq A\leq_f G$ y los grupos $P=Z/B$ y $Q=A/B$. Notamos que P está contenido en el centro de Q.

Consideramos además el conjunto $\mathcal{C}_Q(P)$ de *complementos* de P en Q, esto es

$$\mathcal{C}_Q(P)=\{C\leq Q:\ Q=PC \text{ y } P\cap C=1\}.$$

Puesto que $H\in\mathcal{U}_Z(A,B)$ si y sólo si $B\leq H$, $H/B\cap Z/B=1$ y $(H/Z)(Z/B)=A/B$, entonces el mapa $H\mapsto H/B$ es una biyección entre $\mathcal{U}_Z(A,B)$ y $\mathcal{C}_Q(P)$.

Asumamos que $\mathcal{C}_Q(P)$ es no vacío y sea $C=H/B\in\mathcal{C}_Q(P)$. Como $PC=Q$ y $P\cap C=1$, entonces para cada $x\in Q$ existe un único $\pi_C(x)\in C$ tal que $x=\pi_C(x)p$, para algún $p\in P$. Además $\pi_C: Q\mapsto C$ es un epimorfismo de grupos cuyo núcleo es P. Luego π_C induce un isomorfismo $\tilde{\pi}_C: Q/P\to C$.

Ahora para cada $\delta\in\mathrm{Hom}(Q/P,P)$, sea $\delta^*: Q\to Q$ el mapa definido por $\delta^*(x)=\pi_C(x)\delta(xP)$ y sea

$$\Phi:\mathrm{Hom}(Q/P,P)\to\mathcal{C}_Q(P)$$

el mapa definido por $\Phi(\delta)=\mathrm{Im}(\delta^*)$.

Lema 3.5. *El mapa Φ es una biyección.*

Demostración. Para cada δ, δ^* es un homomorfismo pues π_C y δ son homomorfismos y $\mathrm{Im}(\delta)\subseteq P\subseteq \mathrm{centro}(Q)$. Luego $\delta^*(Q)\leq Q$. Veamos que es un complemento de P en Q. Si $x\in\mathrm{Im}(\delta^*)\cap P$, existe $y\in Q$ tal que $x=\pi_C(y)\delta(yP)$ y por lo tanto $\pi_C(y)\in P$. Se sigue que $\pi_C(y)=1$, es decir, $y\in P$ y $x=\delta(yP)=\delta(P)=1$. Si $x\in Q$ y $p\in P$ es tal que $x=\pi_C(x)p$, entonces $x=\delta^*(x)\delta(x^{-1}P)p\in\mathrm{Im}(\delta^*)P$. Se sigue que $Q=\mathrm{Im}(\delta^*)P$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(\delta^*)$ es un complemento de P en Q. Además se sigue que $\pi_{\mathrm{Im}(\delta^*)}=\delta^*(x)$.

Para ver que Φ es biyectiva definimos una inversa $\Psi : \mathcal{C}_Q(P) \to \mathrm{Hom}(Q/P, P)$. Para cada $K \in \mathcal{C}_Q(P)$ sea $\Psi(K) : Q/P \to P$ el mapa definido por

$$\Psi(K)(xP) = \tilde{\pi}_C(xP)^{-1}\tilde{\pi}_K(xP) = \pi_C(x^{-1})\pi_K(x).$$

Notamos que $\Psi(K)(xP) \in P$ pues existen elementos $p, p' \in P$ tales que $\pi_C(x)p = x = \pi_K(x)p'$. Además $\Psi(K)$ es un homomorfismo pues

$$\begin{aligned}
\Psi(K)(xyP) &= \pi_C(y^{-1})\pi_C(x^{-1})\pi_K(x)\pi_K(y) \\
&= \pi_C(y^{-1})\Psi(K)(xP)\pi_K(y) \\
&= \Psi(K)(xP)\pi_C(y^{-1})\pi_K(y) \\
&= \Psi(K)(xP)\Psi(K)(yP)
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in Q$ (recordar que $P \subseteq \mathrm{centro}(Q)$).

Ahora por un lado tenemos que

$$\Psi(K)^*(x) = \pi_C(x)\Psi(K)(xP) = \pi_C(x)\pi_C(x^{-1})\pi_K(x) = \pi_K(x)$$

y por lo tanto $\Phi(\Psi(K)) = K$, para todo $K \in \mathcal{C}_Q(P)$.

Por otro lado

$$\Psi(\mathrm{Im}(\delta^*))(xP) = \pi_C(x^{-1})\pi_{\mathrm{Im}(\delta^*)}(x) = \pi_C(x^{-1})\delta^*(x) = \delta(xP)$$

y por lo tanto $\Psi(\Phi(\delta)) = \delta$, para todo $\delta \in \mathrm{Hom}(Q/P, P)$. Luego Φ es biyectiva. $\square$

De la discusión previa al lema resultó que entre $\mathcal{U}_Z(A, B)$ y $\mathcal{C}_Q(P)$ hay una correspondencia biyectiva y el lema afirma que éste último a su vez está en correspondencia biyectiva con $\mathrm{Hom}(Q/P, P)$. Por lo tanto $|\mathcal{U}_Z(A, B)| = |\mathrm{Hom}(Q/P, P)|$. Así si en la expresión (3.2) ponemos $N = Z$, resulta que

$$\zeta_G(s) = \sum_{A/Z \leq_f G/Z} [G/Z : A/Z]^{-s} \sum_{B \leq_f Z} |\mathrm{Hom}(A/Z, Z/B)|[Z : B]^{-s}\delta_{A,B} \tag{3.3}$$

donde $\delta_{A,B}$ es 0 o 1 de acuerdo a si $\mathcal{U}_Z(A, B)$ es vacío o no.

Demostración del Teorema 3.3. Hacemos inducción en la longitud de Hirsch de G.

Si $h(G) = 1$, entonces $G = \mathbb{Z}$ y $\zeta_G(s) = \zeta(s)$, la función zeta de Riemann, que tiene abscisa de convergencia igual a 1.

Si $d = h(G) > 1$, sea Z un subgrupo cíclico infinito del centro de G tal que G/Z es libre de torsión. El grupo A/Z es nilpotente, libre de torsión y de longitud de Hirsch igual a $d - 1$, por lo tanto generado por $d - 1$ elementos. Como un homomorfismo $\delta : A/Z \to Z/B$ está completamente determinado por sus valores en un conjunto de generadores de A/Z, entonces

$$|\mathrm{Hom}(A/Z, Z/B)| \leq [Z : B]^{d-1}.$$

Luego de la expresión (3.3) resulta que

$$\zeta_G(s) \leq \sum_{A/Z \leq_f G/Z} [G/Z : A/Z]^{-s} \sum_{B \leq_f Z} [Z : B]^{d-1-s} = \zeta_{G/Z}(s)\zeta(s - d + 1).$$

Por hipótesis inductiva, $\zeta_{G/Z}(s)$ converge si $Re(s)s > d - 1$ y $\zeta(s - d + 1)$ converge si $Re(s) > d$. Luego $\zeta_G(s)$ converge si $Re(s) > d$ y $\alpha_G \leq d = h(G)$. $\square$

Como aplicación de la fórmula (3.3) calculamos la función zeta del grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^d$.

Proposición 3.6. *La función zeta del grupo abeliano libre* $\mathbb{Z}^d$, $\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s)$, *tiene abscisa de convergencia* $\alpha_{\mathbb{Z}^d} = d$ *y*

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \prod_{i=1}^{d} \zeta(s-i+1).$$

Demostración. Como el resultado es claro si $d=1$, supongamos que $d>1$ y tomemos $Z = \mathbb{Z}\times 0 \times \ldots \times 0$. Si $B \le_f \le Z \le A \le_f \mathbb{Z}^d$, entonces B es de la forma $B = B_1 \times 0 \times \ldots \times 0$ con $B_1 \le \mathbb{Z}$ y A es de la forma $\mathbb{Z}\times A_1$ con $A_1 \le \mathbb{Z}^{d-1}$. El subgrupo $B_1 \times A_1$ es claramente un elemento de $\mathcal{U}_Z(A,B)$ y por lo tanto $\delta_{A,B} \equiv 1$ en la expresión (3.3). Además A/Z es libre de rango $d-1$ y por lo tanto $|\operatorname{Hom}(A/Z, Z/B)| = [Z:B]^{d-1}$. Luego

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \sum_{A/Z \le_f \mathbb{Z}^d/Z} [\mathbb{Z}^d/Z : A/Z]^{-s} \sum_{B \le_f Z} [Z:B]^{d-1-s} = \zeta_{\mathbb{Z}^d/Z}(s)\zeta(s-d+1)$$

y el resultado se sigue por inducción pues $\mathbb{Z}^d/Z \cong \mathbb{Z}^{d-1}$. □

3.2. Producto de Euler.

Nuestro próximo objetivo es demostrar que las funciones zeta de τ-grupos admiten producto de Euler. Según la Proposición 1.5, basta probar que la función que cuenta la cantidad de subgrupos de índice n, $a_G(n)$, es multiplicativa.

Teorema 3.7. *Sea* G *un* τ*-grupo. Entonces* $a_G(nm) = a_G(m)a_G(n)$, *si* $(m,n)=1$.

Para demostrar este teorema necesitamos algunos resultados de la teoría elemental de grupos.

Lema 3.8. *Sea* $G = S_1 \times \ldots \times S_k$ *un grupo nilpotente finito expresado como el producto de sus* p_i*-subgrupos de Sylow,* $S_{p_i} = 1 \times \ldots \times S_i \times \ldots \times 1$. *Entonces todo subgrupo* H *de* G *es de la forma* $H = S'_1 \times \ldots \times S'_k$, *con* $S'_i \le S_i$. *Si* $|G| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, *con* $\alpha_i \ge 1$ *y* $|H| = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$, *con* $\beta_i \ge 0$, *entonces* $|S_i| = p_i^{\alpha_i}$ *y* $|S'_i| = p_i^{\beta_i}$.

Demostración. Si $H \le G$, entonces H es nilpotente y por lo tanto es el producto de sus p_i-subgrupos de Sylow. Para cada i, los teoremas de Sylow implican que el p_i-subgrupo de Sylow S'_{p_i} de H es un subgrupo de S_{p_i} y por lo tanto es de la forma $S'_{p_i} = 1 \times \ldots \times S'_i \times \ldots \times 1$ con $S'_i \le S_i$. Luego $H = S'_1 \times \ldots \times S'_k$. La última afirmación es una consecuencia inmediata de los teoremas de Sylow. □

Lema 3.9. *Sea* G *un grupo nilpotente finito de orden* $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, *con* $\alpha_i \ge 1$ *y los primos* p_i *distintos entre sí y sea* H *un subgrupo de índice* $n = p_1^{\gamma_1} \ldots p_k^{\gamma_k}$, *con* $\gamma_i \ge 0$. *Entonces* H *se escribe de modo único como la intersección de subgrupos* $P_1, \ldots, P_k$, *con* P_i *de índice una potencia de* p_i. *Tal potencia resulta ser* $p_i^{\gamma_i}$ *para cada* P_i. *En particular, para cada* i *existe un único subgrupo de* G *de índice* p^{γ_i} *que contiene a* H.

Demostración. Sean $G = S_1 \times \ldots \times S_k$ y $H = S'_1 \times \ldots \times S'_k$ como en el lema anterior y sea $\beta_i = \alpha_i - \gamma_i$. Entonces $|H| = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$ y $|S'_i| = p_i^{\beta_i}$. Sea $P_i = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S'_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_k$. Se tiene $|P_i| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\beta_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots p_k^{\alpha_k}$ y por lo tanto $[G:P_i] = p_i^{\alpha_i - \beta_i} = p_i^{\gamma_i}$. Claramente $H = \bigcap_{i=1}^k P_i$.

Sean ahora $Q_i = S_1^{(i)} \times \ldots \times S_k^{(i)}$ subgrupos de G de índices una potencia de p_i, digamos $p_i^{\delta_i}$, tales que $H = \bigcap_{i=1}^k Q_i$. Entonces $S'_j \le S_j^{(i)} \le S_j$, para todo j. Además $|Q_i| = a/p_i^{\delta_i} = p_1^{\alpha_1} \ldots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_i - \delta_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots p_k^{\alpha_k}$ y por lo tanto $|S_j^{(i)}| = p_j^{\alpha_j} = |S_j|$, si $j \ne i$ y luego $S_j^{(i)} = S_j$, si $j \ne i$. También $H = \bigcap_{i=1}^k Q_i = S_1^{(1)} \times \ldots \times S_k^{(k)}$ y por lo tanto $S_i^{(i)} = S'_i$, para todo i. Luego $Q_i = P_i$, para todo i. □

Lema 3.10. *Si G es un grupo nilpotente y H es un subgrupo de índice mn, con $(m,n) = 1$, entonces existe un único subgrupo K de G de índice m que contiene a H.*

Demostración. Sea N un subgrupo normal de G de índice finito contenido en H. Entonces G/N es nilpotente finito y por lo tanto, cambiando G por G/N si es necesario, podemos suponer que G es un grupo finito. Sea $m = p_1^{\gamma_1} \ldots p_r^{\gamma_r}$ la descomposición prima de m y sean $P_1, \ldots, P_r$ los únicos subgrupos de G de índices $p_i^{\gamma_i}$ respectivamente que contienen a H. Entonces $K = P_1 \cap \ldots \cap P_r$ tiene índice m y contiene a H. Si K' es otro subgrupo de G de índice m que contiene a H, entonces por el lema anterior existen únicos subgrupos $P'_1, \ldots, P'_k$ de índices $p_i^{\gamma_i}$ respectivamente tales que $K' = P'_1 \cap \ldots \cap P'_k$. Como todo subgrupo que contiene a K' contiene a H, la unicidad del lema anterior referida ahora a H nos dice que $P_i = P'_i$ para todo i y por lo tanto $K = K'$. $\square$

Demostración del Teorema 3.7. Sean m y n enteros positivos coprimos entre sí. La intersección de un subgrupo de índice m y uno de índice n es claramente un subgrupo de índice mn. Por otro lado, todo subgrupo de índice mn está contenido en un único subgrupo de índice m y en un único subgrupo de índice n. Luego la aplicación $(A,B) \mapsto A \cap B$ es una biyección entre el producto cartesiano de la familia de subgrupos de índice m y la familia de subgrupos de índice n, y la familia de subgrupos de índice mn. Igualando cardinales se obtiene $a_G(mn) = a_G(m)a_G(n)$. $\square$

Como aplicación de la Proposición 1.5 y los Teoremas 3.3 y 3.7 se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *Sea G un τ-grupo con longitud de Hirsch $h(G)$. Entonces la función zeta de G converge absolutamente en el semiplano $Re(s) > h(G)$ y satisface*

$$\zeta_G(s) = \prod_{p \ primo} \zeta_{G,p}(s).$$

3.3. Racionalidad de los factores locales.

La descomposición como producto de Euler de la función zeta de Riemann, para $Re(s) > 1$, es

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

En este caso los factores locales $\zeta_p(s) = \dfrac{1}{1 - p^{-s}}$ son funciones racionales de p^{-s}. En efecto $\zeta_p(s) = \dfrac{P(p^{-s})}{Q(p^{-s})}$ donde $P(x) = 1$ y $Q(x) = 1 - x$.

Esta propiedad de la función zeta de Riemann es compartida por las funciones zeta de τ-grupos.

Teorema 3.12. *Sea G un τ-grupo y p un primo. Entonces existen polinomios P y Q con coeficientes enteros tales que*

$$\zeta_{G,p}(s) = \frac{P(p^{-s})}{Q(p^{-s})}.$$

Corolario 3.13. *Si G es un τ-grupo y p es un número primo, entonces la suseción $\{a_G(p^k)\}_{k=1}^{\infty}$ satisface una relación de recurrencia lineal con coeficientes enteros, es decir, existen un entero positivo r y enteros $z_1, \ldots, z_r$ tales que*

$$a_G(p^k) = z_1 a_G(p^{k-1}) + \ldots + z_r a_G(p^{k-r}),$$

para todo $k \geq r$.

La demostración del Teorema 3.12 es sofisticada y requiere nuevas herramientas que presentamos en las secciones que siguen.

4. Grupos profinitos, pro-p y completaciones

Si G es un grupo topológico y X es un subconjunto de G, denotamos por $\overline{X}$ a la clausura de X y por $\langle X\rangle$ al subgrupo de G generado como grupo abstracto por X. Un grupo topológico G se dice finitamente generado si existe un subconjunto finito X tal que $G = \overline{\langle X\rangle}$. Se escribe $X \leq_o G$, $X \lhd_o G$, $X \leq_c G$ y $X \lhd_c G$ para indicar respectivamente que X es subgrupo abierto, subgrupo normal abierto, subgrupo cerrado y subgrupo normal cerrado.

En toda la sección p denota un número primo.

4.1. Grupos profinitos y pro-p.

Definición 4.1. Un grupo G se dice *profinito* si es un grupo topológico compacto Hausdorff tal que los subgrupos abiertos forman una base de entornos de la identidad.

Un grupo *pro-p* es un grupo profinito en el cual los subgrupos abiertos tienen índice alguna potencia de p.

Proposición 4.2. *Si G es un grupo profinito, entonces:*

1. *Todo subgrupo abierto de G es cerrado, tiene índice finito en G y contiene un subgrupo abierto normal de G. Un subgrupo cerrado de G es abierto si y sólo si es de índice finito. La familia de todos los subgrupos abiertos de G se interseca en $\{1\}$.*
2. *Un subconjunto de G es abierto si y sólo si es la unión de coclases de subgrupos normales abiertos.*
3. *Para cualquier conjunto X de G,*

$$\overline{X} = \bigcap_{N\lhd_o G} XN. \tag{4.1}$$

Si X es un subgrupo de G, entonces

$$\overline{X} = \bigcap\{K : X \leq K \leq_o G\}. \tag{4.2}$$

4. *Si X e Y son subconjuntos cerrados de G, entonces también lo es el conjunto XY. Si X es un cerrado y n es un entero, entonces el conjunto $\{x^n : x \in X\}$ es cerrado.*
5. *Sea H un subgrupo cerrado de G. Entonces H con la topología inducida es un grupo profinito. Todo subgrupo abierto de H es de la forma $H \cap K$ con $K \leq_o G$.*
6. *Sea N un subgrupo normal de G. Entonces G/N con la topología cociente es un grupo profinito y el mapa cociente $G \to G/N$ es continuo, abierto y cerrado.*
7. *Una sucesión $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en G converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy, es decir, para cada $N\lhd_o G$ existe un $n = n(N)$ tal que $g_i^{-1}g_j \in N$ para todo $i, j \geq n$.*

Proposición 4.3. *Sea G un grupo profinito y sean $H \leq_c G$ y $K \lhd_c G$.*

- *Si G es pro-p, entonces H es pro-p.*
- *G es pro-p si y sólo si K y G/K son pro-p.*

Demostración. La primera afirmación es consecuencia inmediata del item *5.* de la proposición anterior.

La condición necesaria de la segunda afirmación es inmediata. Supongamos entonces que K y G/K son grupos pro-p y sea H un subgrupo abierto de G. Entonces

$$[G : H] = [G : KH][KH : H] = [G/K : KH/K][K : K \cap H].$$

Como HK/K es la imagen de H en el cociente G/K, entonces $HK/K \leq_o G/K$ y por lo tanto $[G/K : KH/K]$ es una potencia de p. Como $H \leq_o G$, entonces $K \cap H \leq_o K$ y por lo tanto $[K : K \cap H]$ es una potencia de p. □

Proposición 4.4. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos profinitos. Entonces el producto $\prod_{i\in I} G_i$, con la topología producto, es un grupo profinito que es pro-p si cada uno de sus factores es pro-p.*

Demostración. Sabemos que el producto $G = \prod_{i\in I} G_i$ es un grupo topológico compacto y Hausdorff. Por definición de la topología producto, una subbase de entornos de la identidad está formada por los abiertos de la forma $W(k, V) = \{(g_i)_{i\in I} : g_k \in V\}$ donde $k \in I$ y V es un subgrupo abierto de G_k, y como todos estos conjuntos son subgrupos, entonces una base de entornos de la identidad de G es la familia de subgrupos abiertos de G. Luego G es profinito. Si cada G_i es pro-p, entonces una base de entornos de la identidad es la formada por los subgrupos de la forma $\bigcap_{k\in F} W(k, V_k)$ donde F es un subconjunto finito de I y éste es un subgrupo de índice $\prod_{k\in F}[G_k : V_k]$ que es una potencia de p. Luego G es pro-p. □

4.2. Límite inverso.

Sea I un conjunto dirigido, esto es un conjunto con un orden parcial $\leq$ tal que para cada par $i, j \in I$ existe un $k \in I$ con $i \leq k$ y $j \leq k$. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y supongamos que para todo $i \leq j$ se tiene un morfismo $\varphi_{ij} : G_j \to G_i$ tales que:

- φ_{ii} es la identidad de G_i, para todo $i \in I$,
- $\varphi_{ij} = \varphi_{ik} \circ \varphi_{kj}$, si $i \leq k \leq j$.

El par $(\{G_i\}, \{\varphi_{ij} : i \leq j\})$ es un sistema inverso de grupos y morfismos sobre I.

Un límite inverso de este sistema es un grupo G con morfismos $\pi_i : G \to G_i$, denominados proyecciones, tales que $\pi_i = \varphi_{ij} \circ \pi_j$, si $i \leq j$ y que satisface la siguiente propiedad universal. *Si H es otro grupo con una familia de morfismos $\pi'_i : H \to G_i$ tales que $\pi'_i = \varphi_{ij} \circ \pi'_j$, para todo $i \leq j$, entonces existe un único morfismo $\psi : H \to G$ tal que $\pi_i \circ \psi = \pi'_i$, para todo $i \in I$.*

Proposición 4.5. *Un límite inverso del sistema $(\{G_i\}, \{\varphi_{ij} : i \leq j\})$ sobre I es el siguiente subgrupo del producto de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$:*

$$\varprojlim G_i = \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i : \ g_i = \varphi_{ij}(g_j), \ \text{para todo } i \leq j \right\}, \tag{4.3}$$

donde las proyecciones son las restricciones de las proyecciones del producto a $\varprojlim G_i$.

Si $(G, \{\pi_i\})$ y $(G', \{\pi'_i\})$ son dos límites inversos del sistema inverso anterior, entonces existe un isomorfismo $\alpha : G \to G'$ tal que $\pi'_i \circ \alpha = \pi_i$.

Proposición 4.6. *Si cada G_i es un grupo compacto Hausdorff y los morfismos φ_{ij} son continuos, entonces $\varprojlim G_i$ es un subgrupo cerrado, y por lo tanto compacto, de $\prod_i G_i$.*

Demostración. Si $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \setminus \varprojlim G_i$, entonces para algún par $r \leq s$ se tiene que $g_r \neq \varphi_{rs} g_s$. Por ser G_r un espacio Hausdorff existen abiertos disjuntos U y V en G_r tales que $g_r \in U$ y $\varphi_{rs} g_s \in V$. Para $i \neq r, s$ sea $T_i = G_i$, y pongamos $T_s = \varphi_{rs}^{-1}(U) \subseteq G_s$ y $T_r = V \subseteq G_r$. Entonces el conjunto $\prod_{i\in I} T_i$ es abierto en $\prod_{i\in I} G_i$, contiene a $(g_i)_{i\in I}$

y su intersección con $\varprojlim G_i$ es vacía. Luego el complemento de $\varprojlim G_i$ es abierto en $\prod_{i\in I} G_i$. $\square$

4.3. Completación profinita.

Si N_1 y N_2 son dos subgrupos de índice finito de un grupo G, entonces el subgrupo $N_1 \cap N_2$ es también de índice finito. En efecto $[G : N_1 \cap N_2] = [G : N_1][N_1 : N_1 \cap N_2]$ y $[N_1 : N_1 \cap N_2] \le [G : N_2]$ pues el mapa $g(N_1 \cap N_2) \mapsto gN_2$, $g \in N_1$, del conjunto de coclases de $N_1 \cap N_2$ en N_1 en el conjunto de coclases de N_2 en G está bien definido y es inyectivo.

Entonces si G un grupo residualmente finito y $\mathcal{N}$ es la familia de subgrupos normales de G de índice finito, se tiene que:

- Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}$.
- $\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N = 1$.

Consideremos ahora la familia $\mathcal{N}$ dirigida por inclusión inversa, la familia de todos los cocientes finitos de G, $\{G/N : N \in \mathcal{N}\}$, y para cada $N_1 \subseteq N_2$ sea $\varphi_{N_2,N_1} : G/N_1 \longrightarrow G/N_2$ el epimorfismo natural. Así $(\{G/N : N \in \mathcal{N}\}, \{\varphi_{N_2,N_1} : N_1 \subseteq N_2, N_1, N_2 \in \mathcal{N}\})$ es un sistema inverso de grupos y morfismos sobre $\mathcal{N}$ cuyo límite inverso como subgrupo de $\prod_{N\in\mathcal{N}} G/N$ se denota $\widehat{G_{\mathcal{N}}}$.

Ahora dando a cada G/N la topología discreta resulta que $\prod_{N\in\mathcal{N}} G/N$ es profinito (Proposición 4.4) y como $\widehat{G_{\mathcal{N}}}$ es cerrado (Proposición 4.6), entonces $\widehat{G_{\mathcal{N}}}$ es profinito.

Definición 4.7. El grupo $\widehat{G_{\mathcal{N}}}$ es la completación profinita de G.

El mapa $\iota : G \longrightarrow \prod_{N\in\mathcal{N}} G/N$, definido por $\iota(g) = (gN)_{N\in\mathcal{N}}$ es un homomorfismo y su imagen está contenida en $\widehat{G_{\mathcal{N}}}$.

Proposición 4.8. *ι es un monomorfismo y su imagen es densa en $\widehat{G_{\mathcal{N}}}$.*

Demostración. Si $(gN)_{N\in\mathcal{N}} = (N)_{N\in\mathcal{N}}$, entonces $g \in N$ para todo $N \in \mathcal{N}$ y por lo tanto $g \in \bigcap_{N\in\mathcal{N}} N = 1$, lo cual implica que $g = 1$. Luego ι es monomorfismo. Un entorno básico de $(g_N N)_{N\in\mathcal{N}}$ en el producto es de la forma $V = \{(h_N N)_{N\in\mathcal{N}} : h_{N_i}N_i = g_{N_i}N_i, i = 1, ..., k\}$. Si $(g_N N)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G}_{\mathcal{N}}$, sea $M \in \mathcal{N}$ tal que $M \subseteq N_1 \cap \dots N_k$ y consideremos $\iota(g_M) = (g_M N)_{N\in\mathcal{N}}$. Entonces $\iota(g_M) \in V$, pues $g_M N_i = g_{N_i}N_i$ para $i = 1, \dots, k$ por ser $M \subseteq N_i$. Esto dice que $\iota(G)$ es denso en $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$. $\square$

4.4. Completación pro-p.

En todo lo que sigue p es un número primo.

Definición 4.9. Un grupo G se dice residualmente p-finito si la intersección de todos los subgrupos normales de índice una potencia de p es la identidad.

Observación 4.10. La definición de la completación pro-p de un grupo residualmente p-finito es enteramente análoga a la definición de la completación profinita de un grupo residualmente finito. De todos modos la desarrollamos acá para afianzar ambas definiciones.

Si N_1 y N_2 son dos subgrupos normales de índice una potencia de p de un grupo G, entonces el subgrupo $N_1 \cap N_2$ es también de índice una potencia de p. En efecto $[G : N_1 \cap N_2] = [G : N_1][N_1 : N_1 \cap N_2]$ y $[N_1 : N_1 \cap N_2]$ es finito, pero más aún es el orden del subgrupo $N_1/(N_1 \cap N_2)$ de G/N_1, cuyo orden es una potencia de p. Así $[G : N_1 \cap N_2]$ es producto de dos potencias de p.

Entonces si G es un grupo residualmente p-finito y $\mathcal{N}$ es la familia de subgrupos normales de G de índice una potencia de p, se tiene que:

- Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}$.
- $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1$.

Consideremos ahora la familia $\mathcal{N}$ dirigida por inclusión inversa, la familia de todos los cocientes finitos de G que son p-grupos, $\{G/N : N \in \mathcal{N}\}$, y para cada $N_1 \subseteq N_2$ sea $\varphi_{N_2,N_1} : G/N_1 \longrightarrow G/N_2$ el epimorfismo natural. Así $(\{G/N : N \in \mathcal{N}\}, \{\varphi_{N_2,N_1} : N_1 \subseteq N_2, N_1, N_2 \in \mathcal{N}\})$ es un sistema inverso de grupos y morfismos sobre $\mathcal{N}$ cuyo límite inverso como subgrupo de $\prod_{N \in \mathcal{N}} G/N$ se denota $\widehat{G_p}$.

Ahora dando a cada G/N la topología discreta resulta que $\prod_{N \in \mathcal{N}} G/N$ es pro-p (Proposición 4.4) y como $\widehat{G_p}$ es cerrado (Proposición 4.6), entonces $\widehat{G_p}$ es pro-p.

Definición 4.11. El grupo $\widehat{G_p}$ es la completación pro-p de G.

El mapa $\iota : G \longrightarrow \prod_{N \in \mathcal{N}} G/N$, definido por $\iota(g) = (gN)_{N \in \mathcal{N}}$ es un homomorfismo y su imagen está contenida en $\widehat{G_p}$.

Proposición 4.12. *ι es un monomorfismo y su imagen es densa en $\widehat{G_p}$.*

Demostración. Si $(gN)_{N \in \mathcal{N}} = (N)_{N \in \mathcal{N}}$, entonces $g \in N$ para todo $N \in \mathcal{N}$ y por lo tanto $g \in \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1$, lo cual implica que $g = 1$. Luego ι es monomorfismo. Un entorno básico de $(g_N N)_{N \in \mathcal{N}}$ en el producto es de la forma $V = \{(h_N N)_{N \in \mathcal{N}} : h_{N_i} N_i = g_{N_i} N_i, i = 1, ..., k\}$. Si $(g_N N)_{N \in \mathcal{N}} \in \widehat{G_p}$, sea $M \in \mathcal{N}$ tal que $M \subseteq N_1 \cap \dots N_k$ y consideremos $\iota(g_M) = (g_M N)_{N \in \mathcal{N}}$. Entonces $\iota(g_M) \in V$, pues $g_M N_i = g_{N_i} N_i$ para $i = 1, \dots, k$ por ser $M \subseteq N_i$. Esto dice que $\iota(G)$ es denso en $\widehat{G_p}$. $\square$

4.5. Completación pro-p de τ-grupos.

Proposición 4.13. *Sea G un τ-grupo. Entonces todo subgrupo de índice una potencia de p contiene un subgrupo normal de índice una potencia de p. Además G es residualmente p-finito.*

Demostración. Sea H un subgrupo de G de índice una potencia de p y sea $N \lhd G$ de índice finito contenido en H. Entonces G/N es nilpotente y finito. Si $q_1, \dots, q_r$ son los primos distintos que dividen al orden de G/N, los q_i-subgrupos de Sylow de G/N, que resultan normales por ser G/N nilpotente, están contenidos en H y el producto directo de ellos es un subgrupo normal contenido en H/N que tiene índice una potencia de p. La preimagen de este subgrupo normal por el mapa cociente $G \longrightarrow G/N$ es un subgrupo normal de G contenido en H y de índice una potencia de p.

Veamos ahora que G es residualmente p-finito en tres pasos.

Primera paso: *Todo grupo nilpotente infinito finitamente generado, contiene un subgrupo normal de índice finito que es τ-grupo.*

Hacemos inducción en la longitud de Hirsch. Si $h(G) = 1$, existe $g \in G$ de orden infinito. Entonces si $C_1 = \langle g \rangle$ y $C_{j+1} = N_G(C_j)$, la serie $1 \lhd C_1 \lhd C_2 \lhd \dots$ debe ser estacionaria, pues G es nilpotente finitamente generado. (Recordamos que en un grupo nilpotente, todo subgrupo propio es subgrupo propio de su normalizador.) Luego $C_r = G$ para algún r y por lo tanto C_1 forma parte de una serie subnormal de G. Como $h(G) = 1$, entonces C_1 debe ser de índice finito. Sea $C \leq C_1$ tal que C es normal de índice finito en G. Claramente C es cíclico infinito y por lo tanto un τ grupo.

Supongamos ahora que $h(G) > 1$. Dada una serie subnormal cíclica de G, existen subgrupos $G_1 \lhd G_2 \leq_f G$ tales que $G_2/G_1 \cong \mathbb{Z}$. Como G_2 contiene un subgrupo $N \lhd G$ y de índice finito, entonces con $A = G_1 \cap N$ resulta $A \lhd N \lhd_f G$ y $N/A \cong \mathbb{Z}$. Por hipótesis inductiva, existe un τ-grupo H tal que $H \lhd_f A \lhd N \lhd_f G$. Como A es finitamente generado y todos los subgrupos nHn^{-1} con $n \in N$ son subgrupos de A del mismo índice, entonces $\{nHn^{-1} : n \in N\}$ es finito y por lo tanto su intersección H_1 es un subgrupo normal de N que es τ-grupo de índice finito en A. El normalizador de H_1 en G contiene a N y por lo tanto es de índice finito. Luego la intersección de todos los conjugados de H_1 es un τ-grupo H_2 que es normal en G y de índice finito en A. Es claro que G/H_2 tiene longitud de Hirsch igual a 1 y por lo tanto existe B tal que $H_2 \lhd B \lhd_f$ y $B/H_2 \cong \mathbb{Z}$. Entonces B es un τ-grupo normal en G de índice finito.

Segundo paso: *Todo grupo nilpotente finitamente generado es residualmente finito.*

Sea G un grupo nilpotente finitamente generado. Si $h(G) = 0$ no hay nada que probar. Sea $h(G) > 0$ y sea G_1 un τ-grupo normal en G de índice finito. Sea Z el centro de G. Z es normal en G y como $h(G) = h(G_1)$, entonces Z es abeliano libre finitamente generado de rango ≥ 1 y $h(G/Z) < h(G)$. Si $m \geq 1$, entonces Z^m es característico y por lo tanto normal en G y además de índice finito en Z. Luego $h(G/Z^m) = h(G/Z) < h(G)$ y por hipótesis inductiva, la intersección de todos los subgrupos normales de G de índice finito está contenida en Z^m. Como $\bigcap\{Z^m : m \in \mathbb{Z}\} = 1$, entonces la intersección de todos los subgrupos normales de G de índice finito es 1.

Tercer paso: *Un τ-grupo es p-finito.*

Sea G un τ-grupo y $Z = Z(G)$ el centro de G. Entonces G/Z es libre de torsión y tiene clase de nilpotencia menor que la de G. Por lo tanto procediendo por inducción, podemos suponer que G/Z es residualmente p-finito. Para ver que G tiene esta propiedad basta ver que para cualquier $z \in Z$, con $z \neq 1$, hay un $N \lhd G$ tal que G/N es un p-grupo finito y $z \notin N$. Como Z es abeliano libre, entonces $z \notin Z^{p^m}$ para algún m. Como $Z^{p^m} \lhd G$, se puede elegir un subgrupo normal N de G conteniendo Z^{p^m}, que no contiene a z y maximal con respecto a esta condición (estamos usando que G/Z^{p^m} es residualmente finito por ser nilpotente finitamente generado). Sea $^{-}\colon G \to G/N$ la proyección natural. Luego todo subgrupo normal de $\bar{G} \neq 1$ contiene el elemento $\bar{z}$, y como $\bar{G}$ es residualmente finito, entonces $\bar{G}$ debe ser finito. Por lo tanto $\bar{G}$, que es nilpotente, es el producto directo de un p-grupo P y un grupo Q de orden coprimo con p. Si $Q \neq 1$, entonces $\bar{z} \in Q$ pues $Q \lhd \bar{G}$, pero $\bar{z}^{p^m} = 1$ pues $z^{p^m} \in Z^{p^m} \leq N$ y $\bar{z} \neq 1$, por lo tanto $\bar{z}$ no puede estar en Q. Luego $Q = 1$ y $G/N = \bar{G} = P$ es un p-grupo finito. □

De esta proposición y la Proposición 4.12 se sigue que todo τ-grupo G puede identificarse con un subgrupo denso de su completación pro-p vía la identificación $g \mapsto (gN)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G_p}$.

Ejemplo 4.14. Si $G = \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{N} = \{p^k\mathbb{Z} : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ y $\widehat{G_p}$ visto como subgrupo del anillo $\prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ resulta también un anillo que es isomorfo como anillo y como grupo topológico al anillo de los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$.

A continuación enunciamos una serie de propiedades de la completación pro-p de un τ-grupo, mostramos que tomar la completación pro-p de un τ-grupo es funtorial y estudiamos la completación pro-p de un producto de τ-grupos.

Proposición 4.15. *Se verifica lo siguiente:*

1. *Si $H \lhd G$, entonces $\overline{H} \lhd \widehat{G}_p$.*
2. *$AG = \widehat{G}_p$, para todo $A \leq_o \widehat{G}_p$.*
3. *Si $H \leq_f G$, entonces $\overline{H} \leq_f \widehat{G}_p$ y por lo tanto $\overline{H}$ es un subgrupo abierto de $\widehat{G}_p$. Si además H es de índice una potencia de p, entonces $\overline{H} \cap G = H$ y $[\widehat{G}_p : \overline{H}] = [G : H]$.*

4. Si $A \leq_o \widehat{G}_{\mathcal{N}}$, entonces $[G : A \cap G] = [\widehat{G}_p : A]$ y $A = \overline{A \cap G}$.
5. Si $H \lhd G$ y $K \leq G$, entonces $\overline{HK} = \overline{H}\,\overline{K}$.

Demostración.
1. Para cada $h \in H$, el mapa $g \to ghg^{-1}$ es continuo en $\widehat{G_p}$ y la imagen de G por este mapa está contenida en $\overline{H}$. Como G es denso en $\widehat{G_p}$ y $\overline{H}$ cerrado, entonces la imagen de $\widehat{G_p}$ por este mapa está contenida en $\overline{H}$. Por otro lado, para $g \in \widehat{G}_p$, el mapa $x \to gxg^{-1}$ es continuo y la imagen de H por este mapa está contenida en $\overline{H}$. Como H es denso en $\overline{H}$, entonces $g\overline{H}g^{-1} \subseteq \overline{H}$. Luego $\overline{H}$ es normal en $\widehat{G_p}$.
2. AG es unión finita de cerrados pues A es cerrado de índice finito. Luego AG es cerrado, contiene a G y por lo tanto $AG = \widehat{G_p}$.
3. Existen $g_1, \dots g_r \in G$ tales que $G = g_1H \cup \dots \cup g_rH$ y por lo tanto

$$\widehat{G_p} = \overline{G} = \overline{g_1H \cup \dots \cup g_rH} = g_1\overline{H} \cup \dots \cup g_r\overline{H}. \tag{4.4}$$

Esto prueba que $[\widehat{G_p} : \overline{H}] \leq [G : H]$. Supongamos ahora que H es de índice una potencia de p. Sea $(gN)_{N\in\mathcal{N}} \in G \subseteq \widehat{G_p}$ tal que $(gN)_{N\in\mathcal{N}} \in \overline{H}$. Se sabe que existe $K \leq H$ tal que $K \in \mathcal{N}$. Sea $(hN)_{N\in\mathcal{N}} \in H$ tal que $hK = gK$ (este existe pues el conjunto $\{(g_NN)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G}_p : g_KK = gK\}$ es un entorno de $(gN)_{N\in\mathcal{N}}$ y que interseca a H pues $(g_NN)_{N\in\mathcal{N}}$ está en la clausura de H). Esta última igualdad dice que $g \in H$ pues $K \subseteq H$. Luego $G \cap \overline{H} = H$. Vimos en (5.20) que existen $x_i \in G$ tales que $\widehat{G}_p = x_1\overline{H} \cup \dots \cup x_{p^k}\overline{H}$ con $p^k = [\widehat{G}_p : \overline{H}]$. Luego $G = x_1(\overline{H} \cap G) \cup \dots \cup x_{p^k}(\overline{H} \cap G)$ y como $\overline{H} \cap G = H$, entonces tenemos $[G : H] \leq [\widehat{G_p} : \overline{H}]$. Así $[G : H] = [\widehat{G_p} : \overline{H}]$.
4. Existe $K \in \mathcal{N}$ tal que A contiene a $V_K = \{(g_NN)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G_p} : g_K = K\}$. Como K está contenido en V_K, entonces $K \subseteq A \cap G$. Esto implica que $A \cap G$ tiene índice una potencia de p. Usando que $AG = \widehat{G_p}$ se puede verificar como en *3* que $[G : G\cap A] \leq [\widehat{G_p} : A]$. Tenemos también $[G : G\cap A] = [\widehat{G_p} : \overline{G \cap A}]$ y por lo tanto $[\widehat{G_p} : \overline{G \cap A}] \leq [\widehat{G}_p : A]$. Pero $\overline{G \cap A} \subseteq A$, luego $A = \overline{G \cap A}$.
5. Es inmediato. Solo hay que observar que $\overline{H}\,\overline{K}$ es cerrado según la Proposición 4.2. □

Corolario 4.16. *Existe una correspondencia 1-1 entre los subgrupos de G de índice una potencia de p y los subgrupos abiertos de $\widehat{G_p}$ dada por $H \mapsto \overline{H}$. Esta correspondencia satisface $[\widehat{G} : \overline{H}] = [G : H]$ para todo H y además $H \in \mathcal{N}$ si y sólo si $\overline{H} \lhd_o \widehat{G_p}$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de *3* y *4* de la proposición anterior. Obsérvese que la inversa de esta correspondencia es la aplicación $A \mapsto A \cap G$. □

Consideramos ahora el problema de extensión de homomorfismos a las completaciones profinitas. Denotamos por $\mathcal{P}$ a la categoría de grupos profinitos, es decir la categoría cuyos objetos son los grupos profinitos y los morfismos son los homomorfismos continuos.

Proposición 4.17. *Sea P un grupo pro-p y sea $\theta : G \to P$ un homomorfismo de grupos. Entonces θ se extiende de modo único a un homomorfismo continuo $\widehat{\theta} : \widehat{G_p} \to P$.*

Demostración. Sea $(g_NN)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G_p}$. Veamos que existe el límite de la red $\{\theta(g_N) : N \in \mathcal{N}\}$. En efecto, como P es compacto, basta ver que $\{\theta(g_N) : N \in \mathcal{N}\}$ es de Cauchy. Sea $A \lhd_o P$, entonces $K = \theta^{-1}(A) \in \mathcal{N}$. Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ y $N_i \leq K$ para $i = 1, 2$, entonces $g_{N_i}K = g_KK$ por definición de $\widehat{G_p}$ y por lo tanto $g_{N_1}^{-1}g_K$ y $g_K^{-1}g_{N_2}$ son elementos de

K. Luego el producto $g_{N_1}^{-1}g_{N_2}$ es un elemento de K y finalmente $\theta(g_{N_1})^{-1}\theta(g_{N_2})$ es un elemento de A. Esto dice que $\{\theta(g_N) : N \in \mathcal{N}\}$ es de Cauchy, como queríamos ver.

Definamos $\widehat{\theta}((g_N N)_{N\in\mathcal{N}}) = \text{lím}\{\theta(g_N) : N \in \mathcal{N}\}$. Veamos que $\widehat{\theta}$ está bien definida. Sean $(g_N N)_{N\in\mathcal{N}} = (g'_N N)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G_p}$, $A \lhd_o P$ y $K = \theta^{-1}(A)$. Entonces $(g'_N)^{-1}g_N \in N \leq K$ para todo $N \in \mathcal{N}$ y $N \leq K$, luego $\theta(g'_N)^{-1}\theta(g_N) \in A$ para todo $N \in \mathcal{N}$ y $N \leq K$.

Veamos que $\widehat{\theta}$ es un homomorfismo de grupos. En efecto si $(g_N N)_{N\in\mathcal{N}}, (h_N N)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G_p}$, entonces $\widehat{\theta}((g_N h_N N)_{N\in\mathcal{N}}) = \text{lím}\{\theta(g_N h_N) : N \in \mathcal{N}\} = \text{lím}\{\theta(g_N)\theta(h_N) : N \in \mathcal{N}\} = \text{lím}\{\theta(g_N) : N \in \mathcal{N}\}\,\text{lím}\{\theta(h_N) : N \in \mathcal{N}\}$, donde la última igualdad es por la continuidad del producto en P.

Veamos que $\widehat{\theta}$ es continuo. Sean $A \lhd_o G$, $K = \theta^{-1}(A)$ y $V_K = \{(g_N N)_{N\in\mathcal{N}} \in \widehat{G_p} : g_K K = K\}$. Si $(g_N N)_{N\in\mathcal{N}} \in V_K$, entonces $g_N \in K$ si $N \leq K$ y por lo tanto $\theta(g_N) \in A$. Luego $\text{lím}\,\theta(g_N) \in A$ pues A es cerrado y por lo tanto $\widehat{\theta}^{-1}(A)$ contiene a V_K. Luego $\widehat{\theta}$ es continua.

Claramente $\widehat{\theta}$ extiende a θ y la unicidad de $\widehat{\theta}$ se sigue por la densidad de G en $\widehat{G_p}$. □

Corolario 4.18. *Sean H y G τ-grupos y $\varphi : H \to G$ un homomorfismo de grupos. Entonces φ se extiende a un único homomorfismo continuo $\widehat{\varphi} : \widehat{H_p} \to \widehat{G_p}$. En particular si $H = G$ y $\varphi = id_G$, entonces $\widehat{id_G} = id_{\widehat{G_p}}$. Si K es otro τ-grupo y $\psi : G \to K$ es un homomorfismo, entonces $\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}$.*

Demostración. Sea $\iota : G \to \widehat{G_p}$ la inclusión natural. Se define $\widehat{\varphi} = \widehat{\iota \circ \varphi}$. Claramente $\widehat{\varphi}$ extiende a φ y la unicidad se sigue pues H es denso en $\widehat{H_p}$. Si K es otro τ-grupo y $\psi : G \to K$ es un homomorfismo, entonces $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} : \widehat{H_p} \to \widehat{K_p}$ es un homomorfismo continuo que extiende a $\psi \circ \varphi$ y por la unicidad debe ser igual a $\widehat{\psi \circ \varphi}$. □

Este corolario dice que la aplicación $G \to \widehat{G_p}$ junto con $\varphi \to \widehat{\varphi}$ es un funtor de la categoría de τ-grupos en la categoría de grupos pro-p.

Estudiemos ahora la completación pro-p de un producto de τ-grupos.

Lema 4.19. *Sean H y G τ-grupos y sean $\varphi, \psi : H \to G$ homomorfismos tales que $\varphi(h)\psi(h) = \psi(h)\varphi(h)$ para todo $h \in H$. Entonces $\varphi\psi$ es un homomorfismo y $\widehat{\varphi\psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$.*

Demostración. Es claro que $\varphi\psi$ es un homomorfismo de grupos. Además $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$ y $\widehat{\psi}\widehat{\varphi}$ son mapas continuos que satisfacen $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}(h) = \widehat{\psi}\widehat{\varphi}(h)$ para todo $h \in H$. Como H es denso en $\widehat{H_p}$, $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}(h) = \widehat{\psi}\widehat{\varphi}(h)$ para todo $h \in \widehat{H_p}$. Luego $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$ y $\widehat{\varphi\psi}$ son homomorfismos continuos que extienden a $\varphi\psi$. Luego son iguales. □

Proposición 4.20. *Si G_1 y G_2 son τ-grupos, entonces $G_1 \times G_2$ es un τ-grupo y $\widehat{(G_1 \times G_2)}_p$ es isomorfo, como grupo topológico, a $\widehat{G_{1p}} \times \widehat{G_{2p}}$.*

Demostración. Es claro que el producto de τ-grupos es un τ-grupo. Sean $\iota_i : G_i \to G_1 \times G_2$ las inclusiones y $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ las proyecciones canónicas. Las igualdades:

- $p_i \circ \iota_i = id_{G_i}$, $i = 1, 2$,
- $p_i \circ \iota_j = 0$ si $i \neq j$ y
- $(\iota_1 \circ \pi_1)(\iota_2 \circ \pi_2) = (\iota_2 \circ \pi_2)(\iota_1 \circ \pi_1) = id_{G_1 \times G_2}$,

implican las siguientes:

- $\widehat{p_i} \circ \widehat{\iota_i} = id_{\widehat{G_{ip}}}$, $i = 1, 2$;
- $\widehat{p_i} \circ \widehat{\iota_j} = 0$ si $i \neq j$; y
- $(\widehat{\iota_1} \circ \widehat{\pi_1})(\widehat{\iota_2} \circ \widehat{\pi_2}) = (\widehat{\iota_2} \circ \widehat{\pi_2})(\widehat{\iota_1} \circ \widehat{\pi_1}) = id_{\widehat{(G_1 \times G_2)}_p}$.

Si $\pi_i : \widehat{G_{1p}} \times \widehat{G_{2p}} \to \widehat{G_{ip}}$ son las proyecciones y $k_i : \widehat{G_{ip}} \to \widehat{G_{1p}} \times \widehat{G_{2p}}$ las inclusiones naturales, entonces $(\widehat{\iota_1} \circ \pi_1)(\widehat{\iota_2} \circ \pi_2)$ es un isomorfismo de grupos topológicos entre $\widehat{G_{1p}} \times \widehat{G_{2p}}$ y $(\widehat{G_1 \times G_2})_p$. En efecto, las igualdades anteriores muestran que $(k_1 \circ \widehat{p_1})(k_2 \circ \widehat{p_2})$ es la inversa. $\square$

Ejemplo 4.21. Se tiene que $\widehat{(\mathbb{Z}^n)}_p = \mathbb{Z}_p^n$.

5. Fórmula integral para las funciones zeta locales de τ-grupos

El siguiente es un resultado fundamental sobre grupos pro-p finitamente generados cuya demostración que omitimos puede verse en [4].

Teorema 5.1. *Si G es un grupo pro-p finitamente generado, entonces todo subgrupo de G de índice finito es abierto.*

Si G es un τ-grupo, entonces $\widehat{G_p}$ es un grupo pro-p finitamente generado. Luego de este teorema y el Corolario 4.16 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 5.2. *Si G un τ-grupo, entonces la aplicación $H \to \overline{H}$ es una biyección entre los subgrupos de G de índice una potencia de p y los subgrupos de $\widehat{G_p}$ de índice finito. Esta correspondencia satisface $[\widehat{G_p} : \overline{H}] = [G : H]$ y además H es normal en G si y sólo si $\overline{H}$ es normal en $\widehat{G_p}$. Por lo tanto*

$$\zeta_{G,p}(s) = \zeta_{\widehat{G_p}}(s). \tag{5.1}$$

Este teorema sugiere calcular la función zeta de $\widehat{G_p}$ en lugar de la función zeta local de G en p. La ventaja de esto es la existencia de bases de Mal'cev para τ-grupos y la definición análoga de la mismas en las completaciones pro-p de éstos.

5.1. Bases de Mal'cev para τ-grupos.

De ahora en más fijamos un τ-grupo Γ con longitud de Hirsch $d \geq 1$.

Definición 5.3. Una d-upla $(x_1, \ldots, x_d)$ de elementos de Γ se dice base de Mal'cev de Γ, si existe una serie central $\Gamma = \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \ldots \geq \Gamma_d \geq \Gamma_{d+1} = 1$ con factores cíclicos infinitos tal que x_i genera Γ_i módulo Γ_{i+1}, para $1 \leq i \leq d$.

Proposición 5.4. *Sea $(x_1, \ldots, x_d)$ una base de Mal'cev de Γ. Entonces todo elemento x de Γ puede escribirse de manera única como $x = x_1^{a_1} \ldots x_d^{a_d}$ con $a_i \in \mathbb{Z}$. Además, si $\Gamma = \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \ldots \geq \Gamma_d \geq \Gamma_{d+1} = 1$ es una serie central asociada a dicha base, entonces $\Gamma_i = \{x_i^{a_i} \ldots x_d^{a_d} : a_k \in \mathbb{Z}\}$.*

Demostración. Sea $x \in \Gamma$. Como x_1 genera Γ módulo Γ_2, entonces existen $a_1 \in \mathbb{Z}$ y $r_2 \in \Gamma_2$ tales que $x = x_1^{a_1} r_2$. Haciendo esto sucesivamente se concluye que $x = x_1^{a_1} \ldots x_d^{a_d}$ para algunos $a_i \in \mathbb{Z}$. Por otro lado es claro que $\Gamma_d = \{x_d^{a_d} : a_d \in \mathbb{Z}\}$. Supongamos que $\Gamma_i = \{x_i^{a_i} \ldots x_d^{a_d} : a_k \in \mathbb{Z}\}$. Como x_{i-1} genera Γ_{i-1} módulo Γ_i, entonces todo elemento de Γ_{i-1} se escribe de la forma $x_{i-1}^{a_{i-1}} x_i^{a_i} \ldots x_d^{a_d}$ con $a_k \in \mathbb{Z}$. Luego $\Gamma_{i-1} = \{x_{i-1}^{a_{i-1}} x_i^{a_i} \ldots x_d^{a_d} : a_k \in \mathbb{Z}\}$. Esto dice que $\Gamma_i = \{x_i^{a_i} \ldots x_d^{a_d} : a_k \in \mathbb{Z}\}$, para todo i, y en particular $\Gamma_i = \langle x_i, \ldots, x_d \rangle$ para todo i. Finalmente si $x_1^{a_1} \ldots x_d^{a_d} = x_1^{b_1} \ldots x_d^{b_d}$, entonces $x_1^{a_1 - b_1} \in \Gamma_2$ y por lo tanto $a_1 - b_1 = 0$, es decir $a_1 = b_1$. Si suponemos $a_k = b_k$ para $k < i$, entonces $x_i^{a_i} \ldots x_d^{a_d} = x_i^{b_i} \ldots x_d^{b_d}$ y luego $x_i^{a_i - b_i} \in \Gamma_{i+1}$, es decir $a_i = b_i$. Luego $a_i = b_i$ para todo i. $\square$

Proposición 5.5. *Todo τ-grupo Γ de longitud de Hirsch d tiene una base de Mal'cev de longitud d.*

Demostración. El caso $d = 1$ es trivial.

Si $d > 1$, sea x_d un elemento del centro de Γ tal que $\Gamma/\langle x_d \rangle$ es libre de torsión y definamos $\Gamma_d = \langle x \rangle$. El grupo Γ/Γ_d es un τ-grupo de longitud de Hirsch $d-1$ y por hipótesis inductiva existe una base de Mal'cev $(x_1\Gamma_d, \ldots, x_{d-1}\Gamma_d)$ de Γ/Γ_d. Veamos que $(x_1, \ldots, x_d)$ es base de Mal'cev de Γ. Si $\Gamma_i = \langle x_i, \ldots, x_d \rangle$, es claro que $\Gamma/\Gamma_d = \Gamma_1/\Gamma_d \geq \ldots \geq \Gamma_{d-1}/\Gamma_d \geq \Gamma_d/\Gamma_d = 1$ es la cadena de subgrupos asociada a $(x_1\Gamma_d, \ldots, x_{d-1}\Gamma_d)$. De esto se sigue que $\Gamma = \Gamma_1 \geq \ldots \geq \Gamma_d$ es una cadena central tal que x_i genera Γ_i módulo Γ_{i+1} para $i < d$. Luego como Γ_d está en el centro de Γ y x_d genera Γ_d, $(x_1, \ldots, x_d)$ es base de Mal'cev de Γ. □

Observación 5.6. En la definición de base de Mal'cev no es necesario pedir que Γ sea un τ-grupo ni que d sea su longitud de Hirsch. Si un grupo Γ tiene una base de Mal'cev de longitud d, éste resulta un τ-grupo de longitud de Hirsch igual a d.

Nos interesa extender la definición de base de Mal'cev para algunos grupos pro-p.

Si G es un grupo pro-p y $x \in G$, entonces el mapa

$$\varphi : \mathbb{Z} \to G$$

dado por $\varphi(n) = x^n$, es un homomorfismo de grupos que por la Proposición 4.17 se extiende a un único homomorfismo continuo

$$\widehat{\varphi} : \mathbb{Z}_p \to G.$$

Para $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, se define $x^\lambda = \widehat{\varphi}(\lambda)$. Esta definición extiende la definición de x^n para n entero.

Lema 5.7. *Sea G un grupo pro-p, $x \in G$ y $\lambda, \delta \in \mathbb{Z}_p$. Entonces*

- $x^{\lambda+\delta} = x^\lambda x^\delta$,
- $x^{\lambda\delta} = (x^\lambda)^\delta$,
- $(x^\lambda)^{-1} = x^{-\lambda} = (x^{-1})^\lambda$.

Demostración. La primera propiedad sigue por ser $\widehat{\varphi}$ es un homomorfismo.

Para probar la segunda, fijamos $\lambda \in \mathbb{Z}_p$. El mapa $n \to (x^\lambda)^n$ se extiende al mapa $\delta \to (x^\lambda)^\delta$. Por otro lado $(x^\lambda)^n = (\widehat{\varphi}(\lambda))^n = \widehat{\varphi}(n\lambda) = x^{\lambda n}$, y el mapa $\delta \to x^{\lambda\delta}$ es un homomorfismo continuo que extiende a $n \to x^{\lambda n}$. Por unicidad se sigue que $(x^\lambda)^\delta = x^{\lambda\delta}$.

La tercera se prueba con argumentos análogos a las dos anteriores. □

Corolario 5.8. *Si G un grupo pro-p y $x \in G$, entonces la clausura del grupo generado por x es $x^{\mathbb{Z}_p} = \{x^\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}_p\}$.*

Demostración. $x^{\mathbb{Z}_p}$ es un subgrupo cerrado pues es la imagen por $\widehat{\varphi}$ del grupo compacto $\mathbb{Z}_p$ y como $\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{Z}_p$, entonces $x^{\mathbb{Z}} = \widehat{\varphi}(\mathbb{Z})$ es denso en $x^{\mathbb{Z}_p}$. □

Corolario 5.9. *Sea G un grupo pro-p y $N \lhd_c G$ tal que $G/N \cong \mathbb{Z}_p$ como grupos abstractos. Entonces $G/N \cong \mathbb{Z}_p$ como grupos topológicos y además existe $x \in G$ tal que $G = x^{\mathbb{Z}_p}N$.*

Demostración. Si $\psi : \mathbb{Z}_p \to G/N$ es un isomorfismo, la preimagen de un subgrupo abierto, y por lo tanto de índice finito, de G/N es un subgrupo de índice finito en $\mathbb{Z}_p$ y por lo tanto abierto, pues $\mathbb{Z}_p$ es finitamente generado (generado topológicamente por un elemento). Luego ψ es continua y biyectiva y como $\mathbb{Z}_p$ y G/N son grupos compactos Hausdorff, entonces ψ es un homeomorfismo. □

Definición 5.10. Sea G un grupo pro-p. Una d-upla $(x_1,\dots,x_d)$ de elementos de G se dice base de Mal'cev de G, si existe una serie central de subgrupos cerrados $G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_d \geq G_{d+1} = 1$ tales que $G_i/G_{i+1} \cong \mathbb{Z}_p$ para $1 \leq i \leq d$ y $G_i = \overline{\langle x_i\rangle G_{i+1}}$.

Según la Proposición 4.15 y el Corolario 5.8, se tiene que $\overline{\langle x_i\rangle G_{i+1}} = x_i^{\mathbb{Z}_p} G_{i+1}$. Luego es fácil ver que la serie $G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_d \geq G_{d+1} = 1$ de la definición está completamente determinada por la base.

Proposición 5.11. *Sea $(x_1,\dots,x_d)$ una base de Mal'cev de un grupo pro-p G. Entonces todo elemento $x \in G$ se escribe de manera única como*

$$x = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_p. \tag{5.2}$$

Además, si $G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_d \geq G_{d+1} = 1$ es la serie asociada a dicha base, según la Definición 5.10, entonces

$$G_i = \{x_i^{\lambda_i} \dots x_d^{\lambda_d} : \lambda_k \in \mathbb{Z}_p\}. \tag{5.3}$$

Demostración. La demostración es esencialmente la misma que la de la Proposición 5.4. Para ver la unicidad de la expresión (5.2), basta observar que $x_i^{\lambda} \notin G_{i+1}$ si $\lambda \neq 0$. Si esto no es cierto, entonces el conjunto $\{\lambda : x_i^{\lambda} \in G_{i+1}\}$ es un subgrupo cerrado no trivial de $\mathbb{Z}_p$, pues es el núcleo de la composición $\lambda \mapsto x_i^{\lambda} G_{i+1}$ y por lo tanto es de la forma $\lambda_0\mathbb{Z}_p$ para algún $\lambda_0 \neq 0$. Pero $\lambda_0\mathbb{Z}$ tiene índice $|\lambda_0|_p^{-1}$ y esto implica que G_i/G_{i+1} tiene un subgrupo de índice finito, lo cual es absurdo pues G_i/G_{i+1} es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. ☐

Corolario 5.12. *Sea G un grupo pro-p con base de Mal'cev $(x_1,\dots,x_d)$. Entonces el mapa $\varphi : \mathbb{Z}_p^d \to G$ dado por $(\lambda_1,\dots,\lambda_d) \mapsto x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que este mapa es biyectivo. Como $\mathbb{Z}_p^d$ y G son compactos, entonces basta ver que este mapa es continuo. Esto es así pues $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_d$, donde $\varphi_i((\lambda_1,\dots,\lambda_d)) = x_i^{\lambda_i}$ y los mapas φ_i son continuos. ☐

Definición 5.13. La d-upla de coordenadas de un elemento $x \in G$ respecto de la base $(x_1,\dots,x_d)$ es la d-upla $(\lambda_1(x),\dots,\lambda_d(x))$ tal que $x = x_1^{\lambda_1(x)} \dots x_d^{\lambda_d(x)}$.

Proposición 5.14. *Sea Γ un τ-grupo de longitud de Hirsch d y sea $(x_1,\dots,x_d)$ una base de Mal'cev de Γ con serie asociada $\Gamma = \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \dots \geq \Gamma_d \geq \Gamma_{d+1} = 1$. Sean $G = \widehat{\Gamma_p}$ y $G_i = \overline{\Gamma_i}$. Entonces $(x_1,\dots,x_d)$ es base de Mal'cev del grupo pro-p G y $G = G_1 \geq \dots \geq G_d \geq G_{d+1} = 1$ es la serie central asociada.*

Demostración. Es claro que G_i es un subgrupo normal cerrado de G, y usando argumentos de densidad y continuidad se obtiene que $[G, G_i] \subseteq G_{i+1}$. Además, para cada i tenemos $G_i = \overline{\Gamma_i} = \overline{x_i^{\mathbb{Z}}\Gamma_{i+1}} = x_i^{\mathbb{Z}_p}\overline{\Gamma_{i+1}} = x_i^{\mathbb{Z}_p} G_{i+1}$. Luego $(x_1,\dots,x_d)$ es base de Mal'cev de G y $G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_d \geq G_{d+1} = 1$ es la serie central asociada. ☐

De ahora en más, G es un grupo pro-p con base de Mal'cev $(x_1,\dots,x_d)$ y con serie central asociada $G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_d \geq G_{d+1} = 1$.

Definición 5.15. Sea H un subgrupo de G de índice finito. Una d-upla $(h_1,\dots,h_d)$ de elementos de H se dice base buena de H si para todo $i = 1,\dots,d$ se tiene $H \cap G_i = h_i^{\mathbb{Z}_p}(H \cap G_{i+1})$.

Proposición 5.16. *Sea H un subgrupo de G con base buena $(h_1,\dots,h_d)$. Entonces:*

- $h_i \in G_i \setminus G_{i+1}$ *y* $H \cap G_i = \overline{\langle h_i, \ldots, h_d \rangle}$ *para* $1 \leq i \leq d$. *En particular* H *es un subgrupo cerrado.*
- $(h_1, \ldots, h_d)$ *es una base de Mal'cev de* H *y por lo tanto todo elemento* $x \in H$ *puede escribirse de manera única como* $x = h_1^{\lambda_1} \ldots h_d^{\lambda_d}$ *con* $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p$.

Demostración. Para la primera parte la prueba es por inducción. Por definición se tiene que $h_i \in G_i$ para todo i. Además, para cada i tenemos que $[G_i : G_i \cap H] \leq [G : H] < \infty$. Si para algún i tenemos que $h_i \in G_{i+1}$, entonces $H \cap G_i = H \cap G_{i+1}$ y por lo tanto $[G_i : H \cap G_{i+1}] = [G_i : H \cap G_i] < \infty$, pero $[G_i : H \cap G_{i+1}] = [G_i : G_{i+1}][G_{i+1} : H \cap G_{i+1}] = \infty$. Por otro lado, $H \cap G_d = \overline{\langle h_d \rangle}$ y si asumimos que $H \cap G_{i+1} = \overline{\langle h_{i+1}, \ldots, h_d \rangle}$, entonces $H \cap G_i = h_i^{\mathbb{Z}_p} \overline{\langle h_{i+1}, \ldots, h_d \rangle} = \overline{\langle h_i, \ldots, h_d \rangle}$.

Para probar la segunda parte definimos $H_i = H \cap G_i$. e Entonces $H = H_1 \geq H_2 \geq \ldots \geq H_d \geq H_{d+1}$ es una serie central de subgrupos cerrados de H. Además

$$H_i/H_{i+1} = (H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) = (H \cap G_i)/((H \cap G_i) \cap G_{i+1}) \cong$$
$$\cong (H \cap G_i)G_{i+1}/G_{i+1} = h_i^{\mathbb{Z}_p} G_{i+1}/G_{i+1} \cong h_i^{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}_p$$

Finalmente, por definición se tiene $H_i = h_i^{\mathbb{Z}_p} H_{i+1}$. Luego $(h_1, \ldots, h_d)$ es base de Mal'cev de H. □

Proposición 5.17. *Todo subgrupo abierto* H *de* G *tiene una base buena* $(h_1, \ldots, h_d)$. *Además* $(h'_1, \ldots, h'_d)$ *es base buena de* H *si y sólo si existen* $w_i \in H \cap G_{i+1}$ *y* $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p^*$ *tales que* $h'_i = h_i^{\lambda_i} w_i$ *para todo* i.

Demostración. Para la primera parte observemos que por ser H un subgrupo cerrado de índice finito, entonces $[G_i : H \cap G_i] \leq [G : H] < \infty$. Además para cada i tenemos $(H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) \cong (H \cap G_i)G_{i+1}/G_{i+1}$ que es subgrupo cerrado de G_i/G_{i+1} de índice finito, pues $(H \cap G_i)G_{i+1}$ es cerrado y por lo anterior tenemos que $[G_i : (H \cap G_i)G_{i+1}] < \infty$. Luego $(H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) \cong \mathbb{Z}_p$, y por lo tanto existe $h_i \in H \cap G_i$ tal que $(H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) = h_i^{\mathbb{Z}_p}(H \cap G_{i+1})$ (Corolario 5.9). Luego $H \cap G_i = h_i^{\mathbb{Z}_p}(H \cap G_{i+1})$. Finalmente la d-upla $(h_1, \ldots, h_d)$ es una base buena de H.

Supongamos que $(h'_1, \ldots, h'_d)$ es otra base buena de H. Al ser ${h'_i}^{\mathbb{Z}_p}(H \cap G_{i+1}) = {h_i}^{\mathbb{Z}_p}(H \cap G_{i+1})$, entonces existen $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p$ y $w_i \in H \cap G_{i+1}$ tales que $h'_i = h_i^{\lambda_i} w_i$. Intercambiando los roles de h_i y h'_i se obtienen $\delta_i \in \mathbb{Z}_p$ y $k_i \in H \cap G_{i+1}$ tales que $h_i = {h'_i}^{\delta_i} k_i$. Así $h_i = h_i^{\delta_i \lambda_i} r_i$ para algún $r_i \in H \cap G_{i+1}$. Luego $h_i^{1-\delta_i\lambda_i} \in H \cap G_{i+1}$, lo cual ocurre sólo cuando $1 = \delta_i \lambda_i$, por lo tanto $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p^*$.

Recíprocamente, si $(h'_1, \ldots, h'_d)$ es una d-upla en las condiciones de la proposición, entonces ${h'_i}^{\mathbb{Z}_p} H \cap G_{i+1} = h_i^{\mathbb{Z}_p} H \cap G_{i+1}$ y por lo tanto $H \cap G_i = {h'_i}^{\mathbb{Z}_p} H \cap G_{i+1}$. Luego $(h'_1, \ldots, h'_d)$ es base buena de H. □

Proposición 5.18. *Una* d*-upla* $(h_1, \ldots, h_d)$ *de elementos de* G *es base buena para algún subgrupo de* G *de índice finito si y sólo si*

$$h_i \in G_i \setminus G_{i+1} \quad y \quad [h_i, h_j] \in \overline{\langle h_{j+1}, \ldots, h_d \rangle} \qquad si\ i \leq j \leq d.$$

Demostración. La condición necesaria se sigue de la Proposición 5.16.

El subgrupo $H = \overline{\langle h_1, \ldots, h_d \rangle}$ es cerrado y de índice finito. En efecto, $[G_i : H \cap G_i] = [G_i : (H \cap G_i)G_{i+1}][(H \cap G_i)G_{i+1} : H \cap G_i] = [G_i : (H \cap G_i)G_{i+1}][G_{i+1} : H \cap G_{i+1}]$. Por ser $h_i \in G_i \setminus G_{i+1}$, entonces $[G_i : (H \cap G_i)G_{i+1}] < \infty$. Luego iterando la fórmula anterior se tiene que $[G : H] < \infty$.

Veamos que $H \cap G_i = \overline{\langle h_i, \ldots, h_d \rangle}$. La condición $h_i \in G_i \setminus G_{i+1}$ y el hecho de que G_i es cerrado para todo i implican que $\overline{\langle h_i, \ldots, h_d \rangle} \leq H \cap G_i$. Por otro lado, como

$[h_i, h_j] \in \overline{\langle h_{j+1}, \ldots, h_d \rangle}$ si $i \leq j \leq d$, se sigue que todo $h \in H$ puede escribirse como $h = h_1^{\lambda_1} \ldots h_d^{\lambda_d}$ con $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p$. Si además $h \in G_i$, entonces $\lambda_k = 0$ si $k < i$, pues $h_k \in G_k \setminus G_{k+1}$ para todo k. Luego $H \cap G_i = \overline{\langle h_i, \ldots, h_d \rangle} = h_i^{\mathbb{Z}_p} \overline{\langle h_{i+1}, \ldots, h_d \rangle} = h_i^{\mathbb{Z}_p} H \cap G_{i+1}$, donde en la segunda igualdad hemos usado nuevamente que $[h_i, h_j] \in \overline{\langle h_{j+1}, \ldots, h_d \rangle}$ si $i \leq j \leq d$. □

Ahora a un elemento $x \in G$ le asociamos sus coordenadas $(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_d(x))$ respecto de la base $(x_1, \ldots, x_d)$. Así, por ejemplo, a x_i le corresponde $(0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)$. Si $(h_1, \ldots, h_d)$ es un base buena de algún subgrupo de G, entonces las coordenadas de h_i son de la forma $(0, \ldots, 0, \underbrace{\lambda_{ii}}_{i}, \lambda_{i(i+1)}, \ldots, \lambda_{id})$. Luego a cada base buena $(h_1, \ldots, h_d)$ se le puede asociar una matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1d} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \ldots & \lambda_{2d} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \ldots & \lambda_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{dd} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

con $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_p$ y tal que $\prod_{i=1}^d \lambda_{ii} \neq 0$ según la Proposición 5.16.

De ahora en más denotaremos por $\mathrm{Tr}(d, \mathbb{Z}_p)$ al conjunto de matrices triangulares superiores de tamaño d con entradas en $\mathbb{Z}_p$.

Proposición 5.19. *Si H es un subgrupo cerrado de G de índice finito, es decir abierto, con base buena $(h_1, \ldots, h_d)$ y matriz asociada (5.4), entonces $[G : H] = \prod_{i=1}^d |\lambda_{ii}|_p^{-1}$.*

Demostración. En efecto,

$$[G_i : H_i] = [G_i : H_i G_{i+1}][H_i G_{i+1} : H_i] = [G_i : x_i^{\lambda_{ii}} G_{i+1}][G_{i+1} : H_{i+1}] = |\lambda_{ii}|_p^{-1} [G_{i+1} : H_{i+1}],$$

y por lo tanto $[G : H] = [G_1 : H_1] = \prod_{i=1}^d |\lambda_{ii}|_p^{-1}$. □

5.2. Integrales p-ádicas y las funciones zeta locales.

Recordemos que la medida de Haar en el grupo compacto $\mathbb{Z}_p$ es la única medida boreliana positiva μ con las siguientes propiedades:

- μ es invariante por traslaciones, es decir, $\mu(x + S) = \mu(S)$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$ y para todo S boreliano.
- $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

En particular, $\mu(p^k \mathbb{Z}_p) = p^{-k}$ pues $\mathbb{Z}_p$ es la unión de las p^k coclases distintas de $p^k \mathbb{Z}_p$ que son traslaciones de $p^k \mathbb{Z}_p$.

La medida de Haar en $\mathrm{Tr}(d, \mathbb{Z}_p)$ es la medida producto identificando a $\mathrm{Tr}(d, \mathbb{Z}_p)$ como $\mathbb{Z}_p^{d(d+1)/2}$.

Proposición 5.20. *Para cada subgrupo cerrado H de G de índice finito, sea $\mathcal{M}(H) \subseteq Tr(d, \mathbb{Z}_p)$ el conjunto de todas las matrices triangulares superiores sobre $\mathbb{Z}_p$ que se obtienen de bases buenas para H como en (5.4). Entonces $\mathcal{M}(H)$ es un subconjunto abierto de $Tr(d, \mathbb{Z}_p)$ con medida de Haar $\mu(\mathcal{M}(H)) = (1 - p^{-1})^d \prod_{i=1}^d |\lambda_{ii}|^i$.*

Para la demostración de la Proposición 5.20 necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.21. *Sea G un grupo pro-p con base de Mal'cev $(x_1,\dots,x_d)$ y sea $\varphi:\mathbb{Z}_p^d\to G$ el mapa dado por $(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\mapsto x_1^{\lambda_1}\dots x_d^{\lambda_d}$ y sea H un subgrupo abierto de G. Entonces $\varphi^{-1}(H)$ y $\varphi^{-1}(gH)$ tienen igual medida en $\mathbb{Z}_p^d$, para todo $g\in G$, y el valor de esta medida es $[G:H]$.*

Demostración. Si $d=1$ la afirmación es claramente cierta.

Para $d>1$ sea $(h_1,\dots,h_d)$ una base buena de H y denotemos $H_i=G_i\cap H$. Entonces

$$\varphi^{-1}(gH)=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_d):x_1^{\lambda_1}\dots x_d^{\lambda_d}\in gh_1^{\mathbb{Z}_p}H_2\},$$

y si $g=x_1^{\delta_1}\dots x_d^{\lambda_d}$ y $h_i=x_i^{\lambda_{ii}}\dots x_d^{\lambda_{dd}}$ es fácil ver que para cada $\lambda\in\mathbb{Z}_p$ existe un $g_\lambda\in G_2$ tal que $gh_1^\lambda=x_1^{\delta_1+\lambda_{11}\lambda}g_\lambda$ y que la aplicación $\lambda\mapsto g_\lambda$ es continua. En efecto, $g_\lambda=x_1^{-\delta-\lambda_{11}\lambda}gh_1^\lambda$. Luego

$$\varphi^{-1}(gH)=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_d):\lambda_1=\delta_1+\lambda_{11}\lambda,\ x^{\lambda_2}\dots x_d^{\lambda_d}\in g_\lambda H_2,\ \lambda\in\mathbb{Z}_p\}.$$

Por hipótesis inductiva los conjuntos $\{(\lambda_2,\dots,\lambda_d):x_2^{\lambda_2}\dots x_d^{\lambda_d}\in g_\lambda H_2\}$ tienen todos igual medida independientemente de λ y g_λ. Sean $a_1H_2,\dots,a_rH_2$ las distintas coclases de H_2 y sea $A_i=\{\lambda\in\mathbb{Z}_p:g_\lambda\in a_iH\}$. Como $\lambda\mapsto g_\lambda$ es continua, entonces los conjuntos A_i son abiertos, disjuntos dos a dos, y

$$\varphi^{-1}(gH)=\bigcup_{i=1}^r(\delta_1+\lambda_{11}A_i)\times a_iH_2.$$

Más aún, los r conjuntos de esta unión son disjuntos dos a dos y tienen medida $|\lambda_{ii}|\mu(A_i)[G_2:H_2]^{-1}$, por lo tanto

$$\mu(\varphi^{-1}(gH))=\sum_{i=1}^r|\lambda_{11}|_p\mu(A_i)[G_2:H_2]^{-1}=|\lambda_{11}|_p[G_2:H_2]^{-1},$$

y este valor no depende de g. Luego $\mu(\varphi^{-1}(gH))=[G:H]$ para todo $g\in G$. □

Demostración de la Proposición 5.20. Sea $(g_1,\dots,g_d)$ una base buena de H. Según la Proposición 5.17 se tiene que $(h_1,\dots,h_d)$ es base buena de H si y sólo si $h_i\in g_i^{\mathbb{Z}_p^*}H_{i+1}$. Por el Corolario 5.12 aplicado a H_i con base de Mal'cev $(g_i,\dots,g_d)$ se obtiene que $g_i^{\mathbb{Z}_p^*}H_{i+1}$ es un subconjunto abierto de H_i y por lo tanto es también subconjunto abierto de G_i. Nuevamente por el Corolario 5.12 aplicado a G_i con base de Mal'cev $(x_i,\dots,x_d)$ resulta que el conjunto $\{(\lambda_i,\dots,\lambda_d):x_i^{\lambda_i}\dots x_d^{\lambda_d}\in g_i^{\mathbb{Z}_p^*}H_{i+1}\}$ es abierto en $\mathbb{Z}_p^{d-i+1}$. Puesto que $\mathcal{M}(H)$ es un producto de conjuntos de este tipo, entonces es abierto en $\mathrm{Tr}(d,\mathbb{Z}_p)$. La medida de $\mathcal{M}(H)$ está dada entonces por

$$\mu(\mathcal{M}(H))=\prod_{i=1}^d\mu(\{(\lambda_i,\dots,\lambda_d):x_i^{\lambda_i}\dots x_d^{\lambda_d}\in g_i^{\mathbb{Z}_p^*}H_{i+1}\}).$$

Consideremos ahora el mapa $\lambda\mapsto g_\lambda$ del lema anterior usando G_i en vez de G y G_{i+1} en vez de G_2. Entonces procediendo como en la demostración del lema se obtiene que

$$\begin{aligned}\mu(\{(\lambda_i,\dots,\lambda_d):x_i^{\lambda_i}\dots x_d^{\lambda_d}\in g_i^{\mathbb{Z}_p^*}H_{i+1}\}) &= |\lambda_{ii}|_p\mu(\mathbb{Z}_p^*)[G_{i+1}:H_{i+1}]\\ &= (1-p^{-1})|\lambda_{ii}|_p[G_{i+1}:H_{i+1}].\end{aligned}$$

Luego

$$\mu(\mathcal{M}(H))=(1-p^{-1})^d\prod_{i=1}^d|\lambda_{ii}|_p[G_{i+1}:H_{i+1}],$$

y usando que $[G_i : H_i] = \prod_{j=i}^{d} |\lambda_{jj}|_p$ obtenemos finalmente que

$$\mu(\mathcal{M}(H)) = (1-p^{-1})^d \prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^i.$$

$\square$

Proposición 5.22. *Sea Γ un τ-grupo con longitud de Hirsch igual a d y sea G su completación por-p. Entonces*

$$\zeta_{\Gamma,p}(s) = \zeta_G(s) = (1-p^{-1})^{-d} \int_{\mathcal{M}} \prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^{s-i}, \tag{5.5}$$

donde $\mathcal{M}$ es la unión de todos los $\mathcal{M}(H)$ con H subgrupo de G de índice finito.

Demostración. Usando las Proposiciones 5.19 y 5.20 se tiene

$$\begin{aligned}
[G:H]^{-s} &= \prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^s \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^{s-i}\right)\left(\prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^{i}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^{s-i}\right) \mu(\mathcal{M}(H))(1-p^{-1})^{-d} \\
&= \frac{1}{(1-p^{-1})^d} \int_{\mathcal{M}(H)} |\lambda_{11}|_p^{s-1} \dots |\lambda_{dd}|_p^{s-d} d\mu.
\end{aligned}$$

Luego, por el Corolario 5.2 se tiene que

$$\zeta_{\Gamma,p}(s) = \zeta_G(s) = \sum_{H \leq_f G} [G:H]^{-s} = \frac{1}{(1-p^{-1})^d} \int_{\mathcal{M}} |\lambda_{11}|_p^{s-1} \dots |\lambda_{dd}|_p^{s-d} d\mu.$$

$\square$

5.3. Un teorema de Denef y la racionalidad de los factores locales.

A partir de la representación integral (5.5), la racionalidad de los factores locales de la función zeta de un τ-grupo se sigue de un teorema de Denef [2]. En esta última sección sólo presentamos este resultado.

Consideremos ahora la medida de Haar en $\mathbb{Z}_p^n$ y denotemos por ν_p a la valuación p-ádica de $\mathbb{Z}_p$. Para una función $f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Z}_p$ tal que $\nu_p(f(X))$ toma constantemente el valor k en el conjunto medible $S \subset \mathbb{Z}_p^n$ se tiene

$$\int_S |f(X)|_p^s d\mu = \mu(S) p^{-ks}.$$

Si $\nu_p(f(X))$ no es constante, dividiendo el dominio como unión disjunta de los conjuntos $V_f(k) = \{X \in \mathbb{Z}_p^n : \nu_p(f(X)) = k\}$, resulta que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(X)|_p^s d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(V_f(k)) p^{-ks}.$$

Para enunciar el Teorema de Denef necesitamos algunas definiciones de la lógica y la teoría de conjuntos.

El lenguaje de primer orden L de $\mathbb{Q}_p$ consiste de los símbolos lógicos usuales, incluyendo los cuantificadores $\forall, \exists$, símbolos para variables, un símbolo constante para cada elemento de $\mathbb{Q}_p$, símbolos de relación binaria " $+$ " y " $\cdot$ ", y símbolos de relación " $=$ " y "$|$" (donde $x|y$ se interpreta como $\nu_p(x) \leq \nu_p(y)$). Una fórmula de L es una expresión con sentido construida usando sólo estos símbolos. Un subconjunto $V \subseteq \mathbb{Q}_p^m$ se dice definible si existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ de L, que consiste en exactamente m variables x_i, tal que

$$V = \{X \in \mathbb{Q}_p^m : \varphi(X) \text{ es verdad}\}.$$

Teorema 5.23 (Denef)**.** *Sea $V \subseteq \mathbb{Z}_p^m$ un subconjunto definible de $\mathbb{Q}_p^m$ y sean h y k polinomios en m variables sobre $\mathbb{Z}_p$. Entonces existen polinomios P y Q sobre $\mathbb{Q}$ tales que*

$$\int_V |h(X)|_p |k(X)|_p^s d\mu = \frac{P(p^{-s})}{Q(p^{-s})},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ positivo suficientemente grande.

Para aplicar el Teorema de Denef observamos que la expresión (5.5) puede reescribirse:

$$\begin{aligned} \zeta_{\Gamma,p}(s) &= (1-p^{-1})^{-d} \int_{\mathcal{M}} \prod_{i=1}^{d} |\lambda_{ii}|_p^{s-i} d\mu \\ &= (1-p^{-1})^{-d} \int_{\mathcal{M}} |\prod_{i=1}^{d} \lambda_{ii}^{d-i}|_p| \prod_{i=1}^{d} \lambda_{ii}|_p^{s-d} d\mu. \end{aligned}$$

El integrando de la última expresión es del tipo que aparece en el Teorema de Denef (cambiando s por $s-d$). Por lo tanto sólo hay que probar que el conjunto $\mathcal{M}$ es definible para probar el Teorema 3.12, que reenunciamos a continuación.

Teorema 5.24. *Sea Γ es un τ-grupo y p un número primo. Entonces existen polinomios P y Q con coeficientes enteros tales que*

$$\zeta_{\Gamma,p}(s) = \frac{P(p^{-s})}{Q(p^{-s})}.$$

Para probar que $\mathcal{M}$ es un conjunto definible necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 5.25 (P. Hall)**.** *Sea Γ un τ-grupo con base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_d)$ e identifiquemos Γ con $\mathbb{Z}^d$ usando esta base. Entonces:*

- *El mapa $\varphi : \Gamma \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z} \to \Gamma = \mathbb{Z}^d$ dado por $\varphi(\gamma, k) = \gamma^k$ para $\gamma \in \Gamma$ y $k \in \mathbb{Z}$ es polinomial de $\mathbb{Z}^{r+1}$ a $\mathbb{Z}^r$ con coeficientes racionales.*
- *El mapa $\psi : \Gamma \times \Gamma = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \Gamma = \mathbb{Z}^d$ dado por $\psi(\gamma, \delta) = \gamma\delta$ para $\gamma, \delta \in \Gamma$ es polinomial de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ en $\mathbb{Z}^d$ con coeficientes racionales.*

Estos mismos polinomios extienden los mapas anteriores a $\varphi : \widehat{\Gamma}_p \times \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^d \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^d$ y $\psi : \widehat{\Gamma}_p \times \widehat{\Gamma}_p = \mathbb{Z}_p^d \times \mathbb{Z}_p^d \to \widehat{\Gamma}_p = \mathbb{Z}_p^d$.

Según la Proposición 5.18 se tiene que una matriz triangular superior M de filas $M_i = (0, \ldots, 0, \lambda_{ii}, \lambda_{i(i+1)}, \ldots, \lambda_{id})$ está en $\mathcal{M}$ si y sólo si

- $\prod_{i=1}^d \lambda_{ii} \neq 0$,
- $[h_i, h_j] \in \overline{\langle h_{j+1}, \ldots, h_d \rangle}$ si $i \leq j$, donde $h_i = x_i^{\lambda_{ii}} \ldots x_d^{\lambda_{id}}$.

La primera condición está claramente escrita en el lenguaje de primer orden de $\mathbb{Q}_p$. La segunda condición equivale a la siguiente:

- $\exists \beta_{j+1}, \ldots, \beta_d \in \mathbb{Z}_p : [h_i, h_j] = \varphi(h_{j+1}, \beta_{j+1}) \ldots \varphi(h_r, \beta_r)$.

Pero $[h_i, h_j] = \psi(\psi(h_i, h_j), \psi(\varphi(h_i, -1), \varphi(h_j, -1))$ es polinomial. Por lo tanto esta última condición también puede escribirse en el lenguaje de primer orden de $\mathbb{Q}_p$. Luego $\mathcal{M}$ es definible, como queríamos demostrar.

Referencias

[1] Apostol T., *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Graduate Texts in Mathematics v. **41**, Springer 1976.

[2] Denef J., *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety*, Invent. Math. **77**, 1–23 (1984).

[3] Grunewald F., Segal D. y Smith G.C., *Subgroups of finite index in nilpotent groups*, Invent. Math. **93**, 185–223 (1988).

[4] Dixon J., du Sautoy M., Mann A. y Segal D., *Analytic pro-p groups*, Cambridge studies in advanced mathematics v. **61**, Cambridge University Press 1991.

[5] du Sautoy M., *Finitely generated groups, p-adic analytic groups and Poincaré series*, Ann. Math. **137**, 639–670 (1993).

[6] du Sautoy M., *Zeta functions of groups: the quest for order versus the flight from ennui.* In Groups St. Andrews 2001 in Oxford, Vol I, number 304 in London Math. Soc. Lectures Notes Series, 150–189 (2002).

[7] du Sautoy M. y Grunewald F., *Analytic properties of zeta functions and subgroup growth*, Ann. Math. **152**, 793–833 (2000).

[8] du Sautoy M. y Grunewald F., *Zeta functions of groups and rings*, International Congress of Mathematicians, Vol II, 131–149 Eur. Math. Soc., Zurich 2006.

[9] du Sautoy M. y Segal D., *Zeta functions of groups.* In New horizons in pro-p groups, vol 184 of Progress In Mathematcis, 249–286. Birkhaüser, Boston, 2000.

[10] du Sautoy M. y Woodward L., *Zeta funcions of groups and rings*, Lecture Notes in Mathematcis 1925. Springer 2008.

[11] Lubotzky A. y Mann A., *On groups of polynomial subgroup growth*, Invent. Math. **104**, 521–533 (1991).

[12] Lubotzky A., Mann A. y Segal D., *Finitely generated groups of polynomial subgroup growth*, Israel J. Math. **82**, 363–371 (1993).

[13] Lubotzky A. y Segal D., *Subgroup growth*, vol **212**, Progress in Mathematics, Birkhaüser, Basel, 2003.

[14] Ivorra Castillo C., *Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números.*

[15] Segal D., *Polycyclic groups*, Cambridge tracts in mathematics vol **82**. Cambridge University Press 1983.

CIEM-FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba, República Argentina.

E-mail address: diegosulca05@yahoo.com.ar, ptriao@famaf.unc.edu.ar