ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Alicia N. García - Walter N. Dal Lago

CONTENIDO

PROLOGO

Nuestro objetivo al encarar la elaboración de estas notas fue intentar brindar un material accesible en español sobre los conceptos y resultados básicos de la topología general, pensando en aquellos estudiantes que necesitan un curso introductorio que incluya los primeros contenidos de esta área de la Matemática.

En los últimos años hemos dictado la asignatura Elementos de Topología del Profesorado en Matemática de FaMAF, experiencia que nos ha permitido observar algunas necesidades y dificultades que tienen los estudiantes de esta carrera. Es por eso que hemos tratado de extremar la claridad en el desarrollo de la teoría, procurando que las definiciones y resultados expuestos sean fortalecidos con ejemplos simples y concretos.

El material que presentamos se puede desarrollar en un curso teórico-práctico de aproximadamente 60 horas. Lo hemos ordenado en capítulos según su temática.

En el capítulo 1 hacemos una introducción sobre qué es la topología, básicamente comparando esta rama de la Matemática con la bien conocida geometría euclídea. Además incorporamos una breve reseña histórica sobre el origen y la evolución de esta teoría. Asimismo planteamos algunos problemas simples que consideramos interesantes como motivación en el desarrollo de estas notas.

A modo de aproximación a los espacios topológicos, en el capítulo 2 introducimos las nociones de espacio métrico y de función continua entre estos espacios y probamos algunos resultados clásicos.

En el capítulo 3 presentamos las definiciones de topología, espacio topológico y los conceptos básicos de la teoría, así como los primeros teoremas de ésta. Terminamos este capítulo considerando las funciones continuas entre espacios topológicos y en particular los homeomorfismos, los que nos permiten expresar la idea de invariante topológico.

Los conceptos de base de una topología, de familia de entornos de un punto y de subespacio topológico son incorporados en el capítulo 4, donde damos además varios resultados sobre espacios separables y espacios que satisfacen el primer o el segundo axioma de numerabilidad.

En los capítulos 5 y 6 analizamos las principales características y propiedades de los espacios conexos, arco conexos y compacto, respectivamente. Por otra parte, en el capítulo 7 damos las definiciones de espacio producto y espacio cociente, puntualizamos diversos resultados acerca de ellos y mostramos una serie de ejemplos clásicos que permiten visualizar estos espacios.

Finalmente, en el capítulo 8 hacemos un breve desarrollo del concepto de sucesión y sus aplicaciones, para concluir en el capítulo 9 con el planteo y solución de algunos problemas paradigmáticos de la topología.

Agradecemos a Nancy Moyano por la dedicación puesta en el procesamiento del texto y a Marcos Salvai por la colaboración que le prestara para salvar las dificultades suscitadas. Hacemos extensivo el agradecimiento a Mónica Bocco y Gustavo García por la ayuda brindada para la elaboración de los dibujos que ilustran estas notas.

Por último, queremos agradecer a los alumnos del curso de Elementos de Topología del corriente año, por la prolija lectura de los originales de estas notas y la detección de errores cometidos en su escritura, lo que ha sido de gran ayuda para la mejor y más cuidadosa presentación de este trabajo.

Córdoba, agosto de 2000

Alicia N. García
Walter N. Dal Lago

CAPITULO 1
INTRODUCCIÓN

1.1 ¿Qué es la topología?

Sabemos que topos y logos provienen del griego y sus significados son:

Topos: superficie (lugar)

Logos: estudio (conocimiento).

Por lo tanto, etimológicamente topología significa "estudio de superficies". Sin embargo esto es inadecuado para un claro entendimiento de lo que actualmente es esta rama de la matemática. Lograr una comprensión de lo que significa topología no es posible con una definición concisa que podamos dar ahora. Quizás la mejor forma de apreciar qué es la topología es comparándola con la geometría por ser ambas similares en varios aspectos. Como la geometría euclídea es más familiar para nosotros, compararemos la topología con ella y de ahora en más geometría significará geometría euclídea.

Etimológicamente geometría significa "medida de la tierra" (*geo*: tierra, *metreo*: medir). Como se entiende hoy en día, la geometría puede ser definida rápidamente como el "estudio de las propiedades geométricas de los objetos". Esto lleva inmediatamente a decir qué se entiende por:

"objeto" y "propiedad geométrica".

Desde la escuela ya conocemos que en geometría tratamos con rectas, planos, triángulos, circunferencias, cubos, cilindros, etc. Estos son algunos de los objetos estudiados por la geometría. Mirándolos, a los fines de describirlos, podríamos decir que los objetos que estudia la geometría son los conjuntos. Pero esta simple descripción, nos hace perder el espíritu de la geometría puesto que de la teoría de conjuntos se sabe que existen biyecciones entre los conjuntos mencionados anteriormente. Esto dice, por ejemplo, que para la teoría de conjuntos no hay diferencia entre una circunferencia y una recta o un triángulo y sabemos que esto no es así para la geometría. Por lo tanto, no podemos considerar a nuestros objetos como meros conjuntos. Debemos considerar alguna "estructura adicional" que permita distinguir entre, por ejemplo, una recta y un triángulo o una circunferencia. Así los objetos geométricos son subconjuntos del espacio euclídeo y la estructura adicional sobre ellos será aquella que deriva de la del espacio ambiente (cuyos ingredientes son los conceptos de distancia y de colinealidad). Así, un objeto geométrico es un par (conjunto, estructura).

Para continuar, es suficiente que tengamos la idea intuitiva de objeto geométrico como cuerpo físico con forma y tamaño definido.

Queremos ahora explicar lo que se entiende por "propiedades geométricas" de un objeto. Sabemos que en geometría trabajamos con área, volumen, curvatura, etc., de los objetos bajo estudio. Estas son algunas de las propiedades geométricas. Notemos que nunca miramos el color de estos objetos, ni tampoco consideramos su olor. Entonces, ¿qué quiere decir propiedades geométricas?, ¿cuáles son los atributos de naturaleza geométrica de los objetos?. Una respuesta rápida a esto es: "aquellas propiedades que en última instancia dependen sólo de la distancia entre puntos de los objetos". Por ejemplo, el área de un rectángulo, el volumen de un cubo dependen de las longitudes de sus lados y por lo tanto de la distancia entre puntos. Luego, área y volumen son propiedades geométricas, no así el color ni el olor que no tienen nada que ver con la forma o el tamaño del objeto. ¿Cómo precisamos este criterio?.

Recordemos el concepto de congruencia de triángulos que traemos de la escuela:
"Dos triángulos son congruentes si uno de ellos puede ser superpuesto sobre el otro". Esto se extiende de la siguiente forma.

Dos objetos A y B son *congruentes* si existe una función biyectiva $f : A \to B$ que preserva distancia (esto es, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall x, y \in A$). Una tal f se llama *congruencia o isometría.*

Es fácil ver que "congruencia" es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los objetos geométricos y por lo tanto ellos pueden ser agrupados en clases de equivalencia disjuntas que llamaremos "clases de congruencia". Una propiedad de un objeto se dice *invariante por congruencia* (o *preservada por congruencia*) si cuando un objeto tiene la propiedad, también la tiene cualquier otro congruente a él. Por ejemplo, el área de un triángulo es una tal propiedad. Otro ejemplo, es la propiedad de ser triángulo isósceles. El color y el olor de los objetos no son invariantes por congruencia.

Como una congruencia preserva distancias, también preserva cualquier propiedad que dependa de distancias.

Ahora podemos precisar "propiedades geométricas" como aquellas propiedades que son invariantes por congruencias. Con esta definición hay que ver luego que volumen, área, curvatura son propiedades geométricas mientras que color y olor no lo son.

Hemos precisado la noción de "propiedades geométricas" a través de una adecuada relación de equivalencia (congruencia). En geometría nos interesamos sólo en las propiedades geométricas de los objetos. Esta situación es típica en matemática. Nosotros a menudo trabajamos con ciertos "objetos", cuya definición cambia de una rama de estudio a otra. Estos objetos son clasificados en clases disjuntas por una adecuada relación de equivalencia (que depende del tipo de estudio) y uno se preocupa sólo de aquellas propiedades de los objetos que son invariantes bajo esta clasificación.

Ejemplos:

i) Teoría de conjuntos. Objetos: conjuntos (sin estructura adicional). Relación de equivalencia: equipolencia (dos conjuntos son equipolentes si existe una biyección entre ellos). Ejemplo de propiedad invariante: cardinal ("número de elementos") de un conjunto.

ii) Teoría de grupos. Objetos: grupos (conjuntos con determinada estructura). Relación de equivalencia: la definida por los isomorfismos de grupos (biyecciones que preservan las estructuras). Ejemplo de propiedad invariante: orden de los elementos.

iii) Algebra lineal. Objetos: espacios vectoriales (conjuntos con determinadas estructuras). Relación de equivalencia: la definida por los isomorfismos de espacios vectoriales. Ejemplo de propiedad invariante: dimensión de un espacio vectorial.

iv) Geometría. Objetos?. Relación de equivalencia?. Propiedades invariantes?.

La topología responde también a este hecho general. Los objetos de la topología son los "espacios topológicos" (que veremos más adelante). Ejemplos de ellos son los objetos geométricos del espacio euclídeo. La clasificación ya no es por congruencia sino por lo que se llama "homeomorfismo", así, las "propiedades topológicas" serán las propiedades invariantes por homeomorfismos.

Se puede ver una estructura similar en cada una de las ramas de la matemática antes mencionadas. Existe una teoría que unifica esto, llamada Teoría de Categorías, en donde cada uno de los ejemplos anteriores es un caso particular.

Pensemos por ahora a los objetos de la topología como los objetos de la geometría (esto es, los subconjuntos de los espacios euclídeos). Trataremos de definir homeomorfismo.

Sean A, B subconjuntos de espacios euclídeos ($A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$). Una función $f : A \to B$ *es continua en* $x_0 \in A$ si dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d(f(x),\, f(x_0)) < \varepsilon$; f es *continua* si lo es en todo punto de A.

Si una función f es continua y biyectiva, su inversa f^{-1} no necesariamente es continua. Esto no ocurre con transformaciones lineales ni con isometrías pues la inversa de una transformación lineal biyectiva es lineal y la inversa de una isometría es isometría.

Un ejemplo que muestra lo dicho anteriormente es:

$$f : [0, 1) \to S^1 \ , \ f(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t).$$

Esta función es biyectiva y continua pero f^{-1} no es continua pues al acercarse al punto $(1, 0)$ por puntos de S^1 de la forma $(a_n, -1/n)$, sus imágenes por f^{-1} se acercan a 1 y no a 0.

Sean A y B subconjuntos de espacios euclídeos. Un *homeomorfismo* de A en B es una función $f : A \to B$ biyectiva, continua y tal que su inversa es continua.

Se cumple que:

i) id es un homeomorfismo.

ii) Si f es un homeomorfismo entonces f^{-1} es un homeomorfismo.
iii) Si f y g son homeomorfismos entonces $f \circ g$ es un homeomorfismo.

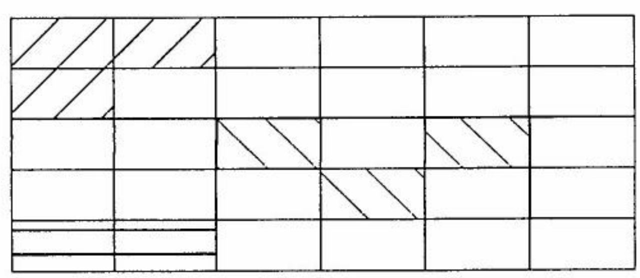
De las propiedades anteriores se obtiene fácilmente que los homeomorfismos definen una relación de equivalencia.

Tenemos ahora sobre los objetos geométricos dos relaciones de equivalencia definidas por congruencias y homeomorfismos respectivamente. ¿Están relacionadas de alguna forma?.

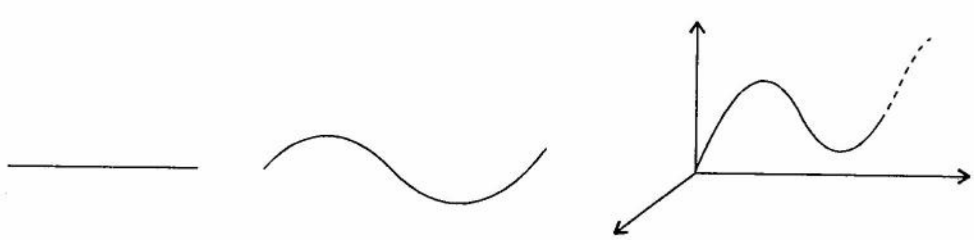
Es claro de las definiciones que si f es una congruencia entonces f es un homeomorfismo. La recíproca es falsa como lo muestra el siguiente ejemplo:

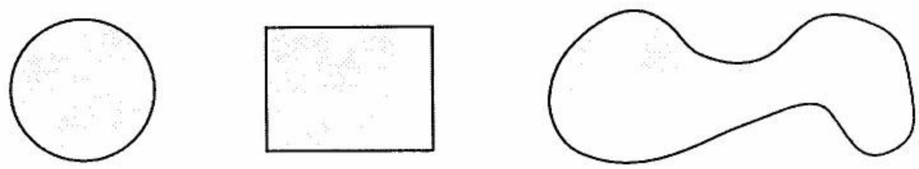
$$f : [0,1] \to [0,2] \ , \ f(x) = 2x.$$

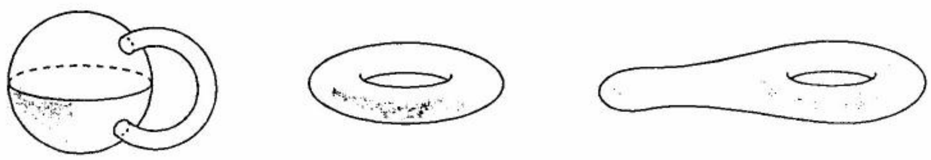
Por lo tanto, si A y B son objetos equivalentes para un geómetra también lo son para un topólogo. Mientras que si son equivalentes para un topólogo no necesariamente lo son para un geómetra. Dicho esto de otra forma: la clasificación topológica es menos fina que la geométrica (distingue menos), o bien, toda propiedad topológica es también una propiedad geométrica. Varias clases de equivalencia vía congruencia forman una sola clase de equivalencia vía homeomorfismo. El siguiente dibujo grafica este hecho.



Damos a continuación tres ejemplos de varios conjuntos homeomorfos entre sí.

i) 

ii) 

iii) 

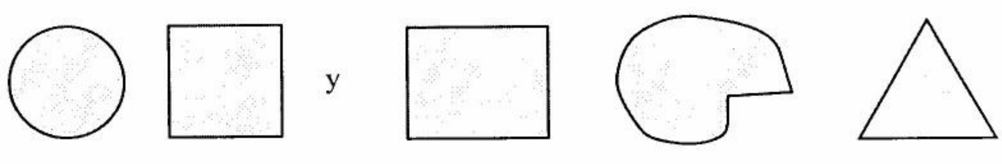
De los ejemplos anteriores vemos que longitud, curvatura, torsión, área y volumen, que son propiedades geométricas, no son propiedades topológicas y por lo tanto no son estudiadas por la topología.

La *dimensión* de un objeto es una propiedad topológica. Esto es difícil de probar, pero quiere decir que una línea nunca es homeomorfa a un lámina plana ni a un cuerpo sólido.

La propiedad de ser un objeto de un sólo "pedazo", es decir no estar armado de varios "pedazos" disjuntos, es una propiedad topológica y se llama *conexión*. Dicho rápidamente, dos objetos armados con distinto número de pedazos no pueden ser homeomorfos.

Ejemplos:

i) 

ii) 

La acción de estirar o retorcer un pedazo de alambre no cambia sus propiedades topológicas pero cortarlo en algún punto sí las modifica puesto que lo transforma en un objeto disconexo.

Para establecer cuándo dos objetos son homeomorfos, se debe explicitar un homeomorfismo. En cambio, si se desea probar la no existencia de un homeomorfismo entre dos objetos, no hay un método canónico para hacerlo. Es usual buscar una propiedad topológica que tenga uno de ellos y el otro no. Así, esta propiedad distingue a los dos objetos topológicamente.

¿Son equivalentes topológicamente el intervalo $(0, 1)$ y la circunferencia?.

Veremos que la respuesta es negativa pues si a $(0, 1)$ le sacamos un punto lo transformamos en un disconexo mientras que con la circunferencia no pasa esto.

Una dificultad importante que existe es que el número de propiedades topológicas que son necesarias para distinguir todos los posibles pares de objetos no es finito. Así, aunque tengamos una computadora extremadamente eficiente que nos pueda responder si un objeto tiene cierta propiedad topológica, no podemos escribir un algoritmo (o programa de computación) que permita decidir, en un tiempo finito, si dos objetos arbitrarios son homeomorfos.

Esto se expresa diciendo que el problema de clasificar objetos por homeomorfismos es indecidible. Estas cuestiones son tratadas en lógica matemática.

Históricamente, la topología surge en el siglo XIX cuando:

i) Se empiezan a analizar propiedades cualitativas que no dependen de las magnitudes pero que ya permitían distinguir diversos objetos entre sí, extendiendo de esta forma a la geometría;

ii) Comienza la necesidad de clarificar la teoría de funciones a valores reales, de una variable real, extendiendo así al análisis.

Su mayor desarrollo lo obtiene en esta segunda dirección. Al surgir el cálculo infinitesimal y diferencial, obliga a formalizar las nociones aún entonces vagas de "proximidad" y "continuidad" (para más detalles ver **1.2**).

Sin embargo, recién a principios de este siglo se llega a la definición rigurosa de proximidad, continuidad y propiedad cualitativa. Es decir, se encuentra un objeto matemático (espacio topológico) donde los conceptos anteriores y las intuiciones de las que se habían partido tienen un tratamiento riguroso.

En un primer curso de topología se estudian las nociones básicas de proximidad y continuidad y se introducen algunos invariantes que dependen esencialmente de estas nociones.

En estas notas introduciremos los primeros conceptos de esta rama de la matemática con el objeto de resolver ciertos problemas, que en alguna medida han servido de motivación para el desarrollo de la misma. Así nuestro primordial interés será desarrollar los contenidos necesarios para poder encarar la solución de algunos problemas. Ellos son:

1. *Un problema de existencia.* ¿Cuándo una ecuación de la forma $f(x) = y$ puede ser resuelta para x, en términos de y?.

Por ejemplo, ¿ si $f(x) = x^2 - \sqrt{1+x^2}$, existe $x \in [0,2]$ tal que $f(x) = 33/2$?.

Daremos solución a este problema en **9.1** cuando $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y X es un espacio topológico conexo y compacto o $X = \mathbb{R}$. También estudiaremos el caso de una función continua $f : D \to \mathbb{R}^2$ donde D es un disco cerrado en $\mathbb{R}^2$ y obtendremos un par de consecuencias interesantes.

2. *Un problema de coincidencia.* ¿Cuándo una función de una circunferencia (esfera) en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) es tal que tiene la misma imagen para un par de puntos diametralmente opuestos? Responderemos en **9.2**.

3. *Un problema de puntos fijos.* Sea $f : X \to X$. ¿Bajo qué condiciones existe un punto x en X tal $f(x) = x$?.

Daremos la respuesta a esto en **9.3** para f continua y X el intervalo $[a, b]$ o un disco en el plano.

4. *Otro problema de existencia.* (Existencia de raíces de polinomios). Todo polinomio no constante, con coeficientes en los números complejos tiene una raíz en los complejos. Este es el conocido *Teorema fundamental del álgebra.* Su prueba será dada en **9.4**.

5. ¿Son homeomorfos algunos de los siguientes espacios S^1, $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1]$, $(0,1)$, $[2,4]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\}$?. A medida que introduzcamos distintos invariantes topológicos podremos responder a esta pregunta.

Con las nociones generales de topología y herramientas del álgebra se construyen invariantes topológicos que son estudiados en "topología algebraica" y con ellos se pueden probar resultados de gran relevancia en la matemática actual. Ejemplo de estos hechos y de simple enunciado son:

i) Teorema de la curva de Jordan: "Una curva simple y cerrada divide al plano en dos regiones de las cuales es frontera";

ii) Teorema de la invariancia de la dimensión: "$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos si y sólo si $n = m$ ".

1.2 Breve referencia histórica

Con el fin de exponer con algún detalle los orígenes de la topología, como consecuencia de la necesidad de fundamentar el cálculo diferencial, transcribimos a continuación el punto 2.43 del capítulo 2 de [1].

"La rama de la Matemática conocida como Topología General tiene sus orígenes en los esfuerzos realizados durante el siglo XIX para conseguir una formulación rigurosa de los fundamentos del Cálculo Diferencial evitando las ideas geométricas e intuitivas que usaron originalmente los inventores del Cálculo, I. Newton (1642-1727) y G. Leibniz (1646-1716).

Este interés por el rigor llevó a A. L. Cauchy (1784-1857) y a otros matemáticos de su época a formular conceptos precisos tanto de límite como de función real continua. Más tarde, la aparición de extraños ejemplos, como los de funciones continuas que no son derivables en ningún punto, llevaron incluso a la revisión del concepto de número real. Entre las definiciones rigurosas de número real que se establecieron, destacan las de G. Cantor (1845-1918) y R. Dedekind (1831-1916).

Aunque la noción de espacio abstracto fue ya vislumbrada por B. Riemann (1826-1866), el desarrollo que llevó a la Topología General actual lo inició Cantor, quien en una serie de trabajos que realizó alrededor de 1880 dio algunas de las nociones topológicas fundamentales, como punto de acumulación, conjunto cerrado o conjunto abierto para los espacios euclídeos. Otras importantes nociones y avances posteriores los llevaron a cabo C. Jordan (1838-1922), H. Poincaré (1854-1912), E. Borel (1871-1956) y H. Lebesgue (1875-1941), entre otros. Un resultado de aquella época es el famoso Teorema de Borel-Lebesgue sobre la compacidad de un intervalo cerrado.

A medida que estas ideas se van extendiendo, se empieza a pensar en su aplicación a conjuntos, no ya de puntos, sino de curvas o funciones. Esto llevó al estudio de nociones topológicas en espacios de funciones por matemáticos como D. Hilbert (1862-1943). De esta manera se iba preparando el terreno para un tratamiento axiomático de la noción de proximidad en espacios abstractos. Esta tendencia se vió acentuada por la importancia que a principios de siglo tomó la noción de teoría axiomática, gracias sobre todo a los trabajos sobre los fundamentos de la Geometría del propio Hilbert.

Los primeros intentos para separar lo que hay de común en las propiedades de los conjuntos de puntos y de funciones (sin acudir a la noción de distancia) fueron realizados por M. Fréchet (1878-1973) y F. Riesz (1880-1956) en 1906 y 1907, respectivamente. Pero ambas aproximaciones no fueron completamente satisfactorias. También se debe a Fréchet la noción de espacio métrico.

La primera definición que recoge la noción actual de espacio topológico es debida a F. Hausdorff (1868-1942), quien en 1914 definió un espacio topológico como un conjunto abstrato dotado de un sistema de entornos junto con la condición de separación T_2. Hausdorff se apoyó en trabajos anteriores de Hilbert y H. Weyl (1885-1955), quienes dieron una descripción axiomática en términos de entornos para espacios particulares como el plano y otras superficies. La contribución fundamental de Hausdorff fue reconocer entre los axiomas usados por sus predecesores aquellos capaces de dar a su teoría toda la precisión y generalidad deseables, fundando así la moderna Topología General. Hausdorff definió para espacios abstractos las nociones de conjunto abierto y cerrado que previamente había obtenido Cantor para los espacios euclídeos.

La definición de espacio topológico en función de un operador clausura fue primero formulada por K. Kuratowski (1896-1980) en 1922 y la definición de espacio topológico en función de una familia de abiertos fue dada por P. Alexandroff (1896-1982) en 1926 y W. Sierpinski (1882-1969) en 1928.

Los orígenes de la Topología General que hemos resumido aquí brevemente son descriptos exhaustivamente en el Libro The Genesis of Point Set Topology de J. H. Manheim (Pergamon Press, 1964)"

CAPITULO 2
ESPACIOS MÉTRICOS

2.1 Conceptos básicos

En los cursos de análisis se ha estudiado la noción de continuidad de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y, más generalmente, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para $n, m \geq 1$. Este concepto se basa en la idea de "proximidad".

Recordemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

También sabemos que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en (x_0, y_0) si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ entonces $|g(x, y) - g(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Decimos que una función es continua cuando lo es en cada punto de su dominio.

Geométricamente $|x - x_0|$ representa la distancia de x a x_0 en la recta real, análogamente $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ corresponde a la distancia euclídea de (x, y) a (x_0, y_0) en el plano. Así, estas definiciones formalizan el concepto intuitivo de que una función es continua en un punto cuando los puntos del dominio "próximos" a éste tienen su imagen "próxima" a la imagen del punto dado.

Veamos qué es la distancia en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. En principio, es una función que a cada par de puntos en $\mathbb{R}^2$ le hace corresponder un número real. Si denotamos con d dicha función, tenemos

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Si analizamos con cuidado esta función d, observamos que tiene algunas propiedades muy sencillas:

i) $\forall\ p, q \in \mathbb{R}^2$, $d(p, q) \geq 0$ y $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$ (positividad).

ii) $\forall\ p, q \in \mathbb{R}^2$, $d(p, q) = d(q, p)$ (simetría).

iii) $\forall\ p, q, r \in \mathbb{R}^2$, $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (desigualdad triangular).

La última propiedad recibe su nombre por describir el hecho muy conocido que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

Estas son las propiedades básicas que tiene la distancia en un espacio euclídeo.

Ahora, como es habitual en matemática, podemos generalizar este concepto de "distancia" sin restringirnos a dichos espacios, sino considerando los puntos como elementos de un conjunto cualquiera.

Definición 2.1.1 *Una distancia o métrica en un conjunto X, es una función*

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface:

i) $\forall\ x,\ y \in X,\ d(x,y) \geq 0$ *y* $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$ *(positividad).*

ii) $\forall\ x,\ y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(simetría).*

iii) $\forall\ x,\ y,\ z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(desigualdad triangular).*

Definición 2.1.2 *Un conjunto X con una distancia d definida en dicho conjunto, se denomina espacio métrico y se denota (X,d), o sólo con X cuando la omisión de la función d no lleva a confusiones.*

Los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ con las correspondientes distancias euclídeas, son espacios métricos. En efecto, como ya sabemos, si $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Las condiciones i), ii) de la definición de distancia se verifican trivialmente. Para probar la desigualdad triangular usaremos que

$$(x_i - y_i)^2 = [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 = (x_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i)$$

y también aplicaremos la desigualdad de Schwarz

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Entonces, si $z = (z_1, ..., z_n)$ tenemos que

$$(d(x,y))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} =$$

$= (d(x,z))^2 + (d(z,y))^2 + 2d(x,z)d(z,y) = [d(x,z) + d(z,y)]^2.$

Observando los extremos de este desarrollo, se deduce que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Veamos ahora otros ejemplos.

Ejemplo 2.1.3 *Sea* $X = \mathbb{R}^2$ *y definamos* $d_1((a,b),(c,d)) = \max\{|a-c|, |b-d|\}$.

Es fácil probar que esta función d_1 satisface las condiciones i), ii) de la definición de distancia. Para demostrar iii) debemos tomar tres puntos cualesquiera (a,b), (c,d), $(e,f) \in \mathbb{R}^2$, y probar que

$$\max\{|a-c|, |b-d|\} \leq \max\{|a-e|, |b-f|\} + \max\{|e-c|, |f-d|\}. \tag{2.1}$$

Por definición

$$\max\{|a-e|, |b-f|\} \geq |a-e| \tag{2.2}$$

y

$$\max\{|e-c|, |f-d|\} \geq |e-c|. \tag{2.3}$$

Como

$$|a-c| = |(a-e) + (e-c)| \leq |a-e| + |e-c|$$

de (2.2) y (2.3) resulta que

$$|a-c| \leq |a-e| + |e-c| \leq \max\{|a-e|, |b-f|\} + \max\{|e-c|, |f-d|\}.$$

De forma totalmente análoga, obtenemos

$$|b-d| \leq \max\{|a-e|, |b-f|\} + \max\{|e-c|, |f-d|\}.$$

De las dos desigualdades anteriores sigue claramente (2.1).

Este ejemplo nos muestra que en un mismo conjunto, en este caso $\mathbb{R}^2$, se pueden definir más de una distancia.

Podemos generalizar d_1 para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, definiendo

$$d_1((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Ejemplo 2.1.4 *También en* $\mathbb{R}^n$ *con* $n \geq 2$, *podemos definir*

$$d_2((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Dejamos al lector verificar que d_2 es una distancia en $\mathbb{R}^n$, llamada *distancia del peatón.*

Para abreviar, cuando hablemos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico sin aclarar cuál es la distancia que consideramos, supondremos que es la euclídea.

Ejemplo 2.1.5 *En un conjunto cualquiera X, definimos*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

Se ve fácilmente que d es una distancia en X, llamada *distancia discreta.*

Ejemplo 2.1.6 *Un ejemplo interesante es el siguiente. Sea A un conjunto y*

$$B(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \ \textit{es acotada}\}.$$

Es claro que si $f, g \in B(A)$, $f - g$ también, por lo que tiene sentido definir

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}.$$

Esta es una distancia en $B(A)$ que "mide" la mayor separación entre f y g a lo largo del dominio A.

Ejemplo 2.1.7 *Si $Y \subseteq X$ y d es una distancia en X, la restricción de d a $Y \times Y$, es claramente una distancia en Y.*

En general, esta es la distancia que consideraremos en un subconjunto de un espacio métrico, cuando no se especifique otra.

Habiendo generalizado el concepto de distancia, podemos definir ahora ciertos subconjuntos particulares de un espacio métrico, haciendo una analogía con lo que conocemos en los espacios euclídeos.

Definición 2.1.8 *Dado un espacio métrico (X,d), si $x_0 \in X$ y $r > 0$, los siguientes subconjuntos de X :*

a) $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$

b) $\overline{B}\,(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$

c) $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$

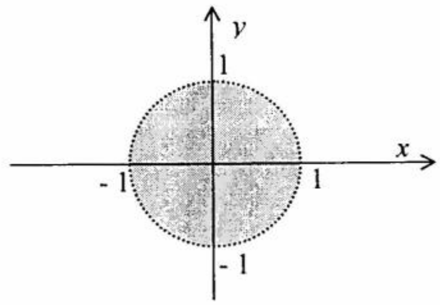
se denominan respectivamente, bola abierta, bola cerrada y esfera, de centro x_0 y radio r.

Observemos que estos conjuntos dependen esencialmente de la distancia d considerada, la que evitamos incluir en la notación de los mismos a fin de hacerla menos engorrosa. En caso de necesidad denotaremos, por ejemplo, $B_d(x_0, r)$ en lugar de $B(x_0, r)$.

Sabemos bien que en el plano $\mathbb{R}^2$, la bola abierta unitaria

$$B((0,0),1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

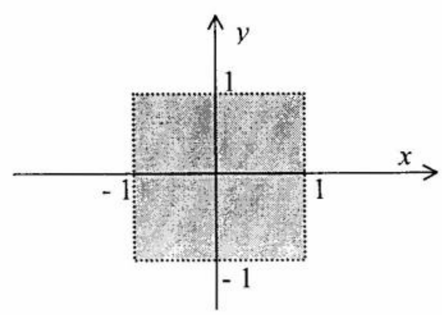
tiene el siguiente gráfico



Si consideramos en $\mathbb{R}^2$ la distancia d_1 definida en el ejemplo **2.1.3**, el gráfico de

$$B_{d_1}((0,0),1) = \{(x,y) : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$

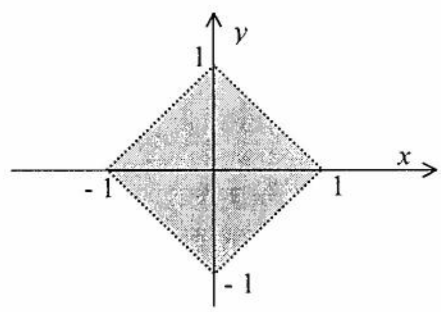
será



Para el caso de la distancia d_2 en $\mathbb{R}^2$, definida en el ejemplo **2.1.4**, la bola abierta unitaria es

$$B_{d_2}((0,0),1) = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}.$$

Como $|y| < 1 - |x|$, para $x \geq 0$, $x - 1 < y < 1 - x$. Si $x < 0$, $-x - 1 < y < x + 1$, por lo que el gráfico correspondiente es



Si X es un espacio métrico con la distancia discreta, se ve fácilmente que

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Podemos ahora extender la definición de conjunto abierto en un espacio métrico, siguiendo la idea que ya se vió en análisis para el caso de espacios euclídeos.

Definición 2.1.9 *Un conjunto A incluido en un espacio métrico (X, d) es abierto si para cada $x \in A$ $\exists$ $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.*

La siguiente proposición nos da una importante familia de abiertos.

Proposición 2.1.10 *En un espacio métrico (X, d), toda bola abierta es un abierto.*

Demostración Sea $x \in B(x_0, r)$, entonces $d(x, x_0) < r$ y $\varepsilon = r - d(x, x_0)$ es positivo. Afirmamos que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r)$. En efecto, si $y \in B(x, \varepsilon)$ entonces $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r$ por elección de ε, lo que completa la demostración. ■

Un resultado fundamental en nuestra teoría acerca de la familia de abiertos, es el que se establece en el teorema que sigue.

Teorema 2.1.11 *Si X es un espacio métrico, entonces:*
i) X y $\emptyset$ son abiertos.
ii) Si $A_1, ..., A_n$ son abiertos, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.
iii) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de abiertos, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ es abierto.

Demostración Es inmediato que X es abierto, ya que para $x \in X$ cualquier bola abierta de centro x está contenida en X.

También $\emptyset$ es abierto, de lo contrario debería existir $x \in \emptyset$ con la propiedad que ninguna bola abierta de centro x está contenida en $\emptyset$, pero en $\emptyset$ no existe ningún punto x.

Para demostrar ii), tomemos $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, entonces $x \in A_i$ $\forall i = 1, ..., n$. Como cada A_i es abierto existen $r_1, ..., r_n > 0$ tales que

$$B(x, r_i) \subseteq A_i \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Sea $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$, entonces

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq A_i \quad \forall i.$$

Luego $B(x, r) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, lo que prueba que la intersección es un conjunto abierto.

Sea ahora $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$. Como A_j es abierto $\exists r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

lo que demuestra iii). ■

Observemos que la intersección de infinitos abiertos en general no es un abierto. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$:

a) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$.

b) $\bigcap\limits_{x \in I} (x, \infty) = [0, \infty)$ donde $I = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional y } x < 0\}$.

Definición 2.1.12 *Si X es un espacio métrico, $B \subseteq X$ es cerrado si su complemento $B^c = X - B$ es abierto.*

Proposición 2.1.13 *En un espacio métrico, las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados.*

Demostración Tomemos la bola cerrada $\bar{B}\ (x_0, r)$ y veamos que su complemento

$$(\bar{B}\ (x_0, r))^c = \{x \in X : d(x, x_0) > r\}$$

es abierto. Sea $x \notin \bar{B}\ (x_0, r)$, entonces $d(x, x_0) > r$ y $\varepsilon = d(x, x_0) - r > 0$. Probemos que $B(x, \varepsilon)$ está contenida en el complemento de $\bar{B}\ (x_0, r)$.

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$, usando la desigualdad triangular obtenemos

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0)$$

de lo que se deduce

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y) > d(x, x_0) - \varepsilon = r.$$

Como el complemento de $S(x_0,r)$ es la unión de los abiertos $(\bar{B}\ (x_0,r))^c$ y $B(x_0,r)$, se concluye fácilmente que la esfera $S(x_0,r)$ es cerrado. ■

De las propiedades de los abiertos establecidos en el teorema anterior, y usando las conocidas Leyes de De Morgan, se concluye directamente el siguiente resultado, cuya demostración dejamos al lector.

Proposición 2.1.14 *Si X es un espacio métrico, entonces:*
i) X y $\emptyset$ son cerrados.
ii) Si $B_1,...,B_n$ son cerrados, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ es cerrado.
iii) Si $\{B_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de cerrados, $\bigcap\limits_{i\in I} B_i$ es cerrado. ■

Estamos ahora en condiciones de generalizar la idea de continuidad que conocemos para funciones entre espacios euclídeos, al caso de funciones entre espacios métricos, con sólo reemplazar en la definición la distancia euclídea por las de los espacios métricos correspondientes.

Definición 2.1.15 *Sean (X,d) y (X',d') espacios métricos, $f: X \to X'$ una función y $x_0 \in X$. Decimos que f es continua en x_0 si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x,x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*
También diremos que f es continua si lo es en todo punto de X.

Observemos que otra forma de enunciar esta definición es: dada una bola abierta de centro $f(x_0)$, $B(f(x_0),\varepsilon)$, existe una bola abierta de centro x_0, $B(x_0,\delta)$, tal que $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$.

El teorema que sigue nos muestra que la noción de continuidad está esencialmente ligada al concepto de conjunto abierto.

Teorema 2.1.16 *Sean (X,d) y (X',d') espacios métricos. Una función $f: X \to X'$ es continua si y sólo si para cada V abierto en X', $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ es abierto en X.*

Demostración Sea f continua, $V \subseteq X'$ abierto y $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$ y como V es abierto, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que

$$B(f(x),\varepsilon) \subseteq V.$$

Debido a que f es continua en x, $\exists\delta > 0$ con la propiedad que

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq V.$$

Luego $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$ y esto prueba que $f^{-1}(V)$ es abierto.

Recíprocamente, dado $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, la hipótesis nos asegura que $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto en X. Por lo tanto $\exists \delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

y esto implica que

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

es decir, f es continua en x_0. Como x_0 es arbitrario, f es continua. ■

Hemos visto que en un mismo conjunto se pueden definir más de una distancia. En virtud de la importancia que tienen los abiertos, según se desprende del teorema anterior, la pregunta que surge naturalmente es si distancias distintas en un conjunto determinan familias de abiertos distintas.

La respuesta es negativa. En efecto, si cada bola abierta respecto de una de las distancias contiene una bola abierta (con el mismo centro) respecto de la otra distancia, es claro que las familias de abiertos coinciden. Enunciamos este hecho en forma precisa en la proposición siguiente.

Proposición 2.1.17 *Sea X un conjunto y supongamos que d y d' son distancias en X tales que existen constantes c, $c' > 0$ que satisfacen:*

$$\forall x, y \in X,\ d(x,y) \leq c'd'(x,y) \text{ y además } d'(x,y) \leq cd(x,y).$$

Entonces las familias de abiertos determinadas por d y d' coinciden.

Demostración Sea U un abierto en (X, d) y veamos que U es abierto en (X, d').

Tomemos $x \in U$, entonces $\exists r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq U$. Sea $r' = \frac{r}{c'}$ y consideremos $y \in B_{d'}(x, r')$. Por hipótesis

$$d(x,y) \leq c'd'(x,y) < c'r' = r$$

es decir $y \in B_d(x, r)$, lo que prueba que

$$B_{d'}(x, r') \subseteq B_d(x, r) \subseteq U$$

y por lo tanto U es abierto en (X, d').

En forma análoga se prueba que todo abierto en (X, d') lo es en (X, d). ■

Definición 2.1.18 *Dos distancias definidas en un conjunto X se dicen equivalentes si satisfacen la condición de la proposición* ***2.1.17***.

Como ejemplo, veamos que en $\mathbb{R}^n$ la distancia euclídea d y las d_1 y d_2 definidas en los ejemplos **2.1.3** y **2.1.4**, son equivalentes.

Sean x, $y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Entonces

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{n \max_{1\leq i\leq n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \sqrt{n}\, d_1(x,y)$$

$$d_1(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = d(x,y).$$

Estas desigualdades prueban la equivalencia de d y d_1.

Por otra parte,

$$d_1(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d_2(x,y)$$

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = n\, d_1(x,y)$$

de donde se concluye que d_1 y d_2 son equivalentes.

Es fácil ver que si dos distancias son equivalentes a una tercera, entonces son equivalentes entre sí. Luego d y d_2 también son equivalentes.

Definición 2.1.19 *Una sucesión en un espacio métrico X es una función del conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ en X. Como es habitual se usa la notación $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde x_n indica la imagen por dicha función del número n.*

Podemos extender la idea de convergencia de una sucesión como sigue.

Definición 2.1.20 *Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico X converge a $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.*

Denotaremos este hecho con $x_n \to x_0$.

Dejamos al lector verificar la siguiente equivalencia.

Proposición 2.1.21 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico X. Esta sucesión converge a x_0 si y sólo si $\forall U$ abierto en X con $x_0 \in U$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $x_n \in U$.* ■

Observemos que, por lo visto anteriormente, la continuidad de una función y la convergencia de una sucesión no cambian si reemplazamos las distancias en los espacios involucrados por otras equivalentes.

Para finalizar este capítulo, veamos un importante resultado que relaciona continuidad de una función con convergencia de sucesiones.

Teorema 2.1.22 *Sean (X,d) y (X',d') espacios métricos, $f : X \to X'$ una función y $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x_0, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X' que converge a $f(x_0)$.*

Demostración Supongamos que f es continua en x_0 y sean $\varepsilon > 0$ y $x_n \to x_0$. Veamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

Por continuidad de f en x_0, dado dicho ε, $\exists \delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Como $x_n \to x_0$, para este $\delta > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $d(x_n, x_0) < \delta$. Luego $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

Para probar la recíproca supongamos que f no es continua en x_0 y veamos que esto nos permite construir una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x_0, pero $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x_0)$.

Si f no es continua en x_0, $\exists\varepsilon > 0$ con la propiedad que cualquiera sea $\delta > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(x, x_0) < \delta$, pero $d'(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

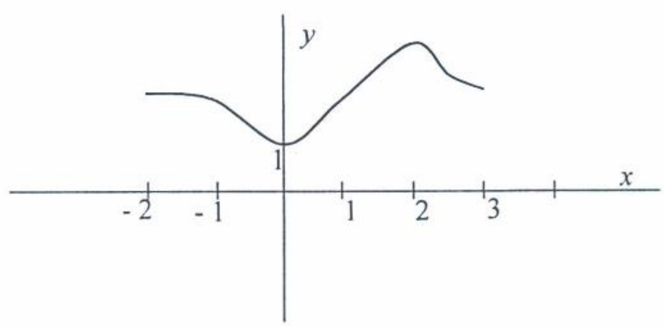
En particular si tomamos $\delta = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in X$ en esas condiciones, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego hemos obtenido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que cumple $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y esto claramente implica que $x_n \to x_0$.

Ahora bien, $d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ para todo $n\in \mathbb{N}$, por lo tanto para este $\varepsilon > 0$ no existe $N \in \mathbb{N}$ con la condición que si $n \geq N$, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Esto nos dice que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x_0)$. ■

2.2 Ejercicios

1. Probar en detalle que las funciones definidas en los ejemplos **2.1.4**, **2.1.5** y **2.1.6** son distancias.

2. Sea $B([-2,3])$ con la distancia del ejemplo **2.1.6** y sea $f_0 \in B([-2,3])$ tal que su gráfico es el siguiente



Dibujar aproximadamente la región del plano que ocupan los gráficos de las funciones pertenecientes a $B(f_0, \frac{1}{2})$.

3. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ sea $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$.

Probar que

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

es una métrica en $C[a,b]$. Ver en un gráfico qué "mide" esta distancia.

4. Sea V un espacio vectorial (real o complejo) con una norma $\| \ \|$. Probar que si definimos

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

entonces (V, d) es un espacio métrico.

Observar que los ejemplos anteriores son casos particulares de esta situación.

5. Demostrar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son abiertos, con la métrica euclídea:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m < d((x, y), (0, 0)) < n\}$ donde $m < n$.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}^c$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

6. Demostrar la proposición **2.1.14**.

7. Sean E y F espacios métricos y $f : E \to F$ continua en $x \in E$. Probar:

a) Si $g : E \to F$ coincide con f en un abierto U tal que $x \in U$, entonces g es continua en x.

b) Si $x \in A \subseteq E$ entonces $f\,|_A$ en continua en x.

c) Si G es un espacio métrico y $g : F \to G$ es continua en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es continua en x.

8. Sea E un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se define la *distancia de x a A* por

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

a) Demostrar que si definimos $\delta : E \to \mathbb{R}$ por $\delta(x) = d(x, A)$, δ es continua.

b) Probar que si $r \geq 0$, $\{x : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

9. Demostrar la proposición **2.1.21**.

CAPITULO 3

ESPACIOS TOPOLÓGICOS. FUNCIONES CONTINUAS.

3.1 Espacios topológicos

En el capítulo anterior vimos que, en un espacio métrico, las ideas de continuidad de funciones y convergencia de sucesiones dependen básicamente de la noción de conjunto abierto. Por otra parte, en el teorema **2.1.11** probamos las propiedades fundamentales de la familia de subconjuntos abiertos.

Estos hechos motivan una nueva generalización, obteniendo espacios donde se pueden encarar las nociones de continuidad y convergencia.

Definición 3.1.1 *Dado un conjunto X, una topología en X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface:*

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$.

ii) Si $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$ entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

iii) Si $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$ (I es un conjunto de "índices") entonces $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan subconjuntos abiertos de X respecto de $\mathcal{T}$ o simplemente abiertos en X.

Definición 3.1.2 *Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una topología en X.*

En general nos referiremos al espacio X o bien al espacio topológico X y la familia $\mathcal{T}$ quedará sobreentendida, salvo cuando estemos considerando más de una topología en el mismo conjunto X. A los elementos de X los llamaremos *puntos*.

De la motivación que presentamos para la definición de topología se observa claramente que los espacios métricos son los primeros ejemplos de espacios topológicos. En efecto, si (X, d) es un espacio métrico y $\mathcal{T}_d$ es la familia de subconjuntos abiertos (definición **2.1.9**), el teorema **2.1.11** nos dice que $\mathcal{T}_d$ es una topología, llamada *topología inducida por la distancia d*.

Es evidente que $\mathcal{P}(X)$ es una topología en X. Esta es la topología en X con "más elementos", la llamaremos *topología discreta* y la denotaremos con $\mathcal{D}$. En el otro extremo, $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\}$ también es una topología en X, es la que tiene "menos elementos" y la denominaremos *topología indiscreta*.

En los espacios euclídeos, la topología inducida por la distancia euclídea se denomina *topología usual* y es la que consideraremos si no se especifica otra.

Observemos que por la proposición **2.1.17**, dos distancias equivalentes inducen la misma topología, luego las topologías en $\mathbb{R}^n$ inducidas por las métricas d_1 y d_2 coinciden con la usual.

Es fácil ver que si d es la distancia discreta, $\mathcal{T}_d$ es la topología discreta.

La pregunta que surge naturalmente en este momento es si toda topología en un conjunto X es inducida por una distancia. Veremos más adelante que la respuesta es negativa.

A continuación damos otros ejemplos de topologías.

Ejemplo 3.1.3 *Si* $X = \{a,b\}$ *entonces* $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$. *De existir una topología en* X *distinta de la discreta y de la indiscreta, debería ser* $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ *o* $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. *Es inmediato ver que ambas son topologías en* X.

Resumiendo, en un conjunto de dos elementos se pueden definir exactamente cuatro topologías.

Ejemplo 3.1.4 *Sea* X *un conjunto arbitrario y*

$$\mathcal{T}_c = \{U \subseteq X : U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$$

donde incluimos a $\emptyset$ *entre los conjuntos finitos.*

Luego $X \in \mathcal{T}_c$ y se satisface i) de la definición de topología.

Sean $U_1, ...U_n \in \mathcal{T}_c$. Si $U_j = \emptyset$ para algún j, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$ y por lo tanto pertenece a $\mathcal{T}_c$. En caso contrario,

$$(\bigcap_{i=1}^{n} U_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^c$$

es finito por ser unión finita de conjuntos finitos, por lo que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_c$.

Para ver que se cumple iii) de **3.1.1**, consideremos $U_i \in \mathcal{T}_c$ $\forall i \in I$. Si $U_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$

$$(\bigcup_{i\in I} U_i)^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c$$

es finito por ser intersección de conjuntos finitos. Si $\exists j$ tal que $U_j = \emptyset$ tomamos $J = \{i \in I : U_i \neq \emptyset\}$, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in J} U_i$ que es abierto por lo visto anteriormente.

Esta es la que se denomina *topología de los complementos finitos.*

Observemos que si X es finito todo subconjunto de X pertenece a $\mathcal{T}_c$, es decir $\mathcal{T}_c$ es la topología discreta.

Ejemplo 3.1.5 *Sean* $x_0 \in X$ *y*

$$\mathcal{T}_{x_0} = \{U \subseteq X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Se ve fácilmente que $\mathcal{T}_{x_0}$ *es una topología en* X.

Ejemplo 3.1.6 *En el conjunto de números naturales* $\mathbb{N}$, *sea* $E_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ *y consideremos*

$$\mathcal{T} = \{\ E_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Entonces $\mathcal{T}$ *es una topología en* $\mathbb{N}$.

Definición 3.1.7 *Si* $\mathcal{T}_1$ *y* $\mathcal{T}_2$ *son topologías en* X *tales que* $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, *diremos que son comparables y que* $\mathcal{T}_1$ *es menos fina que* $\mathcal{T}_2$, *o bien que* $\mathcal{T}_2$ *es más fina que* $\mathcal{T}_1$.

Así, la topología indiscreta es la menos fina de todas las topologías definidas en un conjunto X y la discreta es la más fina.

En $\mathbb{R}$ la topología usual es más fina que la de los complementos finitos. En efecto, si $U \in \mathcal{T}_c$ y $U^c = \{x_1, ..., x_k\}$, para cada $x \in U$ el intervalo de centro x y radio $r = \min\{|x - x_i| : i = 1, ..., k\}$ está contenido en U. Luego U es abierto en la topología usual.

Dos topologías no siempre son comparables. Ejemplo de esto son las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ de **3.1.3**. También, si tomamos $x \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_x$ la topología definida en el ejemplo **3.1.5**, ésta no resulta comparable con la usual. Dejamos al lector la demostración de este hecho.

Definición 3.1.8 *Un subconjunto* F *de un espacio topológico* X *se dice cerrado si su complemento* F^c *es abierto en* X.

Como en el caso de los espacios métricos, la familia de cerrados tiene las siguientes propiedades, que se demuestran en forma análoga a la proposición **2.1.14**.

Proposición 3.1.9 *Si* $\mathcal{C}$ *es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico* X, *entonces:*

i) $\emptyset \in \mathcal{C}$ *y* $X \in \mathcal{C}$.

ii) Si $F_1, ..., F_n \in \mathcal{C}$ *entonces* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{C}$.

iii) Si $F_i \in \mathcal{C}$ $\forall i \in I$ *entonces* $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$. ■

Los cerrados determinan la topología ya que, si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de X que satisface las propiedades i), ii) y iii) de la proposición anterior, existe una única topología $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{C}$ es su familia de cerrados. Esta topología es

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U^c \in \mathcal{C}\}.$$

Para los fines de los conceptos estudiados en el capítulo anterior, si x es un punto de un espacio métrico podemos considerar una familia de subconjuntos más amplia que la formada por las bolas abiertas centradas en x. Estos conjuntos son los denominados *entornos de* x y tienen la propiedad de contener un abierto al cual x pertenece.

Si en la definición de continuidad de una función en un punto, o de convergencia de una sucesión, sustituimos las bolas abiertas por entornos el concepto no varía.

También en un espacio topológico podemos definir esta noción, la que será de gran utilidad.

Definición 3.1.10 *Dado x en un espacio topológico X, V es un entorno de x si existe un abierto U tal que*

$$x \in U \subseteq V.$$

En un espacio topológico X cuya topología es la indiscreta, el único entorno de un punto es el mismo X. En cambio, si la topología es la discreta todo subconjunto que contenga a x será un entorno de éste, en particular $\{x\}$.

La familia de entornos de un punto x no es vacía ya que el espacio es siempre un entorno de x. Denotaremos esta familia con $\mathcal{E}_x$.

Observemos que un entorno no es necesariamente abierto. Por ejemplo $[0, 2]$ es un entorno de 1 en $\mathbb{R}$ y no es abierto. Pero sí es cierto que un abierto es entorno de cada uno de sus puntos. Esta propiedad caracteriza a los abiertos, como se prueba en la proposición siguiente.

Proposición 3.1.11 *En un espacio topológico X, $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si es entorno de cada uno de sus puntos.*

Demostración Sea $U \subseteq X$ con la propiedad de ser entorno de cada uno de sus puntos. Entonces para cada $x \in U$ existe U_x abierto tal que $x \in U_x \subseteq U$. Luego $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x$ es abierto por ser unión de abiertos.

La recíproca es inmediata, como ya lo dijimos. ■

Directamente de la definición se deducen las siguientes propiedades de la familia de entornos de un punto.

Proposición 3.1.12 *Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces la familia $\mathcal{E}_x$ de entornos de x satisface:*

i) $\forall V \in \mathcal{E}_x$, $x \in V$.

ii) Si V_1 *y* $V_2 \in \mathcal{E}_x$ *entonces* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{E}_x$.

iii) Si $V \in \mathcal{E}_x$ *y* $V \subseteq W$ *entonces* $W \in \mathcal{E}_x$.

iv) Si $V \in \mathcal{E}_x$, *existe* U *entorno de cada uno de sus puntos tal que* $x \in U \subseteq V$. ■

Las familias de entornos caracterizan la topología en el sentido siguiente: si en un conjunto X todo elemento x tiene asociada una familia no vacía de subconjuntos

$\mathcal{J}_x$ tal que satisface i), ii), iii) y iv) de la proposición anterior, entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{E}_x = \mathcal{J}_x \ \forall x \in X$. Debemos definir

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U \in \mathcal{J}_x \ \forall x \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Resumiendo, hemos visto que si bien definir una topología en un conjunto X es dar la familia de abiertos, podemos determinar perfectamente una topología de las dos maneras siguientes:

a) Dando una familia de subconjuntos de X que satisfaga las propiedades que caracterizan a los cerrados; esto es, i), ii) y iii) de la proposición **3.1.9**.

b) Dando para cada $x \in X$ una familia no vacía de subconjuntos de X que cumpla las propiedades que caracterizan a los entornos; es decir, i), ii), iii) y iv) de la proposición anterior.

A continuación daremos algunas definiciones básicas que relacionan los puntos de un espacio topológico con un subconjunto de éste.

Definición 3.1.13 *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces:*

i) x es un punto interior de A si $\exists V \in \mathcal{E}_x$ tal que $V \subseteq A$. El interior de A es

$$A^\circ = \{x \in X : x \text{ es interior de } A\}.$$

ii) x es un punto de clausura o adherencia de A si $\forall V \in \mathcal{E}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$. La clausura de A es

$$A^- = \{x \in X : x \text{ es de clausura de } A\}.$$

iii) x es un punto de acumulación de A si $\forall V \in \mathcal{E}_x$, $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. El derivado de A es

$$A' = \{x \in X : x \text{ es de acumulación de } A\}.$$

iv) x es un punto de frontera de A si $\forall V \in \mathcal{E}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A^c \neq \emptyset$. La frontera de A es

$$FrA = \{x \in X : x \text{ es de frontera de } A\}.$$

Observemos que si en cada una de las definiciones precedentes se reemplaza entorno por entorno abierto los conceptos no cambian puesto que todo entorno contiene un entorno abierto.

De estas definiciones se siguen algunos hechos simples. Decir que un punto es interior de A, es equivalente a expresar que A es entorno de él. También es evidente que todo punto de A es de clausura de A. En consecuencia tenemos

$$A^\circ \subseteq A \subseteq A^-.$$

Por otra parte observemos que si un punto de clausura no pertenece a A, es de acumulación de A. También es inmediato que los puntos de acumulación son de clausura, o sea

$$A^- = A \cup A'.$$

Los puntos de frontera de A son aquellos que son a la vez puntos de clausura de A y de clausura de A^c, por lo tanto

$$FrA = A^- \cap A^{c-} = FrA^c.$$

Si consideramos dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X que satisfacen $A \subseteq B$, es claro que

$$A^\circ \subseteq B^\circ,\ A^- \subseteq B^- \text{ y } A' \subseteq B'.$$

Esta relación no se mantiene en el caso de la frontera. En $\mathbb{R}$, por ejemplo, $[0,1] \subseteq [0,2]$ y $Fr[0,1] = \{0,1\} \nsubseteq Fr[0,2] = \{0,2\}$.

Ilustraremos las definiciones dadas con una serie de ejemplos.

Ejemplo 3.1.14 *Sea* $A = [0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

Para $x \in (0,1)$ *el intervalo abierto centrado en* x *y de radio* $r = \min\{|x|\,,\ |1-x|\}$ *está contenido en* $(0,1)$, *mientras que si* $x \notin [0,1]$, *dicho intervalo está contenido en* $[0,1]^c$. *Por otra parte, si* $x = 0$ *o* $x = 1$, *todo intervalo abierto centrado en* x *interseca a* A *y a* A^c.

Por lo tanto, si en $\mathbb{R}$ *consideramos la topología usual tenemos que*

$$A^\circ = (0,1),\ A^- = [0,1] \text{ y } FrA = \{0,1\}.$$

Si en cambio tomamos en $\mathbb{R}$ *la topología de los complementos finitos, como* A *y* A^c *son infinitos todo abierto no vacío interseca a* A *y a* A^c. *Luego con esta topología tenemos que*

$$A^\circ = \emptyset,\ A^- = \mathbb{R} \text{ y } FrA = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.1.15 *En* $\mathbb{R}$ *con la topología usual tenemos los siguientes ejemplos:*

a) Como en cada intervalo centrado en un número real hay números racionales e irracionales

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset,\ \mathbb{Q}^- = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \text{ y } Fr\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

b) Cada intervalo centrado en un número natural contiene números que no son naturales, luego es fácil ver que

$$\mathbb{N}^\circ = \emptyset,\ \mathbb{N}^- = \mathbb{N},\ \mathbb{N}' = \emptyset \text{ y } Fr\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

c) Si $A = [0,1] \cup \{2\}$,

$$A^\circ = (0,1),\ A^- = [0,1] \cup \{2\},\ A' = [0,1] \text{ y } FrA = \{0,1,2\}.$$

d) Si $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

$$A^\circ = \emptyset,\ A^- = A \cup \{0\},\ A' = \{0\} \text{ y } FrA = A \cup \{0\}.$$

El interior de un conjunto A es el "mayor" abierto contenido en A, mientras que la clausura es el "menor" cerrado que contiene a A, según lo precisamos en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.16 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces:*
i) A° es abierto y si U es un abierto contenido en A, entonces $U \subseteq A^\circ$.
ii) A^- es cerrado y si F es un cerrado que contiene a A, entonces $A^- \subseteq F$.

Demostración i) Si U es un abierto contenido en A, $U \subseteq A^\circ$ ya que por la proposición **3.1.11**, U es entorno de todos sus puntos.

Sea ahora $x \in A^\circ$. Entonces existe U_x entorno abierto de x tal que $U_x \subseteq A$. Pero por lo visto en el párrafo anterior $U_x \subseteq A^\circ$; luego $A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} U_x$ es abierto por ser unión de abiertos.

ii) Veamos que A^{-c} es abierto. Si $x \in A^{-c}$, entonces existe V entorno abierto de x que no interseca a A. Como V es entorno de cada uno de sus puntos, éstos no están en A^-. Luego $V \subseteq A^{-c}$ y en consecuencia A^{-c} es abierto.

Sea F un cerrado tal que $A \subseteq F$. Entonces F^c es un entorno de cada $x \in F^c$ y además $F^c \cap A = \emptyset$. Luego por el razonamiento hecho en el párrafo anterior $F^c \subseteq A^{-c}$. Si tomamos complemento en esta inclusión obtenemos $A^- \subseteq F$. ∎

De la proposición anterior se sigue fácilmente el siguiente corolario, cuya demostración dejamos al lector.

Corolario 3.1.17 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces:*
i) A es abierto si y sólo si $A = A^\circ$.
ii) $A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, donde $\mathcal{U} = \{U \subseteq X : U$ es abierto y $U \subseteq A\}$.
iii) A es cerrado si y sólo si $A = A^-$.
iv) $A^- = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, donde $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F$ es cerrado y $A \subseteq F\}$. ∎

La proposición siguiente nos muestra qué ocurre cuando tomamos el interior, o la clausura, de la unión y de la intersección de dos conjuntos.

Proposición 3.1.18 *Si A y B son subconjuntos de un espacio topológico entonces:*
i) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
ii) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.
iii) $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$.
iv) $(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-$.

Demostración Sabemos que $(A \cap B)^\circ$ es abierto y que está contenido en A y en B, luego por i) de la proposición anterior $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.

Recíprocamente, A° y B° son abiertos contenidos en A y B respectivamente, por lo tanto $A^\circ \cap B^\circ$ es un abierto contenido en $A \cap B$. Así $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$, con lo que se completa la demostración de i).

Como $A^\circ \cup B^\circ$ es un abierto contenido en $A \cup B$, ii) se sigue de la proposición anterior.

Para probar iii) y iv), se procede en forma análoga a los incisos anteriores, pero ahora se usa la parte ii) de la porposición **3.1.16**. ■

Observemos que si en $\mathbb{R}$ tomamos $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$, como $\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{I}^\circ = \emptyset$ y $\mathbb{Q}^- = \mathbb{I}^- = \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathbb{Q}^\circ \cup \mathbb{I}^\circ = \emptyset \subsetneqq (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I})^\circ = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad (\mathbb{Q} \cap \mathbb{I})^- = \emptyset \subsetneqq \mathbb{Q}^- \cap \mathbb{I}^- = \mathbb{R}.$$

Luego, las inclusiones en los incisos ii) y iv) de la proposición anterior pueden ser estrictas.

Los espacios métricos tienen la siguiente importante propiedad de separación de puntos: dados dos puntos, existen entornos de cada uno de ellos con intersección vacía, o sea disjuntos.

Efectivamente, si $x \neq y$ podemos tomar r positivo tal que $r \leq \frac{1}{2} d(x, y)$. Así

$$B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$$

pues si existiera z en la intersección $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r \leq d(x, y)$, lo que es absurdo.

En cambio, no todo espacio topológico posee esta propiedad. Por ejemplo, si X tiene al menos dos puntos y consideramos la topología indiscreta, como X es el único abierto no vacío no existen entornos disjuntos.

Otro ejemplo menos trivial es el que se obtiene tomando un conjunto infinito con la topología de los complementos finitos. En este caso, dos abiertos no vacíos se intersecan y por lo tanto no hay entornos con intersección vacía.

Definición 3.1.19 *Un espacio topológico X es de Hausdorff o T_2 si dados x, $y \in X$ con $x \neq y$, existen $U \in \mathcal{E}_x$ y $V \in \mathcal{E}_y$ tales que $U \cap V = \emptyset$.*

En esta definición, al igual que en casos anteriores, podemos cambiar los entornos por entornos abiertos sin modificar el concepto.

Esta cualidad de separar puntos tiene notables consecuencias. Una de ellas es que nos permite contestar la pregunta que nos hicimos al comienzo de este capítulo: ¿toda topología es inducida por una distancia?.

Ya habíamos anticipado que la respuesta es negativa y damos ahora una justificación. Si toda topología fuese inducida por una distancia, todo espacio topológico sería de Hausdorff y vimos ejemplos de espacios que no lo son. Así el concepto de espacio topológico es una generalización estricta del concepto de espacio métrico.

Definición 3.1.20 *Un espacio topológico X es metrizable si su topología es la inducida por una distancia.*

Veamos un resultado simple en un espacio topológico T_2.

Proposición 3.1.21 *Si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces $\forall x \in X$ el subconjunto $\{x\}$ es cerrado.*

Demostración Sea $x \in X$ y veamos que $\{x\}^c$ es abierto. Tomemos $y \in \{x\}^c$, entonces $x \neq y$ por lo que existen $U \in \mathcal{E}_x$ y $V \in \mathcal{E}_y$ disjuntos. Esto nos dice en particular que $V \subseteq \{x\}^c$. Luego $\{x\}^c$ es entorno de todos sus puntos. ∎

3.2 Funciones continuas

Estamos ahora en condiciones de definir qué entendemos por una función continua de un espacio topológico en otro.

Comenzaremos recordando algunos resultados básicos de la teoría de conjuntos y funciones que nos serán muy útiles en lo que sigue.

Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Entonces, si $A \subseteq X$ la imagen de A por f es

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Por otro lado, si $B \subseteq Y$ la pre-imagen de B por f es

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Con estas notaciones tenemos:

a) Si A_1 y A_2 son subconjuntos de X y $A_1 \subseteq A_2$ entonces $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

b) Si B_1 y B_2 son subconjuntos de Y y $B_1 \subseteq B_2$ entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

c) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X entonces

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{y} \quad f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

En este último caso si f es inyectiva se verifica la igualdad.

d) Si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de Y entonces

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{y} \quad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

e) Si $A \subseteq X$ entonces $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Si además f es inyectiva, se cumple la igualdad.

f) Si $B \subseteq Y$ entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. En este caso si f es suryectiva se da la igualdad.

g) Si $B \subseteq Y$ entonces $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

A la luz de lo observado luego de la definición de continuidad **2.1.15**, reemplazando las bolas abiertas por entornos, llegamos a la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si $\forall V \in \mathcal{E}_{f(x_0)}$ $\exists U \in \mathcal{E}_{x_0}$ tal que $f(U) \subseteq V$.*

La función f es continua si lo es en todo punto de X.

En principio podemos dar tres formulaciones equivalentes para la noción de continuidad de una función, las que serán de utilidad en el trabajo posterior.

Teorema 3.2.2 *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) f es continua.

ii) $\forall V$ abierto en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

iii) $\forall F$ cerrado en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Demostración La equivalencia entre i) y ii) se demuestra en forma totalmente análoga al teorema **2.1.16,** sustituyendo las bolas abiertas por entornos.

Para ver que ii) implica iii), tomemos F cerrado en Y. Entonces F^c es abierto y por ii) $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ es abierto. Luego $f^{-1}(F)$ es cerrado.

Recíprocamente, para demostrar que ii) se deduce de iii) consideremos V abierto en Y. Luego, como V^c es cerrado, $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$ es cerrado y así $f^{-1}(V)$ es abierto en X. ■

La siguiente proposición resume algunos resultados simples sobre continuidad, los que demostraremos usando el enunciado ii) del teorema anterior.

Proposición 3.2.3 *i) Toda función cuyo dominio es un espacio con la topología discreta, es continua.*

ii) Toda función cuyo codominio es un espacio con la topología indiscreta, es continua.

iii) Toda función constante es continua.

iv) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías en un conjunto X, entonces id: $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_2$ es menos fina que $\mathcal{T}_1$.

v) Si X, Y y Z son espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Demostración i) Como todo subconjunto del dominio es abierto, la pre-imagen de un abierto es abierto.

ii) Los únicos abiertos del codominio son dicho espacio y $\emptyset$, por lo tanto, sus pre-imagenes son el espacio dominio y $\emptyset$ respectivamente, que son abiertos.

iii) Dado un abierto en el codominio, su pre-imagen es todo el dominio o $\emptyset$, según que la constante pertenezca o no a dicho abierto, luego es abierto.

iv) Es inmediato ya que la pre-imagen de un conjunto por id, es el mismo conjunto.

v) Sea V abierto en Z. Como g es continua $g^{-1}(V)$ es abierto en Y, pero como f es continua $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es abierto en X. Luego $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ es abierto en X. ■

Veamos ahora un caso particular.

Proposición 3.2.4 *Sean X un conjunto, $x_0 \in X$ y consideremos en X la topología $\mathcal{T}_{x_0}$ dada en **3.1.5**. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces es constante.*

Demostración Supongamos que f es continua y no constante, luego existen números reales distintos y_1, y_2 que pertenecen a la imagen de f. Sean I_1 e I_2 intervalos abiertos y disjuntos centrados en y_1 e y_2 respectivamente. Entonces $f^{-1}(I_1)$ y $f^{-1}(I_2)$ son abiertos en X, disjuntos y no vacíos, lo cual es imposible puesto que x_0 pertenece a ambos conjuntos. ■

Observemos que si en la proposición anterior reemplazamos $\mathbb{R}$ por un espacio de Hausdorff, con una demostración similar, obtenemos el mismo resultado.

Definición 3.2.5 *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces:*

i) f es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y f^{-1}es continua.
ii) f es abierta si $\forall U$ abierto en X, $f(U)$ es abierto en Y.
iii) f es cerrada si $\forall F$ cerrado en X, $f(F)$ es cerrado en Y.

Proposición 3.2.6 *Si X e Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función biyectiva y continua, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) f es un homeomorfismo.
ii) f es abierta.
iii) f es cerrada.

Demostración i)$\Longrightarrow$ii). Sea U abierto en X. Como f^{-1}*es* continua $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ es abierto en Y.

ii)$\Longrightarrow$iii). Si F es cerrado en X, F^c es abierto y entonces $f(F^c)$ es abierto en Y. Por ser f biyectiva $f(F^c) = (f(F))^c$. Luego $f(F)$ es cerrado en Y.

iii)$\Longrightarrow$i). Si F es cerrado en X, entonces por hipótesis $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ es cerrado en Y. Usando iii) del teorema **3.2.2** se concluye que f^{-1} es continua. ■

Definición 3.2.7 *Dos espacios topológicos X e Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Denotaremos esto con $X \cong Y$.*

Claramente la noción de espacios homeomorfos define una relación de equivalencia en la clase de los espacios topológicos puesto que:

i) id es un homeomorfismo.

ii) Si f es un homeomorfismo entonces f^{-1} es un homeomorfismo.

iii) Si f y g son homeomorfismos entonces $f \circ g$ es un homeomorfismo.

En topología estudiamos las propiedades topológicas o invariantes topológicos de los espacios. Estas propiedades son las que se preservan por homeomorfismos, es decir, si un espacio topológico tiene una de esas propiedades todo otro espacio homeomorfo también la debe tener.

Un ejemplo de invariante topológico es la propiedad de ser un espacio de Hausdorff.

Proposición 3.2.8 *Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos y X es de Hausdorff, entonces Y es de Hausdorff.*

Demostración Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Tomemos y_1, $y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Entonces como f es biyectiva, existen x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.

Por ser X T_2, existen U_1 y U_2 entornos abiertos de x_1 y x_2 respectivamente con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Luego $f(U_1)$ y $f(U_2)$ son abiertos, pues f es abierta, y son entornos disjuntos de y_1 e y_2 respectivamente, lo que completa la demostración. ■

Cuando no explicitemos lo contrario, la topología que consideraremos en un subconjunto de un espacio métrico, será la inducida por la restricción de la distancia del espacio métrico a dicho conjunto.

Ejemplo 3.2.9 *Si $f : (0,1) \to (a,b)$ está definida por $f(t) = (b-a)t + a$, entonces f es un homeomorfismo.*

Todos los intervalos abiertos acotados son homeomorfos pues, por lo anterior, dos cualesquiera son homeomorfos al $(0,1)$ y por lo tanto son homeomorfos entre sí.

Con una prueba similar se ve que todos los intervalos cerrados son homeomorfos.

Ejemplo 3.2.10 *a) Si $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ está definida por $g(t) = \frac{t}{1-|t|}$, entonces g es un homeomorfismo.*

b) Si $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ está definida por $h(t) = \ln t$, entonces h es un homeomorfismo.

Una función entre espacios topológicos puede ser biyectiva, continua y no ser un homeomorfismo. Un ejemplo simple de esta situación es cuando en un mismo conjunto tomamos dos topologías, una estrictamente más fina que la otra. En este caso, por iv) de la proposición **3.2.3**, id no es un homeomorfismo.

Cuando tenemos una función biyectiva entre un espacio topológico y un conjunto, podemos "copiar" la topología de aquel en este último vía la biyección.

Proposición 3.2.11 *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Entonces, existe una única topología en Y tal que f es un homeomorfismo.*

Demostración Supongamos que existe una topología $\mathcal{T}$ en Y que hace de f un homeomorfismo, entonces:

i) Por ser f abierta, $f(U) \in \mathcal{T}$ para todo U abierto en X.

ii) Si $V \in \mathcal{T}$, $U = f^{-1}(V)$ es abierto en X, por ser f continua. Pero $V = f(U)$ pues f es biyectiva.

Luego, de i) y ii) se deduce que la única familia $\mathcal{T}$ posible es

$$\mathcal{T} = \{f(U) : U \text{ es abierto en } X\}.$$

Es inmediato ver que $\mathcal{T}$ es efectivamente una topología en Y y que f resulta un homeomorfismo. ■

Sea $M(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. La función natural

$$\begin{aligned} f &: M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2} \\ f((a_{ij})_{ij}) &= (a_{11}, ..., a_{1n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn}) \end{aligned}$$

es una biyección. Por la proposición anterior, podemos dar a $M_n(\mathbb{R})$ la topología que hace de f un homeomorfismo.

Con esta topología, la función determinante

$$\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

es continua y por lo tanto, el conjunto de matrices inversibles $Gl(n, \mathbb{R})$ es un abierto en $M_n(\mathbb{R})$ puesto que

$$Gl(n, \mathbb{R}) = (\det)^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

3.3 Ejercicios

1. a) Verificar que las familias $\mathcal{T}_{x_0}$ y $\mathcal{T}$ de los ejemplos **3.1.5** y **3.1.6** , son topologías. ¿Son comparables con la topología de los complementos finitos?.

b) Probar que si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{x_0}$ y la topología usual no son comparables.

2. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$ y $\mathcal{T}^{x_0} = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$. Probar que $\mathcal{T}^{x_0}$ es una topología en X.

3. Si $\mathcal{T}_i$ es una topología en X $\forall i \in I$, demostrar que $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ es una topología en X.

4. Para cada $a \in \mathbb{R}$, sean $I_a = (-\infty, a)$ y $D_a = (a, +\infty)$.

a) Probar que $\mathcal{T}_i = \{I_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{T}_d = \{D_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ son topologías en $\mathbb{R}$.

b) Si en a) hacemos variar a en $\mathbb{Q}$, ¿son $\mathcal{T}_i$ y $\mathcal{T}_d$ topologías en $\mathbb{R}$?.

5. Hallar todas las topologías en $X = \{a, b, c\}$.

6. Hallar la clausura en $\mathbb{R}^2$ de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$.

7. Sea $\mathbb{N}$ con la topología del ejemplo **3.1.6**

a) Hallar los puntos de acumulación de $A = \{4, 13, 28, 37\}$.

b) Hallar los conjuntos cerrados de $\mathbb{N}$.

c) Hallar la clausura de $A = \{7, 24, 47, 81\}$ y $B = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$.

8. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}^{x_0}$ del ejercicio **2** , donde $x_0 = 0$. Hallar A°, A^- y FrA en los siguientes casos:

a) $A = [0, 1) \cup \{2\}$.

b) $A = (-\infty, -1)$.

9. Sea X un espacio topológico. Probar:

a) Si $A \subseteq X$ es abierto, entonces $A \subseteq A^{-\circ}$.

b) Si $B \subseteq X$ es cerrado, entonces $B^{\circ -} \subseteq B$.

c) Si $C \subseteq X$ entonces $C^- = C \cup FrC$ y $C^\circ = C - FrC$.

10. Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones y $x_0 \in X$. Probar que si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

11. Si f y g son funciones continuas de un espacio topológico en $\mathbb{R}$, probar que $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas.

12. Sea X con la topología de los complementos finitos.

a) Determinar todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

b) Probar que si $f : X \to X$ es una función biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

13. Probar **3.2.10** y concluir que cualquier intervalo abierto no acotado es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

14. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, probar que $f^{-1}(\{a\})$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$.

15. Sean X e Y espacios topológicos, Y de Hausdorff, f y $g : X \to Y$ funciones continuas. Demostrar que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

CAPITULO 4

BASES. SUBESPACIOS

4.1 Bases

En el desarrollo de gran parte de los conceptos y resultados del álgebra lineal no es necesario considerar todos los vectores del espacio vectorial. En general es suficiente tomar un "pequeño" conjunto de ellos con la propiedad de generar a los demás. Un caso particular de este tipo de conjuntos es una base del espacio vectorial.

Por ejemplo, se puede definir una transformación lineal con sólo dar las imágenes de los vectores de una base.

Esta situación ocurre también en otras áreas de la matemática, en particular en topología. A menudo es suficiente trabajar con un subconjunto de la topología tal que todo abierto se puede "generar" con miembros de dicho subconjunto, como es el caso de la familia de los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Definición 4.1.1 *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ es una base de dicha topología si todo miembro no vacío de $\mathcal{T}$ se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Existe otra forma equivalente de definir base de una topología, la que enunciamos en la proposición siguiente.

Proposición 4.1.2 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es base de la topología si y sólo si $\forall U \in \mathcal{T}$ y $\forall x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que*

$$x \in B \subseteq U.$$

Demostración Sean $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U$. Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ donde $B_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in I$. Luego, existe $j \in I$ tal que $x \in B_j$ y claramente $B_j \subseteq U$.

Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad que para cada $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $B_x \subseteq U$, entonces es inmediato ver que $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, y así $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$. ■

Es claro que toda topología es base de sí misma y que, si $\mathcal{B}$ es base de la topología $\mathcal{T}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}'$ es también base de $\mathcal{T}$.

En un espacio métrico, de la definición de subconjunto abierto resulta que la familia de bolas abiertas es base de la topología inducida por la métrica.

En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, como la topología usual también es inducida por las distancias d_1 y d_2 definidas en los ejemplos **2.1.3** y **2.1.4**, los cuadrados sin sus bordes y con los lados paralelos a los ejes (bolas abiertas respecto de la distancia d_1) o bien aquellos con las diagonales paralelas a los ejes (bolas abiertas respecto de la distancia d_2), forman bases de la topología usual.

Otros ejemplos de bases de una topología son los siguientes.

Ejemplo 4.1.3 *Sea X con la topología discreta. Como $\{x\}$ es abierto $\forall x \in X$, de la proposición anterior se tiene que $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base de dicha topología.*

Observemos además que cualquier base de la topología discreta debe contener a $\mathcal{B}$.

Ejemplo 4.1.4 *Sea $x_0 \in X$ y consideremos en X la topología $\mathcal{T}_{x_0}$ definida en **3.1.5**. Una base para $\mathcal{T}_{x_0}$ es*

$$\mathcal{B} = \{\{x_0, x\} : x \in X \ y \ x \neq x_0\} \cup \{\{x_0\}\}.$$

Ejemplo 4.1.5 *En $\mathbb{R}^n$ la familia $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}^n \ y \ n \in \mathbb{N}\}$ es una base de la topología usual.*

En efecto, si U es abierto y $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{n} < r$, entonces $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, r) \subseteq U$ y por la proposición anterior $\mathcal{B}$ resulta una base de la topología usual.

Ejemplo 4.1.6 *Sea $\mathcal{B} = \{(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q} \ y \ n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.*

Para probar esto, tomemos U abierto en $\mathbb{R}$ y $x \in U$. Sabemos que existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq U$. Por las propiedades de los números reales, existen $q \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x - q| < \frac{1}{n} < \frac{r}{2}.$$

Luego $x \in (q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n})$ y este intervalo está incluido en U, pues si $y \in (q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n})$ entonces $|y - q| < \frac{1}{n}$ y

$$|y - x| \leq |y - q| + |q - x| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < r$$

es decir, $y \in (x - r, x + r) \subseteq U$.

No todo subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ es base de una topología en el conjunto X. Por ejemplo, los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$B_1 = (-\infty, 1) \quad \text{y} \quad B_2 = (-1, \infty)$$

no constituyen una base de una topología en $\mathbb{R}$, pues sino $B_1 \cap B_2 = (-1, 1)$ sería un abierto que no se puede escribir como unión de elementos de la base.

La pregunta natural que surge ahora es qué propiedades debe cumplir un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ para ser base de una topología en X.

Observemos que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, la unión de los miembros de $\mathcal{B}$ es X. Además, si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, como $B_1 \cap B_2$ es abierto en X, existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

El próximo teorema asegura que estas condiciones son suficientes para que una familia de subconjuntos de X sea base de una topología en X.

Teorema 4.1.7 *Sea X un conjunto. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es tal que:*

i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

ii) Si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_0 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2$$

entonces existe una única topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de dicha topología.

Demostración Por la proposición **4.1.2**, la única manera de definir una topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{B}$ sea base de $\mathcal{T}$ es

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \forall x \in U,\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Veamos que efectivamente $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Por i) es claro que $X \in \mathcal{T}$ y por definición de $\mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Sean U_1, $U_2 \in \mathcal{T}$ y $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces existen B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ tales que

$$x \in B_1 \subseteq U_1 \quad \text{y} \quad x \in B_2 \subseteq U_2.$$

Por ii) existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2.$$

Luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Inductivamente se completa la prueba de que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}$ si $U_1, ..., U_k \in \mathcal{T}$.

Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de miembros de $\mathcal{T}$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y $x \in U$, entonces $\exists j \in I$ tal que $x \in U_j$. Por definición de $\mathcal{T}$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq U_j \subseteq U.$$

Así U también pertenece a $\mathcal{T}$ y ésta es una topología en X que tiene a $\mathcal{B}$ como base. ■

Veremos ahora que si una familia de subconjuntos de X sólo satisface i) del teorema anterior, podemos construir con ella una base de una topología en X.

Proposición 4.1.8 *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $X = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$. Entonces la familia $\mathcal{B}$ de intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$ es base de una topología en X.*

Esta topología se dice generada por $\mathcal{S}$ y se denomina a $\mathcal{S}$ sub-base de dicha topología.

Demostración Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, la hipótesis asegura que $\mathcal{B}$ satisface i) del teorema anterior. Además, si B_1 y B_2 son intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ entonces $B_1 \cap B_2$ también lo es. Luego $\mathcal{B}$ satisface ii) del teorema anterior y se concluye la demostración. ■

Ejemplo 4.1.9 *La familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$*

$$\mathcal{S} = \{(a,b)\times\mathbb{R} : a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\} \cup \{\mathbb{R}\times(c,d) : c,d\in \mathbb{R} \text{ y } c < d\}$$

es sub-base de la topología usual.

En efecto, los miembros de $\mathcal{S}$ son abiertos en $\mathbb{R}^2$. Además

$$((a,b)\times\mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}\times(c,d)) = (a,b)\times(c,d).$$

El conjunto de estos rectángulos forman una base de la topología usual pues incluye al conjunto de los cuadrados, que sabemos que es una base. Luego $\mathcal{S}$ es una sub-base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.1.10 *Si X es un conjunto, $\mathcal{S} = \{\{x\}^c : x \in X\}$ es una sub-base de la topología de los complementos finitos en X.*

Para ver esto notemos que cualquier abierto no vacío $U = \{x_1, ..., x_k\}^c$ se puede obtener por intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{S}$ de la siguiente manera

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} \{x_i\}^c.$$

La noción de base de una topología nos permite dar una nueva equivalencia para el concepto de continuidad de una función.

Proposición 4.1.11 *Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{B}$ una base de la topología de Y. Entonces f es continua si y sólo si $\forall V \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.*

Demostración Si f es continua y $V \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(V)$ es abierto en X por ii) de la proposición **3.2.2**.

Recíprocamente, si W es abierto en Y, $W = \bigcup_{i\in I} B_i$ donde $B_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in I$. Luego, $f^{-1}(W) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ es abierto en X por ser unión de abiertos y por lo tanto f es continua. ■

En el Capítulo 3, luego de distintas definiciones que involucran a los entornos, hemos puntualizado que si cambiamos éstos por entornos abiertos, los conceptos definidos no se modifican.

Estos son casos particulares de un hecho más general que tiene gran similitud con lo expresado acerca de las bases de una topología. Muchas veces, en diversas definiciones y resultados, es suficiente considerar una familia de entornos de un punto tal que cualquier entorno del punto contenga uno de dicha familia.

Definición 4.1.12 *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Una familia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{E}_x$ es base de entornos de x, si $\forall V \in \mathcal{E}_x \quad \exists W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subseteq V$.*

Es claro que los entornos abiertos de un punto forman una base de entornos del mismo.

En un espacio con la topología discreta, $\{x\}$ es un entorno del punto x y forma una base de entornos de dicho punto.

Si la topología es inducida por una métrica, las bolas abiertas centradas en un punto constituyen una base de entornos del punto. Más aún, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x.

4.2 Espacios $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{N_1}$ y separables

El ejemplo **4.1.6** nos muestra una base de una topología con relativamente "pocos" elementos, más precisamente, una base numerable.

Recordemos que un conjunto A es numerable si existe una función inyectiva de A en el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$. Se prueba que:

i) Los subconjuntos de un conjunto numerable son numerables.

ii) La unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables es numerable.

iii) El producto cartesiano de un número finito de conjuntos numerables es numerable.

Es conocido que $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ es no numerable.

Definición 4.2.1 *Se dice que un espacio topológico satisface el segundo axioma de numerabilidad o que es N_2, si su topología tiene una base numerable.*

Del ejemplo **4.1.6** se tiene que $\mathbb{R}$ es N_2, pues

$$\mathcal{B} = \{(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

es numerable ya que hay una biyección de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ y éste es un conjunto numerable por ser el producto cartesiano de dos conjuntos numerables.

Ejemplo 4.2.2 $\mathbb{R}^m$ *es N_2, $\forall m \in \mathbb{N}$.*

En efecto, con un análisis similar al caso de $\mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q}^m \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

es una base de la topología usual. Además $\mathcal{B}$ es numerable pues existe una biyección de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{Q}^m \times \mathbb{N}$ y este conjunto es numerable, por ser producto cartesiano de finitos conjuntos numerables.

Ejemplo 4.2.3 *Si X tiene la topología discreta y es numerable, $\mathcal{B}$ del ejemplo **4.1.3** es numerable y por lo tanto X es N_2. Ahora, si X es no numerable ($X = \mathbb{R}$ por ejemplo), como toda base de la topología discreta contiene a la anterior $\mathcal{B}$ y ésta es no numerable, X no es N_2.*

Proposición 4.2.4 *Si X es un conjunto no numerable con la topología de los complementos finitos, entonces X no es N_2.*

Demostración Supongamos que exista una base numerable $\mathcal{B}$ de la topología de X y sea $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in M}$ con $M \subseteq \mathbb{N}$ y $U_n \neq \emptyset$ $\forall n$. Entonces como U_n^c es finito $\forall n \in M$, $U = \bigcup_{n \in M} U_n^c$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos. Luego $\exists x \in X$ tal que $x \notin U$, es decir

$$x \in U^c = (\bigcup_{n \in M} U_n^c)^c = \bigcap_{n \in M} U_n.$$

Así el abierto $\{x\}^c$ no contiene ningún miembro de $\mathcal{B}$ puesto que $x \in U_n$ $\forall n \in M$. Esto contradice nuestra suposición. ■

Definición 4.2.5 *Se dice que un espacio topológico X satisface el primer axioma de numerabilidad o que es N_1, si todo $x \in X$ admite una base de entornos numerable.*

Si la topología de un espacio X es la inducida por una métrica, entonces X es N_1. En efecto, $\forall x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x y es numerable.

Un espacio X con la topología discreta es N_1 puesto que $\{\{x\}\}$ es base de entornos de x.

Proposición 4.2.6 *Si X es un conjunto no numerable con la topología de los complementos finitos, entonces X no es N_1.*

Demostración Es similar a la de la proposición **4.2.4** y la dejamos al lector. ■

Proposición 4.2.7 *Si X es un espacio topológico N_2 entonces X es N_1.*

Demostración Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{B_n : n \in M\}$ una base numerable de la topología de X.

Tomemos $x \in X$ y llamemos $M_x = \{n \in M : x \in B_n\}$. Entonces M_x es numerable por ser un subconjunto de M.

La familia numerable

$$\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in M_x\}$$

es base de entornos de x, pues si $V \in \mathcal{E}_x$ $\exists U$ abierto en X tal que $x \in U \subseteq V$. Además, como $\mathcal{B}$ es base de la topología,

$$\exists n \in M \text{ tal que } x \in B_n \subseteq U \subseteq V$$

por lo tanto $B_n \in \mathcal{B}_x$ y en consecuencia $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x. ∎

Sabemos que si X es un conjunto no numerable con la topología discreta, es N_1 y no es N_2. Esto muestra que la recíproca de la proposición anterior es falsa.

Definición 4.2.8 *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice denso en X si $A^- = X$.*

Proposición 4.2.9 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es denso en X si y sólo si $\forall U$ abierto no vacío en X, $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración Supongamos que A es denso en X y U es un abierto no vacío. Consideremos $x \in U$, como $x \in A^- = X$ y $U \in \mathcal{E}_x$ resulta $U \cap A \neq \emptyset$.

Recíprocamente, sean $x \in X$ y V un entorno abierto de x. Como todo abierto no vacío interseca a A, resulta $V \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in A^-$, lo que muestra que $A^- = X$. ∎

Hemos visto que $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R} = \mathbb{I}^-$, es decir que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$.

En un espacio con la topología de los complementos finitos todo conjunto infinito es denso, pues todo abierto no vacío tiene complemento finito y por lo tanto interseca a cualquier conjunto infinito.

Un tipo especial de espacio topológico es aquel que contiene un subconjunto denso numerable.

Definición 4.2.10 *Un espacio topológico se dice separable si contiene un subconjunto denso y numerable.*

Como $\mathbb{Q}$ es denso y numerable, $\mathbb{R}$ es un espacio topológico separable.

Si X tiene la topología de los complementos finitos entonces es separable. Esto es claro si X es numerable. En cambio, si X es no numerable siempre podemos tomar un subconjunto D infinito numerable y por lo tanto denso en X. Un caso particular de este ejemplo es tomar $X = \mathbb{R}$ y $D = \mathbb{N}$.

Este último ejemplo nos muestra un espacio topológico que es separable pero no es N_1 ni N_2. Veremos en la siguiente proposición que la condición de ser N_2 es suficiente para que el espacio sea separable.

Proposición 4.2.11 *Si X es un espacio topológico N_2 entonces X es separable.*

Demostración Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in M}$ una base numerable de la topología de X. Podemos suponer que $B_n \neq \emptyset$ $\forall n$, sino eliminamos dicho conjunto y obtenemos una familia que sigue siendo una base de la topología. Para cada $n \in M$ elegimos un punto $x_n \in B_n$ y definimos $D = \{x_n : n \in M\}$. Entonces D es numerable y es denso, puesto que todo abierto no vacío contiene algún $B_n \in \mathcal{B}$ y por lo tanto interseca a D. Luego X es separable. ■

Veremos ahora que en un espacio topológico metrizable se cumple la recíproca de la proposición anterior.

Proposición 4.2.12 *Si X es un espacio topológico separable y la topología es inducida por una distancia, entonces X es N_2.*

Demostración Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $D = \{x_m : m \in M\}$ un subconjunto denso y numerable de X. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{B(x_m, \frac{1}{n}) : m \in M \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

es numerable pues se puede establecer una biyección entre $\mathcal{B}$ y $M \times \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\mathcal{B}$ es base de la topología de X. En efecto, si U es abierto en X y $x \in U$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{k}) \subseteq U$. Como además $x \in D^-$, si tomamos $n = 2k$, $\exists m \in M$ tal que $x_m \in B(x, \frac{1}{n})$ y por lo tanto $x \in B(x_m, \frac{1}{n})$.

Sólo resta probar que $B(x_m, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Sea $y \in B(x_m, \frac{1}{n})$, entonces

$$d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} = \frac{1}{k}$$

y por lo tanto

$$y \in B(x, \frac{1}{k}) \subseteq U. \ ■$$

Por la proposición anterior, cualquier espacio metrizable que no sea N_2 (por ejemplo un espacio con la distancia discreta y no numerable) nos da un ejemplo que muestra que si un espacio topológico es N_1 no necesariamente es separable.

A continuación probaremos que las propiedades N_1, N_2 y separable son invariantes topológicos.

Teorema 4.2.13 *Sean X e Y espacios topológicos homeomorfos. Se verifica que:*

i) Si X es N_2 entonces Y es N_2.

ii) Si X es N_1 entonces Y es N_1.

iii) Si X es separable entonces Y es separable.

Demostración Supongamos que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo.

i) Sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in M}$ una base numerable de la topología de X. Entonces

$$\mathcal{B}' = \{f(B_n)\}_{n\in M}$$

es una familia numerable de abiertos de Y, por ser f abierta.

Si V es un abierto en Y, como f es continua, $f^{-1}(V)$ es abierto en X y por lo tanto existe $M_1 \subseteq M$ tal que $f^{-1}(V) = \bigcup_{n\in M_1} B_n$.

Por ser f biyectiva, $f(f^{-1}(V)) = V$. Luego $V = f(\bigcup_{n\in M_1} B_n) = \bigcup_{n\in M_1} f(B_n)$ lo que prueba que $\mathcal{B}'$ es una base numerable de Y, es decir, Y es N_2.

ii) Sean $y \in Y$ y $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es N_1 existe $\mathcal{B}_x = \{V_n\}_{n\in M}$ base numerable de entornos de x.

Si V es un entorno de x, contiene un abierto U tal que $x \in U$ y por ser f abierta $f(U)$ es un entorno abierto de y. Luego $f(V)$ es un entorno de y.

Por lo tanto

$$\mathcal{B}'_y = \{f(V_n)\}_{n\in M}$$

es una familia numerable de entornos de y, que resulta una base de entornos de dicho punto. En efecto, si W es un entorno de y, $f^{-1}(W)$ es un entorno de x ya que f es continua. Por lo tanto existe $V_n \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_n \subseteq f^{-1}(W)$ y entonces $f(V_n) \subseteq W$.

Hemos hallado así una base de entornos numerable de y, cualquiera sea $y \in Y$, lo que prueba que Y es N_1.

iii) Sea $D \subseteq X$ un conjunto numerable y denso en X. Claramente $f(D)$ es numerable y veamos que $f(D)$ es denso en Y.

Si V es un abierto no vacío en Y, $f^{-1}(V)$ es un abierto no vacío en X, por lo tanto $f^{-1}(V) \cap D \neq \emptyset$. Luego

$$V \cap f(D) \neq \emptyset$$

y por la proposición **4.2.9**, $f(D)$ es denso en Y. ■

4.3 Subespacios

Para finalizar este capítulo, veamos qué se entiende por subespacio de un espacio topológico.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico e $Y \subseteq X$, es inmediato ver que

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en Y.

Definición 4.3.1 *Con la notación anterior, $\mathcal{T}_Y$ se denomina topología relativa de X en Y o topología en Y inducida por $\mathcal{T}$. El par $(Y, \mathcal{T}_Y)$ o simplemente el espacio Y, es llamado subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$.*

Observemos que si Y es abierto en X, $\mathcal{T}_Y = \{U \in \mathcal{T} : U \subseteq Y\}$. En este caso decimos que Y es un *subespacio abierto de* X.

Consideremos a $[0,2]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. El subconjunto $[0,1)$ (que no es abierto en $\mathbb{R}$), es abierto en $[0,2]$ pues $[0,1) = [0,2] \cap (-1,1)$.

Si Y es un subespacio topológico de X, la inclusión

$$i : Y \to X \quad \text{donde} \quad i(x) = x$$

es una función continua pues si U es abierto en X, $i^{-1}(U) = U \cap Y$ es abierto en Y. Además, si $f : X \to Z$ es una función continua la restricción de f a Y

$$f_{|Y} : Y \to Z$$

es continua puesto que $f_{|Y} = f \circ i$. Por otra parte, si W es un subespacio topológico de Z y $f(X) \subseteq W$, la co-restricción de f a W

$$f_0 : X \to W \quad \text{donde} \quad f_0(x) = f(x)$$

es también continua. En efecto, si V es un abierto en W, existe U abierto en Z tal que $V = W \cap U$. Luego, como $f(X) \subseteq W$ resulta $f_0^{-1}(V) = f^{-1}(U)$, que es abierto en X por ser f continua.

Ejemplo 4.3.2 *Sean $k < n$ y $\mathbb{R}_0^k = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = ... = x_n = 0\}$. Esta es la forma canónica de "mirar" a $\mathbb{R}^k$ dentro de $\mathbb{R}^n$. Podemos ver que la biyección natural*

$$j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_0^k \quad \textit{donde} \quad j(x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$$

es un homeomorfismo.

En efecto, si pensamos a j con codominio $\mathbb{R}^n$, es claramente continua y por lo tanto su co-restricción a $\mathbb{R}_0^k$ también lo es. Por otro lado, j^{-1} es la restricción a $\mathbb{R}_0^k$ de la proyección $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definida por $p(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$, luego es continua.

Proposición 4.3.3 *Sean X un espacio topológico e Y un subespacio topológico de X. Entonces:*

i) $A \subseteq Y$ es cerrado en Y si y sólo si $A = F \cap Y$ donde F es cerrado en X.

ii) Si $x \in Y$, V es un entorno de x en Y si y sólo si $V = W \cap Y$, con W entorno de x en X.

iii) Si $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_Y = \{B_i \cap Y\}_{i \in I}$ es una base de $\mathcal{T}_Y$.

Demostración i) Si A es cerrado en Y entonces $Y - A \in \mathcal{T}_Y$, es decir $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $Y - A = U \cap Y$. Luego

$$A^c = (Y - A) \cup Y^c = (U \cap Y) \cup Y^c = U \cup Y^c$$

y por lo tanto
$$A = (U \cup Y^c)^c = U^c \cap Y.$$

Tomando $F = U^c$ concluimos la prueba de la condición suficiente de i).

Recíprocamente, si $A = F \cap Y$ con F cerrado en X, entonces el complemento de A en Y es

$$Y - A = Y - (F \cap Y) = Y \cap (F \cap Y)^c = Y \cap (F^c \cup Y^c) = Y \cap F^c.$$

Como F^c es abierto en X, $Y - A$ resulta abierto relativo en Y lo que implica que A es cerrado en el subespacio topológico Y.

ii) Si V es un entorno de x en el subespacio topológico Y, $\exists U$ abierto en X tal que $x \in U \cap Y \subseteq V$. Entonces, si tomamos $W = U \cup V$, W es un entorno de x en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y

$$W \cap Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y) = (U \cap Y) \cup V = V.$$

Recíprocamente, si $x \in Y$ y W es un entorno de x en X, $\exists U$ abierto en X tal que $x \in U \subseteq W$. Luego
$$x \in U \cap Y \subseteq W \cap Y.$$
Como $U \cap Y$ es un abierto en la topología relativa, $W \cap Y$ es un entorno de x en Y.

iii) Dejamos a cargo del lector. ■

Definición 4.3.4 *Si Y es un subconjunto de un espacio topológico X tal que la topología relativa de X en Y es la discreta, decimos que Y es un subconjunto discreto de X.*

El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$.

Proposición 4.3.5 *Si X es un espacio topológico de Hausdorff e Y es un subconjunto finito de X, entonces Y es discreto.*

Demostración Sea $x \in Y$ y veamos que $\{x\}$ es abierto en Y.

Por ser X T_2, para cada $y \in Y$ con $y \neq x$ existen abiertos en X, U_y y V_y tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. Entonces $U = \bigcap_{y \in Y - \{x\}} U_y$ es intersección de un número finito de abiertos, por lo tanto es abierto en X y además tiene la propiedad que $U \cap Y = \{x\}$. Es decir, $\{x\}$ es abierto en Y. ■

Definición 4.3.6 *Si una propiedad es tal que, cada vez que se verifica en un espacio topológico también se cumple en todos los subespacios de éste, decimos que es una propiedad hereditaria.*

Proposición 4.3.7 *Las propiedades topológicas T_2, N_1 y N_2 son hereditarias.*

Demostración Dejamos al lector hacer en detalle la demostración, que sigue fácilmente de la proposición **4.3.3**. ■

4.4 Ejercicios

1. a) Probar que la familia $\mathcal{B}$ del ejemplo **4.1.4** es una base de $\mathcal{T}_{x_0}$.
b) Hallar una base de la topología $\mathcal{T}^x$ definida en el ejercicio **2** de **3.3**.

2. Determinar si la familia $\mathcal{B} = \{(a,b) \times (a,b) : a, b \in \mathbb{Q}$ y $a < b\}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

3. Demostrar que la familia $\mathcal{B}$ del ejemplo **4.2.2** es una base de la topología usual de $\mathbb{R}^m$.

4. Determinar la topología que genera en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de rectas paralelas a los ejes coordenados.

5. Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$ hallar una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ y en $(X, \mathcal{T}^{x_0})$.

6. Sea $\mathbb{N}$ con la topología definida en el ejemplo **3.1.6**. Hallar todos los subconjuntos densos en $\mathbb{N}$.

7. Demostrar la afirmación de la proposición **4.2.6**. Es decir, probar que si X es un conjunto no numerable con la topología de los complementos finitos, entonces X no es N_1.

8. Sea $\mathcal{T}$ la topología en $\mathbb{R}$ generada por los intervalos semi-abiertos $[a,b)$ donde $a < b$. Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es N_1, es separable y no es N_2.

9. Sean X un espacio topológico e Y un subespacio de X. Probar:
a) Si $A \subseteq Y$ y A_Y^- es la clausura de A en Y, entonces $A_Y^- = A^- \cap Y$.
b) Si $A \subseteq Y$ y A_Y° es el interior de A en Y, entonces $A^\circ \subseteq A_Y^\circ$.

10. Probar que si X es un espacio topológico separable e Y es un subespacio abierto de X, entonces Y es separable.

11. a) Demostrar la parte iii) de la proposición **4.3.3**.
b) Demostrar la proposición **4.3.7** .

12. a) Sean $F_1, ..., F_k$ subconjuntos cerrados de un espacio topológico X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$. Sean $f_i : F_i \to Y$, para $i = 1, ..., k$, funciones continuas con la propiedad que si $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, entonces f_i y f_j coinciden en dicha intersección.

Probar que si definimos $f : X \to Y$ por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in F_i$, entonces f es continua.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3y + x & \text{si} \quad xy \geq 0 \\ xy^7 + x & \text{si} \quad xy \leq 0. \end{cases}$$

Demostrar que f es continua.

CAPITULO 5
ESPACIOS CONEXOS Y ARCO CONEXOS

5.1 Espacios conexos

En este capítulo abordamos el tema de la conexión de un espacio topológico. Nos proponemos ver si un espacio topológico X se puede "partir" en dos subespacios topológicos X_1 y X_2, tales que la topología del espacio ambiente X se obtenga uniendo abiertos de cada subespacio. De darse esta situación, los subconjuntos X_1 y X_2 deberían ser abiertos en el espacio X.

Definición 5.1.1 *Un espacio topológico X es conexo si no existen U y V abiertos en X, no vacíos y disjuntos tales que $X = U \cup V$.*

Otras dos maneras de enunciar esta definición son las siguientes:

i) X es conexo si dados U y V abiertos en X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$ se verifica que $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.

ii) X es conexo si dados U y V abiertos en X, no vacíos y tales que $X = U \cup V$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.

Como ya vimos, si X es un conjunto infinito con la topología de los complementos finitos, dos abiertos no vacíos se intersecan y por lo tanto X es conexo.

Si X es un conjunto con al menos dos elementos y consideramos la topología discreta, X no es conexo puesto que si $x \in X$, $U = \{x\}$ y $V = \{x\}^c$ son abiertos en X, no vacíos y disjuntos y $X = U \cup V$.

Obviamente, cualquier conjunto X con la topología indiscreta es conexo pues el único abierto no vacío es el propio X.

Otra equivalencia para el concepto de conexión es la que damos en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.2 *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) X es conexo.

ii) Si $A \subseteq X$ es abierto y cerrado en X, entonces $A = \emptyset$ o $A = X$.

Demostración i)$\Rightarrow$ii). Sea $A \subseteq X$ abierto y cerrado en X y supongamos que $A \neq \emptyset$. Entonces, si $A \neq X$, A^c es no vacío y abierto en X ya que A es cerrado. Pero $A \cap A^c = \emptyset$ y $A \cup A^c = X$, lo que contradice que X sea conexo. Luego $A = X$.

ii)$\Rightarrow$ i). Supongamos que X no es conexo, entonces existen U y V abiertos en X no vacíos y disjuntos tales que $X = U \cup V$. Como $U^c = V$, U es cerrado en X y además $U \neq X$. Luego U es abierto, cerrado y $\emptyset \subsetneqq U \subsetneqq X$ lo que contradice ii). ■

El siguiente teorema nos da un importante ejemplo de espacio topológico conexo.

Teorema 5.1.3 $\mathbb{R}$ *es un espacio topológico conexo.*

Demostración Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto, cerrado y no vacío.

Supongamos que $A \neq \mathbb{R}$, entonces existe $x_0 \in A^c$ y podemos considerar los siguientes subconjuntos

$$A_1 = (-\infty, x_0) \cap A \quad \text{y} \quad A_2 = (x_0, +\infty) \cap A.$$

Luego $A_1 \neq \emptyset$ o $A_2 \neq \emptyset$ pues A es no vacío y $A = A_1 \cup A_2$.

Supongamos que $A_1 \neq \emptyset$. Por ser intersección de abiertos, A_1 es abierto en $\mathbb{R}$. Pero también es cerrado en $\mathbb{R}$ ya que podemos expresarlo como intersección de dos cerrados de la siguiente manera

$$A_1 = (-\infty, x_0] \cap A.$$

Como A_1 está acotado superiormente por x_0, existe el supremo a de A_1. Por definición de supremo, todo intervalo centrado en a interseca a A_1, luego $a \in A_1^- = A_1$.

Puesto que A_1 es abierto en $\mathbb{R}$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A_1$, lo cual es absurdo pues todos los puntos de $(a, a+\varepsilon)$ pertenecen a A_1 y son mayores que el supremo de A_1.

En el caso que $A_2 \neq \emptyset$ hacemos un análisis similar, considerando a como el ínfimo de A_2 y también llegamos a un absurdo. Luego $A = \mathbb{R}$ y por la proposición **5.1.2** , $\mathbb{R}$ es conexo. ■

Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}$ generada por los intervalos semiabiertos a derecha. Una base de $\mathcal{T}$ es

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}.$$

Entonces $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es conexo pues $[0, 1) \in \mathcal{T}$ y $[0, 1)^c \in \mathcal{T}$, ya que podemos expresar a $[0, 1)^c$ como unión de abiertos de $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$[0, 1)^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, 0)) \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} [1, n)).$$

Definición 5.1.4 *Un subconjunto de un espacio topológico es conexo si como subespacio es un espacio topológico conexo.*

$\mathbb{Q}$ no es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ pues

$$\mathbb{Q} = ((-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\pi, +\infty) \cap \mathbb{Q})$$

y ambos miembros de la unión son abiertos en $\mathbb{Q}$, no vacíos y disjuntos.

Es claro que, si x pertenece a un espacio topológico X, entonces $\{x\}$ es un subconjunto conexo de X.

Proposición 5.1.5 *Si $C \neq \emptyset$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, entonces C es un intervalo.*

Demostración Supongamos que C no es un intervalo, entonces existen $a, b \in C$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a < x_0 < b$ y $x_0 \notin C$. Luego

$$U = C \cap (-\infty, x_0) \quad \text{y} \quad V = C \cap (x_0, \infty)$$

son abiertos en C, no vacíos pues $a \in U$ y $b \in V$ y además satisfacen que

$$C = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

lo que contradice que C sea conexo. Luego C es un intervalo. ■

Dejamos al lector la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 5.1.6 *Dados un espacio topológico X y un subconjunto A de X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) A es un subconjunto conexo de X.

ii) Si U y V son abiertos en X tales que

$$A \subseteq U \cup V \ , \quad A \cap U \neq \emptyset \quad y \quad A \cap V \neq \emptyset$$

entonces $A \cap U \cap V \neq \emptyset$. ■

El siguiente teorema nos permitirá dar una serie de ejemplos de espacios topológicos conexos.

Teorema 5.1.7 (de Bolzano) *Si X e Y son espacios topológicos, X es conexo y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración Sean U y V abiertos en Y tales que $f(X) \subseteq U \cup V$, $f(X) \cap U \neq \emptyset$ y $f(X) \cap V \neq \emptyset$. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X, no vacíos y satisfacen que $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Luego, como X es conexo resulta $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ y por lo tanto

$$f(X) \cap U \cap V \neq \emptyset.$$

Por la proposición anterior, $f(X)$ es conexo. ■

Corolario 5.1.8 *Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces X es conexo si y sólo si Y es conexo. Esto es, la conexión es un invariante topológico.* ■

Corolario 5.1.9 *Los intervalos abiertos, incluidos los no acotados, son subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.*

Demostración Hemos visto en **3.2.9** y **3.2.10** que todo intervalo abierto, aún los no acotados, son homeomorfo a $\mathbb{R}$. Luego por el corolario anterior, todo intervalo abierto es conexo. ■

Por el teorema de Bolzano, la imagen de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto conexo de éste. Así, la circunferencia de centro (a, b) y radio r es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ pues es la imagen de la función continua

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ definida por } f(t) = (a + r\cos t, b + r\operatorname{sen} t).$$

Otros ejemplos de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$ son las rectas no paralelas al eje y, puesto que son la imagen de una función continua del tipo $f(t) = at + b$.

Una recta paralela al eje y también es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ pues es la imagen de una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de la forma $g(t) = (a, t)$.

Sabemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y definimos

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ por } g(t) = (t, f(t))$$

g es una función continua cuya imagen es el gráfico de f. Por lo tanto, el gráfico de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$.

Se ve fácilmente que el teorema de Bolzano implica que una función continua desde un espacio topológico conexo en un espacio con la topología discreta es necesariamente constante.

Veremos ahora una interesante aplicación de resultados anteriores.

Proposición 5.1.10 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración Sólo debemos probar que f es abierta. Ahora bien, como los intervalos abiertos contituyen una base de la topología usual de $\mathbb{R}$, es suficiente demostrar que la imagen de un intervalo abierto es abierto.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Por el teorema de Bolzano y la proposición **5.1.5**, sabemos que $f(a, b)$ es un intervalo. Debemos probar que este intervalo es abierto.

Supongamos que no es abierto y por lo tanto contiene uno de sus extremos, por ejemplo el inferior, que denotamos c. Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Sean $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$a < a_1 < x_0 < b_1 < b$$

luego, como f es biyectiva y $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en (a, b), resulta

$$f(x_0) < f(a_1) \quad \text{y} \quad f(x_0) < f(b_1).$$

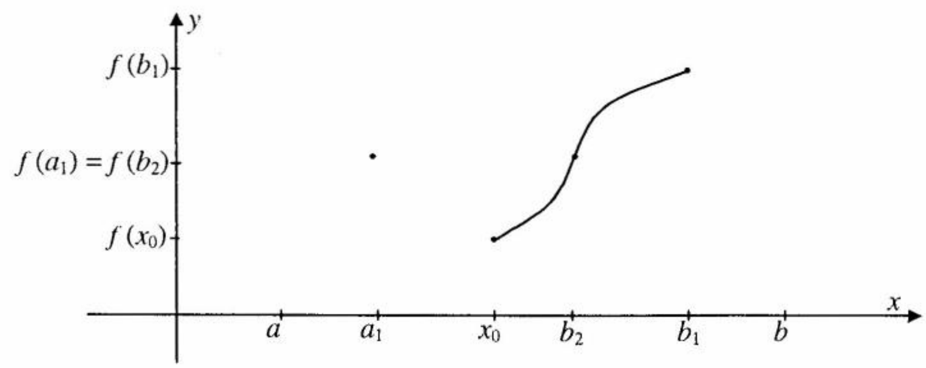
Además, la inyectividad de f implica que

$$f(a_1) < f(b_1) \quad \text{o} \quad f(a_1) > f(b_1).$$

En el primer caso tenemos que $f(x_0) < f(a_1) < f(b_1)$ y por el teorema de Bolzano, existe $b_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 < b_2 < b_1 \quad \text{y} \quad f(a_1) = f(b_2)$$

que es absurdo por ser f inyectiva. Por lo tanto la imagen de (a, b) es un intervalo abierto y así f es abierta.



La demostración es análoga si $f(a_1) > f(b_1)$. ■

Proposición 5.1.11 *Si X es un espacio topológico, C es un subconjunto conexo de X y $C \subseteq A \subseteq C^-$, entonces A es conexo.*

Demostración Supongamos que A no es conexo, entonces existen U y V abiertos en X tales que

$$A \subseteq U \cup V\ , \quad A \cap U \neq \emptyset\ , \quad A \cap V \neq \emptyset \quad \text{y} \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Como todo punto de A está en la clausura de C, si tomamos $x_1 \in A \cap U$ resulta que $x_1 \in C^-$ y U es entorno de x_1. Por lo tanto $C \cap U \neq \emptyset$.

De igual forma se obtiene que $C \cap V \neq \emptyset$.

Además, $C \cap U \cap V = \emptyset$ por ser un subconjunto de $A \cap U \cap V$. Esto contradice la hipótesis de que C es conexo. ∎

Ahora estamos en condiciones de dar una importante caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Teorema 5.1.12 *Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Entonces C es conexo si y sólo si C es un intervalo.*

Demostración Ya vimos en **5.1.5** que un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es necesariamente un intervalo.

Queremos probar ahora que todo intervalo es conexo. Por **5.1.9**, todo intervalo abierto es conexo.

Ahora, si I es un intervalo, I° es un intervalo abierto y por lo tanto es conexo. Como

$$I^\circ \subseteq I \subseteq I^-$$

de la proposición anterior se sigue que I es conexo. ∎

En general, la intersección de dos subconjuntos conexos de un espacio topológico no es un subconjunto conexo. Por ejemplo, en el plano $\mathbb{R}^2$ la circunferencia unidad y el eje x son dos conexos cuya intersección es $\{(-1,0),(0,1)\}$, que es discreto y por lo tanto no es conexo.

Es inmediato comprobar que la unión de subconjuntos conexos de un espacio topológico no es un subconjunto conexo. Por ejemplo en $\mathbb{R}$, el conjunto $(-1,0)\cup(1,2)$ no es conexo. Sin embargo, veremos en la siguiente proposición que bajo ciertas condiciones la unión de subconjuntos conexos es conexo.

Proposición 5.1.13 *Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X. Si $\exists i_o \in I$ tal que*

$$C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I$$

entonces $C = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ es conexo.

Demostración Sean U y V abiertos en X tales que

$$C \subseteq U \cup V \ , \quad U \cap C \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V \cap C \neq \emptyset.$$

Debemos probar que $U \cap V \cap C \neq \emptyset$.

Si U y V intersecan a C_{i_0}, por ser éste conexo, $U \cap V \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ y por lo tanto

$$U \cap V \cap C \neq \emptyset.$$

Si $U \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ y $V \cap C_{i_0} = \emptyset$, entonces $C_{i_0} \subseteq U$. Como C_{i_0} interseca a todo C_i, tenemos que

$$U \cap C_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I.$$

Puesto que V interseca a C, $\exists j \in I$ tal que $V \cap C_j \neq \emptyset$. Usando que C_j es conexo y que tanto U como V cortan a C_j, tenemos que $U \cap V \cap C_j \neq \emptyset$. Luego

$$U \cap V \cap C \neq \emptyset.$$

Análogamente, si $U \cap C_{i_0} = \emptyset$ y $V \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ obtenemos que $U \cap V \cap C \neq \emptyset$.
Entonces, por la proposición **5.1.6**, C es conexo. ■

Corolario 5.1.14 *Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X tal que $\bigcap\limits_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, entonces $C = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$ es conexo.*

Demostración Si $x_0 \in \bigcap\limits_{i \in I} C_i$, como $\{x_0\}$ es conexo, la familia formada por $\{x_0\}$ y los C_i con $i \in I$, está en las condiciones de la proposición anterior donde $C_{i_0} = \{x_0\}$. ■

Como una aplicación de este corolario podemos probar que $\mathbb{R}^2$ es conexo. En efecto, $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como unión de todas las rectas que pasan por el origen.
Todo plano de $\mathbb{R}^3$ es imagen de $\mathbb{R}^2$ por una función continua, luego es conexo. Se sigue entonces que $\mathbb{R}^3$ es conexo por ser la unión de los planos por el origen.
De esta manera y en forma inductiva se prueba que $\mathbb{R}^n$ es conexo, $\forall n \in \mathbb{N}$.

También $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es conexo pues lo podemos expresar como unión de las circunferencias centradas en el origen y el semieje positivo de las x. Este último cumple el rol de C_{i_0} de la proposición **5.1.13**.

El hecho de que la conexión es un invariante topológico nos permite probar que ciertos espacios no son homeomorfos.
Observemos primero que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y $A \subseteq X$ entonces f restringida a $X - A$ es un homeomorfismo sobre $Y - f(A)$.

Estamos ahora en condiciones de afirmar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$ pues $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es conexo mientras que si a $\mathbb{R}$ le sacamos un punto no resulta conexo. Más generalmente,

$$\mathbb{R}^n, \text{ con } n \geq 2, \text{ no es homeomorfo a } \mathbb{R}$$

pues veremos que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo (**5.2.5** y **5.2.7**).

La circunferencia S^1 menos un punto p es conexo. En efecto, si $p = (\cos t_0, \operatorname{sen} t_0)$ entonces $S^1 - \{p\}$ es la imagen de la función

$$f : (t_0, t_0 + 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \text{ definida por } f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Luego S^1 no es homeomorfo a un intervalo $[a, b]$ pues si $a < t_0 < b$, $[a, b] - \{t_0\}$ no es conexo mientras que S^1 menos un punto sí lo es.

Dado un subconjunto conexo C de un espacio topológico X, la unión de todos los conexos de X que continen a C, por **5.1.14**, es un conexo y es el "mayor" que contiene a C.

Definición 5.1.15 *Un subconjunto C de un espacio topológico es una componente conexa de X, si C es conexo y no existe $C_1 \subseteq X$ conexo tal que $C \subsetneq C_1$.*

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R} - \{0\}$, las componentes conexas son $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

En el caso de un espacio topológico discreto, cada conjunto unitario $\{x\}$ es una componente conexa de X.

También en $\mathbb{Q}$ las componentes conexas son de la forma $\{x\}$, ya que en $\mathbb{Q}$ cualquier conjunto con más de un punto no es conexo.
Las componentes conexas de $X = \mathbb{R}^2 - S^1$ son $B(0,1)$ y $(B^-(0,1))^c$.

Observemos que si C es una componente conexa de X entonces C es cerrado en X pues, por la proposición **5.1.11**, C^- es conexo y como contiene a C debe ser $C = C^-$.

Proposición 5.1.16 *Sea X un espacio topológico. Entonces:*
i) $\forall x \in X$ existe C_x, componente conexa de X, tal que $x \in C_x$.
ii) Si C_1 y C_2 son componentes conexas de X, entonces

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad o \quad C_1 = C_2.$$

Demostración i) C_x es la unión de los subconjuntos conexos que contienen a $\{x\}$.
ii) Sean C_1 y C_2 componentes conexas de X. Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ entonces $C_1 \cup C_2$ es un conexo que contiene a C_1 y C_2. Luego

$$C_1 \cup C_2 = C_1 \quad \text{y} \quad C_1 \cup C_2 = C_2$$

y por lo tanto $C_1 = C_2$. ■

5.2 Espacios arco conexos

Otra idea de conexión en un espacio topológico es que se puedan unir dos puntos cualesquiera del espacio por una "curva". Es decir que se pueda ir de un punto a otro en forma continua en un determinado tiempo. Este es el caso de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ pues podemos unir dos puntos cualesquiera por un segmento.

Damos a continuación las definiciones rigurosas de estos conceptos.

Definición 5.2.1 *Una curva en un espacio topológico X es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$. Los puntos $p = \alpha(0)$ y $q = \alpha(1)$ se denominan extremos de la curva y decimos que α une p con q.*

Observemos que si α es una curva que une p con q, la curva β definida por

$$\beta(t) = \alpha(1-t)$$

satisface que $\beta(0) = q$ y $\beta(1) = p$, es decir β une q con p.

Que consideremos el intervalo $[0, 1]$ como dominio de una curva no es esencial, ya que cualquier otro intervalo cerrado es homeomorfo a éste y podemos pasar de uno a otro en forma continua.

Definición 5.2.2 *Un espacio topológico X es arco conexo o conexo por curvas, si dados p, $q \in X$ existe una curva en X que une p con q.*

Un subconjunto de un espacio topológico es arco conexo si como subespacio topológico lo es.

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua, el gráfico de f es un subconjunto arco conexo de $\mathbb{R}^2$. En efecto, si $(t_1, f(t_1))$ y $(t_2, f(t_2))$ con $t_1 < t_2$ pertenecen a dicho gráfico, podemos unirlos con la curva α definida por

$$\alpha(s) = (st_2 + (1-s)t_1,\ f(st_2 + (1-s)t_1)).$$

Como dijimos al comienzo de esta sección, los espacios euclídeos son arco conexos pues si $p, q \in \mathbb{R}^n$, se pueden unir con la curva α definida por

$$\alpha(t) = tq + (1-t)p.$$

La imagen de esta curva α es precisamente el segmento $\overline{pq}$.

Recordemos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *convexo* si dados $p, q \in A$ el segmento $\overline{pq}$ está contenido en A. Por lo tanto en A podemos unir p con q mediante la curva α definida anteriormente y así probamos que *todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es arco conexo.*

Proposición 5.2.3 *Las bolas abiertas o cerradas de $\mathbb{R}^n$ son subconjuntos convexos.*

Demostración Observemos primero que si $p, q \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$d(p, q) = d(p-q, 0) \quad \text{y} \quad d(tp, 0) = |t|\, d(p, 0). \tag{5.1}$$

Además, si $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} tq + (1-t)p - v &= tq + (1-t)p - tv - (1-t)v = \\ &= t(q-v) - (t-1)(p-v). \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\alpha(t) = tq + (1-t)p$ es la curva cuya imagen es el segmento $\overline{pq}$, concluimos que

$$\alpha(t) - v = t(q-v) - (t-1)(p-v). \tag{5.2}$$

Entonces, por (5.1) y (5.2), si $r > 0$ y $p, q \in B(v, r)$ tenemos para cada $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} d(\alpha(t), v) &= d(\alpha(t) - v, 0) = d(t(q-v), (t-1)(p-v)) \leq \\ &\leq d(t(q-v), 0) + d(0, (t-1)(p-v)) = \\ &= td(q,v) + (1-t)d(p,v) < tr + (1-t)r = r \end{aligned}$$

Luego todo punto $\alpha(t)$ del segmento $\overline{pq}$ está en la bola $B(v,r)$ y en consecuencia ésta es un convexo.

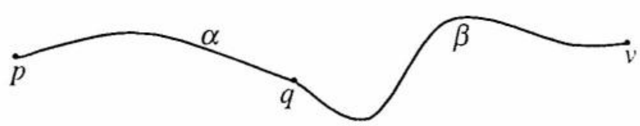
En forma totalmente análoga se prueba que las bolas cerradas son subconjuntos convexos. ■

Corolario 5.2.4 *Las bolas abiertas o cerradas de $\mathbb{R}^n$ son subconjuntos arco conexos.* ■

Si α y β son curvas en un espacio topológico que unen p con q y q con v respectivamente, se pueden "pegar" para obtener una curva que una p con v, definiendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La continuidad de la función γ resulta del ejercicio **12** de **4.4** ya que $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ son cerrados en $[0,1]$, $t \to \alpha(2t)$ y $t \to \beta(2t-1)$ son continuas en dichos intervalos y coinciden en la intersección.



Llamaremos a la curva γ yuxtaposición de α con β.

Usaremos esto para dar otro ejemplo de subconjunto arco conexo de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5.2.5 $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ *es arco conexo,* $\forall n \geq 2$.

Tomemos $p = (1, 0, ..., 0)$. Si $q \in X$ y no está sobre el primer eje, el segmento $\overline{pq}$ no pasa por el origen de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto

$$\alpha(t) = tq + (1 - t)p$$

es una curva en X que une p con q.

Si q está sobre el primer eje, tomamos $v = (0, 1, 0, ..., 0)$ y como en el caso anterior, unimos p con v por una curva α y v con q por una curva β. Luego la curva γ, yuxtaposición de α con β, une p con q.

En forma análoga se puede probar que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es finito y $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n - A$ es arco conexo.

Proposición 5.2.6 *Sea X un espacio topológico y supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que todo $x \in X$ se puede unir a x_0 por una curva en X, entonces X es arco conexo.*

Demostración Sean x_1, $x_2 \in X$, α una curva que une x_1 con x_0 y β una curva que une x_0 con x_2. Entonces la yuxtaposición de α con β une x_1 con x_2. ■

Observemos que, por el teorema de Bolzano, si α es una curva en un espacio topológico X que une x_1 con x_2 la imagen de α, $\operatorname{Im}\alpha$, es un subconjunto conexo de X que contiene a dichos puntos. Esto permite probar el siguiente resultado.

Proposición 5.2.7 *Si X es un espacio topológico arco conexo entonces X es conexo.*

Demostración Sea $x_0 \in X$ y para cada $x \in X$ consideremos α_x curva en X que une x_0 con x. Entonces, por el corolario **5.1.14**,

$$X = \bigcup_{x \in X} \operatorname{Im}\alpha_x$$

es conexo ya que es la unión de subconjuntos conexos con intersección no vacía $(x_0 \in \operatorname{Im}\alpha_x, \forall x)$. ■

La recíproca de esta proposición no es cierta. Existen espacios conexos que no son arco conexos.

Por ejemplo si definimos $A \subseteq \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera

$$A = ((0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (0, 1]) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]))$$

se puede probar que A es conexo y no es arco conexo.

Un caso particular donde es válida la recíproca de la proposición **5.2.7** es cuando el espacio topológico es un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$.

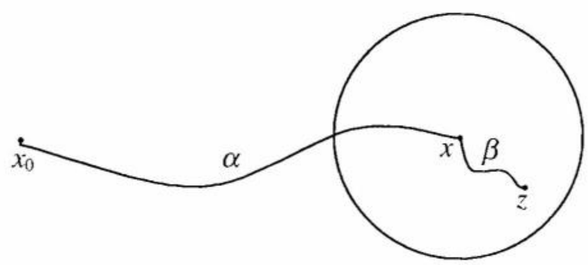
Proposición 5.2.8 *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío, abierto y conexo entonces A es arco conexo.*

Demostración Sea $x_0 \in A$ y consideremos el conjunto

$$C = \{x \in A : \text{existe una curva en } A \text{ que une } x_0 \text{ con } x\}.$$

C es no vacío pues $x_0 \in C$. Probaremos que C es abierto y cerrado en A.

Si $x \in C$, entonces existe una curva α en A que une x_0 con x. Como A es abierto en $\mathbb{R}^n$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Por el corolario **5.2.4**, si $z \in B(x, r)$ existe una curva β en $B(x, r)$ que une x con z. Luego γ, la yuxtaposición de α con β, es una curva en A que une x_0 con z y así $z \in C$. Es decir $B(x, r) \subseteq C$ y por lo tanto, C es abierto.



Ahora, si existe $y \in A - C$ y tomamos $s > 0$ tal que $B(y, s) \subseteq A$, ningún punto de esta bola pertenece a C. Sino, por el razonamiento anterior, y pertenecería a C. Luego hemos probado que $A - C$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, o sea C es cerrado en A.

Como A es conexo, por la proposición **5.1.2**, $C = A$. Como consecuencia de la proposición **5.2.6** A es arco conexo. ■

Finalmente, veremos un resultado que nos permite afirmar que la arco conexión es un invariante topológico.

Proposición 5.2.9 *Sean X e Y espacios topológicos, X arco conexo y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es arco conexo.*

Demostración Sean $y_1, y_2 \in f(X)$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.

Como X es arco conexo, existe una curva α en X que une x_1 con x_2, luego $\beta = f \circ \alpha$ es una curva en $f(X)$ que une y_1 con y_2 y por lo tanto $f(X)$ es arco conexo. ■

Corolario 5.2.10 *Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces X es arco conexo si y sólo si Y es arco conexo. Esto es, la arco conexión es un invariante topológico.* ■

Como aplicación de la proposición anterior veremos a continuación un ejemplo de espacio arco conexo.

Ejemplo 5.2.11 *Sea S^n la esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada en el origen y de radio uno, es decir*

$$S^n = \{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \quad donde \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La función

$$f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n \quad \text{definida por} \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

es claramente continua y su imagen es S^n. Luego, por la proposición anterior, S^n es arco conexo.

5.3 Ejercicios

1. Dado un espacio topológico X, probar que son equivalentes:

i) X es conexo.

ii) Si A y B son cerrados en X, no vacíos y $X = A \cup B$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Sea X un espacio topológico con la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in X, \; \exists C_{xy} \text{ subconjunto conexo de } X \text{ tal que } x, y \in C_{xy}.$$

Probar que X es conexo.

3. Sean $\mathcal{T}_c$ y $\mathcal{T}^{x_0}$ las topologías en $\mathbb{R}$, de los complementos finitos y definida en el ejercicio **2** de **3.3** respectivamente.

Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{x_0})$ es conexo y que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ no lo es.

4. Demostrar que X es un espacio topológico conexo si y sólo si todo subconjunto propio y no vacío de X tiene frontera no vacía.

5. Demostrar que:

a) Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$ entonces A^c es conexo.

b) Si $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \notin \mathbb{Q}\}$ entonces B no es conexo.

c) Si H es un semiplano de $\mathbb{R}^2$ determinado por una recta L, entonces H es conexo.

6. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, A un subconjunto conexo de X y $a, b \in A$ tales que $f(a) < f(b)$. Probar que si $c \in \mathbb{R}$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces $\exists x \in A$ con $f(x) = c$.

7. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ es una función continua entonces f es constante.

8. Demostrar que si B es un subconjunto conexo, abierto y cerrado de X, entonces B es una componente conexa de X.

9. Probar que los siguientes espacios no son homeomorfos dos a dos:

$$(0,1)\ ,\quad [0,1)\ ,\quad [0,1] \quad \text{y} \quad S^1.$$

10. Probar que $\mathbb{R}^2 - B(0,1)$ es arco conexo.

CAPITULO 6
ESPACIOS COMPACTOS

6.1 Generalidades

Aunque la definición de espacio compacto no sugiere una imagen intuitiva de estos espacios, resulta muy útil por las propiedades que ellos tienen.

Los espacios compactos conservan muchas propiedades de los conjuntos finitos. Por ejemplo:

i) Toda función continua de un espacio compacto y a valores en $\mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo.

ii) Dos subconjuntos compactos disjuntos de un espacio T_2 pueden ser separados por abiertos disjuntos.

Para introducir la noción de espacio compacto necesitamos la siguiente definición.

Definición 6.1.1 *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Un cubrimiento de A es una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, tal que*

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Si todos los elementos del cubrimiento $\mathcal{U}$ son abiertos en X, se dice que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de A o que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A por abiertos de X.

Si $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ es también un cubrimiento de A, entonces $\mathcal{U}'$ es un subcubrimiento de $\mathcal{U}$.

Definición 6.1.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico X es un subconjunto compacto de X si todo cubrimiento abierto de A tiene un subcubrimiento finito.*
Un espacio topológico X es compacto si es un subconjunto compacto de sí mismo.

La relación entre subconjuntos compactos y espacios topológicos compactos está dada en la siguiente proposición.

Proposición 6.1.3 *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es un subconjunto compacto de X si y sólo si $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio topológico compacto.*

Demostración Sea A un subconjunto compacto de X y sea $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de A cuyos miembros son abiertos en el espacio topológico $(A, \mathcal{T}_A)$. Como cada V_i es de la forma $V_i = U_i \cap A$ con U_i abierto en X y $A = \bigcup_{i\in I} V_i$, resulta $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ y por lo tanto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de A formado por abiertos en X. Como A es un subconjunto compacto de X, este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito, digamos $\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}\}$. Claramente $\{V_{i_1}, V_{i_2}, ...V_{i_n}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{V}$.

Supongamos ahora que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio topológico compacto y consideremos un cubrimiento de A, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, formado por abiertos en X ($A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$). Sea $V_i = U_i \cap A$, $\forall i \in I$. Entonces $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto del espacio topológico $(A, \mathcal{T}_A)$ y por lo tanto tiene un subcubrimiento finito, digamos $\{V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_n}\}$. Claramente, $\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$. Luego A es un subconjunto compacto de X. ■

A continuación daremos algunos ejemplos de espacios compactos y no compactos, dejando las verificaciones a cargo del lector.

Ejemplo 6.1.4 *a) Todo espacio topológico finito es compacto.*

b) Un conjunto X con la topología discreta es compacto si y sólo si es finito (considerar el cubrimiento $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in X\}$).

c) Todo espacio con la topología de los complementos finitos es compacto.

d) (a, b) y $[a, b)$ son subconjuntos no compactos de $\mathbb{R}$, con la topología usual. Esto se obtiene tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b - a > \frac{1}{n_0}$ y considerando los cubrimientos

$$\{(a, b - \tfrac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq n_0\} \quad y \quad \{[a, b - \tfrac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq n_0\}$$

*respectivamente (en el segundo caso se tiene en cuenta **6.1.3**).*

e) Si $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ con la topología usual no es compacto. (Considerar, por ejemplo, el cubrimiento $\{B(0, k) : k \in \mathbb{N}\}$).

Veremos ahora un resultado que tiene gran importancia por sus aplicaciones en el análisis.

Teorema 6.1.5 (Heine-Borel-Lebesgue). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Entonces $[a, b]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.*

Demostración Si $a = b$, $[a, b] = \{a\}$ y por lo tanto es compacto.

Sean $a < b$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de $[a, b]$ por abiertos de $\mathbb{R}$. Consideramos

$$A = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ está cubierto por un número finito de elementos de } \mathcal{U}\}.$$

Como A es un conjunto acotado ($A \subseteq [a,b]$) y no vacío ($a \in A$), A tiene supremo. Sea $m = \sup\{x : x \in A\}$. Claramente

$$a \leq m \leq b.$$

Sea $j \in I$ tal que $m \in U_j$. Como U_j es abierto en $\mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$[m - \delta, m + \delta] \subseteq U_j. \tag{6.1}$$

Por definición de supremo, existe $x_1 \in A$ tal que $m - \delta < x_1 \leq m$. Como $[a, x_1] \subseteq \bigcup\limits_{l=1}^{n} U_{i_l}$ resulta

$$[a, m + \delta] \subseteq (\bigcup_{l=1}^{n} U_{i_l}) \cup U_j. \tag{6.2}$$

En particular,

$$[a, m] \text{ se puede cubrir con un número finito de elementos de } \mathcal{U}. \tag{6.3}$$

Si $m < b$, es posible encontrar $\delta > 0$ tal que además de satisfacer (6.1) se cumpla que $m + \delta \leq b$. De (6.2) se obtiene que $m + \delta \in A$ y esto es imposible por la elección de m. Luego $m = b$ y por (6.3) podemos asegurar que existe un subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$. ■

Veremos en lo que sigue algunas propiedades importantes relacionadas con compacidad.

Comenzaremos estudiando conjuntos cerrados en espacios compactos.

Proposición 6.1.6 *Si X es un espacio topológico compacto y $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es un subconjunto compacto de X.*

Demostración Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de F. Claramente

$$\{U_i\}_{i \in I} \cup \{F^c\}$$

es un cubrimiento abierto de X y por lo tanto admite un subcubrimiento finito

$$\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}, F^c\}.$$

En consecuencia, $\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$. Luego, F es un subconjunto compacto de X. ■

Proposición 6.1.7 *Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados y compactos de un espacio topológico X, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ es un subconjunto compacto.*

Demostración Sea $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Luego F es cerrado en X y como $F \subsetneq F_{i_0}$ para $i_0 \in I$, F es cerrado en F_{i_0}. Por ser F_{i_0} compacto, de la proposición **6.1.6** se tiene que F es un subconjunto compacto de F_{i_0} y fácilmente se concluye que F es un subconjunto compacto de X. ■

Probaremos ahora que en un espacio T_2 se pueden "separar" puntos de compactos.

Proposición 6.1.8 *Sea X un espacio topológico T_2. Si F es un subconjunto compacto de X y $x \notin F$, entonces existen U y V abiertos disjuntos en X tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.*

Demostración Sean F un subconjunto compacto de X y $x \notin F$. Por ser X un espacio topológico T_2, para cada $y \in F$ existen U_y, V_y abiertos en X tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \phi$. Como $\{V_y : y \in F\}$ es un cubrimiento abierto del compacto F, existen $y_1, ..., y_n$ en F tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$.

Sean
$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$
Es claro que U y V son abiertos en X, $x \in U$ y $F \subseteq V$.

Además, si $z \in U \cap V$ entonces $z \in U_{y_i}$ $\forall i$ y existe j tal que $z \in V_{y_j}$. Por lo tanto $z \in U_{y_j} \cap V_{y_j}$ lo cual es imposible. Luego $U \cap V = \phi$ y se completa la prueba. ■

La proposición **6.1.6** dice que todo subconjunto cerrado en un compacto es compacto. En $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos, es fácil encontrar subconjuntos compactos que no son cerrados, por ejemplo $\mathbb{N}$. Esto dice que en general no es cierto que todo compacto de un espacio sea cerrado, aunque en la siguiente proposición veremos que esto sí ocurre cuando el espacio es de Hausdorff.

Proposición 6.1.9 *Sea X un espacio topológico T_2. Si F es un subconjunto compacto de X entonces F es cerrado.*

Demostración Sea $x_0 \in F^c$. Por la proposición **6.1.8** podemos considerar U y V abiertos disjuntos en X tales que $x_0 \in U$ y $F \subset V$. Entonces $U \cap F = \phi$ y por lo tanto $x_0 \in U \subseteq F^c$. Luego F^c es abierto en X. ■

Veremos ahora que en un espacio T_2 se pueden "separar" dos subconjuntos compactos disjuntos. Esto es una generalización de la proposición **6.1.8**, puesto que en cualquier espacio topológico los conjuntos de la forma $\{x\}$ son compactos.

Proposición 6.1.10 *Sea X un espacio topológico T_2. Si K_1 y K_2 son subconjuntos compactos disjuntos de X, entonces existen U_1 y U_2 abiertos disjuntos en X tales que $K_1 \subseteq U_1$ y $K_2 \subseteq U_2$.*

Demostración Por la proposición **6.1.8**, para cada $x \in K_2$ existen U_x y V_x abiertos en X tales que $x \in U_x$, $K_1 \subseteq V_x$ y $U_x \cap V_x = \phi$.

Como $\{U_x : x \in K_2\}$ es un cubrimiento abierto de K_2, existen $x_1, ..., x_n$ en K_2 tales que $K_2 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Llamemos
$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \quad \text{y} \quad U_2 = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$
Con una prueba análoga a la de **6.1.8** se ve que U_1 y U_2 son abiertos en X y que
$$K_1 \subseteq U_1 \quad , \quad K_2 \subseteq U_2 \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = \phi. \blacksquare$$

Nuestro próximo objetivo es dar una condición necesaria para que un subconjunto de un espacio métrico sea compacto.

Definición 6.1.11 *Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice acotado si existe $x \in X$ y $r > 0$ tal que $A \subseteq B(x, r)$.*

Proposición 6.1.12 *Sea X un espacio métrico. Si K es un subconjunto compacto de X entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración Como X es un espacio métrico, X es T_2 y por la proposición **6.1.9** se tiene que K es cerrado en X.

Sea $x_0 \in K$ y consideremos $\mathcal{U} = \{B(x_0, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de K y K es un subconjunto compacto de X, existen $n_1, ..., n_k$ en $\mathbb{N}$ tales que
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_0, n_j).$$
Si $n_0 = \max\{n_i : 1 \leq i \leq k\}$, entonces $K \subseteq B(x_0, n_0)$ y por lo tanto K es acotado. $\blacksquare$

Corolario 6.1.13 *Sea $n \geq 1$. Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ entonces K es cerrado y acotado.* $\blacksquare$

Observación 6.1.14 *Consideremos el espacio métrico $\mathbb{R}$ con la métrica discreta, es decir*
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

La topología inducida por la distancia d es la discreta, por lo que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ no es compacto aunque es cerrado y acotado. Esto muestra que la recíproca de la proposición **6.1.12** es falsa. Sin embargo, la recíproca de la afirmación del corolario **6.1.13** es verdadera como veremos en el teorema de Heine-Borel-Lebesgue (**7.1.14**).

El siguiente resultado nos va a permitir concluir que la compacidad es un invariante topológico y también construir nuevos ejemplos de espacios compactos.

Teorema 6.1.15 *Si X es un espacio topológico compacto y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de Y.*

Demostración Sea $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $f(X)$. Como f es continua, $U_i = f^{-1}(V_i)$ es abierto en X. Por lo tanto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto del espacio compacto X y en consecuencia tiene un subcubrimiento finito $\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\}$.

Sean $y = f(x)$ e $i_l \in I$ tal que $x \in U_{i_l}$. Luego

$$f(x) \in f(U_{i_l}) = f(f^{-1}(V_{i_l})) \subseteq V_{i_l}.$$

Esto prueba que

$$f(X) \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} V_{i_l}$$

y por lo tanto $\{V_{i_1}, ..., V_{i_n}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{V}$. ■

Corolario 6.1.16 *Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces X es compacto si y sólo si Y es compacto. Esto es, la compacidad es un invariante topológico.* ■

En la observación siguiente reunimos algunas consecuencias del teorema anterior.

Observación 6.1.17 *a) S^1 es compacto.*

Para probar esto consideramos la función continua y suryectiva

$$f : [0,1] \to S^1, \quad f(t) = (\cos 2\pi t,\ sen 2\pi t)$$

*y además que, por **6.1.5,** $[0,1]$ es compacto.*

*b) $(0,1) \ncong S^1$ y $[0,1) \ncong S^1$ puesto que S^1 es compacto y por **6.1.4**, $(0,1)$ y $[0,1)$ no lo son.*

*c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}) \ncong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ donde $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_c$ son las topologías usual y de los complementos finitos, respectivamente. Esto resulta de considerar **6.1.4** c) y e).*

d) Es fácil dar ejemplos de funciones continuas y suryectivas de $(0,1)$ en $[0,1]$. Sin embargo, no existe $f : [0,1] \to (0,1)$ continua y suryectiva pues $[0,1]$ es compacto y $(0,1)$ no lo es.

Las propiedades que conocemos acerca de subconjuntos cerrados en espacios compactos y subconjuntos compactos en espacios T_2, nos van a permitir probar que cualquier función continua de un compacto en un T_2 es cerrada. Este es el hecho central del siguiente teorema, que es de gran utilidad para definir homeomorfismos, como veremos en los ejemplos de espacios cociente en **7.2**.

Teorema 6.1.18 *Sean X un espacio topológico compacto e Y un espacio topológico T_2. Si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración Será suficiente probar que f es cerrada.

Si $A \subseteq X$ es cerrado, por la proposición **6.1.6**, A es un subconjunto compacto de X. Luego, por el teorema **6.1.15**, $f(A)$ es un subconjunto compacto de Y y de la proposición **6.1.9** se concluye que $f(A)$ es cerrado en Y. Por lo tanto f es cerrada. ■

Probaremos ahora un resultado que tiene numerosas aplicaciones en análisis y que es intrínseco a los espacios métricos compactos (por ejemplo, a los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$).

Teorema 6.1.19 (Lema de Lebesgue). *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe un número real positivo $r = r(\mathcal{U})$, llamado número de Lebesgue del cubrimiento $\mathcal{U}$, tal que para cada $x \in X$, $B(x, r) \subseteq U_i$ para algún $i \in I$.*

Demostración Para cada $x \in X$ elegimos $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq U_i$ para algún $i \in I$. La familia $\{B(x, \frac{r_x}{2}) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X y por lo tanto existen $x_1, ..., x_n$ en X tales que

$$\{B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2}) : 1 \leq i \leq n\} \tag{6.4}$$

cubre a X. Llamemos

$$r = \min\{\frac{r_{x_i}}{2} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Veremos ahora que para cada $x \in X$, la bola abierta $B(x, r)$ está contenida en algún miembro de $\mathcal{U}$.

Sea $x \in X$. Debido a que la familia dada en (6.4) es un cubrimiento de X, $\exists j$ $(1 \leq j \leq n)$ tal que $x \in B(x_j, \frac{r_{x_j}}{2})$. Para $y \in B(x, r)$ tenemos

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) < r + \frac{r_{x_j}}{2} \leq \frac{r_{x_j}}{2} + \frac{r_{x_j}}{2} = r_{x_j}.$$

Por lo tanto,

$$B(x, r) \subseteq B(x_j, r_{x_j}) \subseteq U_i \text{ para algún } i \in I. \blacksquare$$

6.2 Compactación

Como dijimos al comienzo de este capítulo, un espacio compacto conserva muchas propiedades de los conjuntos finitos y por esto puede ser considerado, en cierto sentido, como "finito".

Es fácil ver que un espacio topológico X no es compacto si y sólo si para todo subconjunto compacto K se tiene que $X - K$ no es compacto.

Podemos entonces ver a $X - K$ como una parte "infinita" de X. Así, si deseamos construir un espacio compacto a partir de otro no compacto, debemos hacerlo destruyendo las partes "infinitas" de éste. Una forma de hacer esto y que es en cierto sentido la más simple, es agregar un punto al espacio no compacto y tomar como entornos de dicho punto las partes "infinitas" del espacio. De este modo, se puede mirar a $\mathbb{R}$ como subespacio de S^1. Este método se llama compactación de Alexandroff.

Hay otras maneras de compactación de un espacio. Como ejemplo de ello veremos a $\mathbb{R}$ como subespacio de la llamada recta real extendida que se obtiene a partir de $\mathbb{R}$ agregando dos puntos.

Definición 6.2.1 *Compactar un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es construir un espacio topológico compacto $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ tal que:*

i) $X \subseteq \widetilde{X}$

ii) $\widetilde{\mathcal{T}}_X = \mathcal{T}$ (la topología inducida por $\widetilde{\mathcal{T}}$ en X coincide con la de X)

iii) X es denso en $\widetilde{X}$.

De esta forma, las propiedades topológicas de $(X, \mathcal{T})$ son las del subespacio X de $\widetilde{X}$ que, por ser denso, está presente en todas las partes abiertas de $\widetilde{X}$.

Proposición 6.2.2 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y consideremos un punto no perteneciente a X, que denotaremos ∞. Si $X^* = X \cup \{\infty\}$, entonces la familia*

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{U \subseteq X^* : \infty \in U \text{ y } X - U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$$

es una topología en el conjunto X^*.

Demostración Queda como ejercicio para el lector. ■

Notemos que si ∞_1 y ∞_2 son dos puntos distintos que no están en X y con cada uno de ellos construimos los espacios topológicos ($X_1^*, \mathcal{T}_1^*$) y $(X_2^*, \mathcal{T}_2^*)$, la función

$$f : X_1^* \to X_2^*$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \infty_1 \\ \infty_2 & \text{si } x = \infty_1. \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Por esta razón, el espacio topológico $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es independiente (salvo homeomorfismo) del punto agregado y se llama *compactado de Alexandroff* del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

Proposición 6.2.3 *Sea $(X^*, \mathcal{T}^*)$ el compactado de Alexandroff de $(X, \mathcal{T})$. Entonces:*
i) X es abierto en X^* y $\mathcal{T}^*_X = \mathcal{T}$.
ii) $\{\infty\}$ es abierto en X^* si y sólo si X es compacto.
iii) X es denso en X^* si y sólo si X no es compacto.
iv) $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es compacto.

Demostración i) X es abierto en X^* pues $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$. Además, si $\infty \in U \in \mathcal{T}^*$ entonces

$$X - (U \cap X) = X - (U - \{\infty\}) = X - U$$

es cerrado en X y por lo tanto $U \cap X \in \mathcal{T}$. Ahora fácilmente se concluye que $\mathcal{T}^*_X = \mathcal{T}$.

ii) Que $\{\infty\} \in \mathcal{T}^*$ es equivalente, por definición de $\mathcal{T}^*$, a decir que $X - \{\infty\} = X$ es compacto.

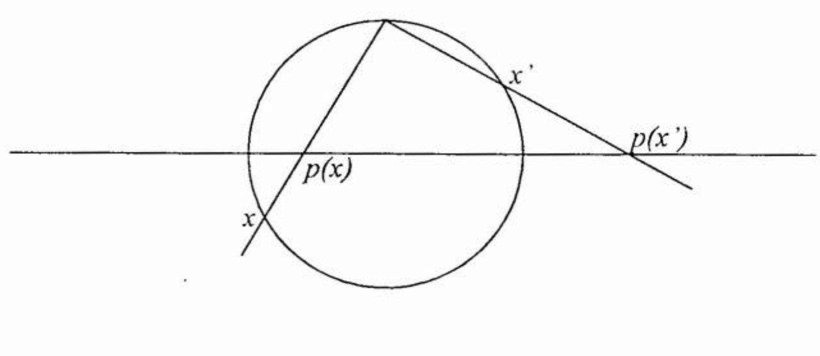
iii) X es denso en $X^* \iff U \cap X \neq \phi\ , \forall U \in \mathcal{T}^*, U \neq \phi \iff \{\infty\} \notin \mathcal{T}^* \iff X$ no es compacto (usar ii))

iv) Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X^* y sea $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ tal que $\infty \in U_{i_0}$. Por definición de $\mathcal{T}^*$, $X - U_{i_0}$ es un subconjunto compacto de X y como $\mathcal{T}^*_X = \mathcal{T}$, es fácil ver que $X - U_{i_0}$ es un subconjunto compacto de X^*. Luego existe $\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que cubre a $X - U_{i_0}$ y por lo tanto $\{U_{i_0}, U_{i_1}, ..., U_{i_n}\}$ cubre a X^* y es un subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$. ∎

Ejemplo 6.2.4 *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. El compactado de Alexandroff de $\mathbb{R}$ es S^1, es decir, $\mathbb{R}^* \cong S^1$.*

Para ver esto, consideremos la proyección estereográfica desde el polo norte

$$p : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}, \quad p(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_2}.$$



No es difícil verificar que p es biyectiva y continua e induce el homeomorfismo

$$f : S^1 \to \mathbb{R}^*$$

definido por

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} p(x_1,x_2) & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,1) \\ \infty & \text{si } (x_1,x_2) = (0,1). \end{cases}$$

El ejemplo anterior da una compactación de $\mathbb{R}$. Ahora veremos otra forma distinta de compactar a $\mathbb{R}$.

Denotemos por $-\infty$ y $+\infty$ a dos puntos que no estén en $\mathbb{R}$ y consideremos

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Extendemos el orden usual $<$ de $\mathbb{R}$, a $\overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente forma

$$-\infty < x,\ x < \infty\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } -\infty < +\infty.$$

El conjunto ordenado $\overline{\mathbb{R}}$ se llama *recta real extendida.*
Consideremos en $\overline{\mathbb{R}}$ la topología $\overline{\mathcal{T}}$ generada por

$$\left\{\{x : x > a\} : a \in \overline{\mathbb{R}}\right\} \cup \left\{\{x : x < a\} : a \in \overline{\mathbb{R}}\right\}.$$

Dejamos al lector verificar las afirmaciones de la siguiente observación.

Observación 6.2.5 *i)Una base de la topología $\overline{\mathcal{T}}$ está formada por los conjuntos de la forma*

$$(a,b),\ [-\infty, c) \text{ y } (d, +\infty]$$

con $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$, $c \neq -\infty$ y $d \neq +\infty$.

ii) La topología $\overline{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}$, inducida por $\overline{\mathcal{T}}$ en $\mathbb{R}$, es la usual de $\mathbb{R}$.

iii) $\mathbb{R}$ es abierto y denso en $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposición 6.2.6 *$(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{T}})$ es un espacio topológico compacto.*

Demostración El intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, con la topología usual, es compacto por el teorema **6.1.5**. Sea

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \overline{\mathbb{R}}$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{si } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -\infty & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \\ +\infty & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Es fácil ver que f es un homeomorfismo y en consecuencia $\overline{\mathbb{R}}$ es compacto. ■

De lo anterior resulta $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{T}})$ una compactación de $\mathbb{R}$.

Además,

$$\overline{\mathbb{R}} \cong [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

y como

$$S^1 \ncong [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

resulta que S^1 y la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$ son dos compactaciones distintas (esto es, no homeomorfas) de $\mathbb{R}$.

6.3 Ejercicios

1. Verificar los incisos del ejemplo **6.1.4.**

2. a) Sean K_i, $i = 1, ..., n$, subconjuntos compactos de X. Probar que $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ es un subconjunto compacto de X.

b) ¿La unión de una cantidad no finita de compactos es un compacto?.

3. Probar que $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ es un compacto de $\mathbb{R}$.

4. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{x_0}$ y $\mathcal{T}^{x_0}$ las topologías en $\mathbb{R}$ definidas en el ejemplo **3.1.5** y en el ejercicio **2** del capítulo **3**.

a) ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{x_0})$ compacto?.

b) ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{x_0})$ compacto?.

5. Probar que si $\{K_i\}_{i\in I}$ es una familia de compactos de un espacio de Hausdorff X, entonces $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ es compacto.

6. Probar que no existe función continua y suryectiva $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. En particular, $[0, 1] \ncong \mathbb{R}$.

7. Probar:

a) Si A es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}$, entonces tiene máximo y mínimo.

b) Si X es compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza su valor mínimo y su valor máximo.

c) Si X es compacto, $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ $\forall x \in X$, entonces $\exists c > 0$ tal que $f(x) \geq c$, $\forall x \in X$.

8. Si X un espacio métrico y A y B son subconjuntos de X, se define

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Probar:

a) Si K es un subconjunto compacto de X y $x_0 \in X$, entonces existe $y_0 \in K$ tal que $d(x_0, K) = d(x_0, y_0)$.

b) Si K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de X, entonces existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$.

9. Sean X e Y espacios topológicos compactos y T_2 y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que f es continua si y sólo si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subseteq Y$.

10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y T_2. Probar:

a) No existe topología $\mathcal{T}_1$ en X tal que $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}$ y $(X, \mathcal{T}_1)$ sea T_2.

b) No existe topología $\mathcal{T}_2$ en X tal que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2$ y $(X, \mathcal{T}_2)$ sea compacto.

11. Probar la proposición **6.2.2**.

12. a) Probar que el compactado de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ es S^n, esto es,

$$(\mathbb{R}^n)^* \cong S^n.$$

b) Probar que el compactado de Alexandroff del intervalo $(0, 1]$ es $[0, 1]$, esto es,

$$(0, 1]^* \cong [0, 1].$$

13. Probar las afirmaciones de la observación **6.2.5**.

14. Probar que la función f definida en la demostración de la proposición **6.2.6** es un homeomorfismo.

CAPITULO 7
ESPACIOS PRODUCTO Y ESPACIOS COCIENTE.

En matemática, el estudio de una estructura usualmente lleva al estudio de subestructuras, estructuras producto y estructuras cociente.

7.1 Espacios producto

El producto de espacios topológicos admite una estructura topológica que está caracterizada por la de sus espacios factores. Esto está presente en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, donde las nociones topológicas están caracterizadas por la topología euclídea de sus rectas coordenadas.

Con el objeto de introducir la estructura topológica antes mencionada, consideremos los espacios topológicos X_1 y X_2. Tenemos asociados a estos espacios el conjunto producto cartesiano $X_1 \times X_2$ y las proyecciones canónicas

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i, \; p_i(x_1, x_2) = x_i, \; \text{para } i = 1, 2.$$

Es deseable dar al conjunto $X_1 \times X_2$ una topología tal que ambas proyecciones sean continuas. Debido a que la topología discreta satisface esto, es natural requerir la topología *menos fina* que hace continuas a ambas proyecciones. Esta topología, llamada *topología producto*, esta dada por la intersección de todas las topologías en $X_1 \times X_2$ que tienen la propiedad requerida y fácilmente se puede ver que es la topología generada por

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ es abierto en } X_i, \; i = 1, 2\}.$$

Debido a que:

i) $p_1^{-1}(V) = V \times X_2$, $\quad p_2^{-1}(W) = X_1 \times W$

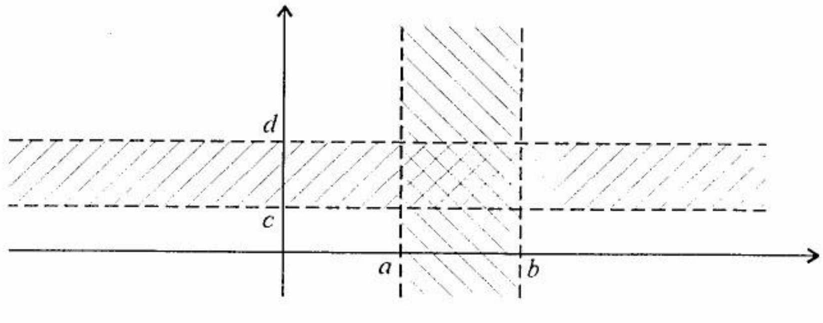
ii) $\bigcap\limits_{j=1}^{n} (V_j \times X_2) = (\bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j) \times X_2$, $\quad \bigcap\limits_{j=1}^{n} (X_1 \times W_j) = X_1 \times (\bigcap\limits_{j=1}^{n} W_j)$

iii) $V \times W = (V \times X_2) \cap (X_1 \times W)$

se prueba que una base de la topología producto es

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 : U_i \text{ es abierto en } X_i, \; i = 1, 2\}.$$

Ejemplo 7.1.1 *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. La topología producto en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, también tiene como subbase al conjunto de franjas abiertas horizontales y verticales y como base al conjunto de rectángulos $(a,b) \times (c,d)$.*



Por lo tanto, la topología producto en $\mathbb{R}^2$ es la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

En forma natural se extiende la noción de topología producto al producto de una familia de espacios topológicos. En estas notas incluimos sólo el caso de una familia finita $X_1, ..., X_n$ de espacios topológicos y remitimos a cualquier libro de la bibliografía al interesado en el caso general.

Denotamos al producto cartesiano de los conjuntos $X_1, ..., X_n$ por

$$X_1 \times ... \times X_n \quad \text{o bien por} \quad \prod_{i=1}^{n} X_i$$

y por p_j a la proyección canónica

$$p_j : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_j, \; p_j(x_1, ..., x_n) = x_j, \; \text{para } 1 \leq j \leq n.$$

Definición 7.1.2 *La topología $\mathcal{T}$ en $\prod_{i=1}^{n} X_i$ generada por*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{n} \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \textit{ es abierto en } X_j\}$$

se llama topología producto. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{T})$ se llama espacio producto de $X_1, ..., X_n$ y el espacio X_i, i-ésimo eje coordenado.

Si $\mathcal{T}_i$ es la topología de X_i, denotaremos también a la topología producto $\mathcal{T}$ por $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 * ... * \mathcal{T}_n$.

Cuando en un producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ no explicitemos su topología significará que estamos considerando la topología producto.

Observación 7.1.3 *Como consecuencia de la definición anterior se obtiene fácilmente:*

i) Una base de la topología producto y que llamaremos base canónica es

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i=1}^{n} U_i : U_i \text{ es abierto en } X_i,\ \ i = 1, ..., n\}.$$

ii) En un espacio producto, todas las proyecciones canónicas son continuas y cualquier topología en un conjunto producto que tenga esta propiedad debe ser más fina que la topología producto.

Consideremos en $\mathbb{R}$ las topologías usual $\mathcal{T}$, la de los complementos finitos $\mathcal{T}_c$ y la discreta $\mathcal{D}$.

Por el inciso i) de la observación anterior, en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T} * \mathcal{T}_c$, los conjuntos que se obtienen de franjas abiertas verticales sacándoles un número finito de segmentos horizontales son abiertos de la base canónica. Los segmentos horizontales sin sus extremos, son elementos de la base canónica de la topología $\mathcal{T} * \mathcal{D}$, más aún forman una base de $\mathcal{T} * \mathcal{D}$.

La siguiente es una propiedad importante del espacio producto.

Proposición 7.1.4 *Las proyecciones canónicas de un espacio producto sobre sus ejes coordenados son funciones abiertas.*

Demostración Sean $1 \leq j \leq n$ y p_j la proyección canónica sobre X_j.

Si $B = \prod_{i=1}^{n} U_i$ entonces $p_j(B) = U_j$. Por lo tanto, si B es un elemento de la base canónica de la topología producto, $p_j(B)$ es abierto en X_j.

Sea U un abierto en el espacio producto. Entonces $U = \bigcup_{l\in L} B_l$ con B_l en la base canónica y $p_j(U) = p_j(\bigcup_{l\in L} B_l) = \bigcup_{l\in L} p_j(B_l)$. Por lo tanto $p_j(U)$ es abierto en X_j. ∎

Observación 7.1.5 *Las proyecciones canónicas de un espacio producto sobre sus ejes coordenados no tienen por qué ser funciones cerradas.*

Por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual y la proyección

$$p_1 : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. El conjunto

$$F = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^+\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$ y sin embargo $p_1(F) = \mathbb{R}^+$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado permite caracterizar las funciones continuas en un espacio producto.

Proposición 7.1.6 *Sean Y un espacio topológico, $\prod_{i=1}^{n} X_i$ un espacio producto y p_j la proyección canónica, para $1 \leq j \leq n$. Entonces, $f : Y \to \prod_{i=1}^{n} X_i$ es continua si y sólo si $p_j \circ f : Y \to X_j$ es continua $\forall j = 1, ..., n$.*

Demostración Si f es continua, como las proyecciones p_j son continuas, también lo son $p_j \circ f$, $\forall j$.

Veamos ahora la recíproca. Debido a la proposición **4.1.11**, será suficiente probar que $f^{-1}(B)$ es abierto, $\forall B$ en la base canónica de la topología producto.

Sea $B = \prod_{i=1}^{n} U_i$ donde U_i es abierto en X_i, $\forall i$. Luego,

$$\begin{aligned} B &= (U_1 \times X_2 \times ... \times X_n) \cap (X_1 \times U_2 \times ... \times X_n) \cap ... \cap (X_1 \times ... \times X_{n-1} \times U_n) = \\ &= p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2) \cap ... \cap p_n^{-1}(U_n) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(p_i^{-1}(U_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} (p_i \circ f)^{-1}(U_i).$$

Como $(p_i \circ f)^{-1}(U_i)$ es abierto en Y $\forall i$, $f^{-1}(B)$ es también abierto en Y. ■

Observación 7.1.7 *Como consecuencia de la proposición anterior no es difícil encontrar homeomorfismos que prueben:*

i) $(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z$.

ii) $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \quad (\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\})$.

Debido a que las proyecciones canónicas son continuas, es claro que las propiedades topológicas preservadas por funciones continuas (conexión, arco-conexión, compacidad, etc.) son heredadas por los ejes coordenados si el espacio producto las tiene.

Nos interesa encontrar propiedades topológicas que tenga el espacio producto cuando las tienen todos los ejes coordenados.

En los siguientes teoremas veremos algunas propiedades que cumple el espacio producto si y sólo si las cumplen los ejes coordenados y en particular, nos resultarán útiles para determinar si el espacio producto tiene alguna de estas propiedades estudiándola en los ejes, que son espacios más simples.

Teorema 7.1.8 *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es N_2 si y sólo si X_i es N_2 $\forall i$.*

Demostración Supongamos primero que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es N_2 y sean $N \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{B_k : k \in N\}$ una base numerable de la topología producto.

Para $1 \leq j \leq n$, definimos

$$\mathcal{B}_j = \{p_j(B_k) : k \in N\}.$$

Veremos que $\mathcal{B}_j$ es base de la topología de X_j y por lo tanto resultará X_j un espacio N_2.

Sea j tal que $1 \leq j \leq n$. Como p_j es abierta, $p_j(B_k)$ es abierto en $X_j, \forall k$. Sea ahora U_j abierto en X_j y $x_j \in U_j$. Para $i \neq j$ elegimos un punto $a_i \in X_i$ y construimos

$$x = (a_1, ..., x_j, ..., a_n) \in p_j^{-1}(U_j) = X_1 \times ... \times U_j \times ... \times X_n.$$

Como $p_j^{-1}(U_j)$ es abierto en $\prod_{i=1}^{n} X_i$, existe B_{k_0} en la base $\mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_{k_0} \subseteq p_j^{-1}(U_j).$$

Luego

$$x_j = p_j(x) \in p_j(B_{k_0}) \subseteq U_j$$

y en consecuencia $\mathcal{B}_j$ es base de la topología de X_j.

Supongamos ahora que X_i es N_2 $\forall i$ y sea $\mathcal{B}_i$ una base numerable de la topología de X_i. Llamemos $\mathcal{T}$ a la topología producto y sea

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times ... \times B_n : B_i \in \mathcal{B}_i \text{ para } i = 1, ..., n\}.$$

Es claro que $\mathcal{B}$ es numerable y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Sea ahora $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U$. Existe $\prod_{i=1}^{n} U_i$, abierto en la base canónica de $\mathcal{T}$, tal que

$$x \in \prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq U.$$

Como U_i es abierto en X_i, existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $x_i \in B_i \subseteq U_i$. Por lo tanto

$$x \in \prod_{i=1}^{n} B_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$$

y en consecuencia $\mathcal{B}$ es base numerable de la topología producto. ■

Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_c$ las topologías en $\mathbb{R}$, usual y de los complementos finitos respectivamente.

Vimos en **4.2.2** y **4.2.4** que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es N_2 y que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ no lo es. Por el teorema anterior, podemos asegurar que $\mathbb{R}^2$ con la topología producto $\mathcal{T} * \mathcal{T}_c$ no es N_2.

Teorema 7.1.9 *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es N_1 si y sólo si X_i es N_1 $\forall i$.*

Demostración Daremos sólo la idea de la demostración, dejando al lector la prueba de los detalles.

Supongamos en primer lugar que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es N_1 y sea $1 \leq j \leq n$. Para ver que X_j es N_1, consideremos $x_j \in X_j$. Construimos un punto x en el espacio producto de modo que $p_j(x) = x_j$,

$$x = (a_1, ..., x_j, ..., a_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$$

y tomamos $\mathcal{B}_x$ base numerable de entornos de x. Luego, $p_j(\mathcal{B}_x)$ es base numerable de entornos de x_j (ejercicio).

Supongamos ahora que X_i es N_1 $\forall i$. Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ y consideremos $\mathcal{B}_{x_i}$ base numerable de entornos de $x_i, \forall i$.

$$\mathcal{B}_x = \{B_1 \times ... \times B_n : B_i \in \mathcal{B}_{x_i} \text{ para } i = 1, ..., n\}$$

es base numerable de entornos de x (ejercicio). ■

Teorema 7.1.10 *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es separable si y sólo si X_i es separable $\forall i$.*

Demostración La prueba resulta de los dos hechos siguientes, cuyas demostraciones dejamos al lector.

Si D es un subconjunto denso y numerable de $\prod_{i=1}^{n} X_i$, entonces $D_j = p_j(D)$ es un subconjunto denso y numerable de X_j.

Si D_i es un subconjunto denso y numerable de X_i $\forall i$, entonces $D = \prod_{i=1}^{n} D_i$ es un subconjunto denso y numerable de $\prod_{i=1}^{n} X_i$. ■

Teorema 7.1.11 *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es T_2 si y sólo si X_i es T_2 $\forall i$.*

Demostración Supongamos que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es T_2 y sea $1 \leq j \leq n$. Sean x_j, $y_j \in X_j$, $x_j \neq y_j$. Para $i \neq j$, elegimos $a_i \in X_i$ y construimos los puntos

$$\begin{aligned} x &= (a_1, ..., x_j, ..., a_n) \\ y &= (a_1, ..., y_j, ..., a_n). \end{aligned}$$

Como $x \neq y$, existen $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$, abiertos de la base canónica de la topología producto, tales que

$$x \in U, \ y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto

$$p_j(U) = U_j \quad \text{y} \quad p_j(V) = V_j$$

son abiertos en X_j tales que

$$x_j \in U_j, \ y_j \in V_j \text{ y } U_j \cap V_j = \emptyset$$

(pues si $z_j \in U_j \cap V_j$ entonces $z = (a_1, ..., z_j, ..., a_n) \in U \cap V$). Luego X_j es T_2.

Supongamos ahora que X_i es T_2 $\forall i$. Sean $x, \ y \in \prod_{i=1}^{n} X_i$, $x \neq y$, entonces existe j tal que

$$x_j = p_j(x) \neq p_j(y) = y_j.$$

Tomamos U_j y V_j abiertos disjuntos en X_j tales que $x_j \in U_j$ e $y_j \in V_j$.

Luego

$$U = p_j^{-1}(U_j) \quad \text{y} \quad V = p_j^{-1}(V_j)$$

son abiertos en $\prod_{i=1}^{n} X_i$ tales que

$$x \in U, \ y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

y por lo tanto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es T_2. ■

Teorema 7.1.12 *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo si y sólo si X_i es conexo $\forall i$.*

Demostración Si $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo, por el teorema de Bolzano, X_i es conexo $\forall i$.

Probaremos la recíproca por inducción. Esto es, probaremos que el espacio producto de n espacios conexos es conexo ($n \geq 2$).

Veamos en primer lugar que si X_1 y X_2 son conexos entonces $X_1 \times X_2$ es conexo.

Para esto consideramos las siguientes funciones que, por la proposición **7.1.6**, son continuas

$$\begin{array}{lcl} X_1 \xrightarrow{f_{x_2}} X_1 \times X_2 & , & X_2 \xrightarrow{f_{x_1}} X_1 \times X_2 \\ x_1 \rightarrow (x_1, x_2) & , & x_2 \rightarrow (x_1, x_2). \end{array}$$

Por el teorema de Bolzano,

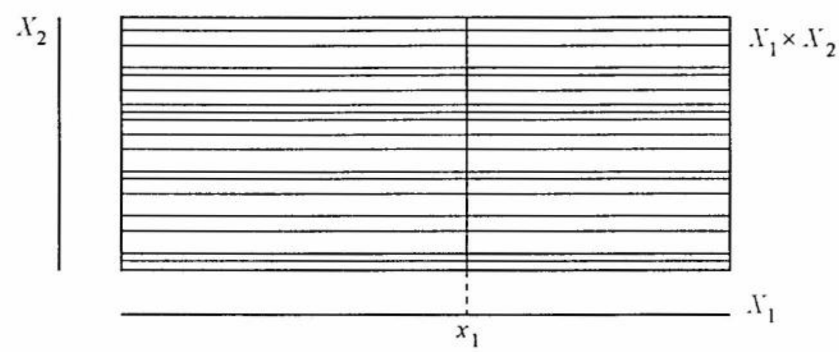
$$f_{x_2}(X_1) = X_1 \times \{x_2\} \quad \text{y} \quad f_{x_1}(X_2) = \{x_1\} \times X_2$$

son conexos, $\forall x_1, x_2$.

Por lo tanto $\{X_1 \times \{x_2\} : x_2 \in X_2\}$ es una familia de conexos. Además $C = \{x_1\} \times X_2$ es un conexo que interseca a cada miembro de la familia anterior pues $(x_1, x_2) \in C \cap (X_1 \times \{x_2\})$, $\forall x_2$. Entonces, por la proposición **5.1.13**,

$$C \cup (\bigcup_{x_2} (X_1 \times \{x_2\}) = X_1 \times X_2$$

es conexo.



Supongamos que el espacio producto de k conexos es conexo (hipótesis inductiva).

Consideramos ahora $k+1$ espacios conexos, $X_1, ..., X_{k+1}$. Por la observación **7.1.7** podemos escribir

$$\prod_{i=1}^{k+1} X_i \cong (\prod_{i=1}^{k} X_i) \times X_{k+1}$$

Por hipótesis inductiva, $Y = \prod_{i=1}^{k} X_i$ es conexo y por lo probado anteriormente para el caso $n = 2$, obtenemos que $Y \times X_{k+1}$ es conexo. Como la conexión es preservada por homeomorfismos, $\prod_{i=1}^{k+1} X_i$ es conexo. ■

Teorema 7.1.13 (Tijonov). *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es compacto si y sólo si X_i es compacto $\forall i$.*

Demostración Como la compacidad es preservada por funciones continuas y además $p_j(\prod_{i=1}^{n} X_i) = X_j$, resulta que si $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es compacto entonces X_j es compacto $\forall j$.

Probaremos la recíproca por inducción. Esto es, probaremos que el espacio producto de n espacios compactos es compacto ($n \geq 2$).

Veamos en primer lugar que si X_1 y X_2 son compactos entonces $X_1 \times X_2$ es compacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$. Si $x_1 \in X_1$, considerando que la función

$$X_2 \to X_1 \times X_2, \qquad x_2 \to (x_1, x_2)$$

es continua y que X_2 es compacto, se concluye que $\{x_1\} \times X_2$ es un subconjunto compacto de $X_1 \times X_2$.

Si $m = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, existe $i(m) \in I$ tal que $m \in U_{i(m)}$.

Como $U_{i(m)}$ es abierto en $X_1 \times X_2$, usando la base canónica de la topología producto, podemos asegurar que existen V_m abierto en X_1 y W_m abierto en X_2 tales que

$$m = (x_1, x_2) \in P_m = V_m \times W_m \subseteq U_{i(m)}.$$

Luego

$$\{P_m : m \in \{x_1\} \times X_2\}$$

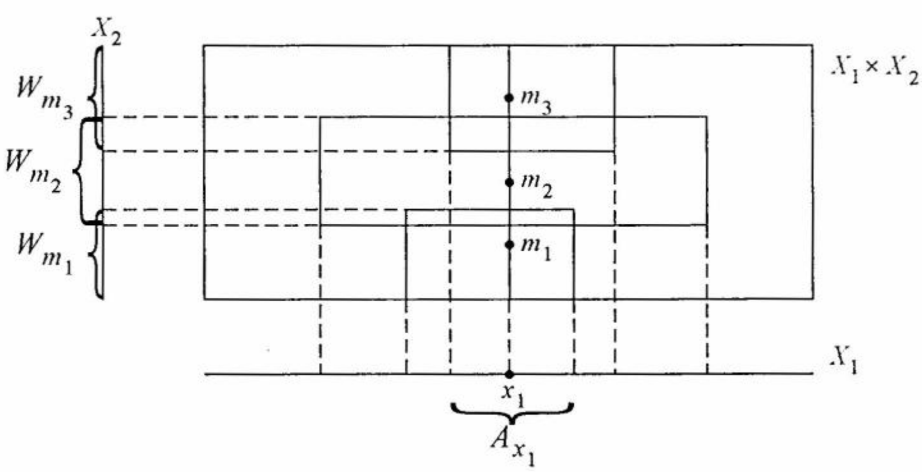
es un cubrimiento abierto del compacto $\{x_1\} \times X_2$. En consecuencia, existen $m_1, ..., m_n$ tales que

$$\{x_1\} \times X_2 \subseteq P_{m_1} \cup ... \cup P_{m_n} \ , \quad (P_{m_j} = V_{m_j} \times W_{m_j}). \tag{7.1}$$

Sea

$$A_{x_1} = \bigcap_{j=1}^{n} V_{m_j}.$$

Claramente A_{x_1} es un entorno abierto de x_1. Veremos ahora que $A_{x_1} \times X_2$ es cubierto por un número finito de miembros del cubrimiento $\mathcal{U}$.



Sea $(u_1, u_2) \in A_{x_1} \times X_2$. Por (7.1), existe j tal que

$$(x_1, u_2) \in P_{m_j} = V_{m_j} \times W_{m_j}.$$

Por lo tanto $u_2 \in W_{m_j}$ y así

$$(u_1, u_2) \in A_{x_1} \times W_{m_j} \subseteq V_{m_j} \times W_{m_j} = P_{m_j} \subseteq U_{i(m_j)}.$$

Luego, hemos probado

$$A_{x_1} \times X_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i(m_j)}.$$

Esto es, $A_{x_1} \times X_2$ es cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Al variar x_1 en X_1, los abiertos A_{x_1} forman un cubrimiento abierto del espacio compacto X_1 y por lo tanto tiene subcubrimiento finito. Esto es, existen $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, ..., $x_{1,l}$ en X_1 tales que

$$X_1 = A_{x_{1,1}} \cup A_{x_{1,2}} \cup ... \cup A_{x_{1,l}}.$$

Como para cada $A_{x_{1,j}}$ vale lo hecho anteriormente para A_{x_1}, cada $A_{x_{1,j}} \times X_2$ es cubierto por un número finito de U_i. Debido a que

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{j=1}^{l} (A_{x_{1,j}} \times X_2)$$

se sigue que un número finito de U_i cubren $X_1 \times X_2$. Luego $X_1 \times X_2$ es compacto.

Supongamos ahora que el espacio producto de k espacios compactos es compacto (hipótesis inductiva).

Sean $X_1, ..., X_{k+1}$ espacios compactos. De la observación **7.1.7** obtenemos que

$$\prod_{i=1}^{k+1} X_i \cong (\prod_{i=1}^{k} X_i) \times X_{k+1}.$$

Por hipótesis inductiva, $Y = \prod_{i=1}^{k} X_i$ es compacto y por lo probado anteriormente para el caso $n = 2$, concluimos que $Y \times X_{k+1}$ es compacto. Como la compacidad es preservada por homeomorfismos, $\prod_{i=1}^{k+1} X_i$ es compacto. ■

Daremos ahora algunos ejemplos que muestran el uso de los teoremas anteriores.

En $\mathbb{R}$ consideremos las siguientes topologías: usual $\mathcal{T}$, de los complementos finitos $\mathcal{T}_c$, discreta $\mathcal{D}$ y $\mathcal{T}^{x_0}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$, definida en el ejercicio **2** del capítulo 3.

Por lo ya visto en los capítulos precedentes, sabemos que:

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es N_2, N_1, separable, T_2, conexo y no es compacto.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ es conexo, compacto y separable pero no es N_2, N_1 ni T_2.

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ es N_1 y T_2, pero no es N_2, separable, conexo ni compacto.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{x_0})$ es N_1, conexo y compacto y no es N_2, separable ni T_2.

Usando los teoremas previos podemos concluir:

i) $\mathbb{R}^3$ con la topología $\mathcal{T}_c * \mathcal{T}_c * \mathcal{T}^{x_0}$ es conexo y compacto pero no es separable, N_2, N_1 ni T_2.

ii) $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T} * \mathcal{D} * \mathcal{T}^{x_0})$ es un espacio N_1 y no es T_2.

iii) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_c * \mathcal{T})$ es separable pero no es compacto.

Como consecuencia del teorema de Tijonov y de resultados del capítulo 6, tenemos la siguiente caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, que por su simplicidad resulta muy útil.

Teorema 7.1.14 (Heine-Borel-Lebesgue). *Sea $n \geq 1$. Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración Por el corolario **6.1.13**, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ entonces es cerrado y acotado.

Veamos ahora la recíproca. Si K es acotado entonces existe $I = [a, b]$ tal que $K \subseteq \prod_{i=1}^{n} I = I^n$. Por el teorema **6.1.5**, I es compacto y usando el teorema de Tijonov (**7.1.13**) concluimos que I^n es compacto.

Como K es cerrado en el compacto I^n, por la proposición **6.1.6** resulta K compacto. ■

Ejemplo 7.1.15 *Como consecuencia inmediata del resultado anterior obtenemos los siguientes hechos.*

i) $\overline{B}(x, r)$ y $S(x, r)$ son compactos de $\mathbb{R}^n$.

ii) $\mathbb{R}^n$ no es compacto y por lo tanto $S^n - \{a\}$ con $a \in S^n$ (que es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$) no es compacto.

7.2 Espacios cociente

Como todos sabemos el cono, el cilindro o la pirámide se pueden construir pegando adecuadamente partes de un trozo de papel. Esta operación, que "identifica" puntos, da un ejemplo simple de la noción de objeto cociente en matemática. Para su definición necesitaremos las nociones de partición y relación de equivalencia.

Definición 7.2.1 *Una partición de un conjunto X es una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X tal que:*

i) $\bigcup_{A\in\mathcal{P}} A = X$

ii) Si $A, B \in \mathcal{P}$ y $A \neq B$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

Definición 7.2.2 *Una relación de equivalencia en un conjunto X es un subconjunto R de $X \times X$ tal que:*

i) $(x, x) \in R$ $\forall x \in X$ (relación reflexiva)

ii) Si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$ (relación simétrica)

iii) Si $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$ (relación transitiva).

Si R es una relación de equivalencia, $(x, y) \in R$ será denotado por xRy. Habitualmente escribiremos $\sim$ en lugar de R.

Observación 7.2.3 *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Llamamos clase de equivalencia de x al conjunto*

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Dejamos al lector verificar que $\mathcal{P} = \{[x] : x \in X\}$ es una partición de X. Vemos entonces que podemos asociar a cada relación de equivalencia en X, una partición de X.

Recíprocamente, una partición $\mathcal{P}$ de X define naturalmente una relación de equivalencia $\sim$ en X por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo miembro de } \mathcal{P}.$$

Es fácil ver que al realizar las dos construcciones anteriores se obtiene nuevamente el objeto original. Esto es,

$$\begin{array}{ccccc} \sim & \rightarrow & \mathcal{P} & \rightarrow & \sim \\ \mathcal{P} & \rightarrow & \sim & \rightarrow & \mathcal{P}. \end{array}$$

Definición 7.2.4 *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Se llama conjunto cociente de X por $\sim$ y se denota por $X/_\sim$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia. Esto es,*

$$X/_\sim = \{[x] : x \in X\}.$$

La aplicación $\pi : X \to X/_\sim$, definida por $\pi(x) = [x]$, se llama proyección canónica.

Para $A \subseteq X$ se llama saturado de A por $\sim$ (o saturado de A) al conjunto

$$satA = \{x \in X : \exists a \in A \ con \ a \sim x\}$$

y se dice que A es saturado si $satA = A$.

Observación 7.2.5 *Es fácil verificar que:*

i) $satA = \pi^{-1}(\pi(A))$.

ii) $sat(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i satA_i$.

iii) $\pi^{-1}(B)$ *es saturado,* $\forall B \subseteq X/_\sim$.

Ejemplo 7.2.6 *Definimos en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia $\sim$ por*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \ o \ x, y \in \mathbb{Z}.$$

Así,

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & si \ x \notin \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & si \ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

y por lo tanto

$$sat\{1\} = \mathbb{Z} \quad y \quad sat[0,1] = [0,1] \cup \mathbb{Z}.$$

El ejemplo anterior se generaliza de la siguiente forma.

Ejemplo 7.2.7 *En un conjunto X consideramos un subconjunto A. La relación de equivalencia en X que identifica los puntos de A está definida por*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \ o \ x, y \in A.$$

Luego,

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & si \ x \notin A \\ A & si \ x \in A \end{cases}$$

y por lo tanto, para $B \subseteq X$ tenemos

$$satB = \begin{cases} B & si \ B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & si \ B \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

En este caso, al conjunto $X/_\sim$ se lo representa también por $X/_A$.

Ejemplo 7.2.8 *En $[0,1]$ consideremos la relación de equivalencia*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \ o \ (x = 0, y = 1) \ o \ (x = 1, y = 0).$$

Los conjuntos $[0,1]$ *y* $[0,1]/_{\sim}$ *se representan respectivamente por los siguientes dibujos.*

Cuando X es un espacio topológico, es deseable dar al conjunto cociente $X/_{\sim}$ una topología de modo que la proyección canónica resulte continua. Como la topología indiscreta satisface esto, es natural asociar a $X/_{\sim}$ la topología *más fina* que hace continua a la proyección canónica $\pi : X \to X/_{\sim}$.

Definición 7.2.9 *Sean* X *un espacio topológico y* $\sim$ *una relación de equivalencia en* X. *La familia*

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X/_{\sim} : \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología en $X/_{\sim}$, *llamada topología cociente. El espacio topológico* $(X/_{\sim}, \mathcal{T})$ *se llama espacio cociente de* X *por* $\sim$ *o simplemente espacio cociente.*

Observación 7.2.10 *Es fácil verificar que la topología cociente es la topología más fina en* $X/_{\sim}$ *que hace continua a la proyección canónica* π.

Cuando en un cociente $X/_{\sim}$ no explicitemos su topología significará que estamos considerando la topología cociente.

En lo que sigue de este capítulo, usualmente escribiremos π para referirnos a la proyección canónica

$$\pi : X \to X/_{\sim}\ .$$

Proposición 7.2.11 *Se cumplen:*

i) U *es abierto en* $X/_{\sim} \Leftrightarrow U = \pi(V)$ *con* V *abierto saturado.*

ii) F *es cerrado en* $X/_{\sim} \Leftrightarrow F = \pi(C)$ *con* C *cerrado saturado.*

iii) π *es abierta* $\Leftrightarrow$ *saturados de abiertos son abiertos.*

iv) π *es cerrada* $\Leftrightarrow$ *saturados de cerrados son cerrados.*

Demostración Recordemos que:

$$U \text{ es abierto en } X/_{\sim} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } X.$$

i) Sean U abierto en $X/_{\sim}$ y $V = \pi^{-1}(U)$. Luego V es abierto y $U = \pi(V)$. Además, $\pi^{-1}(\pi(V)) = \pi^{-1}(U) = V$ y por lo tanto, por i) de la observación **7.2.5**, V es saturado.

Sea $U = \pi(V)$ con V abierto y saturado. Por ser V saturado, $V = \pi^{-1}(\pi(V)) = \pi^{-1}(U)$. Como V es abierto resulta U abierto.

ii) F es cerrado en $X/_\sim \Leftrightarrow F^c = U$ es abierto en $X/_\sim \Leftrightarrow V = \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(F^c) = (\pi^{-1}(F))^c$ es abierto en $X \Leftrightarrow C = \pi^{-1}(F)$ es cerrado saturado en $X \Leftrightarrow F = \pi(C)$ con C cerrado saturado.

iii) π es abierta $\Leftrightarrow \pi(V)$ es abierto $\forall V$ abierto $\Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(V)) = satV$ es abierto $\forall V$ abierto.

iv) π es cerrado $\Leftrightarrow \pi(C)$ es cerrado $\forall C$ cerrado $\Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(C)) = satC$ es cerrado $\forall C$ cerrado. ■

Ejemplo 7.2.12 *Consideremos $[0,1]$ con la relación de equivalencia que identifica los puntos 0 y 1, es decir*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \ o \ (x = 0, y = 1) \ o \ (x = 1, y = 0).$$

La proyección canónica $\pi : [0,1] \to [0,1]/_\sim$ es cerrada y no es abierta.

Para probar esto, consideremos un subconjunto $A \subseteq [0,1]$. Entonces, como vimos en el ejemplo **7.2.7**,

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \begin{cases} A & \text{si } 0,1 \notin A \\ A \cup \{0,1\} & \text{si } 0 \in A \text{ o } 1 \in A. \end{cases}$$

Luego, es fácil ver que $\pi^{-1}(\pi(A))$ es cerrado $\forall A$ cerrado y por lo tanto π es cerrada.

Como $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en $[0,1]$ pero

$$\pi^{-1}(\pi([0, \frac{1}{2}))) = [0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$$

no es abierto en $[0,1]$, resulta que π no es abierta.

Ejemplo 7.2.13 *En $\mathbb{R}$ consideremos la relación de equivalencia*

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

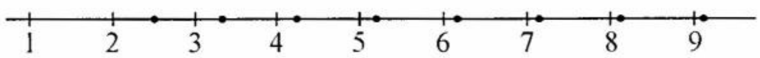
Entonces $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_\sim$ es abierta y no es cerrada.

Para probar que π es abierta basta ver que $\pi^{-1}(\pi(I))$ es abierto $\forall I$ intervalo abierto. Dejamos esta verificación al lector.

Sea

$$F = \{n + \frac{1}{n}\}_{n \geq 2} \ .$$

Luego, F es cerrado en $\mathbb{R}$ pero $\pi^{-1}(\pi(F))$ no es cerrado en $\mathbb{R}$ puesto que contiene a la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 2}$ y no contiene a 0. Esto prueba que π no es cerrada.



Queremos ahora encontrar condiciones suficientes para que el espacio cociente $X/_\sim$ sea T_2 , compacto o conexo.

Como π es continua y suryectiva, si X es compacto (respectivamente conexo) entonces $X/_\sim$ es compacto (respectivamente conexo). Además, por la misma razón, podemos asegurar:

Observación 7.2.14 *Si $A \subseteq X$ es compacto (respectivamente conexo) y $\pi(A) = X/_\sim$ entonces $X/_\sim$ es compacto (respectivamente conexo).*

Observación 7.2.15 *Que el espacio X sea T_2 no garantiza que el espacio cociente $X/_\sim$ sea T_2.*

Como ejemplo, consideremos el espacio cociente $\mathbb{R}/_\sim$ donde

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ o } x, y \in (0,1).$$

Este es un caso particular del ejemplo **7.2.7** y que denotamos también por $\mathbb{R}/_{(0,1)}$. En este espacio no podemos separar los puntos $[0]$ y $[1]$.

Para ver esto notemos en primer lugar que todo abierto saturado en $\mathbb{R}$ que contiene a 0 o a 1 debe contener al intervalo $(0,1)$.

Sean U_0 y U_1abiertos en $\mathbb{R}/_\sim$ tales que $[0] \in U_0$ y $[1] \in U_1$. Por la proposición **7.2.11**, $U_0 = \pi(V_0)$ y $U_1 = \pi(V_1)$ donde V_0 y V_1 son abiertos saturados en $\mathbb{R}$, $0 \in V_0$ y $1 \in V_1$.

Por el comentario anterior, $(0,1) \subseteq V_0 \cap V_1$ y por lo tanto $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$. En consecuencia $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$.

La siguiente proposición caracteriza algunas propiedades topológicas (T_2 y conexión) en $X/_\sim$, en términos de propiedades en X.

Proposición 7.2.16 *i) El espacio cociente $X/_\sim$ es T_2 si y sólo si dos clases de equivalencia cualesquiera son subconjuntos de X que se separan por abiertos saturados.*

ii) El espacio cociente $X/_\sim$ es conexo si y sólo si los únicos saturados, abiertos y cerrados en X son $\emptyset$ y X.

Demostración i) $X/_\sim$ es $T_2 \Leftrightarrow ([x] \neq [y] \Rightarrow \exists U$ y W abiertos disjuntos en $X/_\sim$ tal que $[x] \in U$ e $[y] \in W) \underset{7.2.11-(i)}{\Leftrightarrow} ([x] \neq [y] \Rightarrow \exists U_1$ y W_1 abiertos saturados tales que

$[x] \in \pi(U_1)$, $[y] \in \pi(W_1)$ y $\pi(U_1) \cap \pi(W_1) = \emptyset) \Leftrightarrow ([x] \neq [y] \Rightarrow \exists U_1$ y W_1 abiertos saturados tales que $[x] \subseteq U_1$, $[y] \subseteq W_1$ y $U_1 \cap W_1 = \emptyset)$.

ii) $X/_\sim$ es conexo $\Leftrightarrow$ (U abierto y cerrado en $X/_\sim \Rightarrow U = \emptyset$ o $U = X/_\sim$) $\underset{7.2.11}{\Leftrightarrow}$ ($V \subseteq X$ abierto, cerrado y saturado $\Rightarrow V = \emptyset$ o $V = X$). ■

Daremos ahora una condición suficiente para que $X/_\sim$ sea T_2 en términos de la topología producto en $X \times X$ y de la proyección canónica $\pi : X \to X/_\sim$.

Proposición 7.2.17 *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si $\sim$ es un subconjunto cerrado en el espacio producto $X \times X$ y $\pi : X \to X/_\sim$ es abierta entonces el espacio cociente $X/_\sim$ es T_2.*

Demostración Sean $[x] \neq [y]$. Luego $x \nsim y$ y como la relación es un subconjunto cerrado en el espacio producto $X \times X$, su complemento

$$G = \{(u, v) \in X \times X : u \nsim v\}$$

es abierto y por lo tanto, usando la base canónica de la topología producto, podemos asegurar que existen W_x y W_y abiertos en X tales que

$$(x, y) \in W_x \times W_y \subseteq G \tag{7.2}$$

Sean

$$U_x = \pi(W_x) \quad \text{y} \quad U_y = \pi(W_y).$$

Como π es abierta, U_x y U_y son abiertos en $X/_\sim$ y satisfacen $[x] \in U_x$ y $[y] \in U_y$.

Además $U_x \cap U_y = \emptyset$ pues en caso contrario, existen $w_1 \in W_x$ y $w_2 \in W_y$ tales que $\pi(w_1) = \pi(w_2) \in U_x \cap U_y$ y por lo tanto $w_1 \sim w_2$ y $(w_1, w_2) \in W_x \times W_y$, lo cual es una contradicción por (7.2).

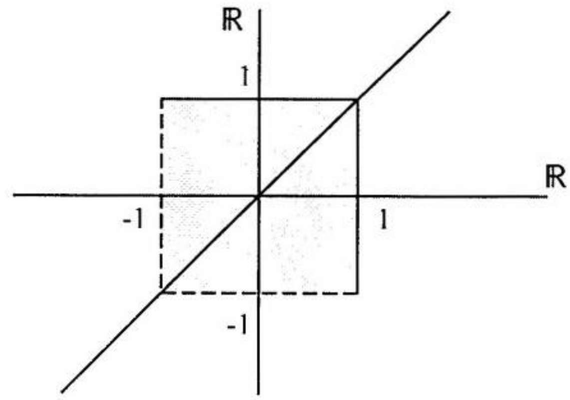
Luego $X/_\sim$ es T_2. ■

Observación 7.2.18 *Como se verá en el ejercicio **11** de **7.3**, que la relación sea un subconjunto cerrado en $X \times X$ es una condición necesaria para que $X/_\sim$ sea T_2.*

Este hecho nos da un método para construir espacios que no resulten T_2.

Como ejemplo de ello tomemos en $\mathbb{R}$ un subconjunto A que no sea cerrado, por ejemplo $A = (-1, 1]$, y $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida en el ejemplo **7.2.7** y que identifica los puntos de A. Claramente

$$\sim \; = (A \times A) \cup \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$



y por lo tanto no es cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En consecuencia $\mathbb{R}/_{\sim}$ no es T_2.

Notemos que esto es lo que ocurre en el ejemplo **7.2.15**.

El siguiente teorema caracteriza las funciones continuas que tienen como dominio un espacio cociente.

Teorema 7.2.19 *Sean X e Y espacios topológicos y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces $g : X/_{\sim} \to Y$ es una función continua si y sólo si $g \circ \pi : X \to Y$ es continua.*

Demostración Es claro que si g es continua entonces $g \circ \pi$ es continua puesto que π lo es.

Supongamos ahora que $g \circ \pi$ es continua y sea W un abierto en Y. Entonces $(g \circ \pi)^{-1}(W) = \pi^{-1}(g^{-1}(W))$ es abierto en X y por definición de la topología cociente, $g^{-1}(W)$ es abierto en $X/_{\sim}$. Luego g es continua. ■

Veremos ahora un resultado que es de gran utilidad para definir funciones continuas y biyectivas desde un espacio cociente.

Teorema 7.2.20 *Sean $f : X \to Y$ una función y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces existe $\bar{f}: X/_{\sim} \to Y$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi$ si y sólo si $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Además, si existe $\bar{f}$ con $f = \bar{f} \circ \pi$ se tiene que:*

i) $\bar{f}$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ $(f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y)$.

ii) $\bar{f}$ es suryectiva $\Leftrightarrow$ f es suryetiva.

iii) $\bar{f}$ es continua $\Leftrightarrow$ f es continua.

Demostración Supongamos que existe $\bar{f}$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/_{\sim} \\ f & \searrow & \downarrow \bar{f} \\ & & Y \end{array}$$

Si $x \sim y$ entonces $\pi(x) = \pi(y)$ y por lo tanto $\bar{f}\ (\pi(x)) = \bar{f}\ (\pi(y))$, o sea $f(x) = f(y)$.

Si cada vez que $x \sim y$ se tiene que $f(x) = f(y)$, entonces resulta bien definida la función

$$\bar{f}\colon X/_{\sim} \to Y \text{ por } \bar{f}\ ([x]) = f(x).$$

Luego $\bar{f}\circ\pi = f$.

Suponemos en lo que sigue que existe $\bar{f}$ tal que $\bar{f}\circ\pi = f$.

i) $\bar{f}$ es inyectiva $\Leftrightarrow (\bar{f}\ ([x]) = \bar{f}\ ([y]) \Rightarrow [x] = [y]) \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y)$.

ii) $\bar{f}$ es suryectiva $\Leftrightarrow$ (dado $z \in Y$, $\exists [x] \in X/_{\sim}$ tal que $\bar{f}\ ([x]) = z$) $\Leftrightarrow$ (dado $z \in Y$, $\exists x \in X$ tal que $f(x) = z$) $\Leftrightarrow f$ es suryectiva.

iii) Sigue en forma inmediata del teorema **7.2.19.** ■

Veremos a continuación varios ejemplos que muestran a espacios conocidos realizados como cocientes.

Ejemplo 7.2.21 Circunferencia. *Si* $\sim$ *es la relación de equivalencia en* $[0, 1]$ *definida por*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ o } (x = 0, y = 1) \text{ o } (x = 1, y = 0)$$

entonces $[0, 1]/_{\sim} \cong S^1$.

Para ver esto, definimos la función continua y suryectiva

$$f : [0, 1] \to S^1, \quad f(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x).$$

Como $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$, por el teorema **7.2.20**, existe la función inyectiva

$$\bar{f}\colon [0, 1]/_{\sim} \to S^1 \text{ definida por } \bar{f}\ ([x]) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x).$$

Además por ser f continua y suryectiva, también lo es $\bar{f}$.

Como $\bar{f}$ es biyectiva y continua, $[0, 1]/_{\sim} = \pi([0, 1])$ es compacto y S^1 es T_2, por el teorema **6.1.18,** concluimos que $\bar{f}$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 7.2.22 Circunferencia. *Si* $\sim$ *es la relación de equivalencia en* $\mathbb{R}$ *definida por*

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

entonces $\mathbb{R}/_{\sim} \cong S^1$.

La función continua y suryectiva

$$f : \mathbb{R} \to S^1, \quad f(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

induce, por **7.2.20**, la función continua y biyectiva

$$\bar{f} \colon \mathbb{R}/_{\sim} \to S^1, \quad \bar{f}\,([x]) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x).$$

Como $\mathbb{R}/_{\sim}$ es compacto pues $\mathbb{R}/_{\sim} = \pi([0,1])$ y S^1 es T^2, por **6.1.18** $\bar{f}$ resulta un homeomorfismo.

Ejemplo 7.2.23 Intervalo. *En* $X = [0,1] \cup [2,3]$ *definimos la relación de equivalencia*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \ \ o \ (x = 1, y = 2) \ \ o \ (x = 2, y = 1).$$

Entonces $X/_{\sim} \cong [0,2]$.

Para esto, consideremos la función

$$f : X \to [0,2]$$

definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & si \ \ 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & si \ \ 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

que es continua por el ejercicio **12** de **4.4**.

Usando **7.2.20** y las mismas ideas que en los ejemplos anteriores se prueba que

$$\bar{f} \colon X/_{\sim} \to [0,2] \text{ definida por } \bar{f}\,([x]) = f(x)$$

es un homeomorfismo.

Veremos ahora ejemplos de espacios cociente obtenidos por relaciones de equivalencia en el cuadrado $I^2 = I \times I$ *de* $\mathbb{R}^2$, *donde*

$$I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

En todos estos ejemplos describiremos la relación de equivalencia señalando sólo los puntos distintos que identifica.

Ejemplo 7.2.24 Cilindro. *Consideremos el cilindro en* $\mathbb{R}^3$

$$C = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \ t \in I\}$$

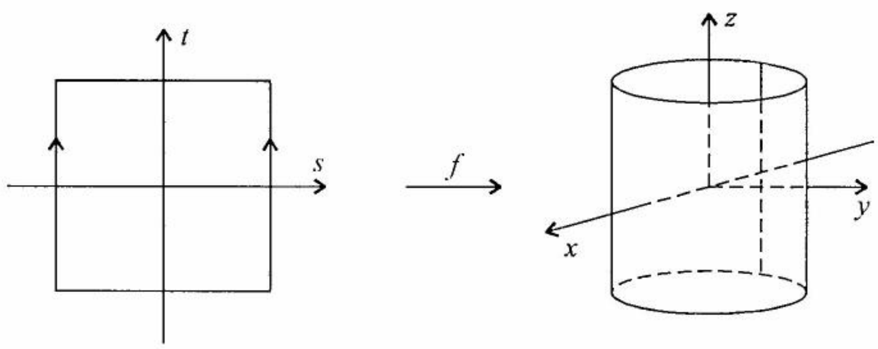
y la relación de equivalencia en I^2 *dada por*

$$(-\frac{1}{2}, t) \sim (\frac{1}{2}, t) \quad \forall t \in I.$$

El espacio $I^2/_\sim$ *es homeomorfo al cilindro* C.

Consideremos la función

$$f : I^2 \to C, \quad f(s,t) = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s, t).$$



Dejamos al lector verificar que f induce el homeomorfismo

$$\bar{f}: I^2/_\sim \to C, \quad \bar{f}\ ([(s,t)]) = f(s,t).$$

Ejemplo 7.2.25 Cono. *Consideremos el cono en* $\mathbb{R}^3$

$$B = \{((\frac{1}{2} - t)\cos 2\pi s, (\frac{1}{2} - t)\operatorname{sen} 2\pi s, t) : s,t \in I\}$$

y la relación de equivalencia en I^2

$$(-\frac{1}{2}, t) \sim (\frac{1}{2}, t) \quad \forall t \in I \quad y \quad (s, \frac{1}{2}) \sim (s', \frac{1}{2}) \quad \forall s, s' \in I.$$

El espacio cociente $I^2/_\sim$ *es homeomorfo al cono* B.

Dejamos al lector verificar que la función

$$f : I^2 \to B, \quad f(s,t) = ((\frac{1}{2} - t)\cos 2\pi s, (\frac{1}{2} - t)\,\mathrm{sen}\, 2\pi s, t)$$

induce un homeomorfismo

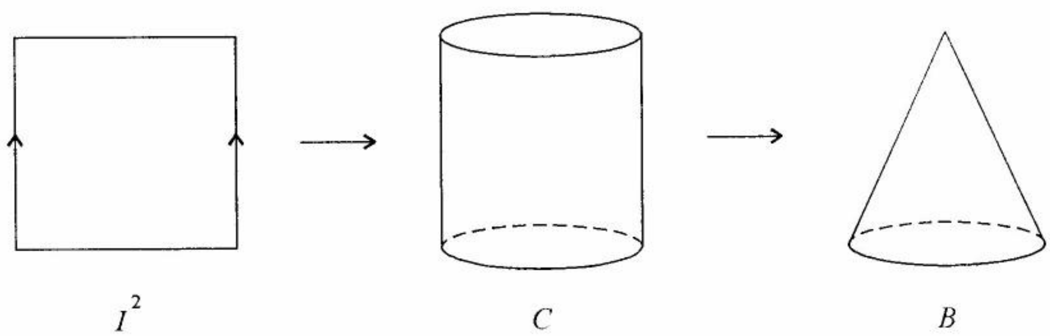
$$\bar{f}: I^2/_\sim \to B.$$

Notemos que también podemos obtener el cono B identificando en el cilindro C del ejemplo anterior, los puntos del conjunto

$$A = \{(x, y, \frac{1}{2}) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq C.$$

Usando la notación del ejemplo **7.2.7** tenemos que

$$C/_A \cong B.$$



Ejemplo 7.2.26 Esfera. *Consideremos la esfera en* $\mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

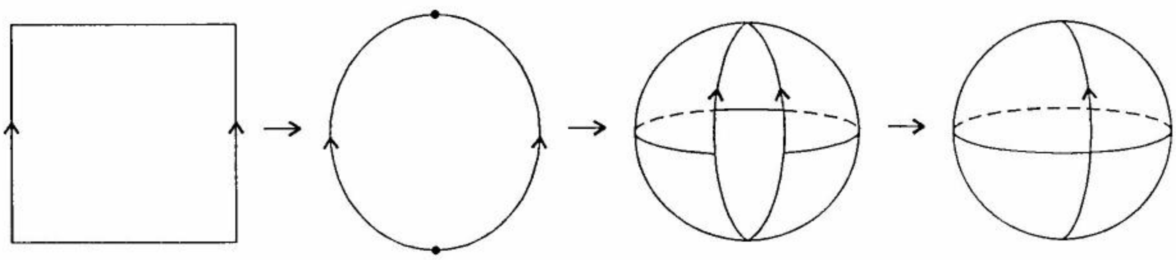
Sea $\sim$ *la relación de equivalencia en* I^2 *dada por*

$$(-\frac{1}{2}, t) \sim (\frac{1}{2}, t)\ \forall t \in I,\ (s, -\frac{1}{2}) \sim (s', -\frac{1}{2}),\ (s, \frac{1}{2}) \sim (s', \frac{1}{2})\ \forall s, s' \in I.$$

El espacio obtenido es homeomorfo a S^2. *Es decir*

$$I^2/_\sim \cong S^2.$$

Podemos visualizar este hecho identificando primero los puntos de cada uno de los lados horizontales del cuadrado I^2 y luego identificamos las imágenes de los lados verticales según la relación. Esto se muestra en el siguiente dibujo; la segunda identificación es el resultado de los dos últimos pasos.

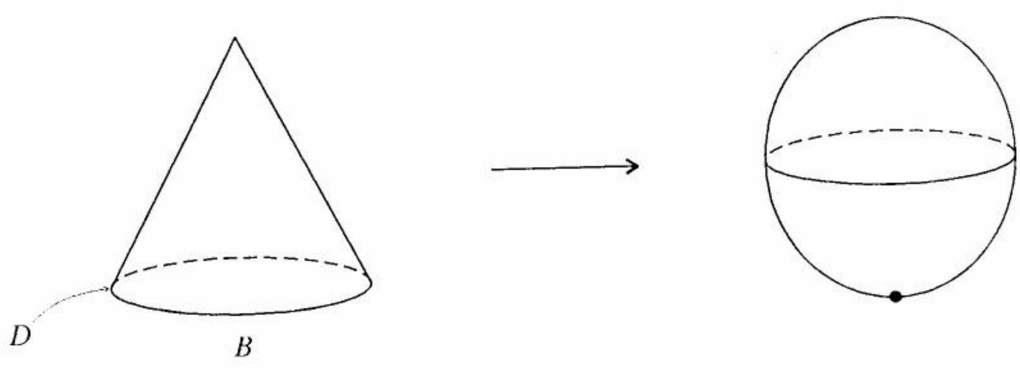


También se puede obtener la esfera S^2 como cociente del cono B del ejemplo **7.2.25** , identificando los puntos del subconjunto

$$D = \{(\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s, -\frac{1}{2}) : s \in I\} \subseteq B.$$

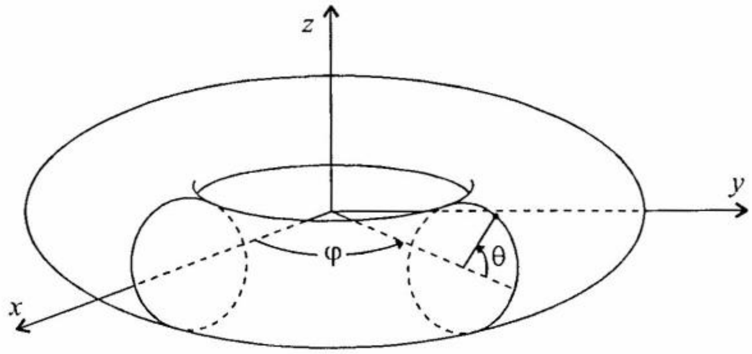
Es decir

$$B/_D \cong S^2.$$



Ejemplo 7.2.27 Toro bidimensional. *En* $\mathbb{R}^3$ *tenemos el toro*

$$T = \{((2 + \cos\theta)\cos\varphi, (2 + \cos\theta)\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) : -\pi \leq \theta, \varphi \leq \pi\}.$$



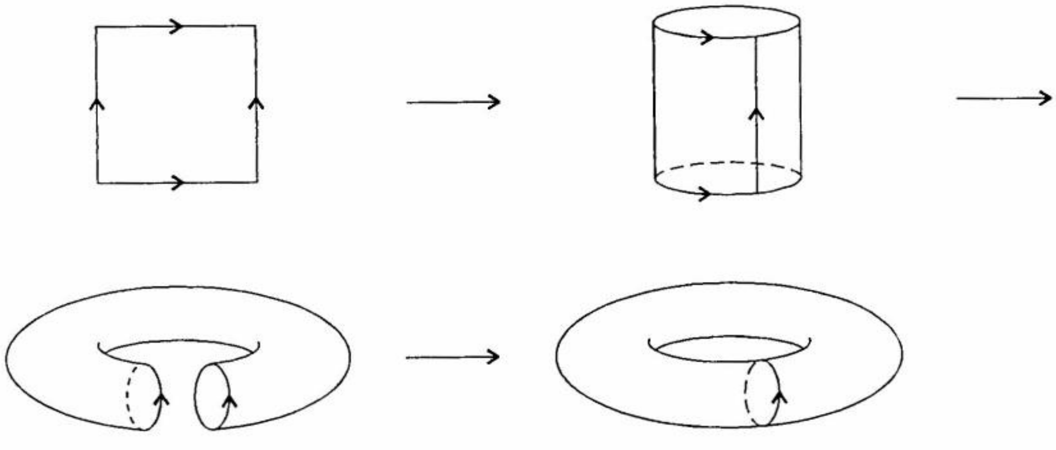
T se realiza como espacio cociente de I^2 por la relación de equivalencia

$$(-\frac{1}{2},t) \sim (\frac{1}{2},t) \quad \forall t \in I \quad \text{y} \quad (s,-\frac{1}{2}) \sim (s,\frac{1}{2}) \quad \forall s \in I.$$

*Podemos obtener también T a partir del cilindro C del ejemplo **7.2.24** de la siguiente manera:*

$$T \cong C/_\sim \quad \textit{donde} \quad (x,y,-\frac{1}{2}) \sim (x,y,\frac{1}{2}).$$

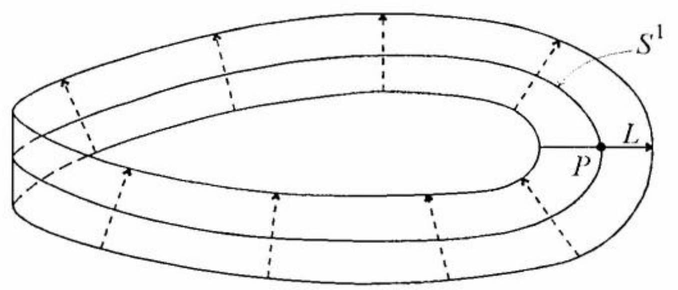
Esto puede visualizarse con la sucesión de pasos dibujados (los dos últimos pasos corresponden a la identificación en C).



Ejemplo 7.2.28 Cinta de Moebius. *La cinta de Moebius es el conjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por:*

$$M = \{((1-a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})\cos\theta, (1-a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})\operatorname{sen}\theta, a\cos\frac{\theta}{2}) : a \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \theta \in [-\pi,\pi]\}.$$

A M se la puede visualizar como la superficie descripta por un segmento L que se desplaza de modo tal que su punto medio P describe una circunferencia S^1 en el plano xy. Simultáneamente L rota con una velocidad de rotación igual a la mitad de la velocidad angular con que P recorre S^1. Así, cuando P completa una vuelta, el segmento gira π radianes.



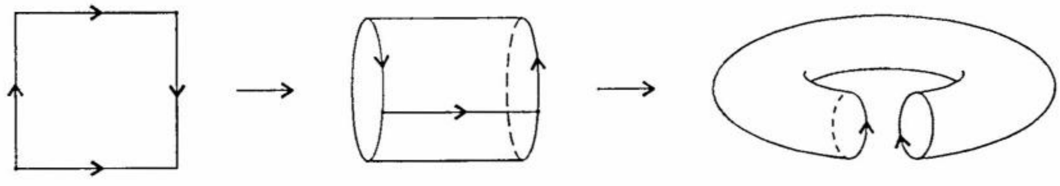
Se obtiene que

$$M \cong I^2/_\sim \quad \text{donde} \quad (-\frac{1}{2}, t) \sim (\frac{1}{2}, -t) \ \forall t \in I.$$

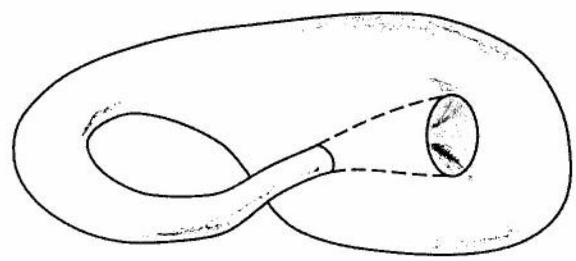
Ejemplo 7.2.29 Botella de Klein. *Otro ejemplo importante es la botella de Klein que la podemos definir por $I^2/_\sim$ donde*

$$(s, -\frac{1}{2}) \sim (s, \frac{1}{2}) \quad \forall s \in I, \ (-\frac{1}{2}, t) \sim (\frac{1}{2}, -t) \quad \forall t \in I.$$

Visualicemos esto realizando sucesivos pasos.



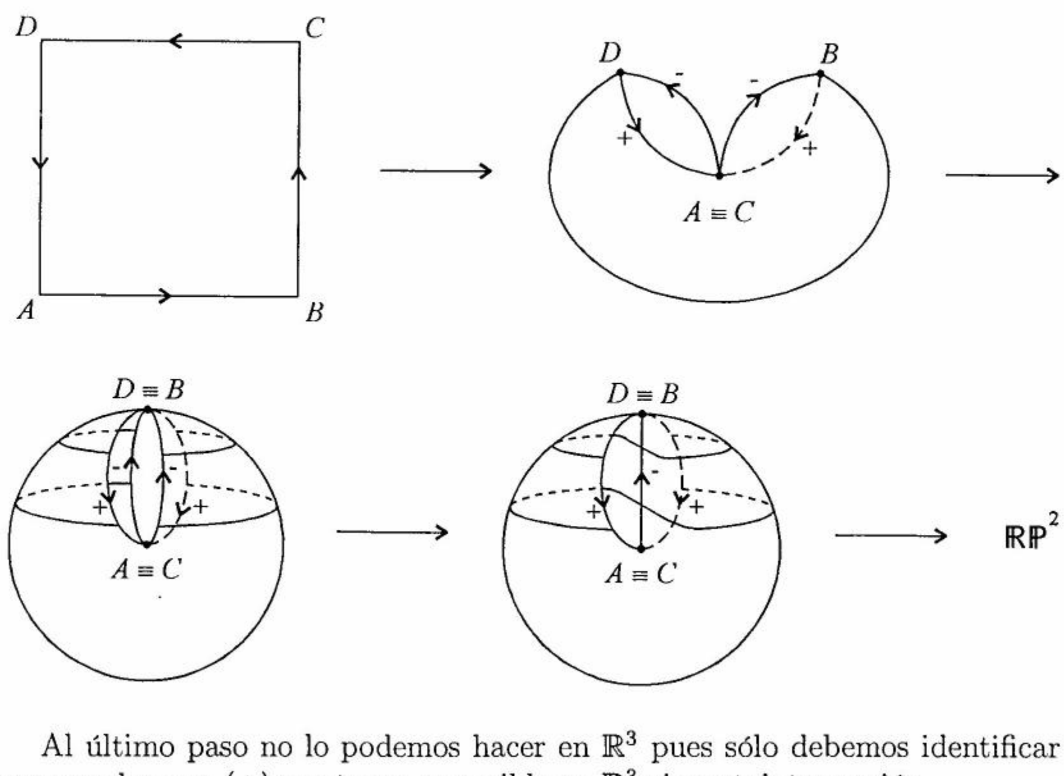
Ahora debemos sólo identificar los bordes marcados y de la forma en que indican las flechas. Claramente esto no se puede hacer en $\mathbb{R}^3$ puesto que no podemos hacer esta identificación sin una autointersección. De todos modos, es usual repesentar a la botella de Klein de la siguiente forma.



Ejemplo 7.2.30 Espacio proyectivo. *El espacio proyectivo real bidimensional* $\mathbb{RP}^2$ *se define por*

$$\mathbb{RP}^2 = I^2/_\sim \quad donde \quad (-\frac{1}{2}, t) \sim (\frac{1}{2}, -t) \ y \ (s, -\frac{1}{2}) \sim (-s, \frac{1}{2}) \quad \forall t, s \in I.$$

Realicemos las identificaciones en sucesivos pasos.



Al último paso no lo podemos hacer en $\mathbb{R}^3$ pues sólo debemos identificar los arcos marcados con (+) y esto no es posible en $\mathbb{R}^3$ sin autointersección.

7.3 Ejercicios

1. Probar la observación **7.1.3.**

2. Sean $X_1, ..., X_k$ espacios topológicos y $A_i \subseteq X_i$ $\forall i$. Probar que en el espacio producto $\prod_{i=1}^{k} X_i$ se cumplen:

a) $(\prod_{i=1}^{k} A_i)^\circ = \prod_{i=1}^{k} A_i^\circ$.

b) $(\prod_{i=1}^{k} A_i)^- = \prod_{i=1}^{k} A_i^-$.

3. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{D}$ las topologías en $\mathbb{R}$, usual y discreta respectivamente. Considerar en $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T} * \mathcal{D}$ y hallar A°, A^- y FrA para:

a) $A = [0,1] \times [0,1]$.

b) $A = (-1,1) \times \mathbb{Q}$.

4. Demostrar que si X es homeomorfo a $\widetilde{X}$ e Y es homeomorfo a $\widetilde{Y}$, entonces $X \times Y$ es homeomorfo a $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$.

5. Probar la observación **7.1.7**. Esto es, probar que las siguientes funciones son homeomorfismos.

a) $X \times Y \times Z \rightarrow (X \times Y) \times Z$

$(x, y, z) \rightarrow ((x, y), z)$.

b) $\mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$

$x \rightarrow (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$.

6. a) Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es continua e Y es T_2 entonces

$$Grf = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$.

b) Sea $\triangle = \{(x, x) : x \in X\}$.

Probar que X es T_2 si y sólo si $\triangle$ es cerrado en $X \times X$.

7. Completar las pruebas de **7.1.9 y 7.1.10**. Es decir, si $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ demostrar que:

a) X es $N_1 \Leftrightarrow X_i$ es N_1 $\forall i$.

b) X es separable $\Leftrightarrow X_i$ es separable $\forall_i$.

8. Sean $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{T}'$ las topologías en $\mathbb{R}$, usual, discreta y generada por los intervalos de la forma $[a, b)$, respectivamente.

Considerar en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathcal{T} * \mathcal{D}$ y $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$ y decidir si cada uno de los espacios topológicos que resultan es N_2, N_1, separable, T_2, conexo y compacto.

9. Verificar las observaciones **7.2.5** y **7.2.10**.

10. En $\mathbb{R}$, con la topología usual, considerar $\sim$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Q.$$

Probar que $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ no es cerrada y que la topología cociente en $\mathbb{R}/\sim$ es la indiscreta.

11. Probar que si $X/\sim$ es T_2 entonces la relación $\sim$ es un subconjunto cerrado en el espacio producto $X \times X$.

12. En $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definimos la relación de equivalencia $\sim$ por

$$x \sim y \Leftrightarrow \|x\| = \|y\|.$$

a) Probar que la proyección canónica $\pi : X \to X/\sim$ es abierta y cerrada.

b) Probar que $X/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+$.

13. Probar que son homeomorfismos las funciones $\bar{f}$ de los ejemplos **7.2.22** y **7.2.23**.

14. Sean

$$X = [-1, 1]\ , \quad Y = X/\sim_1 \quad \text{y} \quad Z = X/\sim_2$$

donde $\sim_1$ identifica $\frac{1}{2}$ con 1, mientras que $\sim_2$ identifica $-\frac{1}{2}$ con -1 y $\frac{1}{2}$ con 1.

Demostrar que X, Y y Z no son homeomorfos dos a dos.

CAPITULO 8

SUCESIONES

8.1 Principales resultados

La noción de sucesión en $\mathbb{R}^n$ ha sido el medio utilizado originariamente para estudiar funciones continuas entre espacios euclídeos y también caracterizar los subconjuntos compactos de estos espacios.

En el capítulo 2 hemos generalizado este concepto en espacios métricos y vimos en la proposición **2.1.22** que podemos caracterizar la continuidad de funciones entre espacios métricos a través del comportamiento de las sucesiones.

También podemos determinar la topología inducida por una métrica mediante las sucesiones, determinando los subconjuntos cerrados del espacio.

Proposición 8.1.1 *Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces A es cerrado si y sólo si toda sucesión en A que converge lo hace a un punto de A.*

Demostración Supongamos que A es cerrado y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A que converge a x_0. Entonces, $\forall V \in \mathcal{E}_{x_0}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $x_n \in V$ y por lo tanto $V \cap A \neq \emptyset$. Esto implica que $x_0 \in A^- = A$.

Recíprocamente, si $x \in A^-$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Es claro que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x (ver **2.1.20**), luego por hipótesis $x \in A$. Así $A = A^-$, es decir A es cerrado. ■

Es evidente que no hay impedimentos para definir los conceptos de sucesión y de convergencia en un espacio topológico. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en un espacio métrico, en general no es posible caracterizar la topología usando sucesiones salvo bajo ciertas condiciones que veremos más adelante.

La noción de red en un espacio topológico generaliza la de sucesión y permite determinar la topología del espacio. El lector interesado podrá hallar la definición de red y los principales resultados sobre el tema en cualquiera de los libros de la bibliografía.

Definición 8.1.2 *Una sucesión en un espacio topológico X es una función $S : \mathbb{N} \to X$. Como es habitual, denotaremos la sucesión por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = S(n)$.*

Definición 8.1.3 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio topológico* X *converge* $x_0 \in X$*, si* $\forall V \in \mathcal{E}_{x_0}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces* $x_n \in V$*. En este caso escribiremos* $x_n \to x_0$*.*

Es fácil ver que si en esta definición hacemos variar V en una base de entornos de x_0, obtenemos un enunciado equivalente de la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al punto x_0.

Además, como la convergencia de una sucesión depende de sus valores a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$, dos sucesiones que difieren en un número finito de elementos tienen el mismo comportamiento en lo que se refiere a convergencia.

Los ejemplos más simples de sucesiones son las sucesiones constantes, es decir de la forma $x_n = x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es claro que esta sucesión converge a x_0.

Una sucesión puede converger a más de un punto. Por ejemplo, una sucesión cualquiera en un espacio con la topología indiscreta converge a todo punto del espacio. Otros ejemplos de esta situación son los siguientes.

Ejemplo 8.1.4 *Sean* X *un conjunto,* $x_0 \in X$ *y* $\mathcal{T}_{x_0}$ *la topología definida en* ***3.1.5****. Entonces:*

a) La sucesión constante $x_n = x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, además de converger a* x_0*, converge a todo* $x \in X$ *puesto que cualquier entorno de* x *contiene a* x_0*.*

b) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* y_0 *si y sólo si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$*,* $x_n = x_0$ *o* $x_n = y_0$*.*

Ejemplo 8.1.5 *Sean* X *un conjunto,* $x_0 \in X$ *y* $\mathcal{T}^{x_0}$ *la topología definida en el ejercicio 2 del capítulo 3. Entonces:*

a) Toda sucesión converge a x_0 *pues el único entorno de* x_0 *es* X*.*

b) Sea $y_0 \neq x_0$*. Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* y_0 *si y sólo si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n = y_0$ $\forall n \geq n_0$*.*

Estos comportamientos poco apropiados de una sucesión desaparecen si el espacio es de Hausdorff.

Proposición 8.1.6 *Si* X *es un espacio topológico* T_2*, toda sucesión en* X *que converge lo hace a un único punto.*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x_0 y sea $y \neq x_0$.

Por ser X T_2, existen $U \in \mathcal{E}_y$ y $V \in \mathcal{E}_{x_0}$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Como $x_n \to x_0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in V$ y por lo tanto $x_n \notin U$. Luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y. ■

Los resultados contenidos en la siguiente proposición se demuestran en forma directa.

Proposición 8.1.7 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X que converge a x_0. Entonces:*

i) Si $A \subseteq X$ y $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x_0 \in A^-$.

ii) Si Y es un espacio topológico y $f : X \to Y$ es una función continua en x_0, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$.

Demostración i) Si $V \in \mathcal{E}_{x_0}$, por convergencia de la sucesión, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in V$. Luego $V \cap A \neq \emptyset$ y así $x_0 \in A^-$.

ii) Si $W \in \mathcal{E}_{f(x_0)}$, por ser f continua en x_0, existe $V \in \mathcal{E}_{x_0}$ tal que $f(V) \subseteq W$.

Como $x_n \to x_0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n \in V$. Esto implica que $f(x_n) \in W$ y por lo tanto $f(x_n) \to f(x_0)$. ■

Para espacios topológicos N_1, probaremos las recíprocas de las dos proposiciones anteriores y caracterizaremos la topología mediante sucesiones.

Antes observemos que si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de un punto x y definimos

$$V'_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

$\{V'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una base de entornos de x. Esta familia tiene la propiedad que

$$V'_{n+1} \subseteq V'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo que la llamaremos una *base de entornos encajados de x*.

Luego, en todo espacio N_1 existe para cada x una base de entornos encajados de x.

Observación 8.1.8 *Sea $\{V'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos encajados de x. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in V'_n$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

En efecto, si $V \in \mathcal{E}_x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V'_{n_0} \subseteq V$ y por lo tanto $\forall n \geq n_0$ $x_n \in V'_n \subseteq V'_{n_0} \subseteq V$.

Teorema 8.1.9 *Sea X un espacio topológico N_1. Se verifica que:*

i) Si toda sucesión en X que converge lo hace a un único punto, entonces X es un espacio de Hausdorff.

ii) Si $A \subseteq X$ y $x_0 \in A^-$ entonces existe una sucesión en A que converge a x_0.

iii) Sea Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función. Si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x_0, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$, entonces f es continua en x_0.

Demostración i) Supongamos que X no es T_2, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, tales que todo entorno de x_1 interseca a todo entorno de x_2.

Por ser X un espacio N_1 existen $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bases de entornos encajados de x_1 y x_2 respectivamente. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $V_n \cap W_n \neq \emptyset$, podemos tomar un punto y_n en dicha intersección. Por la observación anterior, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así definida converge a x_1 y a x_2, lo que contradice la hipótesis. Luego X es un espacio T_2.

ii) Sea $x_0 \in A^-$ y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos encajados de x_0. Entonces, como $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $V_n \cap A \neq \emptyset$, elegimos $x_n \in V_n \cap A$ y construimos así una sucesión en A que, por **8.1.8** converge a x_0.

iii) Supongamos que f no es continua en x_0, entonces $\exists W \in \mathcal{E}_{f(x_0)}$ tal que para cada $V \in \mathcal{E}_{x_0}$ tenemos que $f(V) \nsubseteq W$. En particular, si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos encajados de x_0, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V_n$ tal que $f(x_n) \notin W$.

Luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 pero $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x_0)$ en contradicción con la hipótesis. Así, f es continua en x_0. ■

El siguiente corolario, cuya demostración dejaremos al lector, nos muestra que en un espacio N_1 las sucesiones determinan los subconjuntos cerrados y por lo tanto caracterizan la topología del espacio.

Corolario 8.1.10 *Sea X un espacio topológico N_1. Entonces $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si toda sucesión en A que converge lo hace a un punto de A.* ■

Si elegimos elementos de una sucesión de manera que sus índices sean cada vez más grandes, obtenemos una nueva sucesión que llamamos subsucesión de la dada.

Definición 8.1.11 *Dadas una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio X y una función estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que lleva k en n_k, la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ se dice que es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Ejemplo 8.1.12 *Consideremos en $\mathbb{R}$ la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Las sucesiones constantes iguales a 1 y a -1 son subsucesiones de dicha sucesión.*

Definición 8.1.13 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X. Un punto $x_0 \in X$ es un punto de aglomeración de la sucesión si $\forall V \in \mathcal{E}_{x_0}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \geq n$ tal que $x_m \in V$.*

Es claro que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, x_0 es un punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Los puntos 1 y -1 son puntos de aglomeración de la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este es un ejemplo de la situación general dada en la siguiente proposición, cuya demostración dejamos al lector.

Proposición 8.1.14 *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio topológico y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de ésta que converge a x_0, entonces x_0 es un punto de aglomeración de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* ■

Probaremos la recíproca de esta proposición cuando el espacio es N_1.

Proposición 8.1.15 *Si X es un espacio topológico N_1 y $x_0 \in X$ es un punto de aglomeración de una sucesión en X, entonces existe una subsucesión de ésta que converge a x_0.*

Demostración Sea x_0 un punto de aglomeración de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos encajados de x_0.

Inductivamente podemos elegir para cada $k \in \mathbb{N}$, n_k tal que

$$x_{n_k} \in V_k \quad \text{y} \quad n_k > n_{k-1}.$$

Luego $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x_0, por **8.1.8.** ■

A continuación veremos dos resultados que relacionan el comportamiento de las sucesiones con la compacidad del espacio.

Proposición 8.1.16 *Sea X un espacio topológico N_1. Si X es compacto entonces toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Demostración Sea $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Por la proposición anterior es suficiente probar que S tiene un punto de aglomeración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$S_n = \{x_m : m \geq n\}.$$

Veremos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n^- \neq \emptyset$. Supongamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n^- = \emptyset$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n^{-c} = X$ y por lo tanto $\{S_n^{-c}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existen $n_1, ..., n_k$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_{n_i}^{-c} = X.$$

Luego $\bigcap_{i=1}^{k} S_{n_i}^- = \emptyset$ lo que es absurdo pues $\bigcap_{i=1}^{k} S_{n_i}^- = S_{n_j}^-$ donde $n_j = \max\{n_i : 1 \leq i \leq k\}$.

Sea entonces $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n^-$. Si $V \in \mathcal{E}_{x_0}$ y $n \in \mathbb{N}$, como $x_0 \in S_n^-$ se tiene que $V \cap S_n \neq \emptyset$ y por lo tanto existe $m \geq n$ tal que $x_m \in V$. Luego hemos probado que x_0 es un punto de aglomeración de S. ■

La recíproca de la proposición anterior es verdadera si pedimos que el espacio sea N_2. Para probar este hecho necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 8.1.17 *Si X es un espacio N_2, todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento numerable.*

Demostración Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in M}$ una base numerable de la topología de X y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Tomemos

$$M_0 = \{n \in M : B_n \subseteq U_i \text{ para algún } i \in I\}$$

y elijamos para cada $m \in M_0$, $i(m) \in I$ tal que $B_m \subseteq U_{i(m)}$.

La familia $\{U_{i(m)}\}_{m\in M_0}$ es un cubrimiento de X. En efecto, si $x \in X$ $\exists i \in I$ tal que $x \in U_i$ y como $\mathcal{B}$ es base de la topología, existe $m \in M$ tal que

$$x \in B_m \subseteq U_i$$

y por lo tanto $x \in U_{i(m)}$. Luego $\{U_{i(m)}\}_{m\in M_0}$ es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$. ■

Proposición 8.1.18 *Sea X un espacio topológico N_2. Si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente, entonces X es compacto.*

Demostración Supongamos que exista $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X sin subcubrimiento finito.

Por la proposición anterior podemos suponer que $\mathcal{U}$ es una familia numerable, por ejemplo $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

A los fines de obtener una contradicción, construiremos una sucesión que no tiene puntos de aglomeración.

Como $\mathcal{U}$ no tiene subcubrimientos finitos, $U_1 \neq X$ y por lo tanto existen $x_1 \notin U_1$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $x_1 \in U_{n_1}$. Luego $x_1 \in V_1 = \bigcup_{j=1}^{n_1} U_j$.

Ahora como también $V_1 \neq X$, existen $x_2 \notin V_1$ y $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x_2 \in U_{n_2}$. Así resulta que $n_2 > n_1$ y $x_2 \in V_2 = \bigcup_{j=1}^{n_2} U_j$.

De esta manera construimos inductivamente una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisface

$$x_k \in V_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} U_j\ , \quad n_k > n_{k-1} \quad \text{y} \quad x_k \notin V_{k-1}.$$

Esta sucesión no tiene puntos de aglomeración pues si $x \in X$, $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_j$ y éste es un entorno de x para el que no se verifica la condición dada en la definición **8.1.13**. Para ver esto, elegimos k tal que $n_{k-1} > j$. Como $U_j \subseteq V_{k-1}$ y $x_m \notin V_{k-1}$ $\forall m \geq k$ resulta que $x_m \notin U_j$, $\forall m \geq k$.

Luego, por **8.1.14**, esta sucesión no tiene subsucesión convergente, en contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto X es compacto. ■

Un resultado que relaciona el comportamiento de sucesiones con la propiedad topológica N_2 y cuya prueba no incluiremos en estas notas, es el siguiente.

Proposición 8.1.19 *Si X es un espacio métrico y toda sucesión tiene una subsucesión convergente, entonces X es N_2.* ■

Como todo espacio métrico es N_1, combinando **8.1.16**, **8.1.18** y **8.1.19** obtenemos el siguiente resultado que caracteriza compacidad en términos de sucesiones.

Proposición 8.1.20 *Sea X un espacio métrico. Entonces toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente si y sólo si X es compacto.* ■

La convergencia de una sucesión en un espacio producto depende del comportamiento de las sucesiones que se obtienen proyectando aquella sobre cada eje coordenado.

Proposición 8.1.21 *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos y $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge a x_0 si y sólo si $\forall j = 1, ..., n$, $\{p_j(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $p_j(x_0)$.*

Demostración Si $x_n \to x_0$, como las proyecciones p_j son continuas, $p_j(x_n) \to p_j(x_0)$ por ii) de la proposición **8.1.7**.

Recíprocamente, supongamos que para cada $j = 1, ..., n$, $p_j(x_n) \to p_j(x_0)$ y sea $U = U_1 \times ... \times U_n$ un abierto de la base canónica de X que es entorno de x_0.

Entonces para cada j, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_j$, $p_j(x_n) \in U_j$. Luego si $n_0 = \max\{n_j : 1 \leq j \leq n\}$ y $n \geq n_0$, $x_n \in U$ y por lo tanto $x_n \to x_0$. ■

8.2 Sucesiones de Cauchy

Finalizaremos este capítulo con las nociones de sucesión de Cauchy y de espacio métrico completo.

Definición 8.2.1 *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico X es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

En la siguiente proposición resumimos varios resultados básicos acerca de sucesiones de Cauchy.

Proposición 8.2.2 *En un espacio métrico se verifica que:*

i) Toda sucesión convergente es de Cauchy.

ii) Toda sucesión de Cauchy es acotada.

iii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión que converge a x_0, entonces $x_n \to x_0$.

Demostración i) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon$$

y así la sucesión es de Cauchy.

ii) Sea$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Luego para $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < 1$. En particular $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ $\forall n \geq n_0$.

Sea $r = \max(\{d(x_i, x_{n_0}) : i < n_0\} \cup \{1\})$. Es claro ahora que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_{n_0}, r)$$

y por lo tanto la sucesión es acotada.

iii) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión que converge a x_0.

Luego, dado $\varepsilon > 0$ $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_1$ y $m \geq m_1$ $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m_2$, $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $n_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Si $n \geq n_0$ y $n_k \geq n_0$, se tiene que

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

lo que implica que $x_n \to x_0$. ■

Definición 8.2.3 *Un espacio métrico tal que toda sucesión de Cauchy converge se dice completo.*

La siguiente proposición nos muestra que los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^m$ son espacios métricos completos.

Proposición 8.2.4 *Si X es un espacio métrico compacto entonces es completo.*

Demostración Como todo espacio métrico es N_1, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión de Cauchy en X, por la proposición **8.1.16**, tiene una subsucesión convergente. Luego por iii) de la proposición anterior $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

La recíproca de la proposición anterior es falsa. El teorema siguiente nos da una familia importante de ejemplos de espacios métricos completos que no son compactos.

Teorema 8.2.5 *Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^m$ es un espacio métrico completo.*

Demostración Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$, por ii) de la proposición **8.2.2**, es acotada. Luego $\exists y_0 \in \mathbb{R}^m$ y $r > 0$ tal que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bar{B}\ (y_0, r).$$

Como las bolas cerradas son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$, por la proposición anterior $\bar{B}\ (y_0, r)$ es un espacio completo y por lo tanto $\exists x_0 \in \bar{B}\ (y_0, r)$ tal que $x_n \to x_0$. Luego $\mathbb{R}^m$ es completo. ■

8.3 Ejercicios

1. Determinar todas las sucesiones convergentes en un espacio topológico discreto.

2. Sea X con la topoplogía de los complementos finitos y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inyectiva, es decir, si $n \neq m$ entonces $x_n \neq x_m$. Probar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a todo punto $x \in X$.

3. Considerar en $\mathbb{N}$ la topología definida en el ejemplo **3.1.6**. Dado $k \in \mathbb{N}$, determinar todas las sucesiones que convergen a k.

4. Probar el corolario **8.1.10**.

5. Sean X un espacio topológico N_1 y A un subconjunto de X. Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión en $A - \{x\}$ que converge a x.

6. Demostrar que toda subsucesión de una sucesión dada converge al mismo punto.

7. Demostrar la proposición **8.1.14**.

8. Sea X un espacio T_2 y N_1 tal que toda sucesión tiene un subsucesión convergente. Probar que si $f : X \to X$ es una función continua, entonces f es cerrada.

9. Sean X e Y espacios topológicos compactos y N_2. Probar que $X \times Y$ es compacto usando sucesiones.

10. Demostrar que si X es un espacio métrico discreto entonces es completo.

CAPITULO 9
APLICACIONES

En este capítulo resolvemos los cuatro primeros problemas planteados en el capítulo 1 y que han sido presentados como motivación para el desarrollo de los contenidos de estas notas.

En la resolución de estos problemas juegan un rol importante:

i) El teorema de Bolzano y la caracterización de los conexos en $\mathbb{R}$.

ii) El teorema de Heine-Borel-Lebesgue de caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

iii) Propiedades de funciones continuas cuyo dominio es compacto.

9.1 Un problema de existencia

¿Cuándo una ecuación de la forma $f(x) = y$ puede ser resuelta en x en términos de y?. O bien, ¿para qué y existe x tal que $f(x) = y$?.

A continuación resolvemos este problema, que es el de encontrar la imagen de f, en tres situaciones distintas.

9.1.1 Sea X un espacio topológico conexo y compacto, por ejemplo un intervalo $[a, b]$, una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ o una esfera en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua y definimos

$$a = \inf\{f(x) : x \in X\}, \quad b = \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

Por el teorema de Bolzano **5.1.7**, $f(X)$ es conexo en $\mathbb{R}$. Luego por **5.1.12**, $f(X)$ es un intervalo pero como también es compacto, por **7.1.14** es un intervalo cerrado y acotado. En consecuencia, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f(X) = [a, b]$.

Por lo tanto, en este caso podemos responder al problema planteado de la siguiente forma:

$$y \in [a, b] \Leftrightarrow \exists\ x \in X \text{ tal que } f(x) = y.$$

9.1.2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Definimos a y b como en **9.1.1** aunque en este caso puede ser $a = -\infty$ o $b = +\infty$. Por el teorema de Bolzano podemos asegurar:

$$\text{si } y \in (a, b) \Rightarrow \exists\ x \in X \text{ tal que } f(x) = y.$$

Notemos que por ser el dominio de f no compacto, la imagen $f(\mathbb{R})$ no es necesariamente un conjunto cerrado ni acotado. Por esto, la condición que obtenemos en este caso es más débil que la de **9.1.1**.

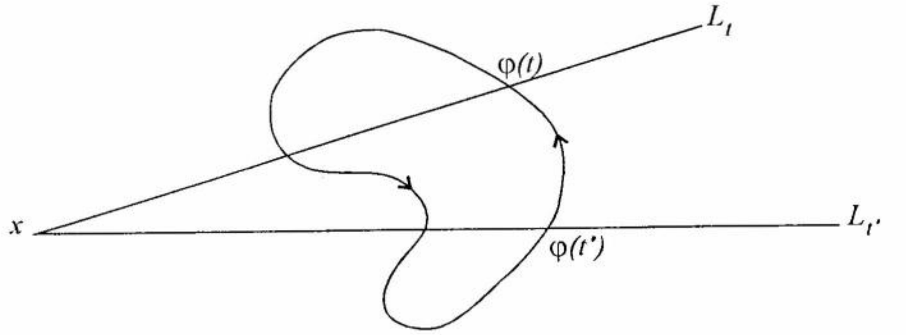
9.1.3 Para simplificar la notación, designamos por D a una bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ y por C a su frontera. Esto es,

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_0) \leq r\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_0) = r\} \end{aligned}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ y d es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$.

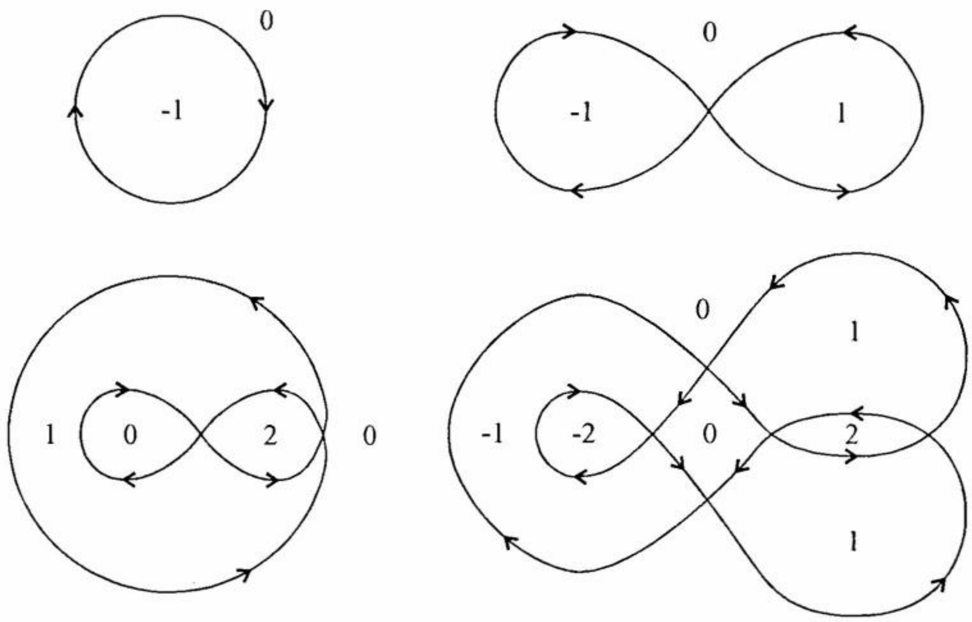
Nuestro próximo objetivo es encontrar condiciones para resolver el problema de existencia planteado, cuando $f : D \to \mathbb{R}^2$ es continua. Para esto necesitamos definir el número de vueltas de una curva alrededor de un punto y a los fines de llegar a ella de una forma simple daremos sólo una definición intuitiva.

Sea $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, esto es, φ es continua y $\varphi(0) = \varphi(1)$. Sea $x \in \mathbb{R}^2 - \varphi([0, 1])$ y para cada $t \in [0, 1]$ sea L_t la semirecta con origen x y que pasa por $\varphi(t)$. Cuando t va de 0 a 1 L_t rota alrededor del punto x y como la curva es cerrada $L_0 = L_1$.



Así, durante este movimiento correspondiente a t de 0 a 1, la semirecta L_t realiza un número entero de vueltas alrededor del punto x que le asignamos signo $+$ si el giro es contrario al de las agujas de un reloj, y signo $-$ si el giro es en el sentido de las mismas. Este número es llamado *el número de vueltas de la curva φ alrededor de x y denotado por $W(\varphi, x)$*.

En los dibujos siguientes damos ejemplos de curvas cerradas y explicitamos el número de vueltas para los puntos de cada una de las regiones del complemento de la imagen de la curva. Así, en el primer dibujo la curva es una circunferencia recorrida en el mismo sentido al de las agujas de un reloj y por lo tanto, para cualquier punto de la región interior el número de vueltas es -1. En cambio, para cualquier punto de la región exterior, es 0. En el segundo dibujo la curva tiene la figura de un 8 y en el tercero la curva es similar a un 8 seguido de una circunferencia.



Recordemos que C es la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ de centro x_0 y radio r.

Sean $f_1 : C \to \mathbb{R}^2$ continua y $\varphi : [0,1] \to C$ definida por $\varphi(t) = x_0 + re^{2\pi i t}$. Para $y \notin f_1(C)$, se llama *número de vueltas de f_1 alrededor de y, y se denota por $W(f_1, y)$, a $W(f_1 \circ \varphi, y)$.*

El siguiente teorema da una condición suficiente para encontrar solución al problema de existencia planteado en **9.1**, para $f : D \to \mathbb{R}^2$ continua.

Teorema 9.1.4 *Sean D y C como en **9.1.3** y $f : D \to \mathbb{R}^2$ continua. Si $y \in \mathbb{R}^2 - f(C)$ y además $W(f_{|C}, y) \neq 0$ entonces existe $x \in D$ tal que $f(x) = y$.*

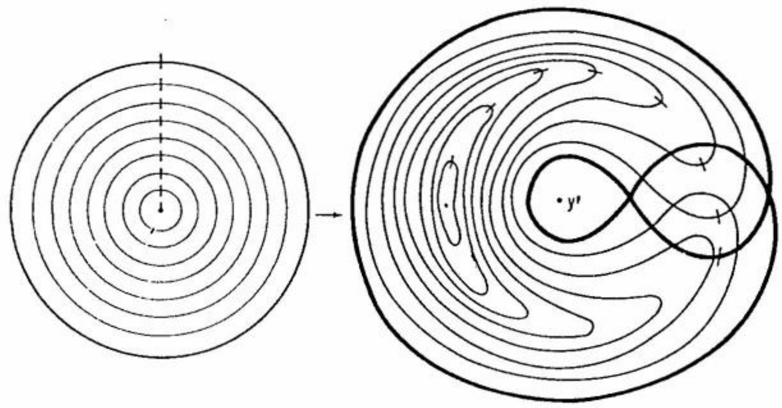
Demostración Daremos una prueba intuitiva y será por el absurdo, es decir veremos que si $y' \notin f(D)$ entonces $W(f_{|C}, y') = 0$.

Sea $s \in [0, r]$ donde r es el radio de la circunferencia C y denotemos por C_s la circunferencia de centro x_0 y radio s. Luego $C_0 = \{x_0\}$ y $C_r = C$.

Sea $y' \notin f(D)$. Entonces $y' \notin f(C_s)$ $\forall s \in [0, r]$ y por lo tanto está definido $W(f_{|C_s}, y')$ $\forall s \in [0, r]$. Para simplificar escribimos

$$W(s) = W(f_{|C_s}, y').$$

Consideremos ahora la familia de curvas $f_{|C_s}$ para s decreciendo de r a 0, que comienza en $f_{|C}$ y termina en $f(x_0) \equiv f_{|C_0}$.



Como f es continua, $f_{|C_s}$ varía paulatinamente cuando s decrece suavemente (ver dibujo anterior). Esto dice que $W(s)$ es una función continua de s, para $s \in [0, r]$. Esto es, $W : [0, r] \to \mathbb{R}$ es continua.

Por el teorema de Bolzano, $W([0, r])$ es conexo en $\mathbb{R}$ y como $W(s) \in \mathbb{Z}$ $\forall s$, resulta $W([0, r])$ un punto, o sea W es una función constante. En consecuencia

$$W(r) = W(0) = 0$$

(la última igualdad resulta del hecho que $f_{|C_0}$ es la curva constante $f(x_0)$).

Luego, hemos probado:

$$y' \notin f(D) \Rightarrow W(r) = W(f_{|C}, y') = 0$$

con lo cual queda demostrado el teorema. ■

El teorema **9.1.4** tiene la siguiente importante aplicación.

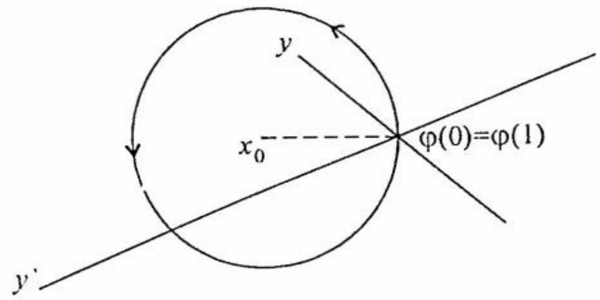
Teorema 9.1.5 *Sean D y C como en* ***9.1.3****. Si $f : D \to \mathbb{R}^2$ es continua y $f(x) = x$ $\forall x \in C$ entonces $D \subseteq f(D)$.*

Demostración Si $\varphi : [0, 1] \to C$ es la función definida por $\varphi(t) = x_0 + r\ e^{2\pi i t}$, $f \circ \varphi = \varphi$ y por lo tanto

$$W(f_{|C}, y) = W(\varphi, y).$$

Como

$$W(\varphi, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in D^c \\ 1 & \text{si } y \in D^\circ \end{cases}$$



resulta $W(f_{|C}, y) = 1$ si $y \in D^\circ$ y en consecuencia, por **9.1.4,** $D^\circ \subseteq f(D)$. Como por hipótesis $C \subseteq f(D)$ se concluye que $D \subseteq f(D)$. ■

Corolario 9.1.6 *No existe función continua de la bola cerrada D en su borde C tal que deje fijo a cada punto de C.*

Demostración Si $f : D \to \mathbb{R}^2$ es continua y $f_{|C}$ =id entonces, por **9.1.5**, $D \subseteq f(D)$ y por lo tanto $f(D) \neq C$. ■

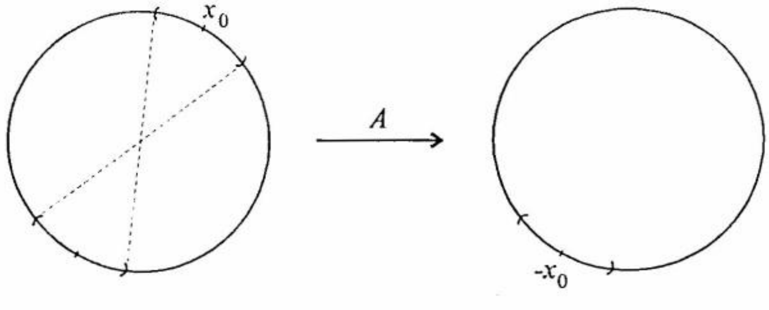
9.2 Un problema de coincidencia

Veremos un resultado que dice que hay un par de puntos antipodales en la circunferencia S^1 para los cuales coinciden las imágenes por una función continua.

Recordemos que, para $n \geq 1$, $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i{}^2 = 1\}$.

Teorema 9.2.1 *Si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración Sea $A : S^1 \to S^1$ definida por $A(x) = -x$ (función antipodal).



Como A es continua, $g : S^1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - f \circ A(x) = f(x) - f(-x)$$

es continua. Además, como S^1 es conexo, por el teorema de Bolzano resulta $g(S^1)$ conexo.

Si existe $x_0 \in S^1$ tal que $g(x_0) = 0$ entonces $f(x_0) = f(-x_0)$.

Si $x_0 \in S^1$ es tal que $g(x_0) = a \neq 0$, tenemos que $g(-x_0) = -g(x_0) = -a$ y por lo tanto $a, -a \in g(S^1)$ que es un intervalo, por ser un conexo de $\mathbb{R}$. Luego

$$0 \in [-|a|, |a|] \subseteq g(S^1)$$

y en consecuencia existe $x_1 \in S^1$ tal que $g(x_1) = 0$, o sea $f(x_1) = f(-x_1)$. ■

El teorema anterior tiene la siguiente generalización, conocida como *Teorema de Borsuk-Ulam*, cuya prueba no incluiremos en estas notas.

Teorema 9.2.2 *Si $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función continua entonces existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Este resultado dice en particular que en cada instante hay un par de puntos antipodales en la tierra que tienen la misma temperatura y presión. ■

9.3 Un problema de puntos fijos

Nos interesa ahora encontrar condiciones para que una función $f : X \to X$ tenga un punto fijo, o sea, para que exista $x \in X$ tal que $f(x) = x$. A continuación resolvemos este problema cuando X es un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ o X es una bola cerrada en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 9.3.1 *Si $f : [a, b] \to [a, b]$ es una función continua entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - x.$$

Luego g es continua. Buscamos $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$.

Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$ no hay nada que probar.

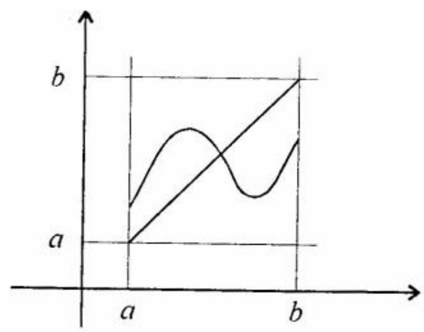
Supongamos ahora que $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$, por lo tanto

$$f(a) > a \quad \text{y} \quad f(b) < b.$$

En consecuencia $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$ y como $g([a, b])$ es un intervalo, pues por el teorema de Bolzano es conexo en $\mathbb{R}$, resulta

$$0 \in [g(b), g(a)] \subseteq g([a, b]).$$

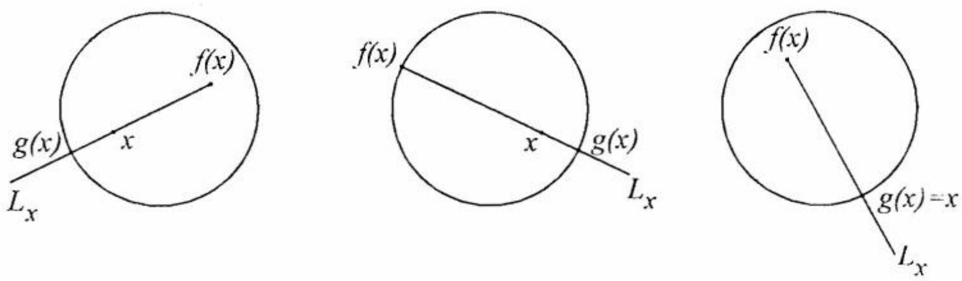
Luego, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$, o sea $f(x_0) = x_0$.



Teorema 9.3.2 (Brouwer) *Sean D y C como en **9.1.3**. Si $f : D \to D$ es una función continua entonces existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración Supongamos $f(x) \neq x$, $\forall x \in D$.

Podemos construir, para cada $x \in D$, la semirecta L_x con origen $f(x)$ y que pasa por x. Sea $g(x)$ el punto de C obtenido por intersección de C con $L_x - \{f(x)\}$.



Tenemos entonces la función $g : D \to C$, tal que $g_{|C}$ =id pues $g(x) = x$, $\forall x \in C$ y además g es continua (esto se puede ver en [2, pág.109]). La existencia de esta función g contradice el corolario **9.1.6**.

Luego, existe $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) = x_0$. ■

9.4 Otro problema de existencia

El siguiente resultado prueba que el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ se escribe como producto de una constante y factores lineales.

Teorema 9.4.1 (Teorema fundamental del álgebra) *Todo polinomio de grado mayor o igual que 1, con coeficientes en los números complejos $\mathbb{C}$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración Bastará probar este resultado para polinomios mónicos.

Sean $n \geq 1$ y

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i.$$

Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = x + iy$ es biyectiva, por **3.2.11** podemos dar a $\mathbb{C}$ la única topología que hace de f un homeomorfismo (los abiertos en $\mathbb{C}$ son las imágenes por f de los abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}^2$). Así podemos identificar $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ vía f y considerar al polinomio como la función

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & z & \to & p(z) \end{array}$$

Escribimos

$$p(z) = z^n(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}).$$

Como $1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}$ tiende a 1 cuando $|z| \to \infty$ resulta

$$\left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right| > \frac{1}{2}, \quad \text{si } |z| > r_1$$

y por lo tanto si $k > 0$

$$|p(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right| > \frac{|z|^n}{2} > k \ , \quad \text{si } |z| > (2k)^{\frac{1}{n}} \text{ y } |z| > r_1.$$

Luego, dado $k > 0$

$$|p(z)| > k, \quad \text{si } |z| > r = \max\{r_1, (2k)^{\frac{1}{n}}\}. \tag{9.1}$$

Tomemos $k = |p(0)| = |a_0|$, por (9.1) tenemos que

$$\exists r > 0 \text{ tal que } |p(z)| > k, \quad \text{si } |z| > r. \tag{9.2}$$

Sean $D = \bar{B}\ (0,r)$ y $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(z) = |p(z)|$. Como D es compacto y f es continua, f alcanza su valor mínimo. Sea $z_0 \in D$ tal que

$$|p(z)| \geq |p(z_0)|, \quad \forall z \in D. \tag{9.3a}$$

En particular

$$k = |p(0)| \geq |p(z_0)|. \tag{9.4}$$

De (9.2), (9.3a) y (9.4) resulta

$$|p(z)| \geq |p(z_0)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{9.5}$$

Veremos ahora que $p(z_0) = 0$ y es claro que con esto se concluye la prueba.

Supongamos que $p(z_0) = c \neq 0$ con $c \in \mathbb{C}$. Sea

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z + z_0) = (z + z_0)^n + a_{n-1}(z + z_0)^{n-1} + ... + a_0 = \\ &= z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c = z^i(c_i + h(z)) + c \end{aligned}$$

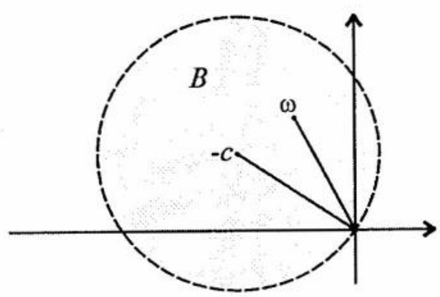
donde $c_i \neq 0$ y $h(0) = 0$ (tomar $c_n = 1$ e $i = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \{j : c_j \neq 0\}$). Luego

$$q(z) = z^i(c_i + h(z)) + c \quad \text{y} \quad q(0) = c.$$

Encontraremos $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|q(z_1)| < |c|$ y esto es una contradicción puesto que por (9.5) tenemos que

$$|q(z)| = |p(z + z_0)| \geq |p(z_0)| = |c|, \quad \forall z \in C.$$

Sea $B = B(-c, |c|)$ la bola abierta de centro $-c$ y radio $|c|$.



$$\text{Si } w \in B \quad \text{y} \quad t \in (0,1) \text{ entonces } tw \in B. \tag{9.6}$$

Para esto, notar que B^- es convexo y $0 \in B^-$. Como $0, w \in B^-$, el segmento que los une $\{tw : t \in [0,1]\}$ está contenido en B^- y 0 es el único punto de este segmento que no está en B.

Sea w_0 tal que $c_i w_0^i = -c$ (esto es, w_0 es una raíz i-ésima de $-\frac{c}{c_i}$). Por lo tanto, $c_i w_0^i \in B$ que es un abierto. Usando que la función

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad u \to u w_0^i$$

es continua, podemos asegurar que existe una bola abierta V de centro c_i tal que

$$u w_0^i \in B \quad \forall u \in V. \tag{9.7}$$

Como la función $z \longrightarrow c_i + h(z)$ es continua y $h(0) = 0$ tenemos que $c_i + h(z) \longrightarrow c_i$ cuando $z \longrightarrow 0$ y por lo tanto

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que si } |z| < \varepsilon \text{ entonces } c_i + h(z) \in V.$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Ayala R., Domínguez E., Quintero A., *Elementos de la Topología General,* Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
2. Chinn W., Steenrod N., *First concepts of topology,* The Mathematical Association of America, 1966.
3. Dixmier J., *General Topology,* Springer-Verlag, 1984.
4. Dotti I., Druetta M., *Topología,* Serie C, Trabajos de Matemática N°2/1992.
5. Joshi K., *Introduction to general topology,* John Wiley & Sons, 1983.
6. Lages Lima E., *Espacios métricos,* Projeto Euclides, Editora Edgar Blucher, Ltda. Sao Pablo, Brasil, 1977