UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "C"

TRABAJOS DE MATAMATICA

Nº 18/96

Distintas Presentaciones de la Geometría

Jorge Vargas

Editores: Isabel Dotti – Jorge Vargas

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

FACULTAD DE MATEMATICA ASTRONOMIA Y FISICA

SERIE "C"

TRABAJOS DE MATEMATICA

DISTINTAS PRESENTACIONES PARA LA GEOMETRIA

CIUDAD UNIVERSITARIA - 5000 CORDOBA
REPUBLICA ARGENTINA

EDITORES: Fernando Levstein
Carlos Olmos

DISTINTAS
PRESENTACIONES PARA LA GEOMETRIA

Estas notas consisten de la redacción, por parte de Hilda González, de un curso dictado por J. Vargas en la Universidad de San Luis, complementado por monografías redactadas por Patricia Galdeano, María Miní, Olga Vannucci; Perla Cali; Iris Auriol, Rosa Berraondo, Norma Cerizola.

AXIOMATICA DE LA GEOMETRIA

Notas del curso, dictado por el Dr. Jorge VARGAS, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de San Luis.

SAN LUIS, Noviembre de 1994.-

INDICE DE LAS NOTAS DEL CURSO

Orden - Paralelismo.

- Axiomas que complementan nuestro estudio:
  - AXIOMA DE ESTRUCTURA AFIN DE LA RECTA.
  - AXIOMA DE PERPENDICULARIDAD.
  - AXIOMA DE SIMETRIA.
- Comentarios de la Geometría no Euclidiana - Areas.

INTRODUCCION

Jorge VARGAS - Hilda O. GONZALEZ

En el año 1994 se llevó a cabo un Seminario sobre fundamentos de la geometría en el Departamento de Matemática de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS, como resultado de dicho trabajo se han elaborado materiales sobre el tema mencionado. Esta nota constituye una introducción a ellos y refleja parte de lo expresado en el curso.-

Por último, solicitamos a los lectores enviarnos las correcciones que se consideren necesarias para incluirlas en futuras ediciones.

Los egipcios o los babilonios, transmitieron los conocimientos en forma desordenada y justificaban los resultados con la experiencia física, más que con razonamientos. A medida de que la forma de elaborar conocimientos progresó, esto es, los razonamientos se fueron haciendo cada vez más rigurosos, surgió la necesidad de indicar cuales son las gallinas y cuales son los huevos de la geometría. Es decir, indicar cuales son los puntos de partida de la geometría y como se deducen sus consecuencias. EUCLIDES, comenzó esta tarea, la que fue finalmente completada por DAVID HILBERT, ¡aproximadamente 2000 años después!.

. El matemático griego EUCLIDES, del cual se tienen pocos datos sobre su vida, entre los siglos IV - III antes de Cristo, posiblemente años 323-285/283 a. de C., fundó en Alejandría su célebre escuela. LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES ["The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vol. (1908; 2° ed. rev. 1926), es una traducción inglesa, con comentarios de T. L. Heath] constituyen el tratado de geometría por antonomasia y conservan, después de más de dos milenios, todo su valor .

La obra es un modelo de tratamiento deductivo de la geometría y solo en los últimos cien años, con el establecimiento de las geometrías no euclidianas y la crítica de los Elementos por Hilbert (1899) se hicieron obras de tan elevado valor lógico.

. El matemático alemán DAVID HILBERT (1862-1943) considerado una de las primeras figuras científicas del Siglo XX, fue el iniciador y principal impulsor del movimiento de axiomatización que ha impreso sus rasgos característicos a la matemática moderna y que ha conducido a imponer definitivamente en esta ciencia el llamado método de formalización.

La obra que marca una época en este sentido es: "LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA" ["Grundlagen der Geometrie" (1899) o su posterior traducción inglesa: "The Foundations of Geometry" (1902)]; en la cual Hilbert lleva a la luz y corrige una gran cantidad de lagunas dejadas por Euclides en la construcción axiomática de la geometría clásica.

. El uso frecuente que hace el gran matemático griego de las figuras y de los llamados a la intuición, ocultaba el hecho de que, a menudo, se introducían en las demostraciones suposiciones que no estaban validadas por axiomas o por teoremas anteriores. Esto significaba introducir axiomas implícitos en las demostraciones y debilitaba la estructuración lógica del sistema.

En particular los axiomas de orden y de continuidad faltaban casi todos del esquema euclidiano. Euclides redactó los axiomas de incidencia, la infinitud de las rectas y el postulado de paralelismo; a partir de ellos dedujo lo conocido de la geometría hasta entonces. Hilbert, en su "Grundlagen", introduce 21 axiomas agrupados en los 5 grupos siguientes: Incidencia - Orden - Paralelismo - Congruencia - Continuidad o Axioma de Arquímedes.

. Una verdad basada en nuestra percepción es: Si elegimos un segmento como unidad de medida de longitud, entonces yuxtaponiendo dicho segmento tantas veces como sea necesario alcanzamos cualquier punto de la recta que lo contiene. El jesuita italiano GEROLANO SACCHERI (1667-1733), asume este hecho como verdad absoluta para deducir que si ignoramos el postulado de las paralelas entonces la suma de los ángulos interiores de un triángulo es a lo sumo dos rectos. Puesto que demuestra que: "Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos rectos" se contradice la verdad absoluta mencionada. Casi con seguridad podemos afirmar que esto llevó a Hilbert a introducir el Axioma de Arquímedes.

El intento más elaborado para demostrar el postulado V de EUCLIDES y el que ha tenido mayor alcance en sus consecuencias fue hecho por el Sacerdote Saccheri, profesor de matemáticas de la Universidad de Pavía.

Su gran obra "EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATVS: SIVE CONATUS GEOMETRICUS QUO STABILIUNTUR PRIMA IPSA GEOMETRIAE PRINCIPIA", fue publicada en 1773 en Milán.

No parece que llamara mucho la atención de sus contemporáneos, ya que fue olvidada pronto y no hay indicios de que ni GAUSS, ni LOBACHEWSKY, ni BOLYAI -los fundadores de la geometría no euclidiana- tuvieran noticia del libro o de su autor, sin embargo, su trabajo coloca a Saccheri entre los grandes matemáticos que han contribuído al desarrollo de la nueva geometría.

Tal y como se indica en el título, el propósito de Saccheri al escribir su libro fue el de liberar a Euclides de toda sospecha de error (en particular, y cosa de la mayor importancia, del error de haber hecho la hipótesis contenida en el postulado V). Su procedimiento para lograr esto introdujo en la geometría una figura de gran importancia: EL CUADRILATERO DE SACCHERI ("Geometría Axiomática", L.M. BLUMENTHAL (Ed. Aguilar 1965) su edición original: "A Modern View of Geometry" (1961)).

. Los trabajos de: FRANCISCO VIETA (o VIÈTE) (1540-1603), matemático francés, considerado el inventor del álgebra moderna; y de RENÉ (o RENATO) DESCARTES (1596-1650) (RENATUS CARTESIUS en su forma latinizada) también hombre de ciencia francés; permitieron describir los elementos de la geometría euclidiana en coordenadas.

Las contribuciones de Descartes a la geometría y al álgebra se encuentran en su "GEOMETRIA" (1637), obra de poca extensión, de poco más de 100 páginas.
[DESCARTES; "LA GEOMETRIA", traducida por Pedro Rossell Soler, Espasa-Calpe Argentina, S.A. (1947)].

Su aporte capital es la creación de la geometría analítica, síntesis de la geometría común y del álgebra; su fundamento es la correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta. La introducción de las coordenadas rectangulares (conocidas como cartesianas) y, merced a estas, la representación gráfica de las funciones (o sea, establece una correspondencia entre el ente analítico $y = f(x)$, y los puntos de

una curva determinados por los pares de números x e y) le permiten escribir las ecuaciones de la recta, parábola, circunferencia ... y clasificar las curvas según el grado de las ecuaciones que las representan.
(Esto es, lo que hacemos al finalizar el tercer año).

. Esto junto con el descubrimiento de los irracionales por los Pitagóricos unos 1500 años antes y la necesidad de definir el número Π en forma correcta, probablemente llevó a Hilbert a definir el axioma de continuidad.

. En el siglo pasado MORITZ PASCH (1843-1931) formula el postulado que lleva su nombre, a saber: "En el plano, si una recta inside sobre un lado de un triángulo, y no acierta con los vértices, entonces ella debe cortar a uno de los otros dos lados", la justificación de este hecho probablemente generó los axiomas de orden y de división del plano.

Con Pasch aparece claramente formulada la concepción acerca de la naturaleza estrictamente axiomática de la matemática. Así fue el primero en organizar sobre esta base el sistema de la geometría proyectiva absoluta, en sus "LECCIONES DE GEOMETRIA" ["VORLESUNGEN ÜBER NEUERE GEOMETRIE" (Leipzig, Teubner, (1882)].

. Otra razón para los axiomas de orden, continuidad y Arquímedes es probablemente la observación de BERNHARD RIEMANN (1826-1866) de que hasta 1854 nadie había precisado el concepto de que las rectas no tienen principio ni fin.

Esto le llevó a decir; para mi la infinitud de la recta significa: "cada vez que fijamos un orígen en una recta, suponemos que toda vez que marcamos un punto en ella es posible encontrar uno más alejado".

A partir de esto demuestra que supone que: "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos rectos", no lleva a contradicción alguna.

Probablemente aquí nace la geometría proyectiva.

Las obras completas de este matemático alemán discípulo y continuador de GAUSS, Karl Friedrich (1777-1855) constituyen un solo volumen.

A pesar de ello sus contribuciones originales han abierto nuevos rumbos en teorías fundamentales.

. Posteriormente Hilbert y MaxDehn (1900) [(1) Math. Ann., t. (LIII), págs. 405-439: DIE LEGENDRE'SCHEN SÄTZE ÜBER DIE WINKELSUMME IM DREIECK"] construyeron ejemplos de geometrías donde vale el concepto de infinitud de Riemann y no el axioma de Arquímedes.

Para la geometría modelada en los números reales valen ambos axiomas.

El intento de expresar con mayor rigor matemático los criterios de igualdad de triángulos o polígonos, de acuerdo a los niveles de la segunda mitad del siglo pasado, especialmente usando el concepto de función como lo plantea el matemático alemán FELIX KLEIN (1849-1925), probablemente condujo a los axiomas de Congruencia.

Tuvo gran importancia su unificación y sistematización de las geometrías en lo que se llamó el Programa de ERLANGEN (1872). Geometrías a las cuales Klein les dió los nombres con que se conocen en la actualidad: geometría hiperbólica, elíptica, parabólica.

Finalmente al tratar de escribir en forma algebraica los problemas de construcción con regla y compás llevaron nuevamente a la necesidad del axioma de las Paralelas, Arquímedes, Congruencia y Continuidad.

Para construir una teoría satisfactoria del concepto de área, Hilbert descubrió que no necesitaba el axioma de las paralelas, pero para lograr que valga que figuras de igual área son equivalentes, Hilbert y Dehn, en 1900, mostraron que es necesario considerar los axiomas de Arquímedes , Congruencia, Paralelismo, Orden y Continuidad.

Una demostración de esto se puede encontrar en: FORDER, Henry G.: "FOUNDATIONS OF EUCLIDEN GEOMETRY" (1927) (Edit. Dover, 1958), en esta obra el matemático neozelandés, seguidor de Hilbert, expone con mucho detalle el trabajo de Hilbert.

. Una linda tarea para la R.E.M. sería escribir en Español, el último problema mencionado arriba.

Sintetizando decimos que Hilbert descubre que los axiomas necesarios para dar mayor coherencia, solidez y justificación a la edificación de la geometría construída por los Griegos (330-275), Euler, Saccheri, Lagrange (1736-1813), Gauss y muchos otros son:

I) AXIOMAS DE INCIDENCIA
II) AXIOMAS DE ORDEN
III) AXIOMAS DE CONGRUENCIA
IV) AXIOMA DE ARQUIMEDES
V) AXIOMA DE PARALELISMO
VI) AXIOMA DE CONTINUIDAD

La parte más importante de ésta formulación es la que se refiere a la COMPATIBILIDAD e INDEPENDENCIA de los axiomas. Para demostrar la compatibilidad Hilbert muestra como se pueden asociar números a los puntos, rectas, etc., de modo que a cualquier contradicción que resultara en la geometría correspondería una contradicción en la aritmética, cosa que él no admitía.

Para demostrar la independencia de los axiomas, Hilbert, construye geometrías que satisfacen a todos menos a uno de los postulados admitidos: geometrías no euclidianas, no-arquimedeanas, etc..

Una descripción completa de estos axiomas se encuentran en el libro de P. PUIG ADAM: Curso de "GEOMETRIA METRICA" (1961) o, en el libro de J. A. TIRAO: "EL PLANO" (Edit. Docencia, 1979).

En sendos trabajos que aparecerán en REM que son: "AXIOMAS DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA A PARTIR DE SIMETRIA AXIAL" por: Patricia L. GALDEANO, Olga M. VANNUCCI y María A. MINI; y "AXIOMAS DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA A PARTIR DE CONCEPTOS METRICOS" por: Nélida iris AURIOL, María Rosa BERRAONDO y Norma R. CERIZOLA; se presentan otras formulaciones de los axiomas.

. Entre las contribuciones de Saccheri es de destacar: si se aceptan los axiomas de incidencia, orden, congruencia y arquímedes entonces es válido que en todo triángulo rectángulo los dos ángulos no rectos deben ser agudos.

. MAX DEHN construyó ejemplos de planos euclidianos donde valen los axiomas de incidencia, orden, congruencia y <u>no</u> vale el de arquímedes y ejemplos de triángulos rectángulos de modo que: la suma de los ángulos interiores es mayor que dos rectos. Por consiguiente, uno de los ángulos no rectos es obtuso.

En el libro de Forder antes mencionado se hace un profundo análisis donde se muestra la necesidad de cada uno de los axiomas para lograr que los teoremas propuestos por Euclides, sus sucesores o por nuestra percepción del espacio sean verdaderos.

Muchas veces hemos escuchado las denominaciones "GEOMETRIA EUCLIDIANA", "GEOMETRIA NO EUCLIDIANA", "GEOMETRIA PROYECTIVA". Es natural preguntarse: ¿como encajan cada una de ellas en el esquema de Hilbert?. La respuesta es: por ejemplo, Geometría no euclidiana es un modelo de geometría donde valen los axiomas I, II, III, IV y V: axioma de las paralelas es reemplazado por el siguiente V*: "Por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas a ella".

En los artículos de BAZAN y otros, REM, Vol. 1 N° 3 y de BOGGINO-MIATELLO, REM, Vol. 3 N° 1 y N° 2 se encuentra mayor información.

UNA FORMULACION DE LOS AXIOMAS PARA LA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Cada vez que se construye un nuevo trozo de matemática, interesa saber sobre que suposiciones está basada (esto es: los axiomas); para luego examinar la coherencia de este nuevo conocimiento. En el transcurso de la historia las Formas Axiomáticas de la Geometría han seguido pasos muy lentos.

EUCLIDES, unos dos mil años atrás recopiló los axiomas que se conocían en ese momento, para la geometría euclidiana.

HILBERT, aproximadamente en 1890 (Dos mil años después) completó esta lista y enunció los teoremas más importantes.

A continuación damos una lista de axiomas, que data aproximadamente de 1920 y que aparece en el libro de PUIG ADAMS, GEOMETRIA METRICA (1950).

HILBERT dividió los Axiomas de la Geometría Euclidiana en:

I) AXIOMAS DE INCIDENCIA
II) DE ORDEN
III) DE CONGRUENCIA
IV) DE PARALELISMO
V) DE CONTINUIDAD

Aproximadamente en 1960, A. CHOQUET, en su "Geometría Métrica", utilizando espacios métricos, marca la diferencia con la teoría de GEORGE D. BIRKHOFF (1930) queda un conjunto de axiomas de la Geometría Euclidiana a partir de regla, compás y transportador.

. Con PEANO y E. PERRY comienza a preocupar la CONSISTENCIA de la Geometría.

Nota: Sugerimos la lectura del libro: "GEOMETRY" by EARL PERRY, (AXIOMATIC DEVELOPMENTS WITH PROBLEM SOLVING) (Copyright (1992) by Marcel Dekker, Inc.).

. Y también en muy útil la consulta de: "EL PLANO" de J.A. TIRAO (1979).

. Brevísimo comentario sobre el concepto de:

CONSISTENCIA

Cada vez que se tiene un sistema axiomático, se escriben posibles enunciados de teoremas, es decir se escriben implicaciones p $\longrightarrow$ q y se analiza su verdad en base a los axiomas.

Escrita todas las implicaciones p $\longrightarrow$ q, se define **INCONSISTENCIA** diciendo:

hay p y q proposiciones de modo que es imposible decidir:

p $\longrightarrow$ q es Verdadera.

ó q $\longrightarrow$ p es Verdadera.

Nuestro orden de partida es el siguiente:

. Se fija un conjunto Π, llamado "PLANO"; y una familia $\underline{R}$ de subconjuntos, NO VACIOS Y PROPIOS, del mismo Π, que se llaman "RECTAS", y se supone verifican los axiomas de incidencia, orden, paralelismo, congruencia y continuidad.

Observación: a) Decimos subconjuntos Propios, con lo cual queremos significar, subconjuntos distintos de Π.

b) Card Π ($\# \Pi$) ≥ 2

Π no puede ser un conjunto unitario, pues en ése caso, el subconjunto llamado recta sería "Vacío", y en tal caso estaríamos en contradicción con el pedido de considerar subconjuntos NO VACIOS.

I.- AXIOMA DE INCIDENCIA

1) $\forall$ a $\in \Pi$ existe r $\in$ R que lo contiene.

2) "Un par de puntos determinan una única recta".

Si A,B $\in$ R $\qquad \# (A \cap B) \leq 2 \Rightarrow A = B$

Sugerimos "FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA", de Forder ($\cong$ 1927) (Edit. Dover); quien, en "inglés antiguo", después de dar axiomas, busca que teoremas los cumplen.

TEOREMA. Si A y B $\in$ R, entonces vale uno solo de los tres siguientes enunciados:

i) $\# (A \cap B) = 1$ ó ii) $A \cap B = \phi$ ó iii) $A = B$.

Ellos significan lo siguiente:

i) Las rectas A y B tienen un elemento común; es decir se cortan en un punto.

ii) Las rectas A y B no tienen elementos comunes; o sea son disjuntas (es decir son paralelas).

iii) Las rectas tienen todos los elementos comunes, o sea se cortan en más de un punto, es decir son paralelas (son coincidentes).

Definimos: La recta A es paralela a $B \underset{def.}{=}$

$A \| B$ si $A = B$ ó $A \cap B = \phi$

II.- AXIOMAS DE ORDEN (son los más difíciles)

Orden en un conjunto X es una "relación", que escribimos: "$\leq$" $\subset X \times X$ que satisface:

i) $(a,a) \in \leq$ (es decir $a \leq a$)

ii) $(a,b) \in \leq$ y $(b,a) \in \leq \Rightarrow a = b$

(es decir: $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$)

iii) $(a,b) \in \leq$ y $(b,c) \in \leq \Rightarrow (a,c) \in \leq$

$$\text{(es decir: } \begin{matrix} a \leq b \\ b \leq c \end{matrix} \Rightarrow a \leq c \qquad \text{Transitividad)}$$

Supondremos verificados los axiomas.

Ejemplos

1) Sea X = Q $(a,b) \in \leq \overset{def.}{\Leftrightarrow} (b-a) \geq 0$

$$\text{Sea } b - a = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{sp - qr}{qs} \geq 0 \quad \begin{matrix} \text{si } (sp-qr) \in \mathbb{Z} \geq 0 \\ \text{si } qs \in \mathbb{Z} > 0 \end{matrix}$$

2) Sea $X = \mathbb{R}$ y $a = a_o, a_1, a_2, \ldots;$ $b = b_o, b_1, b_2 \ldots$ los desarrollos decimales de dos números reales, entonces por comparación de ellos, obtenemos un "orden":

$$a \leq b \underset{def.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_i = b_i & \forall i \leq N \\ a_{N+1} < b_{N+1} \end{cases}$$

O sea que el primer dígito distinto marca el orden.

Observación.

El orden en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$ está relacionado con las operaciones de suma y producto porque valen las leyes de monotonía.

Un orden es total si $\forall a, b \in X$ vale la ley de tricotomía, o sea vale una de las tres posibilidades:

$a < b$ o $b < a$ o $a = b$

Ejemplo: 1) El orden en $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ es total; pues dados dos números, siempre se puede decir cual es el más chico.

2) Sea $X = \mathbb{N}$, un orden no total es: $a \le b \underset{def.}{\Leftrightarrow} a|b$

Teorema: En $\mathbb{C}$ no existe orden total en el cual valen las leyes de monotonía.

ORDEN EN $\mathbb{R}$ [x]: Conjunto de polinomios a coeficientes reales en una variable.

Sean los polinomios $p = a_n x^n + \ldots\ldots + a_0$

$q = b_m x^m + \ldots\ldots + b_0$

$$p < q \underset{def.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n < m \Rightarrow p < q \\ n = m \text{ y } a_n \le b_n \Rightarrow p < q \end{cases}$$

Ejemplos: 1) $1 < x < x^2 < x^3 < \ldots\ldots.$

2) $\Pi < x < x^2 < \ldots\ldots\ldots$

3) $x^3 < 2x^3$ pues: $n = 3 = m$ y $a_3 = 1 < b_3 = 2$

4) $x^3 + 80 < 2x^3$

Un polinomio p es positivo:

$p > 0 \underset{def.}{\Leftrightarrow}$ (grado $p > 0$ o (grado $p = 0$ u $p = a_0 > 0$))

ORDEN EN $\mathbb{R}$ (x): Conjunto de funciones racionales a coeficientes reales en una variable.

Se define en forma análoga.

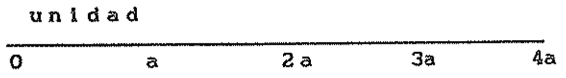
CUAL ES LA DIFERENCIA ENTRE ESTE ORDEN EN $\mathbb{R}$[x] Y EL ORDEN EN $\mathbb{Q}$ Y EN $\mathbb{R}$ (ESTO ES EN LOS NUMEROS)?

La respuesta es:

El orden (usual) en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ es arquimedeano; y el orden definido en $\mathbb{R}$[x] y $\mathbb{R}$(x) no es arquimedeano.

Intuitivamente esto significa lo siguiente:

Si se toma una unidad y se yuxtapone sobre la "recta numérica" X, se cubre X.



Que se entiende por <u>cubrir X</u>?

Cubrimiento de $X \underset{def.}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [na,\ (n+1)\ a]$

Sea X un cuerpo con orden total (tricotomía), leyes de monotonía.

$$\text{ORDEN EN X ES ARQUIMEDEANO} \underset{def.}{=} \quad X = \overset{\underline{\forall a > 0 \quad \text{fijo}}}{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}} [na,\ (n+1)\ a]$$

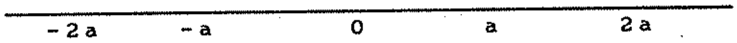
O también podemos decir:

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [na,\ (n+1)a] \Leftrightarrow \forall\ b \in X\ \exists\ n\ \underline{\text{entero}}\ \text{tal que}\ b \in [na,\ (n+1)\ a]$$

o en otra forma equivalente:

$$\Leftrightarrow \forall\ b > 0\ \exists\ n > 0\ \text{tal que}\ b < na$$

<u>Observación</u>: Decimos n entero,pues debemos pensar que para "cubrir" X, debemos ir a derecha e izquierda del cero.



Demostremos la afirmación:

El orden en el cuerpo $\mathbb{R}[x]$ <u>no</u> es arquimedeano.

En efecto: fijo como <u>$a \in X$</u> el extremo superior del segmento unidad $[0,\Pi]$; o sea <u>$a = \Pi$</u>.

Llamamos <u>p</u> a un polinomio perteneciente a $\mathbb{R}[x]$, entonces:

$$[na,\ (n+1)a] = \{p : n\ \Pi \leq p \leq (n+1)\ \Pi\} \subset$$
$$\subset \{\text{polinomios de grado o}\}$$

Luego:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [na,\ (n+1)\ a] \subseteq \{p\text{: grado } p = 0\} \neq \mathbb{R}[x]$$

<u>Nota</u>: En los cuerpos $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{R}(x)$ <u>no</u> se puede "medir" bien.

Tengamos el conjunto Π llamado plano, la familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos R, no vacíos y propios, llamadas rectas.

<u>AXIOMA DE INCIDENCIA</u>:

1) $\forall a \in \Pi \quad \exists \quad \in \mathcal{R}$ que lo contiene

2) "Un par de puntos distintos determinan una única recta"

$A, B \in \mathcal{R} \qquad \# (A \cap B) \geq 2 \Rightarrow A = B.$

Dos rectas se dicen incidentes si se intersecan en un solo punto.

AXIOMA DE ORDEN:

Cada recta $R \in \mathcal{R}$ está munida de un orden total $\leq_R$ y además se satisface:

i) $\forall\ a <_R b \qquad \exists\ c \in R \qquad c \neq a$ y b: $a <_R c <_R b$

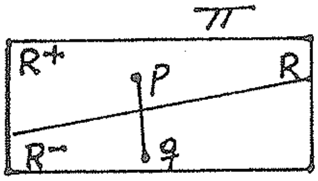
ii) $\forall\ a \in R \quad \exists\ c, b \in R \qquad a \neq c$ y b: $c <_R a <_R b$

O sea que fijado un punto a en la recta, siempre hay un punto más lejos y uno más cerca (ii), y i) dados 2 puntos siempre hay uno en el medio.

iii) **AXIOMA DE PASCH**

1) Para toda recta R, el conjunto Π-R se expresa como unión disjunta de dos conjuntos no vacíos R_+, R_- y ambos convexos.

2) Además $\forall\ p \in R_+ \quad \forall\ q \in R_-$
$\overline{pq} \cap R \neq \phi$.
(Esto es lo más fuerte).



Este axioma nos dice que:

1) Cada recta divide al plano en dos convexos disjuntos.

2) Si se quiere pasar de uno al otro, hay que atravesar la recta.

Definamos los conceptos de segmento y convexo.

Dados dos puntos a y b se puede determinar un segmento que anotamos $\overline{ab}$,

si $a = b \Rightarrow \overline{ab} = \{a\}$

si $a \neq b$ por el axioma de incidencia existe una única recta $\overleftrightarrow{ab}$ que los contiene, entonces llamamos: SEGMENTO $\overline{ab} \overset{\text{def.}}{=}$

siendo $\overleftrightarrow{ab} = R \qquad \{x \in \overleftrightarrow{ab} : a \leq_R x \leq_R b\}$

Observaciones: 1) La definición nos dice que un segmento $\overline{ab}$ es el conjunto de puntos de la única recta $\overleftrightarrow{ab}$ que los contiene, intermedios entre a y b.

2) Si $a \neq b$ el segmento es infinito, pues la recta que lo contiene es infinita, dado que por el axioma de orden ii) fijado un punto sobre la recta siempre hay uno más lejos, y así siguiendo.

Con el concepto de segmento, tenemos el de CONVEXIDAD.

El conjunto $F \subset \Pi$ es convexo si $\forall \underset{a \neq b}{a, b \in F}$ $\quad \overline{ab} \subseteq F$

Es decir, un conjunto es convexo, si dado un par de puntos distintos, se tiene un segmento totalmente contenido en el conjunto (el segmento "vive" dentro del conjunto).

Ejemplo de Convexos

1) Un segmento $\overline{ab}$

2) Una recta R es un convexo, pues dados dos puntos distintos ellos determinan una recta; si se consideran solo los puntos intermedios, se tiene el segmento contenido en la recta.

3) Un plano Π, es un convexo.

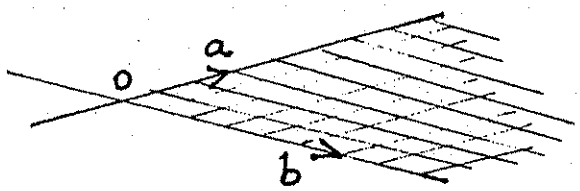
DEFINICION DE ANGULO Y SECTOR ANGULAR

Nota: Tirao, pág. 10. Def. 1-7, Def. 1-9.

. **ANGULO** es la unión de dos semirrectas, no coincidentes, ni opuestas; con el mismo orígen.

. **SEMIRRECTA** de orígen c contenida en la recta R es el conjunto: $\{x \in R : x \leq c\}$ o $\{x \in R : x \geq c\}$.
(esto es: fijo un punto de una recta y tomo todos los que le "siguen").

. **SECTOR ANGULAR** $\overset{def.}{=}$ $\overleftrightarrow{(ob)}_a \cap \overleftrightarrow{(oa)}_b$

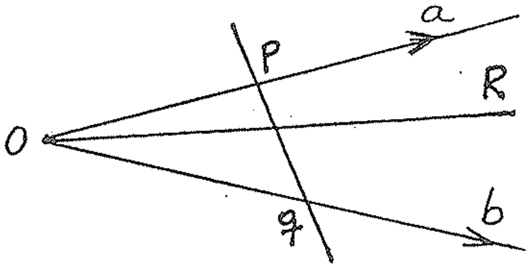


O sea, las semirrectas $\overleftrightarrow{oa}$, $\overleftrightarrow{ob}$ se prolongan en dos rectas que las contienen; ellas determinan dos semiplanos $\overleftrightarrow{(ob)}_a$ y $\overrightarrow{(ob)}_b$, con el borde incluído; la región común de ellos es el sector angular.

Nota: Esta definición se puede leer en el Repetto.

Con Euclides no es tan claro ver que es esto.

TEOREMA: Si $\widehat{aob}$ es un ángulo, un punto $p \in \overrightarrow{oa}$ y un punto $q \in \overrightarrow{ob}$, R es una semirrecta de orígen 0 contenida en el sector angular del $\widehat{aob}$, entonces:

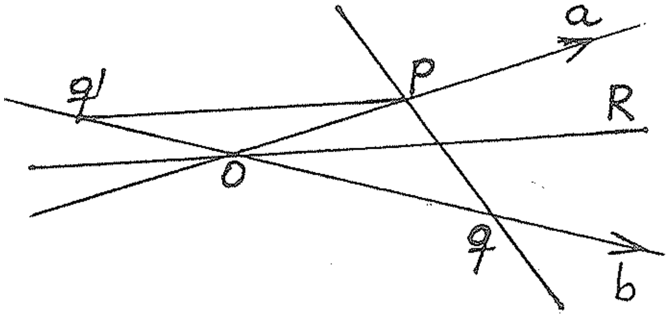


$$R \cap \overline{pq} \neq \phi$$

J.A.TIRAO, en "EL PLANO" (pág. 11) enuncia este teorema como 1.4. así: "Toda semirrecta interior a un ángulo, interseca a cualquier segmento que apoya sus extremos en cada uno de sus lados". Y lo demuestra:

Sean p y q dos puntos situados en lados distintos del ángulo de vértice 0.

Tomando q′ en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{ob}$, el segmento $\overline{pq'}$ no corta a la semirrecta interior R, por estar en semiplanos distintos respecto de $\overleftrightarrow{oa}$.



Tampoco corta a la semirrecta opuesta a R, por estar $\overline{pq'}$ en el mismo semiplano que R respecto de $\overleftrightarrow{ob}$.

Por lo tanto p y q′ estan de un mismo lado respecto de la recta que contiene a R.

Como q y q′ están separados por dicha recta R, también lo están p y q.

Es decir, el segmento $\overline{pq}$ interseca a la recta de R en un punto de ella, interior al ángulo.

Por lo tanto interseca a la semirrecta R como se quería demostrar.

MODELOS DE GEOMETRIA

(Ejemplos que se construyen en base a conceptos conocidos).

I.- Se toma K un cuerpo, se fija el "plano" $\Pi = K \times K$.

Si $a,b,c \in K$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, sea el subconjunto de Π

$$R_{abc} = \{(x,y) \in KxK : ax + by = c\}$$

y la familia de ellos:

$$\mathcal{R} = \{ R_{abc} : a,b,c \in K \text{ variando } a \neq 0 \text{ o } b \neq 0\}$$

(en esta familia, así definida, varios conjuntos van a dar la misma recta).

Entonces: el par $(\Pi, \mathcal{R})$ satisface el Axioma de Incidencia.

En efecto:

1) $\forall\ (x,y) \in \Pi = KxK$ existe $R_{abc} \in \mathcal{R}$ que lo contiene.

2) Si se toman dos puntos en $\Pi = KxK$, la recta que ellos determinan es una combinación lineal, de las rectas que contienen a cada uno de ellos.

II.- Si además se supone que <u>K tiene orden total</u> (es decir vale la ley de tricotomía) y vale monotonía.

Se puede dar orden a $R_{a,bc}$.

1) Si $b \neq 0$ $\qquad R_{a,b,c,} = \left\{ \left(x, \dfrac{c - ax}{b} \right) : x \in K \right\}$

$$p <_{R_{a,b,c,}} q \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x_p < x_q$$

2) Si $b = 0 \Rightarrow a \neq 0$ $\qquad R_{a,0,c} = \left\{ \left(\dfrac{c}{a} , y \right) : y \in K \right\}$

$$p <_{R_{a,b,c,}} q \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} y_p < y_q$$

<u>Observación</u>:

i) Sea $x,\ y \in K$ $\qquad \left(x < y \Rightarrow x < \dfrac{x+y}{2} < y\right)$

En efecto:

$$\begin{array}{lcc} & x < y & x < y \\ & \underline{\quad x = x \quad} & \underline{\quad y = y \quad} \\ \text{monotonía} & 2x < x + y & x + y < 2y \end{array}$$

$$x < \frac{x+y}{2} < y \qquad \begin{array}{ll} \text{pues} & 0 < 1 \\ & \underline{0 < 1} \\ \text{monot.} & 0 < 2 \end{array}$$

ii) El orden $\mathbb{C}$ es total, porque es total el orden en K

El orden $<_{R_{abc}}$ es total, porque es total el orden de K

VERIFICACION DEL AXIOMA DE ORDEN (en el modelo II)

i) Si $a < b \Rightarrow \exists\, C: \quad a < C < b \qquad C \neq a \text{ y } b \qquad C \in R$

ii) $\forall\, C \in R \Rightarrow \exists\, h, k, : h < C < k \qquad C \neq h \text{ y } k \qquad h, K \in R$

Si $a = p$, $b = q$

$$p <_{R_{abc}} q \Rightarrow \text{i) } \exists\, C = \left(\frac{x_p + x_q}{2} , \frac{c - ax}{b} \right) \text{ si } b \neq 0 \qquad (1)$$

$$= \left(\frac{c}{a} , \frac{y_p + y_q}{2} \right) \qquad \begin{matrix} \text{si } b = 0 \\ a \neq 0 \end{matrix} \qquad (2)$$

tal que $p <_R C <_R q$

$$\text{ii) } \exists\, h = \begin{cases} 1) \left(x_h + 1, \dfrac{c - ax}{b} \right) & \text{si } b \neq 0 \\ 2) \left(\dfrac{c}{a} , y_h + 1 \right) & \begin{matrix} \text{si } b = 0 \\ a \neq 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} 1) \left(x_h - 1, \dfrac{c - ax}{b} \right) & \text{si } b \neq 0 \\ 2) \left(\dfrac{c}{a} , y_h - 1 \right) & \begin{matrix} \text{si } b = 0 \\ a \neq 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\text{pues} \quad \begin{array}{c} x = x \\ 0 < 1 \\ \hline x < x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x = x \\ -1 < 0 \\ \hline x - 1 < x \end{array}$$

Monot.

LEMA 1: En $\Pi = K \times K$ si $a \neq b$ se tiene

$$\overline{ab} = \{ x \in \overleftrightarrow{ab} = R : \ a \leq_R x \leq_R b \} =$$

$$= \{ x : x = tb + (1-t)\, a, \ t \in K, \quad 0 \leq t \leq 1 \}$$

LEMA 2:

i) Si $v_o \neq v_1 \in R_{a,b,c} \Rightarrow R_{a,b,c} = \left\{ v / v(t) = v_o + t(v_1 - v_o), \ t \in K \right\}$

(es decir si $v_o \neq v_1 \in R_{a,b,c}$ entonces la recta R se puede expresar en la forma paramétrica $v(t) = v_o + t\,(v_1 - v_o)$).

ii) Si $v_o <_R v_1 \Rightarrow (v(t) <_R v(s) \Leftrightarrow t < s \text{ en } K)$

Observaciones:

1) Lema 2 implica el Lema 1:

Del lema 2i): $R_{abc} = \{v \ / \ v(t) = v_o + t \ (v_1 - v_o) \ \ t \in K\} =$

$= \{v \ / \ v(t) = v_o \ (1-t) + t \ v_1, \ \ t \in K\}$

2) Del Lema 1, deducimos que el concepto de segmento abstracto coincide con el de segmento clásico, si $\Pi = KxK$.

Entonces, la convexidad abstracta, de la geometría coincide con la convexidad clásica.

VERIFICACION DEL AXIOMA DE PASH (en el modelo II)

En el modelo, la recta $R = R_{a,b,c} = \{(x,y) \in KxK : ax+by = c\}$ construímos los conjuntos:

$R_+ = \{(x,y) \in KxK : ax + by > c\}$ (semiplano superior)

Nota: Llamamos semiplano abierto: R_+ o R_- sin borde
Llamamos semiplano (a secas) con borde
(En el Axioma se usa con borde)
(Aquí se refiere a sin borde)

$R_- = \{(x,y) \in KxK : ax + by < c\}$ (semiplano inferior)

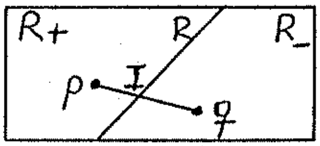
1) Ellos son no vacíos y disjuntos por construcción, esto es

$$R_+ \cap R_- = \phi$$

y son convexos, pues vale leyes de monotonía?.

2) $\forall \ p \in R_+ \quad \forall \ q \in R_- \quad \overline{pq} \cap R \neq \phi$, o sea que el segmento $\overline{pq}$ que une los puntos p y q que pertenecen a cada uno de los semiplanos intersecan a la recta R en el punto I, es decir:

$$\overline{pq} \cap R = \{I\}$$



Sea $p = (x,y) \in R_+ \Rightarrow ax + by > c$

$q = (u,v) \in R_- \Rightarrow au + bv < c$

y por Lema 1, el segmento $\overline{pq} = \{V : V = tp + (1-t) \ q, \ 0 \leq t \leq 1\}$
$t \in K$

$= V = t(x,y) + (1-t) \ (u,v), \ 0 \leq t \leq 1, \quad t \in K \} =$

$= V : V = (tx + (1-t) \ u, \ ty + (1-t) \ v), \ \ 0 \leq t \leq 1 \}$

y, entonces para determinar el punto I, debemos buscar el $t \in [0,1]$ tal que:

$$I(t) = a \ (tx + (1-t) \ u) + b \ (ty + (1-t) \ v) = c$$

Efectivamente:

$t = 0 \quad \Rightarrow \quad au + bv < c$

$t = 1 \quad \Rightarrow \quad ax + by > c$ por lo tanto por el Teorema de "Bolzano", existirá un $t \in [0,1]$ tal que: $I(t) = c$

III.- MODELOS DE FELIX KLEIN Y DE HENRI POINCARE (1854-1912)

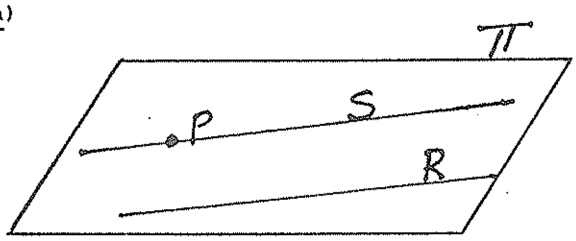
(GOTTINHEM ≅ 1900)

Son modelos más interesantes que los anteriores, y en los cuales "falla" o no vale la siguiente afirmación:

En el conjunto $\Pi = K \times K$, sea $\mathcal{R}$ la familia de subconjuntos R (rectas), entonces:

Si $p \notin R \Rightarrow \exists!\ S \in \mathcal{R}$ tal que $p \in S$ y $S \,//\, R$

(existe única)



Félix Klein y Henri Poincaré "decretan" o definen recta de una manera totalmente distinta a la usual.

(1961-1965)

["Geometría Axiomática", L.M. BLUMENTHAL. Cap. 8, pág. 202: Postulados de los planos no Euclídeos.

Introducción: En la sección 1.7 hemos señalado que fue GAUSS quién primero usó el término geometría no euclídea para denotar la geometría que resulta de sustituir el quinto postulado de Euclides, por su negación, y mantener los restantes postulados que Euclides introdujo explícita e implícitamente en su desarrollo de la Geometría.

En este sentido no hay más que una geometría no euclídea: la geometría de la hipótesis del ANGULO AGUDO DE SACCHERI.

§ 1.3 [EL POSTULADO QUINTO (postulado de las paralelas) es la piedra angular sobre la que descansa la grandeza de Euclides como matemático. (330-275 antes de J.C.).

["Geometría no Euclideanas", R. BONOLA, cap. 1, pág. 19, § 1.

Euclides llama paralelas a dos rectas coplanarias que, prolongadas cuanto se quiera, no se encuentran.

"SI UNA LINEA RECTA QUE CORTA A OTRAS DOS FORMA ANGULOS INTERNOS DEL MISMO LADO DE LA SECANTE CUYA SUMA SEA MENOR DE DOS RECTOS, AQUELLAS DOS, PROLONGADAS HACIA ESTE LADO, SE ENCUENTRAN".

Sin embargo, desde el tiempo de Félix Klein ha sido adoptada otra nomenclatura. La geometría estudiada por Saccheri, Gauss, Bolyai, Lobachewsky se conoce en la actualidad como geometría hiperbólica, mientras que otra geometría en la cual DOS RECTAS NUNCA SON PARALELAS (y las rectas son de extensión finita, pero no acotadas) - la llamada geometría elíptica - se denomina también no euclídea.

§ 8.1. Modelo de Poincaré del plano hiperbólico (H)

Es de gran utilidad el siguiente modelo para el plano hiperbólico introducido por el gran matemático francés Henri Poincaré (1854-1912).

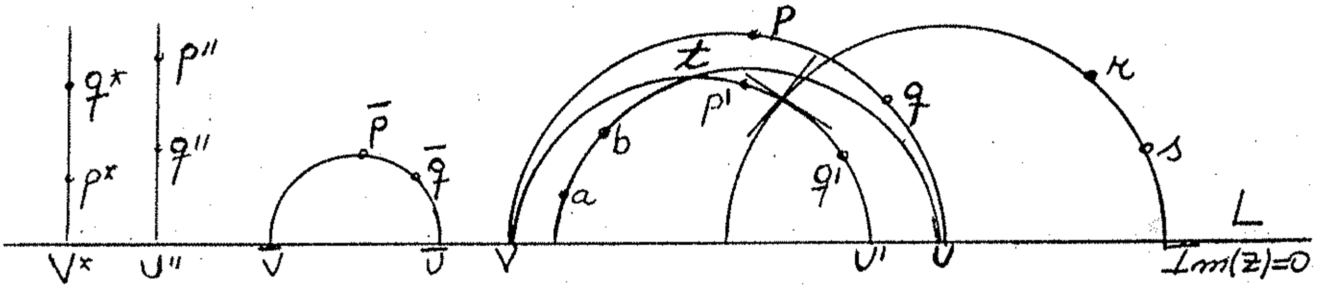
"Una recta horizontal L divide el plano euclídeo en dos partes: un semiplano "superior" y un semiplano "inferior" (la recta misma no pertenece a ninguno de los dos semiplanos.

Los puntos del plano hiperbólico son los puntos del semiplano euclídeo superior determinado por L,

$$\text{plano } \Pi = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0 \}.$$

Y las rectas del plano hiperbólico son las semicircunferencias (abiertas) euclídeas con centros en L y situadas en el semiplano superior de L; junto con la mitad superior de las rectas euclídeas verticales.

(Es evidente que a cada dos puntos distintos p,q del plano hiperbólico corresponde una sola recta que los contiene).



Es conveniente llamar a los puntos de L puntos ideales o impropios del plano H. Si se mantiene p fijo mientras q recorre la recta L(p,q), bien hacia u o hacia v; la distancia crece sin límite, así que las rectas del plano H son de extensión infinita.

. Dos rectas son paralelas entre sí, si tienen un punto ideal en común; por ej. L(p,q) y L(p',q'); o son dos rectas verticales distintas; ej.: L(p",q") y L (p*q*).

. Es evidente que dos rectas distintas de H, pueden ser no paralelas ni cortarse; por ej.: L(p,q) y $L(\overline{p},\overline{q})$. Dos rectas de esta clase se llaman no secantes, se caracterizan por tener una perpendicular común (esto es, existe una perpendicular a cada dos rectas no secantes).

. El modelo del plano hiperbólico considerado ofrece la ventaja de ser conforme o isogorial. Esto significa que el ángulo comprendido por dos rectas hiperbólicas es precisamente el ángulo que forman cuando se consideran como figuras euclídeas. Así por ejemplo el ángulo que forman las rectas L(p',q') y L(r,s) es el ángulo (euclídeo) formado por las tangentes a las dos semicircunferencias euclídeas en sus puntos de intersección. Puesto que las semicircunferencias son tangentes en v, las rectas L(p',q') y L(p,q) forman ángulo de 0^0; esto es característico de las rectas paralelas.

. Nótese que por un punto exterior a una recta se pueden trazar dos rectas, cada una de ellas paralela a la recta dada. Así por ejemplo: las rectas L(p',q') y L(a,b) pasan por el punto t, y cada una de ellas es paralela a la recta: L(p,q).

Nota: (J.V.) En la recta L(p",q") el orden es el usual.

En la recta L(p,q) el orden es el dado por el sentido del movimiento de las agujas del reloj:

Nota: "GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS", L. Santaló (EUDEBA Cuadernillo 45 (1961-1963)) cap. 8, § 8.3, pág.55.

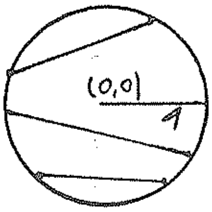
MODELOS DE KLEIN FELIX

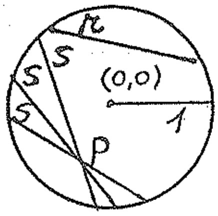
. Considera como plano un disco abierto de centro (0,0) y radio 1, subconjunto del plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Pi = \{ (x,y) \in K \times K : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

. Considera como rectas la intersección de las rectas de K x K con Π

. Aquí el orden es el inducido.





. Dada la recta $r \subset \Pi$, un punto $P \in \Pi$, afuera de r, todas las rectas s son paralelas.

III.- AXIOMAS DE CONGRUENCIA - APLICACIONES

Conocemos dos maneras de hacerlo:

Cong. 1. (Según Hilbert y otros).

a) Indicar cuales son las funciones que se denominan TRANSFORMACIONES RIGIDAS (T.R.)

b) Definir: $S \equiv S' \overset{def.}{\longleftrightarrow} \exists\, f \in$ T.R. de modo que $f(S) = S$ (es decir: S es congruente con S′ si existe una f que lleva un conjunto S en el otro S′; y el transformado por f del conjunto S es el mismo S).

Cong. 2. (Según Hilbert).

a) Indicar cuales segmentos son congruentes.

b) Definir: $f\colon \Pi \longrightarrow \Pi$ es una T.R. o isometría, pues: para todo segmento $S \equiv f(S)$.

AFIRMACION

$[(\Pi,\mathcal{R})$ + Axiomas: Incidencia, Orden, Congruencia 1] $\longleftrightarrow$

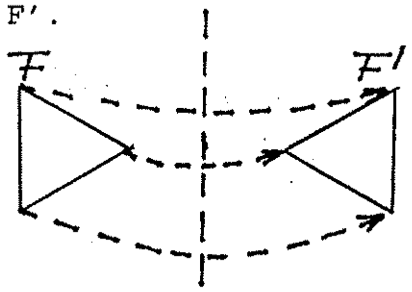
$[(\Pi,\mathcal{R})$ + Axiomas: Incidencia, Orden, Congruencia 2]

Son SISTEMAS EQUIVALENTES.

Idea intuitiva de congruencia

Si se toma el dibujo de una figura sobre un papel, se lo levanta y si se puede volver a poner sobre la figura, éstas son congruentes.

(1) Esto es: Congruencia entre F y F′ $\subset \Pi$ significa si (se (traslada + se rota + se invierte (con respecto a una recta) convenientemente la figura F se obtiene la F′.



Observaciones:

- Klein, en el siglo pasado, se dió cuenta de estos pasos.
- En la antiguedad, no se podía formalizar, pues no se tenía el concepto de función.
- Recién con Dirichlet (siglo pasado) se pudo hacer.

Usando funciones la (1) significa lo siguiente:

(2) $F \equiv F'$ si es posible encontrar $f: \Pi \longrightarrow \Pi$ "que no deforme", de modo que: $f(F) = F'$ siendo f la "composición".

f = "(rotación) o (traslación) o (inversión)"

"**que no deforme**" significa "no destruye" los objetos de la geometría.

(es decir no destruye las rectas, triángulos, cuadrados, segmentos, polígonos, etc.).

"**no destruye**" significa preserva tamaño de segmentos, ángulos, etc.

. Ahora, como no tenemos métrica debemos dar significado a todo lo dicho anteriormente en términos de los Axiomas de Incidencia y orden; y eso nos dará el punto de partida.

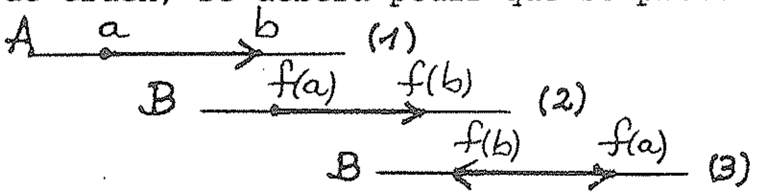
Nota: Conocida es la pregunta: QUIEN ESTA PRIMERO LA GALLINA O EL HUEVO?.

Se puede jugar con las respuestas, pero en algún momento se debe decidir, quién es la "gallina".

Y en ésta decisión está la grandiosidad de los matemáticos de darse cuenta cuales son los Axiomas (esto es la "gallina") de los cuales salen los resultados (estos son los "huevos").

. Si aceptamos como axioma: que se lleven rectas en rectas; para lograr que se lleven segmentos en segmentos, hay que agregar algo.

Esto es: queremos que los extremos vayan a extremos. Como se tienen los Axiomas de Orden, y segmento se define con los Axiomas de Orden, se deberá pedir que se preserve el orden.



Es decir: f deberá llevar el seg. (1), al (2) o al (3).

Es decir: Los segmentos están definidos a partir del orden:

$$\text{seg } (ab) = \{x \in \overleftrightarrow{ab} : a \leq x \leq b\}$$

Entonces buscamos una f tal que:

$$f\ (\text{seg } (ab)) = \text{segmento } (f(a)\ f(b))$$

y lo deseable es que preserve los extremos.

En la recta hay un orden natural ("dado por Dios"), entonces en el orden dado por el axioma en $f(\overleftrightarrow{ab}) = B$ vale $f(a) <_B f(b)$ ó $f(b) <_B f(a)$.

Nota: i) La transformación f rígida, debe ser inyectiva, porque de lo contrario "colapsaría", segmentos en puntos y no permitiría comparar objetos.

(inyectividad equivale a "no colapsar").

ii) f rígida debería ser suryectiva, porque deseamos con ella llegar a todo el plano.

iii) Otra razón para la biyectividad de una T.R. f es que deseamos definir formalmente rotación, traslación, inversión, que son todas biyectivas.

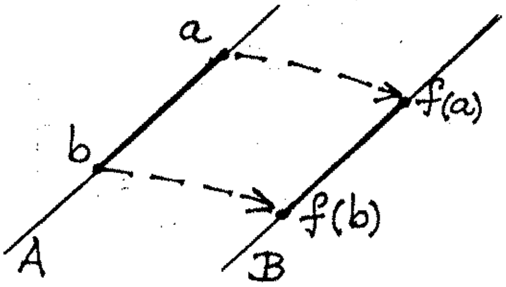
. QUEREMOS QUE LA T.R. LLEVE SEGMENTOS EN SEGMENTOS (que lleva recta en rectas, estamos convencidos), y para ello buscamos que lleve los extremos en extremos.

Para que f(seg (a,b)) = seg (f(a), f(b)), f debe cumplir:

i) Si $f(a) <_B f(b) \Rightarrow \forall x$ con $a \leq_A x \leq_A b$ vale $f(a) \leq_B f(x) \leq_B f(b)$

ii) Si $f(b) <_B f(a) \Rightarrow \forall x$ con $a \leq_A x \leq_A b$ vale $f(b) \leq_B f(x) \leq_B f(a)$

Es decir:



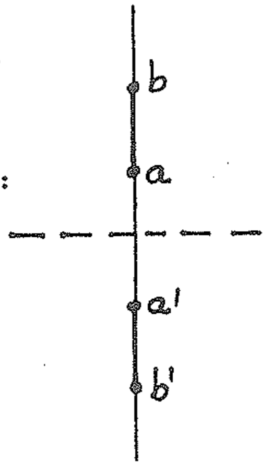
por el Axioma de Incidencia, por los puntos que llamamos a, b, f(a), f(b), pasa una única recta, A por los primeros, B por los segundos.

. Si la transformación f es rígida, entonces $\overline{ab}$ pasa a $\overline{f(a)f(b)}$, y ello está definido por el orden de la recta B.

. Si f es inyectiva, entonces $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$.

. Para que se cumpla i) f debe ser monótona creciente.

. Para que se cumpla ii) f debe ser monótona decreciente.



Nota: La inversión transforma al revés
(Esto es dá vuelta el orden)

. Para que se transformen segmentos en segmentos (f de la recta A en la recta f(A)) esto es:

$f: A \longrightarrow f(A) = B$

y $\left(\begin{array}{l} \text{f de la recta A con su orden natural } <_A \text{ en} \\ \text{f de la recta } f(A) = B \text{ con su orden natural } <_B \end{array} \right)$

es decir:

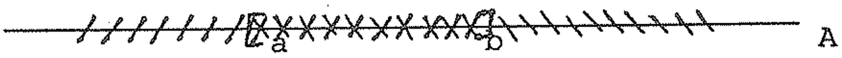
$f(A, <_A) \longrightarrow (f(A), <_B)$

debe preservar o invertir, el orden $<_A$, $<_B$ dados por el Axioma de orden.

También queremos que f ∈ T.R. transforme semirrectas en semirrectas.

. Un segmento se puede pensar como intersección de dos semirrectas:

$$[a,b] = \{x \in \overleftrightarrow{ab} = A : a \leq_A x\} \cap \{x \in \overleftrightarrow{ab} = A : x \leq_A b\}$$

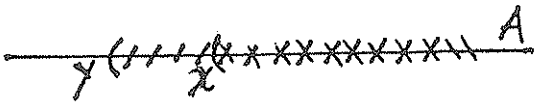


. Notamos que decir "que lleve semirrectas en semirrectas equivale a monotonía".

Es decir: (semirrectas en semirrectas) ⇔ monótona.

. Por lo siguiente:

Fijamos las rectas A y f(A) = B con los ordenes $<_A$, $<_B$ dados por el axioma.



Si $x, y \in A$

$(x, +\infty) \subseteq (y, +\infty) \Leftrightarrow y \leq_A x$

Entonces: $f(y) \leq_B f(x) \Leftrightarrow (f(x), +\infty_B) \subseteq (f(y), +\infty_B)$ (I)

ó $f(y) \geq_B f(x) \Leftrightarrow (f(x), +\infty_B) \supseteq (f(y), +\infty_B)$ (II)

Luego: $f(A, <_A) \longrightarrow (f(A) = B, <_B)$

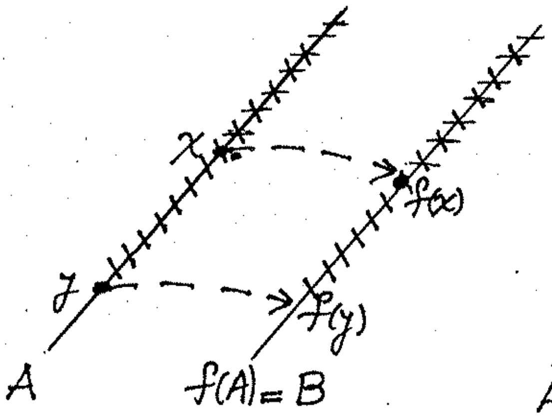
. Si f lleva semirrectas en semirrectas, significa que:

$$\begin{array}{llcll} & (I)\ \begin{array}{l} f(x,\ \infty_A) = (f(x),\ +\infty_B) \\ f(y,\ \infty_A) = (f(y),\ \infty_B) \end{array} & \begin{array}{c}\sigma \\ \sigma\end{array} & (II)\ \begin{array}{l} f(x,\ +\infty_A) = (-\infty_B,\ f(x)) \\ f(y,\ +\infty) = (-\infty_B,\ f(y)) \end{array} \end{array}$$

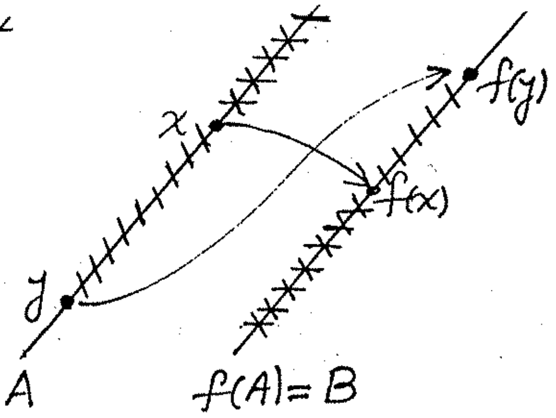
y entonces f es monótona.

Como f es inyectiva (los "σ" no se pueden mezclar).

Vale la 1° columna (I) o la 2° columna (II)



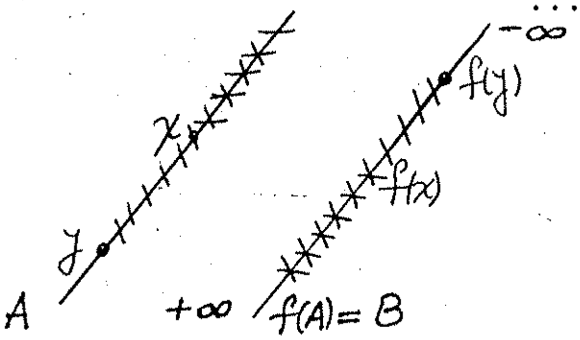
(I)

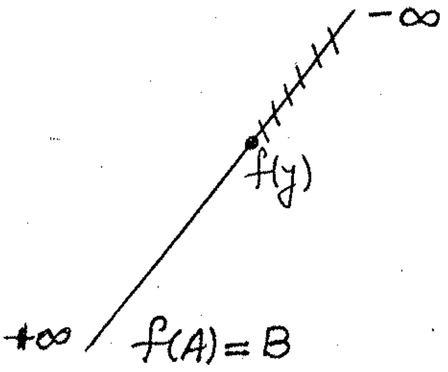


(II)

Tomamos el "σ" cruzado: $f(x,\ \infty_A) = (f(x),\ +\infty_B)$ ....

.... σ $f(y,+\infty) = (-\infty_B, f(y))$





Si la semirrecta (y,∞) va por f a la $(-\infty_B,\ f(y))$, se tiene que f no es función.

Conclusión final: f preserva segmentos ⇔

⇔ f es monótona ⇔

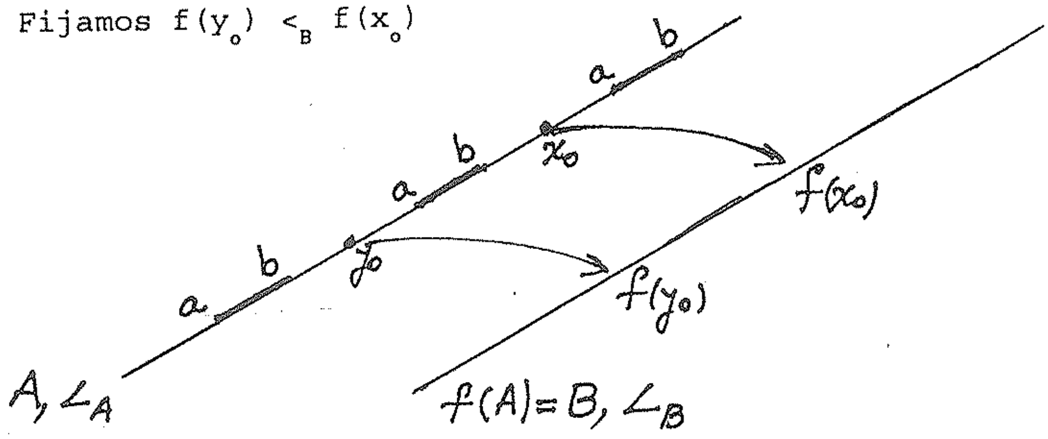
⇔ f transforma semirrectas en semirrectas.

Volvemos a explicar, de otro modo:

(f lleva semirrectas en semirrectas) ⇒ f es monótona.

. Debido al "orden natural" que tiene la recta, vale $f(y_o) <_B f(x_o)$ o al revés $f(y_o) >_B f(x_o)$.

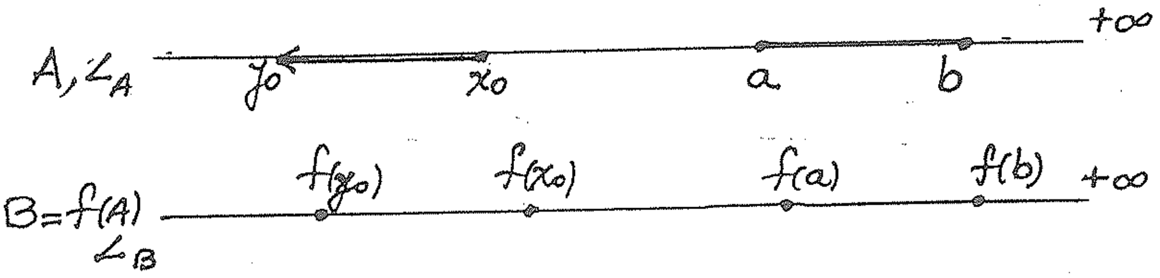
. Fijamos $f(y_o) <_B f(x_o)$



. Queremos probar: $\forall a <_A b \Rightarrow f(a) <_B f(b)$.

(Deberíamos considerar todas las posibilidades para ubicar a y b en la recta). Tomamos por ejemplo: $y_o < x_o < a < b$.

Entonces las semirrectas $(b,+\infty) \subset (a,+\infty) \subset (x_o,+\infty) \subset (y_o,+\infty)$ por f que es función (por hipótesis) van a las semirrectas:



$f(b,+\infty) \subset f(a,\infty) \subset f(x_o,\infty) \subset f(y_o,+\infty)$ (1)

como $f(y_o) <_B f(x_o)$ resulta $(f(x_o), \infty_B) \subset (f(y_o), \infty_B)$ (2)

. Ahora $f(a,+\infty)$ va a $(f(a), \infty)$

ó a $(-\infty, f(a))$ este caso no puede ser por la inclusión (2).

. Lo mismo para $f(b, +\infty)$ entonces se tiene:

$$(f(b), \infty) \subset (f(a), \infty)$$

Por lo tanto $f(a) <_B f(b)$.

Aclaración: Por ejemplo:

(1) (a,∞) por f va a la semirrecta $f(a,\infty)$; no puede ser a la $f(a,-\infty)$, pues vale la inclusión (2); y tiene que estar contenida en $(f(x_o), \infty_B)$.

[Queda pensar sobre las otras posibilidades].

AXIOMA DE CONGRUENCIA VERSION: 0

VAmos a declarar "la gallina" de nuestro comentario anterior, esto es las funciones que no deforman.

AX CONG. 0 Existe un G = subgrupo $\subset$ Biyecciones (Π) que llamamos TR (Transformaciones rígidas) y que cumplen:

1) Si $A \in \mathcal{R} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{R}$ $\qquad \forall f \in G$

2) Si A es semirrecta $\Rightarrow$ f(A) es semirrecta.

(La inversa de una T.R. es rígida)

(La composición de una T.R. es rígida)

3) AX CONG. (RIGIDEZ)

i) $\forall$ (a,b) segmento, $\forall f \in G$ tal que

$f(a,b) \subset (a,b)$ ó $f(a,b) \supset (a,b)$ se satisface que:

$$f(a,b) = (a,b).$$

(esto significa que f "no destruye longitudes" de segmentos.

ii) $\forall\ \widehat{aob}$ y $\forall f \in G$ que verifica:

$$f(S\ (\widehat{aob})) \subset S(\widehat{aob})$$

ó $f(S\ (\widehat{aob})) \supset S(\widehat{aob})$ entonces vale que

$$f\ (\widehat{aob}) = \widehat{aob}$$

(esto significa que f(T.R.) "no destruye medidas de ángulos".

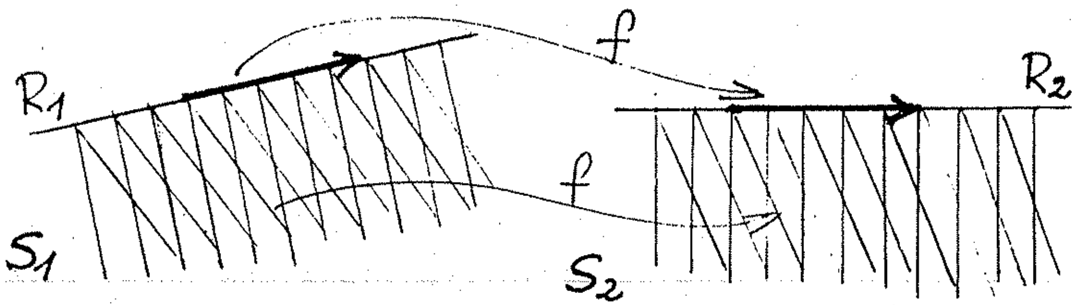
4) EXISTENCIA DE T.R.

Cada vez que fijemos semirrectas R_1 y R_2 y semiplanos S_1 y S_2 correspondientes a las rectas que determinan R_1 y R_2, entonces existe una única $f \in G$, de modo que:

$$f(R_1) = R_2 \qquad y \qquad f(S_1) = S_2$$

Geométricamente esto significa lo siguiente:

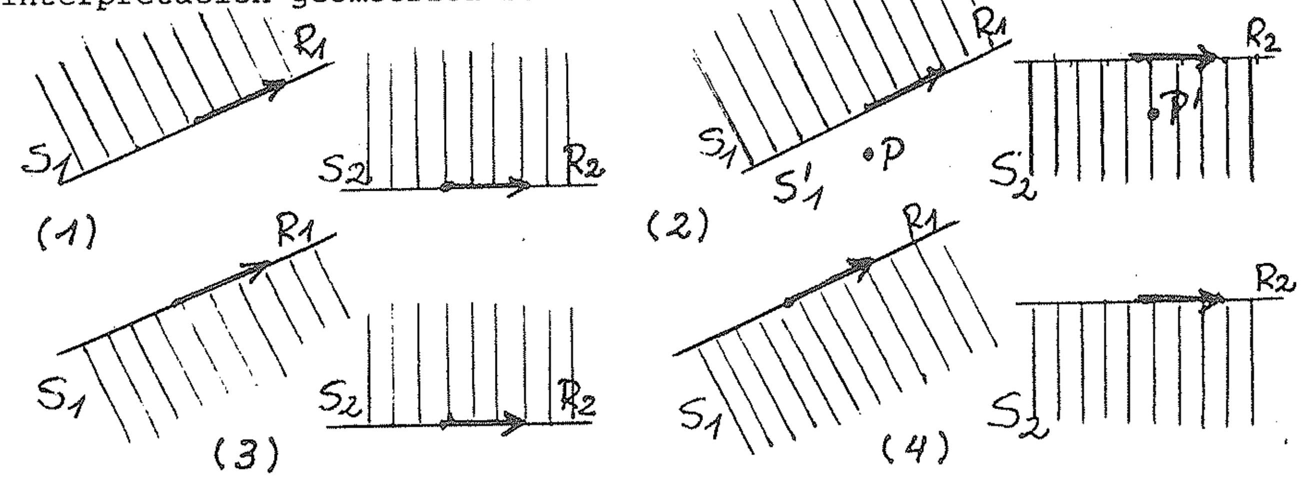
Dibujamos dos semirrectas R_1 y R_2, cada una de ellas determinan una recta que llamamos igual R_1 y R_2.



Cada una de las rectas determina dos semiplanos, elejimos uno para cada recta, los llamamos S_1, S_2 e indicamos con rayado.

Entonces en el ejemplo considerado, la T.R. f lleva la semirrecta R_1 en la R_2; y el semiplano S_1 en el S_2.

Las cuatro posibilidades de elección, en nuestra interpretación geométrica son:



Pero (1^a) = (4^a) y (2^a) = (3^a)

Ahora, si pienso que algún punto P en el semiplano S_1' de (2) fuera por f llevado a $P' \in S_2$, f no sería inyectiva; pues esa posibilidad ya está contemplada en el caso (4). Entonces:

En el caso (2) todos los puntos de S_1 van por f a S_a, y por 4) del AX CONG.0, f es <u>única</u>.

<u>Nota</u>: (Tirao, Def. 1.16, pág. 16)

$F \underset{def.}{\equiv} F'$ si $\exists$ $f \in G$ de modo que $f(F) = F'$

relación de equivalencia, pues G es grupo).

"congruente".

(Con esto se define formalmente Simetría axial y Simetría central).

(*) En efecto: (G,o) es grupo, entonces la operación "o" composición es interna; existe elemento neutro y cada elemento tiene inverso.

Veamos que la relación "≡" de congruencia definida, es de equivalencia, esto es:

1) <u>REFLEXIVA</u>: $F \equiv F$ pues existe la función identidad f, que es el elemento neutro de G. de modo que $f(F) = F$.

2) <u>SIMETRICA</u>: $F \equiv F' \Leftrightarrow F' \equiv F$

$$F \equiv F' \underset{def}{\longleftrightarrow} \exists\ f:\ f(F) = F' \underset{G \text{ es grupo}}{\longleftrightarrow} \exists\ f^{-1}:\ F = f^{-1}(F') \underset{def.}{\longleftrightarrow} F' \equiv F$$

3) TRANSITIVA: $(F \equiv F' \text{ y } F' \equiv F'') \Rightarrow F \equiv F''$

$$\left.\begin{array}{l} F \equiv F' \underset{def.}{\longleftrightarrow} \exists\ f \in G:\ f(F) = F' \\ F' \equiv F'' \underset{def.}{\longleftrightarrow} \exists\ f \in G:\ g(F') = F'' \end{array}\right\} \exists\ h = (g o f) \in G:$$

$$h(F) = (gof)\ (F) = g(f(F)) = g(F') = F'' \Rightarrow h(F) = F''$$
$$\Rightarrow F \equiv F''$$

Indicamos cual es el subgrupo G de T.R. con el cual trabajamos y que verifica los axiomas de congruencia.

PARA LA GEOMETRIA EUCLIDEANA

I) CASO EN QUE $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$G = \left\{ f:\ f = L_a \overset{\overset{\text{composición}}{\uparrow}}{\oplus} Rot_\sigma \ a \in \mathbb{R}^2 \quad \sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

$L_a(x) = a + x$ $\quad (x \in \mathbb{R}^2)$ $\quad$ (Traslación según un vector a)

$$Rot_\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\ \operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \underset{\in\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x\cos\sigma - y\operatorname{sen}\sigma \\ x\operatorname{sen}\sigma + y\cos\sigma \end{pmatrix}$$

ó

$$R\tilde{o}t_{\tilde{\sigma}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\tilde{\sigma} & -\ \operatorname{sen}\tilde{\sigma} \\ \operatorname{sen}\tilde{\sigma} & \cos\tilde{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\cos\tilde{\sigma} - y\operatorname{sen}\tilde{\sigma} \\ x\operatorname{sen}\tilde{\sigma} + y\cos\tilde{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ \text{funciones de } \mathbb{R}^2 \text{ en } \mathbb{R}^2 \text{ que preservan distancia} \right\} =$$

$$= \left\{ f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } d(f(x),\ f(y) = d\ (x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

. Hay que probar que se cumplen los axiomas.

. La demostración se propone como ejercicio en Hoffman, y en el Fleming está desarrollada con cuentas.

PARA LA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

II.- CASO EN QUE Π ES EL SEMIPLANO DE POINCARE

(1) $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : I_m\ (z) > 0\}$
esto es, el plano en el modelo de Poincaré, está constituído por el semiplano euclideano y > 0. O sea se conviene en suponer un par de ejes ortogonales x e y; y representar cada punto por el número complejo: $z = x + i\ y$.

(2) Las rectas son las semicircunferencias cuyo centro está sobre el eje x, y como caso límite, las rectas perpendiculares al eje x. O sea:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{matrix} \text{Semicircunferencias de centro en el eje real, y las} \\ \text{semirectas euclideanas, perpendiculares al eje x} \end{matrix} \right\}$$

(3) Los movimientos, son las TRANSFORMACIONES

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{tq.} \qquad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con la condición de que a,b,c,d sean reales y ad-bc > 0.

. O bien podemos decir que si se tiene una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{con} \qquad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq 1$$

se pueden construir las homografías, las transformaciones de Mobious:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

. Se pueden comprobar los resultados:

$$I_m\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{I_m\ (z)}{|cz + d|^2}$$

y como consecuencia de estas cuentas, se tiene:

$$\text{Si } z \in \Pi \Rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \in \Pi$$

. Además, se tiene otra función natural $f_o(z) = -\overline{z}$ (que toma un z, lo conjuga y lo rota).

Y las funciones:

$$\left.\begin{array}{ll} f_A: \quad \Pi \longrightarrow \Pi & \qquad f_A = \dfrac{az + b}{cz + d} \\ f_o: \quad \Pi \longrightarrow \Pi & \end{array}\right\} \text{biyectivas}$$

. Entonces el conjunto generado por todas las f_A y por f_o con la operación $f_A \circ f_B = f_{AB}$, <u>es grupo</u>.

Llamamos:

G_{NE} al subgrupo de biyecciones de Π generado por f_o

Y $\{f_A : A \longrightarrow \}$

Este G_{NE} satisface el AXIOMA DE CONGRUENCIA, se puede encontrar el desarrollo de esto, con bastante detalle, en NOTAS DE GENTILE, REVISTA DE EDUCACION Y TAMBIEN EN HERRERO.-

CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS DE CONGRUENCIA

. Recordemos que trabajamos con el conjunto Π llamado plano; que de el aislamos la familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos R que llamamos rectas, y que cumplen los axiomas:

. **Axioma de incidencia**

1) Para todo punto del plano, existe una recta que lo contiene.
2) Un par de puntos distintos determinan una única recta.

. **Axioma de orden**

Toda recta $R \in \mathcal{R}$ esta munida de un orden; esto es fijado un punto en ella, siempre hay un punto más lejos y uno més cerca y dado dos puntos siempre hay uno en el medio.

Nota: Con estos conceptos podremos hacer una teoría sobre ángulos ordenados.

. Recordemos además, el AXIOMA CONG. (Versión 0) (pág. 31) que nos hablaba de la existencia de una familia G (o subgrupos) de funciones f biyectivas, llamadas transformaciones rígidas (T.R.) que cumplen ciertas propiedades.

1) Transforman rectas en rectas f (recta) = recta
2) Transforman semirrectas en semirrectas.

f (semirrecta) = semirrecta.

3) **AXIOMA DE RIGIDEZ**

i) f no destruye longitudes de segmentos.
ii) f no destruye medidas de ángulos.

4) **EXISTENCIA DE T.R.**

Fijadas semirrectas y semiplanos correspondientes existe una única T.R., que transforma recta en recta y semiplano en semiplano.

. Entonces, si tomamos una T.R. que llamamos T $(T \in G)$ podemos definir:

CONGRUENIA DE FIGURAS

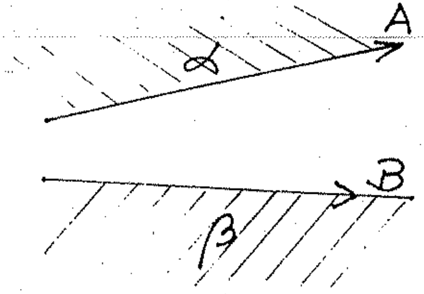
O sea decimos cuando una figura se puede poner encima de otra.

Sean F_1, $F_2 \subset \Pi$ $\underset{\text{(congruentes)}}{F_1 \equiv F_2} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists\, T \in T.R. : T(F_1) = F_2$

Y el Axioma de Rigides lo enunciamos:

$$\text{Si } T \in T.R.,\ \underset{(\text{segmento})}{\overline{ab} \equiv \overline{cd}} \text{ y } \left.T(\overline{ab}) \ \underset{\text{ó}\quad \ge}{\le} \ \overline{cd}\right\} \Rightarrow T(\overline{ab}) = \overline{cd}$$

<u>Y el AXIOMA DE EXISTENCIA</u> (o AXIOMA de CONSTRUCCION) lo reenunciamos así:



Dadas las semirrectas <u>A</u> y <u>B</u>, que fijan los semiplanos:

α semiplano de la recta determinada por A.

β semiplano de la recta determinada por B.

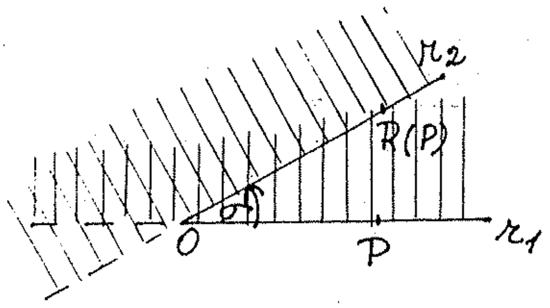
Entonces:

$$\exists! \qquad T \in T.R.: \quad \begin{aligned} T(\alpha) &= \beta \\ T(A) &= B \end{aligned}$$

(El armado de este axioma, se debe al poder de síntesis de Hilbert).

En éste marco y con el AXIOMA DE EXISTENCIA (4), definiremos **ROTACION.**

<u>Intuitivamente: Rotación de centro 0 y ángulo σ</u>



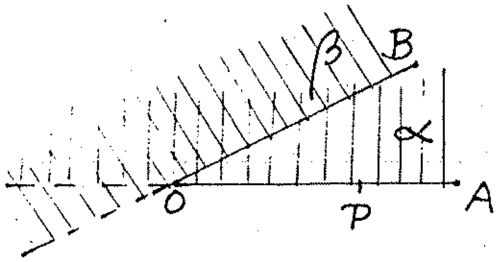
La $R_{0,\sigma}$, lleva por definición la semirrecta de orígen 0 (r_1) que contiene al punto p, en la semirrecta r_2 que contiene al punto R(p) ("rotado de p"); y el semiplano que determina r_1, se transforma en el semiplano que determina r_2.

Esto es válido para toda semirrecta de orígen 0.

Cómo se vincula ésta idea intuitiva con el axioma de existencia?.

<u>Formalmente</u>

Fijamos la construcción anterior, el origen 0, un ángulo de vértice 0; entonces quedan fijados.



$\overleftrightarrow{\alpha}$ semiplano de A que contiene B.

β semiplano de la recta $\overleftrightarrow{B}$, que no contiene a la recta $\overleftrightarrow{A}$.

Entonces el axioma dice:

existe una única transformación

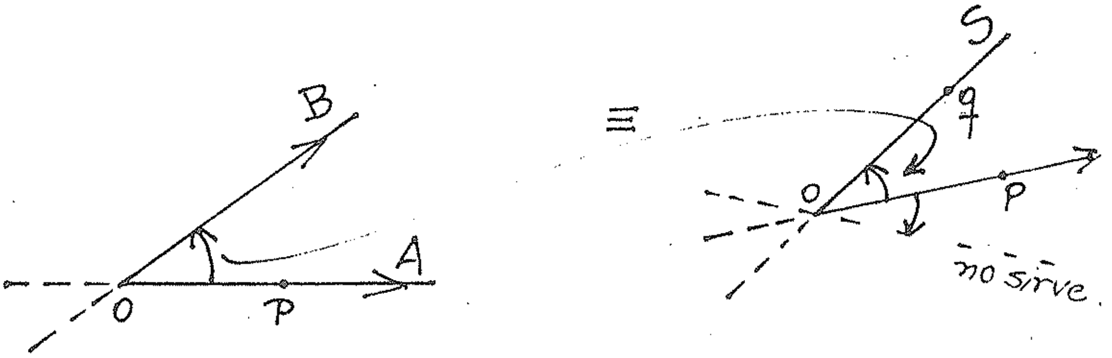
rígida $T_{O}{\nearrow A \atop \searrow B}$ = T que depende del punto 0 y de las rectas A y B tal que transforma la recta A en la B y el semiplano α en el β.

∃! T∈ T.R. T =$T_{O'}{\nearrow B(p) \atop \searrow A}$:$T(A)=B$
$T(\alpha)=\beta$

Hay un <u>Teorema</u> que muestra como calcular $T_{O'}{\nearrow B(p) \atop \searrow A}$ nosotros no lo demostramos.

Dibujemos, para interpretar este resultado:

Dibujamos la seirrecta $\overleftrightarrow{op}$, y el ángulo de lado $\overleftrightarrow{op}$ congruente al ángulo $\widehat{AB}$ y con la "misma orientación" (sea horaria o anti-horaria).



<u>Nota</u>: Podríamos pensar que la orientación del ángulo de lado $\overrightarrow{op}$ congruente con el $\widehat{AoB}$, es la horaria; pero esa orientación <u>no sirve</u>, porque?.

En la semirrecta S se "<u>marca q</u>" tal que $\overline{oq} \equiv \overline{op}$

<u>Conclusión</u>:

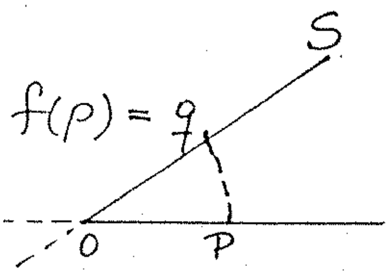
$$q = T_{O'}\left\langle {B \atop A} \right. (p)$$

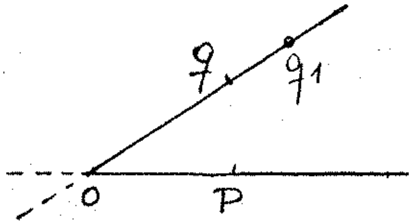
La demostración de éstre resultado, implica "gran sufrimiento".

"<u>Marca q</u>" quiere decir tomar cualquier transformación rígida f que lleva $\overrightarrow{op}$ en $\overleftrightarrow{S}$y definir q = f(p).

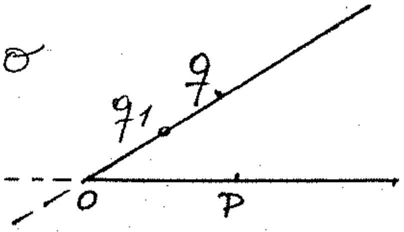
Ahora nos hacemos la pregunta si se cambia la T.R. f se obtienen, quizás, distintos q?

. La respuesta es <u>no</u>. Demostramos.





ó



. Supongamos que existen dos T.R. f y g que llevan $\overrightarrow{op}$ en S; es decir: $f(\overrightarrow{op}) = g(\overrightarrow{op}) = \overleftrightarrow{S}$

tales que: por f obtenemos q : $f \rightsquigarrow q = f(p)$

g obtenemos q_1: $g \rightsquigarrow q_1 = g(p)$

. Si tenemos en cuenta el AXIOMA DE ORDEN (pág. 16) en su parte ii) (tricotomía), podemos decir que la recta $\overleftrightarrow{S}$ está munida de un orden total y vale:

$$0 \leq q \leq q_1 \quad ó \quad 0 \leq q_1 \leq q \qquad (*)$$

. Usando el teorema que decía:

$$h \in T.R. \Rightarrow h\ (\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{h(a)\ h(x)}$$

(h (semirrecta $\overrightarrow{ax}$) = semirrecta de orígen h(a) y contiene al punto h(x).

Podemos decir:

$$f(\overrightarrow{op}) = S = \overrightarrow{oq} \longrightarrow f(0) = 0$$

$$g(\overrightarrow{op}) = S = \overrightarrow{oq_1} \longrightarrow g(0) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{oq} = \overline{f(0)f(p)} \underset{f\in T.R.}{=} f(\overline{op}) \underset{g}{\equiv} \overline{op} \\ \overline{oq_1} = \overline{g(0)g(p)} \underset{g\in T.R.}{=} g(\overline{op}) \underset{g}{\equiv} \overline{op} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{oq} \equiv \overline{oq_1} \equiv \overline{op}$$

Y por las desigualdades: (*) tenenmos:

$$\overline{oq} \leq \overline{oq_1} \quad ó \quad \overline{oq_1} \leq \overline{oq}$$

Entonces, por el Axioma de rigidez podemos decir que:

$$\overline{oq} = \overline{oq_1}$$

luego:

$$\underline{q = q_1} \qquad (cqd)$$

<u>Nota</u>: Para "<u>comprobar el proceso</u>" que hemos seguido, se puede hacer el mismo esquema, para ángulos; esto es cambiar segmentos por

ángulos.

Comenzamos el proceso "marcando ángulos".

Los pasos que hemos seguido son:

. Idea intuitiva de rotación.

. Demostración formal (abstracta)

. Comprobación que el proceso seguido es efectivamente una rotación (obtenido a partir del axioma).

Lo difícil en esto, es el punto de partida (o de arranque); no siempre es claro cual es la "gallina" (≡ axioma), de la cual se obtendrán "los huevos" (≡ resultados).

En la determinación de estos puntos de partida, (los AXIOMAS) aparece la genialidad de HILBERT.

Todas las T.R. se pueden obtener más o menos de la misma forma.

LA SIMETRIA CENTRAL

De este conjunto de T.R. obtenemos los resultados que demostraremos al final.

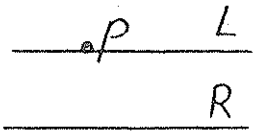
a) Todo segmento tiene punto medio (Tirao, Teor. 1.9, pág. 17 no demostrado).

b) Para todo punto p exterior a una recta R, siempre (.) existe al menos una recta L que pasa por p y es paralela a R.

$\forall p \notin R \quad \exists L$: L pasa por p y L // R.

(.) En la Geometría Euclideana existe una sola.

En la Geometría No Euclideana, por ejemplo en plano de Poincaré, existen infinitas.



c) Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

(Tirao, Teor. 1.7, pág. 16 - No demostrado).

LA SIMETRIA AXIAL

De estas T.R. sacamos el resultado:

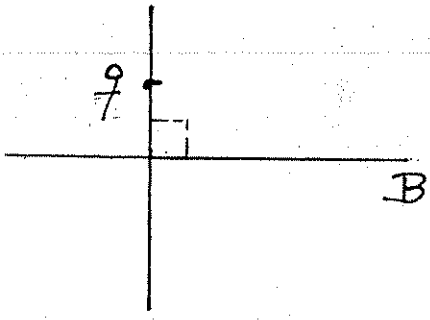
Dada la recta B y el punto p en el plano Π, <u>existe</u> una única recta L que pasa por p y es perpendicular a B, es decir:

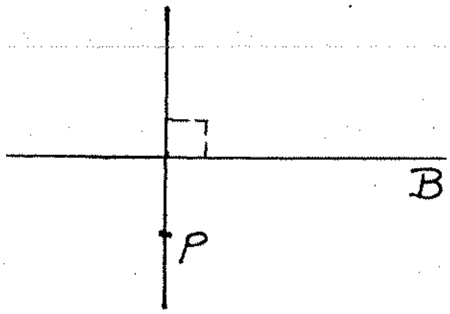
dada B y $p \in \Pi$, $\exists!$ L tq $p \in L$ y $B \perp L$

Decimos:

B ⊥ L (B perpendicular a L) ⇔ {
B y L son incidentes (.)
los cuatro ángulos determinados por B y L son congruentes.

((.) Dos rectas son incidentes si se intersectan en un solo punto).





. Los axiomas que seguimos usando (o que "están en danza") son Incidencia - Orden - Congruencia.

Observación: La existencia de perpendicularidad a una recta por un punto del plano, nada tiene que ver con el AXIOMA DE LAS PARALELAS.

Esto no está claro en el libro de REPETTO).-

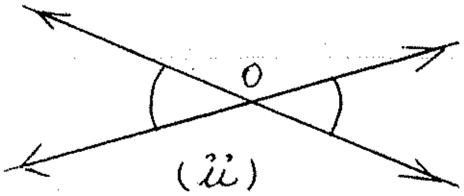
Se llama ángulo recto a todo ángulo congruente con uno de sus adyacentes. (Tirao, Def. 1.19, pág. 18) (*).

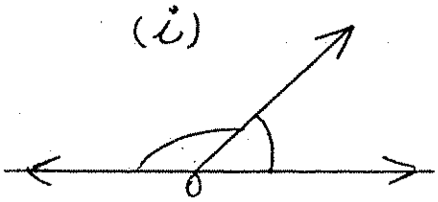
(*) {
(Las rectas que contienen a los lados de un ángulorectose llaman rectas perpendiculares).
(La perpendicularidad es una relación simétrica).

Nota: (Def. 1.8, pág. 10, Tirao)

i) Dos ángulos son adyacentes si tienen un lado común y los otros dos son semirrectas opuestas.

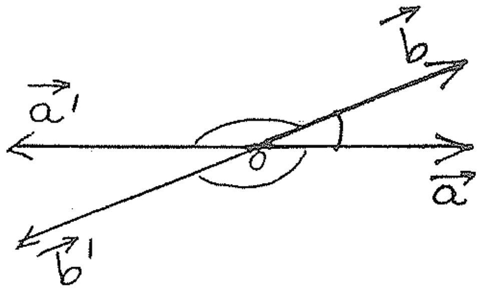
ii) Dos ángulos son opuestos por el vértice si los lados de uno de ellos son las semirrectas opuestas de los lados del otro.





Angulo adyacente al $a\hat{o}b$

Dado el ángulo $a\hat{o}b$; esto es la unión de las semirrectas $\overrightarrow{0a}$, $\overrightarrow{0b}$ (no coincidentes, ni opuestas) y con el mismo orígen 0; existen las semirrectas opuestas $\overrightarrow{0a}'$ a la $\overrightarrow{0a}$ y $\overrightarrow{0b}'$ a la $\overrightarrow{0b}$, porque por el axioma de orden podemos pensar que dados 0, $\vec{a}$ y $\vec{B}$ existen puntos "para el otro lado" de 0 que "generan" las $\vec{a}'$ y $\vec{b}'$.



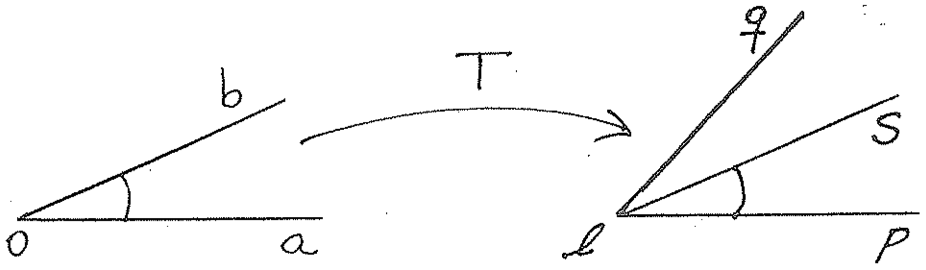
Los ángulos $a'\hat{o}b$, $b'\hat{o}a$ son adyacentes al $a\hat{o}b$ $\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ $a'\hat{o}b$, $b'\hat{o}a$ son congruentes.

(Los ángulos adyacentes desde el punto de vista de medida son indistintos).

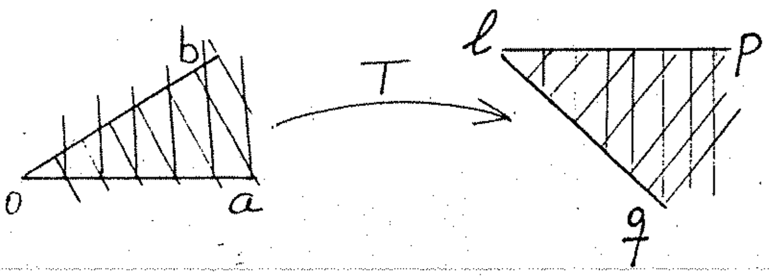
Observación: Vemos que se puede hablar de perpendicularidad sin tener transportador.

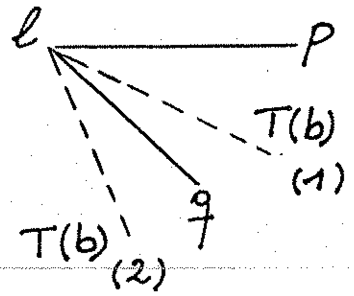
Porque al tener las T.R. (transformaciones rígidas) (que son nuestros "comparadores") podemos comparar ángulos.

$a\hat{o}b < p\hat{l}q$ si existe $T \in$ T.R. tal que $T(a\hat{o}b) = s\hat{l}q$ con s interior al $p\hat{l}q$.



"Voy a probar" que es posible incluir el ángulo $a\hat{o}b$ dentro del $p\hat{l}q$ al revés):





Se pueden presentar las dos posibilidades:

(1) $T(b) \in S(q\hat{l}p)$ ó $T(b) \notin S(q\hat{l}p)$ (2)

(sector angular)

TEOREMA:

CASO 1: $lT(b) \leq S(q\hat{l}p)$. (1)

CASO 2: $lq \leq S(p\hat{l}\,T(b))$ (2)

Demostración: intuitivamente es obvia, pero .... terrible y horrible usando los axiomas de orden.

Si se da el caso 1 entonces $a\hat{o}b < p\hat{l}q$

Si se da el caso 2 entonces $a\hat{o}b > p\hat{l}q$

Nota: Si se hace lo mismo para orden de segmentos se tendría la evaluación de procesos.

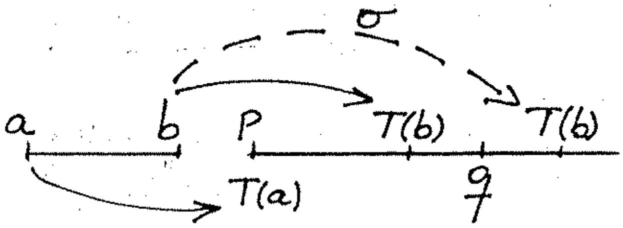
Los pasos a seguir serían:

. Definir orden de segmentos.

. Comprobar tricotomía.

(Apoyarse en el Axioma de Rigidez)

(Demostraciones no triviales)



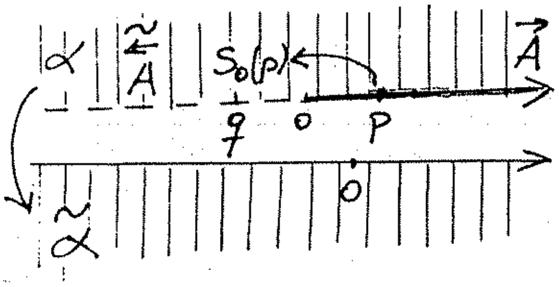
SIMETRIA CENTRAL

Explicamos lo que hace (intuitivamente)

Fija el centro 0 y calcula $S_o(p) =$

Dibuja la semirrecta $\overrightarrow{op}$, el segmento $\overline{op}$, y luego la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{op}$, y sobre ella se marca un punto p tal que: $\overline{oq} \equiv \overline{op}$

$S_o(p) = q$



Por la T.R. la semirrecta $\overrightarrow{op}$ es llevada a la opuesta y el semiplano α en el $\tilde{\alpha}$.

Esto para todas las semirrectas de

orígen 0.

Formalmente, como se abstrae esto:

Fijo $\underline{\underline{0}}$ y $\vec{A}$ semirrecta de orígen 0

y α = semiplano de $\overleftrightarrow{A}$

Por el axioma de congruencia:

$\exists!\ S_o \in TR$ tal que $S_o(A)$ = opuesta a $\vec{A} = \tilde{A}$

$S_o(\alpha)$ = opuesto de $\alpha = \tilde{\alpha}$

<u>TEOREMA</u>:

i) $S_o(x) = x \Rightarrow x = 0$ (es decir el único punto fijo de S_o es 0)

ii) S_o^2 = identidad

iii) Si B es una semirrecta de orígen 0, la $S_o(B)$ es la opuesta de B. (para toda B).

$\forall$ B semirrecta orígen 0 $\Rightarrow S_o(B)$ = opuesta de B.

("Aquí recuperamos la definición intuitiva de S_o").

iv) Si L es una recta.

$0 \notin L \Rightarrow S_o(L) \mathbin{//} L$ y disjunta de L

i*) $x = 0 \Rightarrow S_o(0) = 0!$

(decimos que S_o lleva semirrectas de origen en origen:

$S_o(0) = 0$ pues $S_o(A) = \tilde{A}$ opuesta.

$$S_o(\overrightarrow{pl}) = \overrightarrow{S_o(p)\ S_o(l)}$$

entonces $S_o(0)$ = origen de $\tilde{A} = 0$

<u>Demostración</u>: i) $S_o(x) = x \Rightarrow x = 0$

Si $x \in \Pi$ se pueden dar las posibilidades

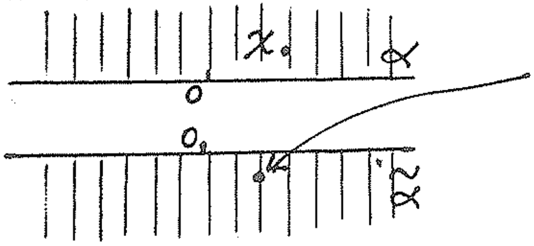
$\Pi = (A \cup \tilde{A}) \cup (\alpha \cup \tilde{\alpha})$

1) $x \notin A \cup \tilde{A}$

2) $x \in A$

3) $x \in \tilde{A}$

1) Si $x \notin A \cup \tilde{A} \Rightarrow x \in \alpha$ o $x \in \tilde{\alpha}$



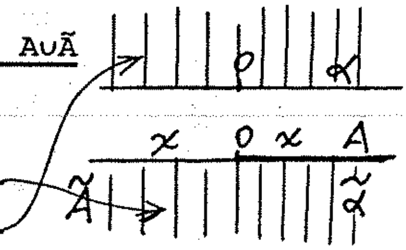
aquí va a parar la imagen $S_o(x)$ por def. de S_o.

Ahora $S_o(\alpha) = \tilde{\alpha}$ y $S_o(\tilde{\alpha}) = \alpha \Rightarrow S_o(y) \neq y \quad \forall y \in \alpha \cup \tilde{\alpha}$.

Como por hipótesis, $S_o(x) = x$

$$\Pi = (A \cup \tilde{A}) \cup \underset{[*]}{(\alpha \cup \tilde{\alpha})}, \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \notin \text{semiplano } \alpha \\ \quad x \notin \text{semiplano } \tilde{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} x \in \text{semirrecta } A \\ \text{o} \\ x \in \text{semirrecta } \tilde{A} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ x está en la unión disjunta $A \cup \tilde{A}$, es decir: $\{\underline{x \in A \cup \tilde{A}}$
($\tilde{A} = S_o(A)$ por def. de S_o)



[*] [Si $x \in \alpha$, no puede ser, pues S_o lo manda aquí
$x \in \tilde{\alpha}$, no puede ser, pues S_o lo manda aquí

[**] x ∈ semirrecta A, no puede ser, pues S_o lo manda a $\tilde{A}$

entonces x, solo puede estar en 0.]

Formalmente esto es:

Si $x \in A \cup \tilde{A}$ puede ocurrir:

[**] 1) $x \in A$ y $x \neq 0$ $\Rightarrow S_o(x) \in \tilde{A} \Rightarrow S_o(x) \neq x$ (contra la hipótesis absurdo).

ó

2) $x \in \tilde{A}$ y $x \neq 0$ $\Rightarrow S_o(x) \in A \Rightarrow S_o(x) \neq x$ (contra la hipótesis absurdo).

Luego la única posibilidad para x es que sea $\underline{x = 0}$.

ii) S_0^2 = identidad (ó $S_o \circ S_o$ = identidad)

Como probamos que dos funciones son iguales, sin evaluar las funciones?.

Una manera de hacerlo sería ver que $\forall x$: $S_o(S_o(x)) = x$.

. En lugar de ver esto, usamos el Axioma de Congruencia más propiedades de funciones.

. Buscamos dos T.R., T y S, con ciertas propiedades y tratamos de probar que T=S.

. El Axioma de Congruencia dice: encuentre semirrectas

A_1 y B, α plano de $\overleftrightarrow{A_1}$

β plano de $\overleftrightarrow{B}$

y verifique que $T(A_1) = B$ $\qquad$ $S(A_1) = B$
$T(\alpha) = \beta$ $\qquad$ $S(\alpha) = \beta$.

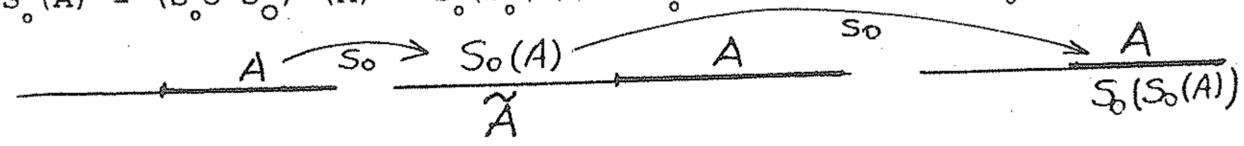
Esto basta, pues el Axioma dice <u>existe una única función</u> f que lleva A en B y α en β.

Entonces por la unicidad T = S como funciones.

A_1 = A que usamos para definir S_o.
B = A que usamos para definir " .
α = α que usamos para definir " .
β = β que usamos para definir " .

Entonces: ident. (A_1) = ident (A) = A = B
ident. (α) = $\alpha = \beta$

$S_o^2(A) = (S_o \circ S_o)\ (A) = S_o(S_o(A)) = S_o(\tilde{A}) = A = B \quad : S_o^2 = \text{Ident.}$



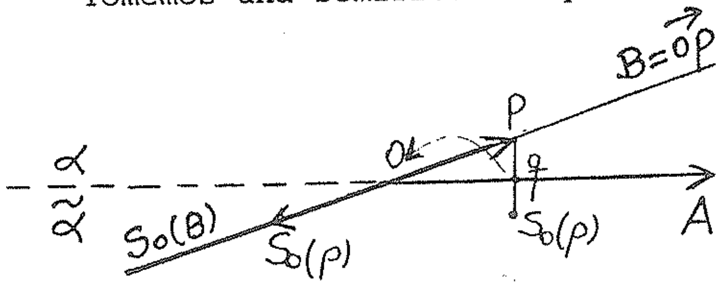
Si se considera un semiplano α, se tiene un proceso similar:

$$S_o(S_o(\alpha)) = S_o(\tilde{\alpha}) = (\tilde{\tilde{\alpha}}) = \alpha = \beta.$$

Pues recordemos que: si T ∈ T.R.
T (semirrecta L) = semirrecta H ⇒ $T(\tilde{L}) = \tilde{H}$
T (semiplano α) = semiplano E ⇒ $T(\tilde{\gamma}) = \tilde{E}$.

Nota:
Para simetría axial, hay un teorema análogo, la demostración es esencialmente la misma.

iii) Si B es una semirrecta de orígen 0 ⇒ $S_o(B)$ es opuesta de B:
. Si B = A no hay nada que probar, se obtiene por def. de S_o.
Idea (se fija un elemento y despues se construye la opuesta).
Tomemos una semirrecta B y buscamos la semirrecta



$\overrightarrow{OS_o(p)}$ = opuesta a $\overrightarrow{op}$
= $S_o(B)$
esto es lo mismo que decir que p, o, $S_o(p)$ estan en la misma recta y en el orden $S_o(p) < 0 < p$.

Digamos que $p \in \alpha \Rightarrow S_o(p) \in \tilde{\alpha}$

def de S_o

única que lleva α en $\tilde{\alpha}$. (S_o lleva a p en $S_o(p)$.

. Veamos que pasa con la intersección $\overline{p\ S_o(p)} \cap \overleftrightarrow{A}$

El Axioma de Orden nos dice que el segmento $\overline{p\ S_o(p)}$ corta a la semirrecta $\overleftrightarrow{A}$, en q: $\overline{p\ S_o(p)} \cap \overleftrightarrow{A} = \{q\}$. (1)

$\{S_o(q)\} = ?$

Ahora $S_o(\overline{p\ S_o(p)} \cap \overleftrightarrow{A}) = S_o(\overline{p\ S_o(p)} \cap S_o\overleftrightarrow{(A)}$ (*)

S_o es biyectiva.

Calculemos cada intersecando:

$S_o(\overline{p\ S_o(p)} = \overline{S_o(p)\ \underset{p}{S_o(S_o(p)}} = p\ S_o(p)$ (2)

Con la $\overleftrightarrow{(A)}$ pasa lo mismo:

$S_o\ \underbrace{\overrightarrow{(A)} = (\text{recta}}_{A\ \subset\ \overleftrightarrow{A}}\ \text{que contiene a } \underbrace{S_o(A)}_{\tilde{A}}\ ) = \overleftrightarrow{A}$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (*): tenemos:

$$\underbrace{\{S_o(q)\}} = \dots\dots\dots\dots = \overline{p\ S_o(p)} \cap \overleftrightarrow{A} = \{q\}$$

por(1)

conjuntos de 1 elemento

luego:

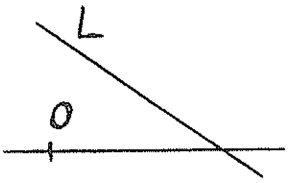
$S_o(q)\ q \Rightarrow \underline{q = 0}$ (4) por parte i) del teorema.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Además, si por (1)} & \overline{p\ S_o(p)} \cap \overleftrightarrow{A} = \{q\} \\ \text{y por (4)} & q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q = 0 \in \overline{p\ S_o(p)}$$

entonces hemos obtenido que p, 0, $S_o(p)$ están alineados;
Y p y $S_o(p)$ opuestos (con respecto al 0)
esto es: $S_o(p) < 0 < p$.

Nota: El tipo de cuentas realizadas en (*) son comunes en simetría axial, para evaluar procesos. Hay 4 o 5 lugares donde se usa el mismo razonamiento.

iv) L recta, $0 \notin L \Rightarrow S_o(L)$ es paralela a L y disjunta de L.



Supongamos:

$$S_o(L) \cap L \neq \phi \begin{cases} \nearrow 1)\ S_o(L) = L \\ \searrow 2)\ S_o(L) \cap L = \{q\} \end{cases}$$

2) Si $S_o(L) \cap L = \{q\} \Rightarrow q \in L$ y $q \in S_o(L)$. Igual que en (*) de iii) sacamos que $S_o(q) = q \Rightarrow q = 0$
luego $q = 0 \in L$ absurdo (hipótesis $0 \notin L$).

1) Sea $p \in L$, por iii) p y $S_o(p)$ están sobre la misma recta p y $S_o(p)$ están en L entonces, por Axioma de incidencia "la misma recta es L" $\Rightarrow 0 \in L$ absurdo.

Observación: La demostración de éste teorema es pesada, pero muestra que la potencia del Axioma de Congruencia ayuda a confirmar lo intuitivo.

EXISTENCIA DE PUNTO MEDIO

TEOREMA: TODO SEGMENTO TIENE PUNTO MEDIO (UNICO)

m es punto medio del segmento $\overline{pq} \xleftrightarrow[\text{def.}]{} \begin{cases} m \in \overline{pq} \\ \overline{pm} \equiv \overline{mq} \end{cases}$
(congruente)

I.- UNICIDAD

Si m_1 y m_2 son puntos medios $\Rightarrow m_1 = m_2$.
(No demostramos)
Idea: Usar el Axioma de Rigidez
Probar $Sm_1 = Sm_2 \Rightarrow m_2 = S_{m_2}(m_2) = S_{m_1}(m_2)$
entonces eso significa que m_2 es punto fijo de S_{m_1}.
Luego por i) del Teorema pág. 44 $m_1 = m_2$.

II.- EXISTENCIA

. Sea el segmento $\overline{pq}$, por el axioma de orden, existe un $l \in \overleftrightarrow{pq}$ (recta que determinan p y q);

anterior al p y q: $l < p < q$

. Tomamos la única $T \in$ T.R. tal que: $T(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{ql}$

y $T(\alpha) = \tilde{\alpha}$

por el Axioma de Congruencia, tal "especímen" existe.
("Esto nos lo dan los dioses")
(α es un semiplano de $\overrightarrow{pq}$, fijado; que por Axioma de Congruencia existe).

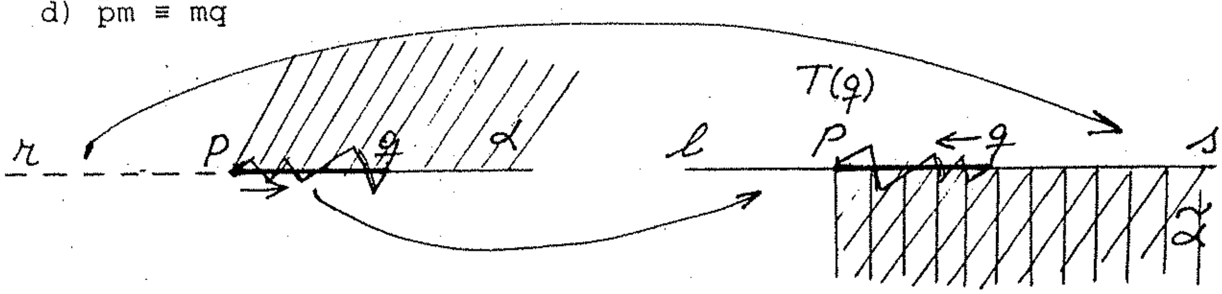
. Encaramos ahora, las etapas "duras" de la demostración:

a) T^2 = identidad

b) T tiene un punto fijo m

c) $m \in \overline{pq}$

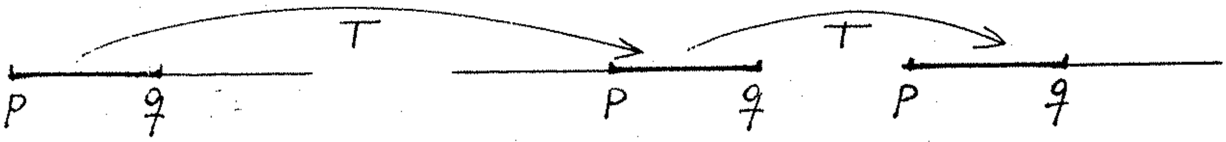
d) $\overline{pm} \equiv \overline{mq}$



Dibujamos el segmento $\overline{pq}$, la T lo transforma en $\overline{pq} \subset l$, además $T(///)_{\alpha}$ $= \#_{\tilde{\alpha}}$

$T(\text{semirrecta } \overrightarrow{rp}) = \text{semirrecta } \overrightarrow{qs}$

a) T^2 hace lo siguiente:
"Lleva una semirrecta en si misma".



(.) "Pensamos que el segmento $\overline{pq}$ estaba dentro del $\overline{qp}$, pero por el Axioma no puede esta uno dentro del otro, tienen igual longitud.
Entonces son <u>iguales</u>".

(p va al q: $T(p) = q$ y q va al p: $T(q) = p$

(..) $T^2(p) = T(T(p)) = T(q) = p \Rightarrow (T^2 = \text{Identidad})$.

. Expresamos formalmente, lo dicho intuitivamente.

$T(p) = q$ porque $T($orígen de $\overrightarrow{pq}) =$ orígen de $\overrightarrow{ql}$.

$T(q) \in \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{ql}$ // $T(q) \leq p < q$ \\\\ $p \leq T(q) < q$ (en la semirrecta el orden es total)

$\Rightarrow \overline{T(q)\ q} \supset \overline{pq}$ o $\overline{T(q)\ q} \subset \overline{pq}$

Además:

$\overrightarrow{pq} \underset{T}{\equiv} T(\overline{pq}) = \overline{T(q)\ T(p)} = \overline{T(q)q} \Rightarrow \underline{T(q) = p}$

Ax. de rigidez

$T^2(pq) = T(T(\overrightarrow{pq})) = T(\overrightarrow{qp}) = T(\overline{qp} \cup \overrightarrow{pl}) = T(\overline{qp}) \cup T(\overline{pl})$

$= \overline{pq} \cup \overrightarrow{ql'} = \overrightarrow{pl'} = \overrightarrow{pq}$

Luego T^2 = Identidad

"T^2 lleva un semiplano α en si mismo".

$T^2(\alpha) = T(T(\alpha)) = T(\tilde{\alpha}) = \tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha \Rightarrow$

Axioma de Congruencia T^2 = identidad.

---

b) T tiene un punto fijo m.

Sea $\alpha \neq \phi$, fijemos $x \in \alpha$, entonces por definición de T

$T(x) \in \tilde{\alpha}$ y por Axioma de Orden $\overline{x\ T(x)} \cap \overleftrightarrow{pq} = \{m\}$

$\{T(m)\} = T(\overline{xT(x)} \cap \overleftrightarrow{pq}) = T(\overline{xT(x)}) \cap T(\overleftrightarrow{pq}) =$

$= \overline{T(x)\ \underbrace{T\ T(x)}_{x}} \cap \overleftrightarrow{T(p)\ T(Q)} = \overline{T(x)\ x} \cap \overleftrightarrow{pq} = \{m\}$

Entonces $T(m) = m$.

(Vemos que esta demostración implica un nuevo tipo de algebra donde todo se traduce en componer funciones).

c) $m \in \overline{pq}$ Demostrar en forma similar a i) del Teor. pág. 44

$(S_o(x) = x \Rightarrow x = 0)$

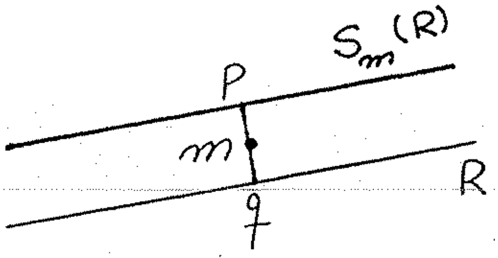
d) $\overline{pm} \equiv \overline{mq}$, es decir $T(\overline{pm}) = \overline{qm}$

$T(\overline{pm}) = \overline{T(p)\ T(m)} = \overline{qm}$.

EXISTENCIA DE PARALELAS A UNA RECTA DADA

PROPOSICION: Para todo punto p exterior a una recta R, siempre existe al menos una recta L que pasa por p y es paralela a R.

Es decir: Dada la recta R, $\forall\ p \notin R\ \underline{\underline{\exists}}$ recta L: $p \in L$, y $L//R$



a) <u>Demostración</u>: Sea R, $p \notin R$ y $q \in R$, por lo demostrado antes (pág.48) el segmento $\overline{pq}$ tiene punto medio $\underline{\underline{m}}$. Y además $\overline{pm} \equiv \overline{mq}$, y si agregamos el axioma de rigidez (que nos permite asegurar que la T.R. S_m no destruye la longitud de los segmentos).

Resulta: $S_m(q) = p$

(el transformado por T.R. S_m (simetría con respecto a m) de q es p).

b) Por iv) del Teorema pág. 44

Podemos afirmar:

$$m \notin R \Rightarrow S_m(R)\ //\ R$$

luego $L = S_m(R)$.

PANTALLAZO SOBRE LA SUCESIVA INCLUSION Y USO DE LOS AXIOMAS PARA DEMOSTRAR PROBLEMAS DE GEOMETRIA.-

Síntesis de conceptos vistos anteriormente.-

. Se mostró como se usaban las transformaciones rígidas (T.R.) y un nuevo tipo de algebra que se traducía en la composición de funciones para demostrar conceptos de la Geometría.

Por ejemplo en el Teor. ii) S_o^2 = identidad, se usó como probar la igualdad de dos funciones, sin evaluarlas. (pág. 44) o en Teor. b) T tiene un punto fijo m, (pág.48) se "componían" T.R., igual que funciones.

. Se hizo todo esto para mostrar este "uso novel" de los conceptos en cosas de Geometría.

. Además, hemos venido, tomando siempre como <u>punto de partida</u> un conjunto <u>Π</u> llamado <u>plano</u>; del cual aislábamos una familia $\mathcal{R}$, de subconjuntos privilegiados <u>R</u> llamados <u>rectas</u>, esto es: $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Pi)$, que satisfacen los axiomas:

INCIDENCIA (I)

1) Para todo punto del plano, existe una recta que lo contiene.
2) Un par de puntos distintos determinan una única recta.

ORDEN (0)

(I) Cada reta $A \in \mathcal{R}$, tiene un orden total: $<_A$, (esto es se satisface la ley de tricotomía).

<u>Orden</u>: (fijado un punto A, siempre hay uno más lejos y uno más cerca. Dados dos puntos, siempre hay uno en el medio.

Entonces con ésto se pudo definir:

$$\text{Segmento } \overline{XY} \underset{def.}{=} \left\{ z \in \underset{recta}{\overleftrightarrow{XY}} : \ X <_A \ Z <_A Y \right\}_{\text{con} X <_A Y}$$

Con la definición de segmento se tiene la definición de:

<u>CONVEXO</u>

Sean los conjuntos Π, A y $\Pi - A = A_+ \cup A_-$ con A_+ y $A_- \neq \phi$, entonces:

$$A_{\pm} \text{ son convexos} \Leftrightarrow (\forall\, a \in A_+,\ b \in A_- \Rightarrow \overline{ab} \cap A \neq \phi)$$

. Ahora enunciamos otro AXIOMA DE ORDEN (un Õrden y probaremos la equivalencia entre los Ax. 0 y Ax. Õ.

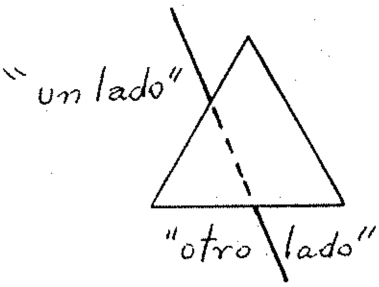
Se arranca con un plano Π, una familia

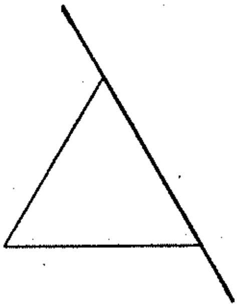
$\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{P}(\tilde{\Pi})$

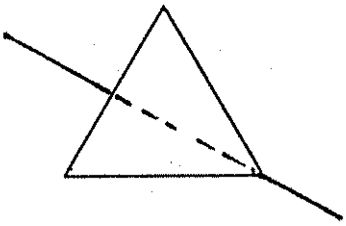
. El AXIOMA DE INCIDENCIA (I) vale.

II.- AXIOMA DE ÕRDEN (õ) (debido a Pasch).

Para todo triángulo Ty para toda recta L "que corta" a un lado de T, entonces T corta a otro lado.







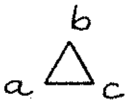
"Corta" significa lo que hemos tratado de mostrar con los dibujitos. Llega la recta a "un lado" del T, entra lo atraviesa y sale del T por "otro lado".

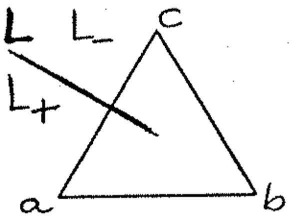
. También tenemos aquí que cada recta $A \in \mathcal{R}$ tiene un orden total y tendremos un nuevo concepto de segmento.

Si la dupla $(\Pi, \mathcal{R})$ satisface (I,0) ⟷
$(\Pi, \mathcal{R})$ satisface $(I,\tilde{0})$

es decir

(I) ⇔ (II)
(i)
(⇒) (I+0) ⇒ õ.

Sea un T:  y una recta L que pega así:



Hay que probar que: $L \cap \overline{cb} \neq \phi$

ó $L \cap \overline{ab} \neq \phi$

L"corta" al $\overline{ac}$
(o)

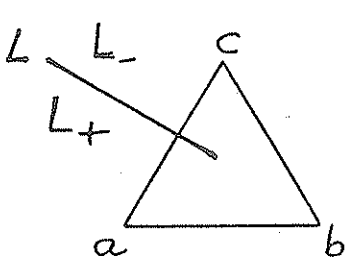
Sea $\Pi = L_+ \cup L_- \cup L$ y digamos que $a \in L_+$, $c \in L_-$; porque si: a y c pertenecieran a L_+, entonces el segmento (lado) $\overline{ac} \subset L_+$

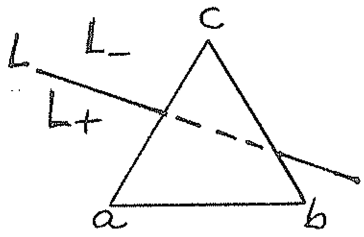
$\Rightarrow \quad ac \cap L \subset L_+ \cap L = \phi$

o sea $\overline{ac} \cap L = \phi$ absurdo, pues tomamos L "corta" a $\overline{ac}$.

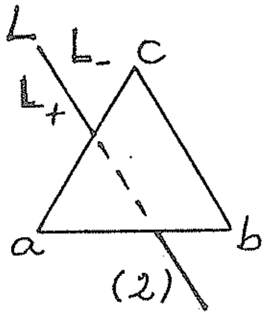
. En este supuesto, tenemos dos posibilidades para b

1) $b \in L_+$ o 2) $b \in L_-$





(1)



(2)

(1) $b \in L_+,\ c \in L_- \underset{\text{por (0)}}{\Rightarrow} \overline{bc} \cap L \neq \phi$

(2) $b \in L_-,\ a \in L_+ \underset{\text{por (0)}}{\Rightarrow} \overline{ab} \cap L \neq \phi$

Nota: Faltaría tomar todos los casos en que L toque un vértice, pero eso lleva un montón de subcasos; y no queremos "considerarlos".

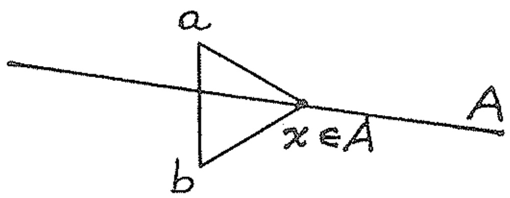
(ii)

($\Leftarrow$) $(I+\tilde{0}) \Rightarrow (I,0)$

Hay que "probar": Si A es una recta $\Rightarrow \Pi - A = A_+ \cup A_-$

$A_{\pm}$ convexos, si $a \in A_+,\ b \in A_- \Rightarrow \overline{ab} \cap A \neq \phi$

En realidad, damos la idea, a grandes razgos, de la demostración; para lograrla hay que trabajarla mucho.



Sea la recta A, a,b puntos en los distintos semiplanos que ella determina, y tomemos un punto x∈A.

Con los puntos a, b, x podemos dibujar el triángulo: T, de manera que la recta A corta al triángulo en x, entonces, como por hipótesis se cumple el Axioma de $\tilde{0}$, la A corta al otro lado del T. (pues si A pega en "un lado" "pega en otro". En realidad en ésta construcción, la recta A toca a dos lados del T que se unan en el vértice x, $\Rightarrow$ corta al otro lado $\overline{ab}$. Luego ab $\cap$ A $\neq \phi$.

Nota: Esta reformulación del Axioma de Orden (que data de principio de siglo) se llama AXIOMA DE PASCH (que data de mediados de siglo).

. Ahora si tenemos el plano Π, la familia de rectas $\mathcal{R}$ y los Axiomas: INCIDENCIA, ORDEN (0) y CONGRUENCIA (Cong.) los resultados rescatables de antes son:

1) Noción de perpendicularidad (pág. 40 Tema: Simet. Axial).

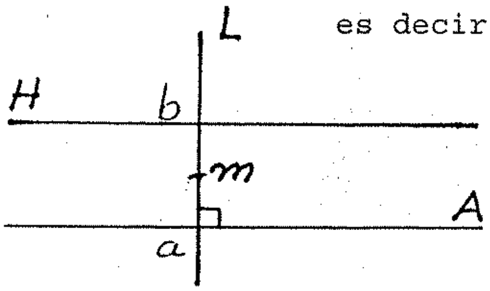
Por un punto exterior a una recta, pasa una única perpendicular: Para toda recta A, un punto $b \in \Pi$ $\exists!$ $L \perp A$ talque $b \in L$.

2) Existencia de punto medio de un segmento

3) Noción de paralelismo Por un punto exterior a una recta, pasa al menos una paralela.

$\forall$ recta A, $b \notin A$ existe al menos una recta H//A y $b \in H$

H//A (H paralela a A) significa H y A disjuntas, es decir: $H \cap A = \phi$.



Si se considera el punto m, medio del segmento $\overline{ab}$, se tiene que

$$H = S_m(A)$$

es decir, la recta H que "anda bien", es la que se obtiene como "transformada" de la A por la T.R. S_m, con respecto al punto m, que se comporta como un "espejo", puntual que refleja la H.

Entonces:

Si $H = S_m(A)$ ⟨ Si hay más de una paralela por b $\Rightarrow$ hay infinitas.
o
Hay una sola.

Esta conclusión salvo el Axioma de Orden, apareció ya en la teoría de EUCLIDES.

TEOREMA DE SACHERI - LEGENDRE

Primero decimos que es medida de ángulos.

Sea $\mathcal{A}$ = {todos los ángulos en el plano Π}

(ángulo = unión de todas las rectas no opuestas, no coincidentes)

Relación de equivalencia $\mathcal{A}$

Dos ángulos son equivalentes (congruentes)

$$\hat{xoy} \sim \hat{apq} \underset{def.}{\Leftrightarrow} \exists\ T \in T.R.\ tq\ T(\hat{xoy}) = \hat{apq}$$

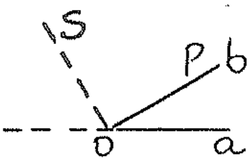
El hecho de que el conjunto de las T.R. es un grupo implica que la relación (~) definida es de equivalencia.

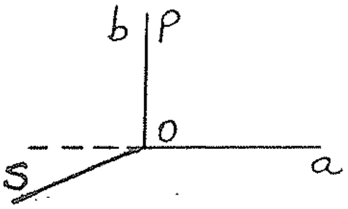
. Medida del ángulo $\hat{aob} = \mu(\hat{aob}) \overset{def.}{\equiv}$ clase de equivalencia del ángulo $\hat{aob}$ = {$\hat{rps}$ ángulos, tq $\hat{rps} \equiv \hat{aob}$}.

Luego $\mu(\hat{aob}) \in \mathcal{A}/\equiv$ (conjunto cociente, por la relación de equivalencia, def. de f).

Notemos que para medir un ángulo siempre se buscaba un número, para la medida μ; aquí ya no tenemos números, tenemos clases de equivalencia que son las que la definen en abstracto.

SUMA DE MEDIDAS DE ANGULOS





$$\mu(\hat{aob}) + \mu(\hat{prs}) \underset{def.}{=} \begin{cases} 1) \\ 2) \\ 3) \end{cases}$$

1) Definición fácil, tengo ángulos,
   Pero el problema es que no sa sabe que es un ángulo llano.

∴ Entonces se "inventa una letra" Π (ojo significa 180°) y se define:

2) $\Pi \notin \mathcal{A}/\sim$ $\quad \mu(\hat{aob}) + \mu(\hat{prs}) = \Pi \notin \mathcal{A}/\equiv$
   (Así como en Análisis se inventa el "∞" para extender, aquí se inventa esto para "distender".

3) $\mu(\hat{aob}) + \mu(\hat{prs}) \underset{def.}{=} (\mu(\tilde{a},\hat{ob}),\ \Pi) \in (\mathcal{A}/\equiv \times \{\Pi\})$

   Se inventa el par (μ,Π) que $\in$ al producto cartesiano.

O sea, para que todo ande bien, inventa los símbolos 2Π, 3Π, ... nΠ, ... y el par $(\mu\ (\widehat{aob}),\ n\Pi)$ y define suma

$$(\mu\ (\widehat{aob}),\ n\Pi + (\mu\ (\widehat{prs}),\ m\Pi)$$

TEOREMA DE SACHERI

Sea el plano Π, el conjunto de retas $\mathcal{R}$ y los axiomas de Incidencia, Orden y Congruencia.

i) Si para un triángulo Δ la suma de ángulos interiores = Π → vale para todo triángulo.

ii) Si para un triángulo Δ la suma de ángulos interiores < Π → vale para todo triángulo.

iii) Si para un triángulo Δ la suma de ángulos interiores > Π → vale para todo triángulo.

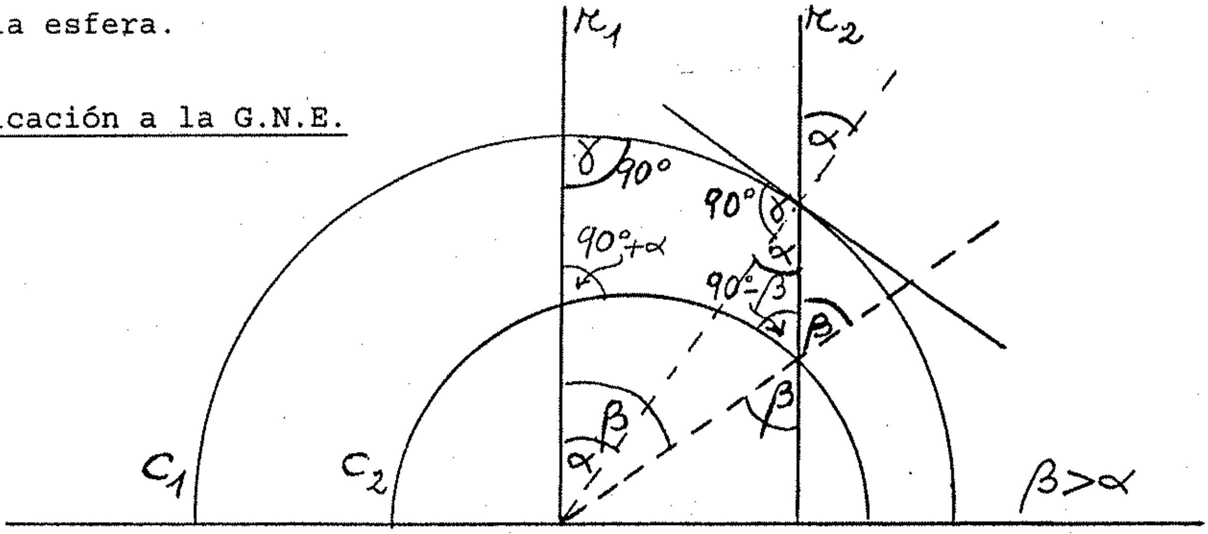
Ejemplos de estos tres casos se dan en:

i) Geometría Euclideana (G.E.)

ii) Geometría No Euclideana (G.N.E.)

iii) En la esfera.

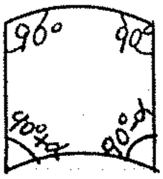
Aplicación a la G.N.E.



La suma de los ángulos interiores del cuadrilátero dibujado es =

$$90° + 90° + (90°+\alpha) + (90°-\beta) = 4 \text{ rectos} + \underbrace{(\alpha-\beta)}_{< 0 \text{ pues } \beta > \alpha} < 4 \text{ Rectos}$$

Observación:



. r_1 y r_2 son rectas euclideanas.

. c_1 y c_2 son rectas no euclideanas.

. Los ángulos α en el sentido de la G.E. son "opuestos por el vértice" o "alternos internos entre paralelas".

. Los γ = 90° pues, recordar que en una circunferencia, el radio es perpendicular al "arco de la circunferencia".

Entonces, para el cuadrilátero la suma de los ángulos interiores es < 4 R, y si se toma uno de los dos triángulos determinados por una diagonal, tiene que darse: (suma de ángulos interiores del triángulo) < 2R.

Luego por Sacheri - Legendre vale para todo triángulo.

Nota: Para "demostrara" teoremas de la G.N.E. se usan teoremas de la G.E.

. La "fórmula mágica" que hay que demostrar es:

$$\underset{\text{(medidos en radianes)}}{\Pi-(\text{suma de ángulos interiores del triángulo N.E.})} = \underset{\downarrow\text{Región triangular.}}{\iint} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

. Π es siempre mayor que el valor de la integral que es un número positivo pues la función integrando es positiva.

El Teorema de Sacheri - Legendre está demostrado en el libro "Foundations of Euclidean Geometry" de Forder (Edit. Dover), pero requiere una maquinaria matemática inventadas por Sacheri.-

TEOREMA

Sea el plano Π, el conjunto de rectas $\mathcal{R}$, los Axiomas: (Incidencia + Orden + Congruencia) + Ax. Arquímides.
Entonces: (suma de ángulos interiores) ≤ Π (≤ 2 rectos).

Demostración está en el FORDER.

Consiste en suponer que la (suma de ángulos interiores) > Π y entonces contradecir Arquímides) (aquí sí vale Ax. de Orden).
(Arquímides quiere decir, medir, dar una unidad, trasladarla y "cubrir" toda la recta).
(Arquímides vivió aproximadamente 1500 años antes que Sacheri).

Nuestras hipótesis de trabajo siguen siendo: Los conjuntos Π (plano), $\mathcal{R}$ (rectas) y los Axiomas: (INCIDENCIA, ORDEN, CONGRUENCIA) + ARQUIMIDES.

Entonces podemos definir:

MEDIDA DE UN SEGMENTO $\mu(\overline{a,b})$

Sea S = clase de los segmentos en Π.

El segmento $\overline{ab}$ es congruente con el $\overline{cd}$ si el segmento $\overline{ab}$ es equivalente con el $\overline{cd}$.

$$\overline{ab} \sim \overline{cd} \quad \text{si} \quad \overline{ab} \equiv \overline{cd}$$

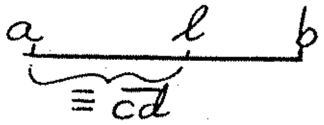
El hecho de que el conjunto de las T.R. es grupo. Implica que la relación ~ de congruencia es de equivalencia.

Al conjunto cociente S/~ lo llamamos M.S. {Medida de los segmentos}. (Las clases de equivalencia son todos los segmentos "equipolentes" a uno dado, como se dice en Física).

Medida de un segmento $\overline{ab} \overset{def.}{\equiv}$

$$\mu(\overline{ab}) = \text{clase de equivalencia que le corresponde}$$
$$= \{\overline{cd} : \overline{dc} \equiv \overline{ab}\}$$

. En M.S. hay orden (≤):



$\mu(\overline{cd}) \leq \mu(\overline{ab})$ si $\overline{cd} \equiv \overline{al} \leq \overline{ab}\}$

Se puede probar que es orden total.

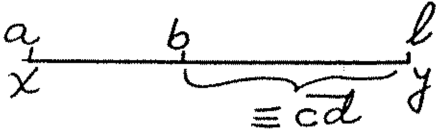
(Tenemos el Ax. de Congruencia ⇒ para la relación de orden < vale la Tricotomía).

. En M.S. hay suma: y podemos definir:

$\mu(\overline{ab}) + \mu(\overline{cd}) \underset{def.}{=} \mu(\overline{xy})$ con $\overline{xy}$ calculado así:

$\overline{xy} \underset{def.}{=} \overline{al}$

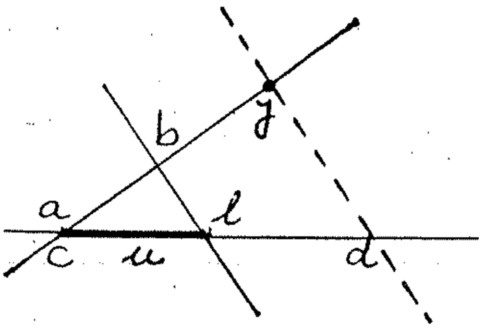
(En esto no hay nada raro)



Proposición (MS, +) es grupo abeliano).

Proposición. Valen las leyes de monotonía para + y <.

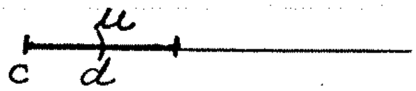
* Si agregamos el AXIOMA DE LAS PARALELAS (existe única paralela) puede definirse multiplicación en M.S.



$\mu(\overline{ab})\ \mu(\overline{cd}) \overset{def.}{=} \mu(\overline{ay})$ llamando

$y = (\text{paralela}) \cap \overrightarrow{ab}$

Se fija un segmento u=unidad, sobre una recta se fija el u y se marca el segmento $\overline{cd}$ (como en el dibujo que $\overline{cd}$ > u; o puede ser $\overline{cd}$ < u.



. Se marca otra recta que pasa por c, y en ella se toma el $\overline{ab}$

con a = c.

. Se une b con l y por d se traza la única paralela a la recta $\overleftrightarrow{bl}$, lo cual se puede pues, suponemos tener el Ax. de las paralelas.

. Llama "y" a la intersección de la paralela $\overrightarrow{yd}$ ($\overrightarrow{yd}//\overrightarrow{bl}$) con la recta $\overrightarrow{ab}$.

Nota: Habría que verificar que todo esto está bien definido. En realidad así es; todo anda bien.

TEOREMA: Sean Π, $\mathcal{R}$ los axiomas (I+O+C) + AX. PARALELAS. Entonces el conjunto M.S. con +, x, < es cuerpo ordenado.

Lo difícil de demostrar es que:

$$\mu(\overline{ab}) \;.\; \mu(\overline{cd}) = \mu(\overline{cd})\; \mu(\overline{ab}) \qquad \text{es conmutativa?.}$$

Con los ax. (I+O+C) + paralelas se demuestra el Teorema de Pappus y con este teorema se demuestra la igualdad.

. Lo que quiso hacer DESCARTES y no lo "supo hacer", aunque "lo hizo bastante bien".

DESCARTES

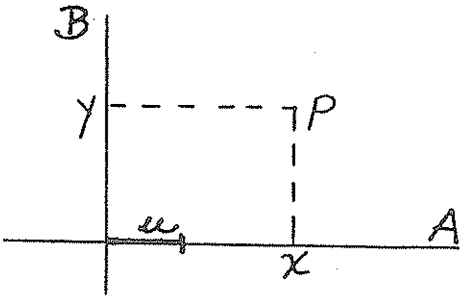
Considera Π, $\mathcal{R}$, Ax. (I+O+C+Paralelas) y fija una recta A, un origen $0 \in A$, toma una recta B perpendicular a A ($B \perp A$) por 0.

. Fija un segmento unidad u, entonces:

$$(MS, +, ., <) = F \text{ (cuerpo} \equiv \text{Field)}$$

. Define $\Pi \xrightarrow{\phi} F^2$

función que a cada punto p asocia "las coordenadas".



$p \longmapsto \underbrace{\text{"coordenadas"}}_{}$.

que es el par de medidas
$(\mu(\overrightarrow{ox}),\ \mu(\overrightarrow{oy}))$

Antes de Descartes (aproximadamente año 1500) no se conocían las coordenadas. Son obra de él.

. El teorema "gordo" que no demostramos (pues hay muchos libros que lo hacen).

. La función $\phi: \Pi \longrightarrow F^2$

$$p \longrightarrow (\mu(\overrightarrow{ox}),\ \mu(\overrightarrow{oy}))$$ es biyectiva

. La recta $L \in \mathcal{R}$ vista en F^2, esta es:

$$\Phi(L) = \{(x,y) : hx + ly = m\}$$

una recta de la geometría analítica.

Con los Ax (I+O+C) + Paralelas se tiene el F^2 y la función Φ, y con ellos se vuelve a recuperar el Ejercicio del comienzo.

. Si a las hipótesis Π, $\mathcal{R}$, Ax(I+O+C+PARALELAS) se agrega el Ax. de Arquímides se tiene que:

F es arquimediano.

Y recíprocamente:

Si F = MS es arquimediano, en el orden (<) definido.

$\Rightarrow$ vale Ax. de Arquímides.

Proposición: Sea F cuerpo ordenado

F arquimedeano $\Leftrightarrow$ F" isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) $\mathbb{R}$ es arquimedeano $\Rightarrow$ todo subcuerpo es arquimedeano.

($\Rightarrow$) Para cada punto p de F construímos "una cortadura".

Sea $\mathbb{R}$ = {de cortaduras de Dedekind}

$= \{(A,B) : A,B \subset \mathbb{Q}$ y $A \cup B = \mathbb{Q}\}$

Todos los elementos de A son < que los de B,

y todos los elementos de B son > que los de A.

Ejemplo:

$$\sqrt{2} = \left(\overbrace{\left\{x: \begin{matrix} x^2 < 2 \\ x < 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\}}^{A},\ \overbrace{\left\{x: \begin{matrix} x^2 > 2 \\ x > 0 \end{matrix}\right\}}^{B}\right)$$

Se toma: $A_x = \{p/q < x\}$ $\qquad B_x = \{p/q > x\}$ $\qquad p/q \in \mathbb{Q}$

A_x B_x son $\neq \phi$ por ser F arquimedeano.

(Por ser arquimedeano, siempre hay enteros > o (menores) < que "cualquier cosa").

Esto es: $\exists\ p_1 \in \mathbb{N}$ tq. $p_1 > x$

$\exists\ p \in -\mathbb{N}$ tq. $p < x$.

Luego $Ax \neq \phi$

$Bx \neq \phi$.

. Se define:

$$\psi : F \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (A_x,\ B_x) = \psi(x)$$

(ψ manda cada x en la cortadura).

Demostrar que la función ψ es un isomorfismo, lleva "un buen rato".

O sea, demostrar que:

ψ es aditiva: $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$

ψ es multiplicativa: $\psi(x,y) = \psi(x) . \psi(y)$

Además, demostrar: $x <_F y \Rightarrow \psi(x) <_{\mathbb{R}} \psi(y)$

y que ψ es inyectiva.

RESUMEN

Si se parte de Π, $\mathbb{Q}$ + Ax (I+O+C+PARAL.+ARQUIMIDES) entonces:

$$\Pi \hookrightarrow \mathbb{R}$$

Observación:

[$\hookrightarrow$ significa "contenido" no solo en el sentido de conjuntos; sino con sentido más fuerte indicando que hay estructuras que se conservan y con mayor fuerza].

Y se definen una Φ y un isomorfismo ψ:

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "\Phi"'] & F^2 \arrow[r, hook, "\psi x \psi^{\circ}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

de modo que a las rectas en Π les corresponden las rectas de la Geometría Analítica (o rectas de Descartes)

$$\text{Rectas en } \Pi \xrightarrow[\text{DESCARTES}]{} \text{Rectasen}\mathbb{R}^2.$$

. Comentamos dos maneras de armar Geometría.

(I) Si no se sabe que son los números $\longrightarrow$ no se tiene "medida".

Este fue el drama de los griegos. Entonces había que definir medida.

Se consideran los "Segmentos", de ellos se saca la medida y se obtienen los números.

(II) Si se conocen los números (aproximadamente 1840 con Dedekind se tienen los $\mathbb{R}$) se puede obtener F^2 que resulta isomorfo a $\mathbb{R}^2$; y la Geometría Analítica.

Descartes, para que la medida de segmentos (μ ($\overline{AB}$) sean los números $\mathbb{R}$eales, agrega un axioma más.

. O sea, que para que los "números" (que no sabe que son) que andan en ϕ: $\Pi \longrightarrow F^2$ sean los $\mathbb{R}$, define sucesiones de Cauchy y piden que ellas converjan. Resumiendo:

. Para lograr que $F^2 = \mathbb{R}^2$ (o M.S. = $\mathbb{R}$) agrega un axioma más:

Toda sucesión de Cauchy en F converge.

Toda sucesión converge a un número.

TEOREMA: F arquimediano y completo $\Leftrightarrow F \cong \mathbb{R}$.

Demostración: Se puede ver en Rey Pastor, Volúmen I; o en Revista de la REM (§ Números Reales).

DISTINTAS FORMAS DEL AXIOMA DE LAS PARALELAS (P)

TEOREMA:

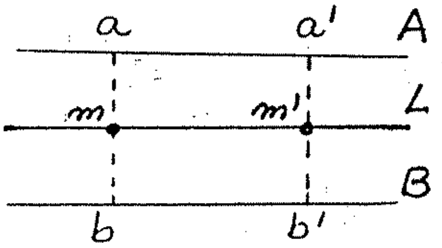
$$\text{Se tiene: } \Pi,\ \mathcal{R},\ \text{Axiomas (I+O+C+P+ARQ.)} \Rightarrow \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{cases}$$

P_1) Suma de ángulos interiores de un $\Delta = \Pi$

P_2) Todas las perpendiculares a un lado de un ángulo agudo cortan al otro lado.

P_3) Existen Δ semejantes no $\equiv$ congruentes.

P_4) $$\left.\begin{array}{l}\text{Si } A//B,\ a,a' \in A,\ b,b' \in B, \\ m \text{ punto medio del } \overline{ab}, \text{ y } L//A \text{ por } m\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}L \text{ pasa por el punto medio} \\ \text{de } \overline{a'b'}\end{array}$$



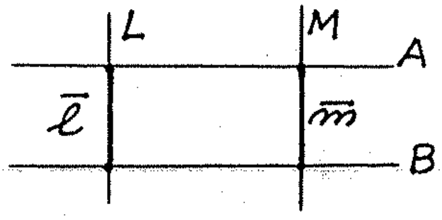
Demostración de todo esto figura en los textos clásicos.

(Y como en el Repetto de la escuela secundaria).

Ahora, la cosa es cambiar el Ax. P por algún P_1.

Hay muchas formas más del axioma P:

P_5) Si A//B, L┴A, M┴A



entonces: $\overline{l} \equiv \overline{m}$, los segmentos l y m son congruentes.

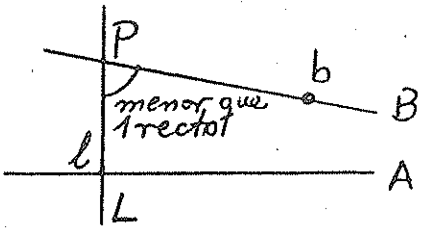
Esto dice que dos paralelas equidistan.

Versión original de Euclides.

P_6) Si $L \perp A$, $B \cap L = \{p\}$

$\mu(\widehat{lpb}) \leq 1$ recto $\Rightarrow$ $A \cap B \neq \phi$

ó $A//B$



Si se logra:

$(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{R}} + Ax/ (\tilde{I}+\tilde{O}+\tilde{C}+\tilde{P}_j+ARQ) \Rightarrow (\tilde{\Pi},\tilde{\mathcal{R}})$ satisface los axiomas I,O,C,P,Arq.
Cambiando P por cualquier P_j se tiene la misma teoría.
Todo esto está bosquejado en la Geometría No Euclideana de Santaló, pero ... hay que tener mucha paciencia para leerlo.-

OTRA FORMULACION DE LOS AXIOMAS PARA LA GEOMETRIA EUCLIDEANA

Resúmen de las ideas desarrolladas anteriormente.

Tuvimos dos versiones de los axiomas para la G.E.

. Una formulación no supone conocer los números reales.

. Se partía suponiendo la existencia del plano Π, el conjunto de rectas $\mathcal{R}$ y los axiomas de incidencia, orden, congruencia, luego se agregaba paralelismo:

$$[(\Pi,\ \mathcal{R},\ \text{Ax}(\text{I+O+CONG})) + \text{PARAL.}].$$

Entonces se definía longitud del segmento $\overline{ab}$, se tenía un cuerpo.

Luego se agregaba el AXIOMA DE CONTINUIDAD, entonces se obtenía que Π era isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

. Otra formulación se puede construir aceptando como conocidos los números reales, en este caso todas las cosas se pueden presentar de otro modo.

. En este caso se parte suponiendo la existencia del plano Π, y el conjunto $\mathcal{R}$ de rectas.

. Se acepta con la misma formulación los axiomas de incidencia, orden, congruencia y paralelismo.

. Luego el AXIOMA DE CONTINUIDAD se reformula.

. Como se conoce los números, para medir longitudes, basta fijar (o definir) una unidad y declarar como se mide.

. Entonces lo que se hace es lo siguiente:

se fija (para siempre) una recta A, un punto $\sigma \in A$ una unidad de medida $\mu \neq 0$.

. Como se acepta el axioma de orden, la recta A tiene un orden, esto es, se tiene $(A, <_A)$.

. Entonces se decreta el:

AXIOMA DE CONTINUIDAD

Existe una función $X: A \longrightarrow \mathbb{R}$ biyectiva y que preserva orden:

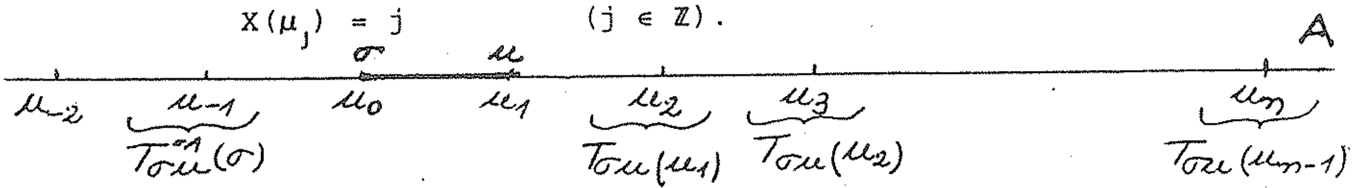
$$p \leq_A q \Rightarrow X(p) \leq X(q)$$

permite obtener el punto medio de un segmento:

$$\frac{X(p) + X(q)}{2} = X \text{ (punto medio del segmento } \overline{pq})$$

y además: $X(\sigma) = 0,\qquad X(\mu) = 1$

$X(\mu_j) = j \qquad (j \in \mathbb{Z})$.



O sea que: $\mu_n = T_{0\mu}\ (\mu_{n-1})$ $\qquad (n \in \mathbb{Z})$

μ_n es el "traslado" por T del μ_{n-1}, a partir del cero "σ", con la unidad μ.

Además se supone; que el cambio de unidad de medida está (dado por la función Y, así:) Si σ, v $\in$ A y $Y: A \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces

$\forall p \in A$ (c = nº real fijo) $\quad y_v \longrightarrow Y_v(p) = C\ X_u(p)$

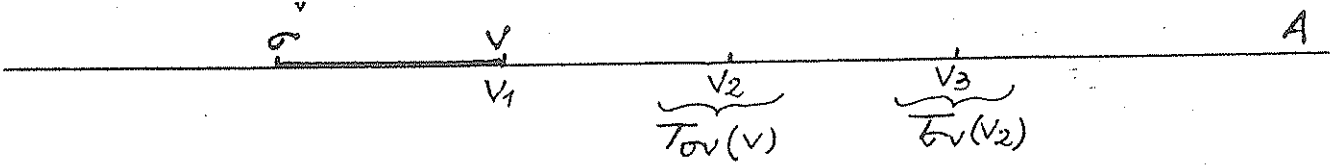
<u>Nota</u>: La notación significa lo mismo que para X:

X_u: función X construída a partir de σ con la medida u.

Y_v: función Y construída a partir de σ con la medida v.

$Y_v(\sigma) = 0 \qquad\qquad Y_v(v_j) = j \qquad (j \in \mathbb{Z})$

$Y_v(v) = 1$



<u>Nota</u>:

$$\forall p \neq \sigma \ \ Y_v(p) = C\ X_u(p) \Rightarrow \underbrace{\frac{Y_v(p)}{X_u(p)}}_{\text{cociente}} = C \text{ (constante)} \qquad \forall p \neq \sigma$$

Nos muestra que la idea es que el cambio de unidades de medida es proporcional.

Por ejemplo el cambio de la unidad u = σ° grados sexagesimales; a v = radianes:

$$360° \longrightarrow 2\Pi \text{ rad.}$$

$$\sigma° \longrightarrow r = \frac{2\Pi}{360°}\ \sigma°$$

En regla de tres simple, se supone que una variables es proporcional a otra.

Pero quien me dice que el cambio es éste?

Otro ejemplo: el cambio de "yardas" a "metros":

u yardas ———— 0,9 m.

y yardas ———— m = 0.9 y

. Esto intuitivo está declarado como axioma.

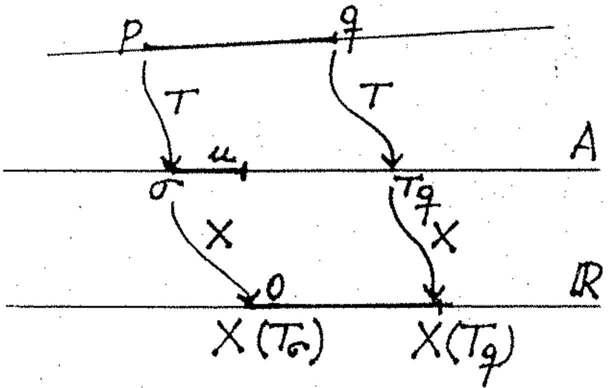
. Esto es, por "decreto" decimos que hay proporcionalidad, porqué?.

Con éste axioma de continuidad se define:

DISTANCIA DE p a q EN EL PLANO Π.

$p,q \in \Pi \quad d(p,q) = X(T_q) - X(T_\sigma) = X(T_q) \geq 0$

(este es nuestro aparato de medir. Con ésta definición declaramos como se mide: "se toma un segmento y se traslada".



O sea, se toma T ∈ T.R. que lleva

$p \xrightarrow{T} \sigma$

$q \xrightarrow{T} T_q \in \overrightarrow{\sigma u}$

Y la función biyectiva:

$X: A \longrightarrow \mathbb{R}$

que lleva:

$\sigma = T(\sigma) \xrightarrow{x} X(T\sigma) = 0$

$T_q \longrightarrow X(T_q) =$

. Con esto lo primero que se espera es que las T.R. no destruyen distancia.

(Que es lo que esencialmente hicieron los griegos).

Teorema: La función distancia $d: \Pi x \Pi$ ——L $\mathbb{R} > 0$ cumple las propiedades:

i) $d(p,q) = 0 \longleftrightarrow p = q$

ii) $d(p,q) = d(q,p)$

iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

Nota: Y a partir de aquí salen el Teorema de Thales, y todos otros vinculados con distancia.

AXIOMAS METRICOS Y VECTORIALES

Otra novel formulación de los axiomas que venimos considerando.

Nota: En la "ENCICLOPEDIA BRITANICA" (Tema: Geometría Euclideana. Axiomas de Hilbert (1898)). Se puede encontrar una formulación de este tipo.

. Siempre se supone como punto de partida: la existencia del plano Π y de la familia $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Pi)$, de subconjuntos A, NO VACIOS y PROPIOS del mismo Π, que se llaman rectas, que satisfacen los axiomas.

AXIOMA DE INCIDENCIA

$(\underbrace{A \in \mathcal{R}}_{\text{rectas,}} \Rightarrow \underbrace{\phi \subseteq A \subseteq \Pi}_{\text{conjuntos no vacíos y no todo el plano)}})$ entonces

$\forall\, x, \in \Pi \quad \forall\, y \in \Pi \quad x \neq y, \underbrace{\exists!}_{\text{única}} \; A \in \mathcal{R}$ tal que $x \in A$, $y \in A$.

Este axioma se reescribe así:

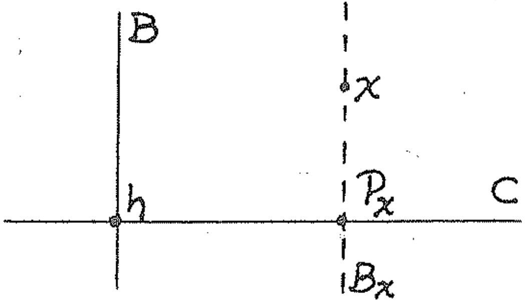
Si $\underbrace{A\in\mathcal{R} \;\; B\in\mathcal{R}}_{\text{A y B rectas}}$ y el $\underbrace{\#}_{\text{cardinal}} (A\cap B) \geq 2 \Rightarrow A=B$

y $\forall x\in\Pi \quad \forall y\in\Pi \quad x \neq y \quad \exists \quad A\in\mathcal{R}$ tal que $x \in A$, $y \in A$.

AXIOMA DE PARALELISMO

$\forall\, A\in\mathcal{R}, \quad p\notin A \quad \exists! \quad B\in\mathcal{R}$ tal que $\begin{cases} B\cap A = \phi \\ p \in B \end{cases}$ (B//A)

Con esto se puede definir. Proyección sobre una recta C.



Sea la recta C y una recta $B \nparallel C$ (B no paralela a C).

Por un punto x se traza una paralela a B, ella es única por el axioma.

$B_x // B$ y $x \in B_x$.

Digo que la recta B_x interseca a C, o sea $B_x \cap C \neq \phi$, porque si pensamos lo contrario: $B_x \cap C = \phi$ se contradice el hecho de que hay una única paralela a B_x por h.

En efecto: si $h = B\cap C$ entonces tenemos: $h \in B$ y $h \in C$; por contradicción suponemos: $C\cap B_x = \phi$ o sea $C//B_x$ por construcción: $B\cap B_x = \phi$ o sea $B//B_x$ y esto dice que hay dos paralelas a B_x por h, lo cual contradice la unicidad del axioma (una paralela a B_x por x).

Luego: $B_x \cap C = \{P_x\}$.

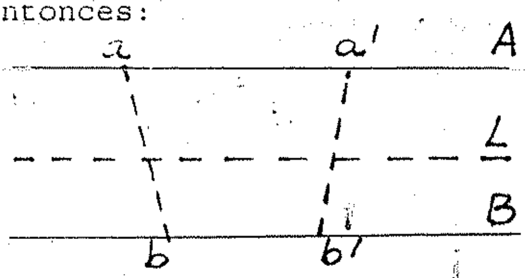
Nota: Si se define proyección, se puede armar THALES entonces: se puede tomar como AXIOMA el Teorema de THALES y a partir de allí armar la geometría.

AXIOMA DE ORDEN

Suponemos que en cada recta A hay orden total ($<_A$) (esto es se cumple tricotomía), y se satisface lo siguiente:

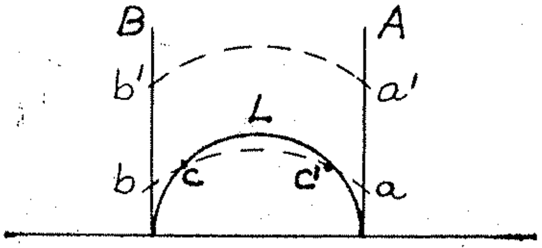
Sea A//B   A $\in \mathcal{R}$ a,a' $\in$ A   y L $\in \mathcal{R}$ (recta) talque L//A
B $\in \mathcal{R}$ b,b' $\in$ B

entonces:



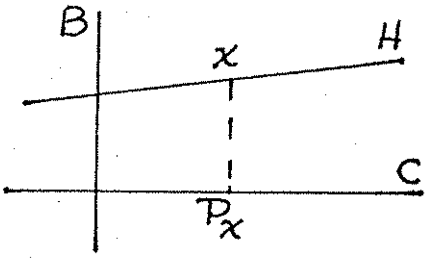
L $\cap$ $\overline{ab}$ $\neq \phi$ $\Rightarrow$ L $\cap$ $\overline{a'b'}$ $\neq \phi$
L//A

Nota: Esto en la G.N.E. no se cumple. Por ejemplo en el modelo de Poincaré es falso.



A//B   y A//L   y   L//B
L $\cap$ $\overline{ab}$ $\neq \phi$
L corta a $\overline{ab}$ en c y c' pero no en a' y b'.
o sea L $\cap$ a'b' = ϕ.

Teorema: Sea P la proyección paralela a B $\in \mathcal{R}$ sobre C
Sea H $\in \mathcal{R}$ no paralela a B, entonces la función:
P: $(H,<_H) \longrightarrow (C,<_c)$
(que va desde H con su oden $<_H$ hasta C con su orden $<_c$)
es biyectiva, preserva orden y segmentos.



Se puede encontrar una demostración en el LICHNEROVICZ.

Damos a continuación axiomas que complementan nuestro estudio.
. AXIOMA DE ESTRUCTURA AFIN DE LA RECTA.
. AXIOMA DE PERPENDICULARIDAD.
. AXIOMA DE SIMETRIA.

AXIOMA DE ESTRUCTURA AFIN DE LA RECTA

. Nuestro punto de partida los conjuntos Π, $\mathcal{R}$ y los axiomas: Incidencia, Orden, Paralelismo.

. Además se suponen conocidos los números reales, entonces el axioma dice:

(I) Existe una función d: $\Pi \times \Pi \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ llamada distancia que satisface:

a) $\forall x \in \Pi \quad \forall y \in \Pi \quad d(x,y) = d(y,x)$

b) Para cada recta fija D, y cada do $\in$ D fijo

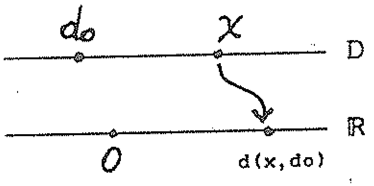
(esto es: (cada vez que se marca un orígen)

la función d: $\overrightarrow{do\ \infty} \longrightarrow \mathbb{R} \geq 0$

asigna a cada x de la semirrecta de "orígen" do, su distancia al orígen do:

$x \longmapsto d(do,x)$

esta función es biyectiva.



Como en D, tenemos un orden $\leq_D$, podemos pensar do < x (do menor que x)

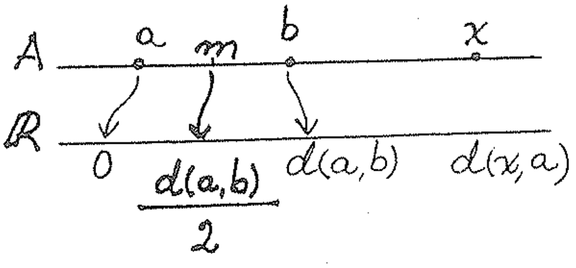
c) Si $x \leq_D y \leq_D z \Rightarrow d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$.

es decir: cuando se tienen 3 puntos alineados "ir de" x a z es igual que "ir de" x a y y luego de y a z.

. Con esta parte del axioma se puede hablar de

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Se toma un segmento $\overline{ab}$, contenido en una recta A.



Se tiene una función d tal que:

asigna:

$a \longrightarrow 0$

$b \longrightarrow d(a,b)$

en "algún lugar" el punto medio

$m \longrightarrow \frac{d(a,b)}{2}$

esto por b). Con la función d biyectiva.

Por c) $d(m,b) = \frac{d(a,b)}{2}$

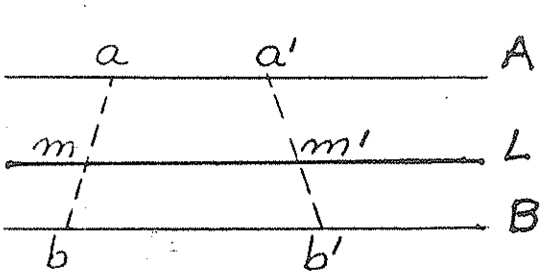
pues $d(a,m) + d(m,b) = d(a,b)$

$\frac{d(a,b)}{2}$

entonces: $d(m,b) = \frac{d(a,b)}{2}$

. Enunciamos, la segunda parte de este axioma.

(II) Sean A y B dos rectas paralelas, y los puntos a, a' $\in$ A,



b, b' $\in$ B, m punto medio de $\overline{ab}$
m' punto medio de $\overline{a'b'}$
entonces
si L//A y L pasa por m
$\Rightarrow$ L pasa por m'.

. Como no se han mencionado las T.R. (transformadas rígidas), no tenemos perpendiculares.

. Todo lo que hemos enunciado nos lleva a pensar en el Teorema de THALES.

AXIOMA DE PERPENDICULARIDAD

. Existe una relación "$\perp$", llamada de perpendicularidad, en $\mathcal{R}$x$\mathcal{R}$ (recordar que una relación es un subconjunto, en este caso de $\mathcal{R}$x$\mathcal{R}$). que permite determinar si dos rectas A y B "están en perpendicularidad", o "no están en perpendicularidad".

Esto es:

$$(A,B) \in \perp \longleftrightarrow A \perp B$$
$$(A,B) \notin \perp \longleftrightarrow A \not\perp B$$

Esta relación satisface las propiedades:

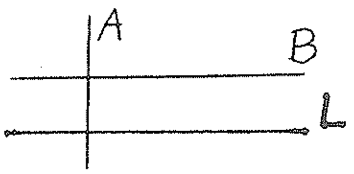
a) Simétrica $A\perp B \longrightarrow B\perp A$
(no valen ni reflexiva, ni transitiva).

b) Si $A\perp B \longrightarrow A \nparallel B$

c) $\forall\ A\in\mathcal{R},\ \exists!\ \ R\in\mathcal{R}$ tq $R\perp A$.

esto es: dada una recta A, entre todas las rectas que se puedan tomar, existe al menos una que es perpendicular a ella.

d) Si $A\perp B$ y L//B $\Rightarrow$ $A\perp L$



c)+d) implican que "la perpendicular" a una recta, por un punto exterior de la misma, es única

Nota: Hilbert (aproximadamente 1900), consideró la teoría de Euclides, y buscó que cosas podía demostrar encontrándose con que todo lo que había alli, hacía falta.

. Posteriormente, Frechet (aproximadamente 1910) incorpora el concepto de distancia.

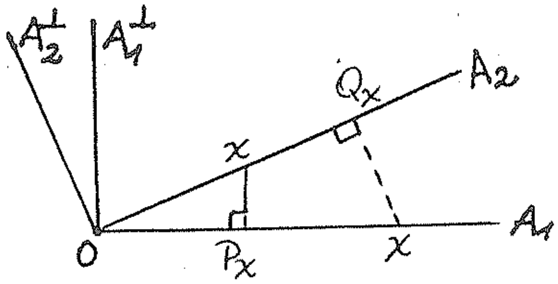
(Estos conceptos de distancia y perpendicularidad se pueden consultar en el LICHNEROVICS).

. Si en el sistema de axiomas: (I+O+CONG.+PARAL.) cambiamos el AX. PARAL. por THALES, se pueden obtener las mismas cosas.

AXIOMA DE SIMETRIA

"LAS FUNCIONES SENO Y COSENO ESTAN BIEN DEFINIDAS", es nuestro "novel" enunciado.

Sean A_1 y A_2 semirectas con el mismo orígen 0 (ellas determinan un ángulo).



La función "cos" que es?.

. Tomemos la perpendicular a A_1 por 0.

. Sea $x \in A_2$, por el Ax. de Paralelismo, tengo proyecciones entonces se puede proyectar x sobre A_1.

Sea P = proyección paralela sobre A_1
($\perp$ a A_1 por 0).

Entonces:

$$(1) \qquad \underbrace{\frac{d(0,P_x)}{d(0,x)}}_{\text{(función de x, si x se mueve en } A_2)} = \text{"cos } (A_1 A_2)\text{"}$$

o también si:

Q = proyección paralela sobre A_2.
($\perp$ a A_2 por 0)

Entonces:

$$(2) \qquad \frac{d(0,Q_x)}{d(0,x)} = \text{"cos } (A_2 A_1)\text{"}$$

El axioma propone que las "razones" (1) y (2) no dependen del x, son constantes e iguales.

AXIOMA DE SIMETRIA

$$\cos (A_1 A_2) = \cos (A_2 A_1)$$

. Con éste axioma se puede definir PRODUCTO ESCALAR

Se fija un $0 \in \Pi$, $X = \overrightarrow{0x}$, $Y = \overrightarrow{0y}$, prod. escalar XY $\underset{def}{=}$ $\underbrace{d(0,x)\ d(0,y)\ \cos\ (\overrightarrow{0x},\ \overrightarrow{0y})}_{\text{(producto de las normas x coseno)}}$

y **TRANSFORMACIONES RIGIDAS (T.R.)**

$T: \Pi \longrightarrow \Pi$ es T.R. si $d(Tx, Ty) = d(x,y)\ \forall x\ \forall y$.

Y es T biyectiva.

Nota: Con trabajo se puede demostrar, o digamos se puede obtener la prueba del Ax. de Congruencia.

Si $\Pi = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ el Ax. de CONG. se verifica tomando como

$$TR(x) = \{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2: \forall x,y\ d(f(x),f(y)) = d(x,y)\}$$

donde $d(x,y) = [(u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2]^{1/2}$ si $x = (u_1,v_1)$
$y = (u_2,v_2)$

Observación: Recordemos que hemos considerado como punto de partida el sistema:

(I) $[\Pi,\ \mathcal{R}$ + AX. (I+PARAL.+0') + AX.(AFIN+$\underbrace{\text{PERP.+SIMETRIA}}$)]
Se puede cambiar por CONGRUENCIA
y se obtiene un sistema equivalente:
(II) $[\Pi,\ \mathcal{R}$ + AX. (I+PARAL.+0') + AX (AFIN=CONGRUENCIA)]

O sea que si se cambian los Ax. de perpendicularidad y simetría por el de congruencia, valen todos los resultados; y recíprocamente.

La diferencia es que se define:

$f \in TR$ si $d(f(x), f(y)) = d(x,y)\quad \forall x\ \forall y$.

COMENTARIOS DE LA GEOMETRIA NO EUCLIDEANA

Porqué en la G. no E. no hay homotecias?

. En G. no E. por un punto exterior a una recta, pasan más de una paralela, y esto según Sacheri quiere decir que:

$\sum$ (ángulos interiores de un Δ) < 2 Rectos.

. Como se calculan áreas?. (como se construyen áreas?)

Función Area $\underset{def.}{=}$ a : {Polígonos Convexos} $\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
y satisface:

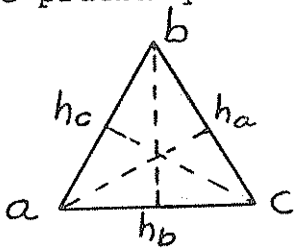
$$a\ \underbrace{(F_1 \cup F_2)}_{\text{(unión de "2 cosas")}} = a\ (F_1) + a\ (F_2)$$

si $F_1 \cap F_2$ = unión de segmentos (ed. las "cosas" se cortan en "segmentitos" (en "flacos")

y $\overset{\circ}{F}_1 \cap \overset{\circ}{F}_2 = \phi$ (unión de interiores es vacío).

. EN LA GEOMETRIA EUCLIDEANA

Se prueba que en un triángulo hay:



3 bases: a ó b ó c

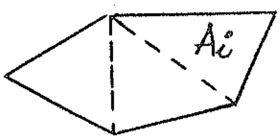
3 alturas: h_a ó h_b ó h_c

Se prueba: $\frac{1}{2}$ a h_a = $\frac{1}{2}$ b h_b = $\frac{1}{2}$ c h_c

y se define: $a\ (\Delta) = \frac{1}{2}\ b\ h$

a (cualquier región) $= \sum_i a\ (A_i)$ con $A_i = \Delta$

(o sea se "triangula" la región)



(La sumatoria no depende de la triangulación).
Una demostración se puede ver en el REPETTO.

(Hay teoremas de por medio; pero se obtiene ese resultado).

EN LA GEOMETRIA NO EUCLIDEANA (G.N.E.)

. Se miden ángulos (en radianes)

Se define:

a_{NE} () $= \Pi - (\alpha+\beta+\gamma) > 0$

("triángulo" no euclideano, sus lados no son rectas, son "arcos").

$$a_{NE}(\text{cualquier región}) = \sum_i a_{NE}\ (A_i)$$

Hay que definir triangulación NE y entonces se define área como la suma de las áreas de los "triángulitos" no euclideanos.

Luego probar que:

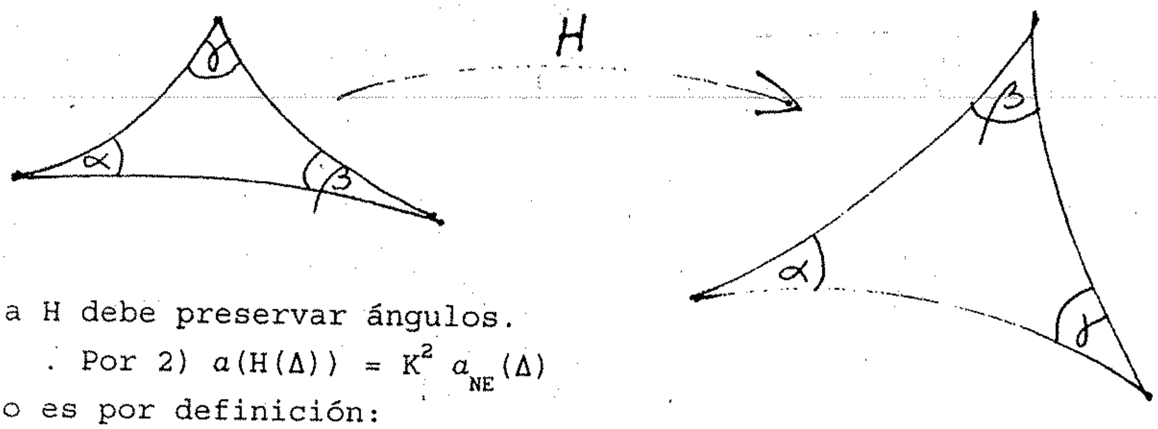
a_{NE} es un área.

Las homotecias H, si las hay, queremos que hagan lo siguiente:

1) $d(H(a),\ H(b)) = K\ d(a,b)$ K = constante.
2) $a\ (H(F)) = K^2\ a(F)$
3) H preserva ángulos.

En la G.E. existen las homotecias.

En la G.No E. no puede haber homotecias, porque por ejemplo, si se toma un "triángulo NE", por la homotecia va a un "triángulo NE" quizas más grande, pero seguro los ángulos cambiaron,



y la H debe preservar ángulos.

Por 2) $a(H(\Delta)) = K^2 \, a_{NE}(\Delta)$

esto es por definición:

$$\Pi = \underset{x>0}{(\alpha+\beta+\gamma)} = K^2 \, (\Pi - (\alpha+\beta+\gamma))$$

entonces K = 1 y la homotecia de razón 1 es la identidad.

H = identidad

AXIOMA DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA

A PARTIR DE LA SIMETRIA AXIAL

Monografía elaborada por:

- GALDEANO, Patricia Lucía
- MINI, María Amelia
- VANNUCCI, Olga Matilde

- BIBLIOGRAFIA

1.- Plane Geometry and its Groups de Heinrich W. Guggenheimer. University of Minnesota.

2.- Geometría Volúmen I y II. Prof. Jorge Ignacio Delgado. Universidad Naciona de San Luis.

3.- El Plano. Dr. J.A. Tirao. Buenos Aires.

AXIOMAS DE LA GEOMETRIA EUCLIDEANA A PARTIR DE LA SIMETRIA AXIAL

INTRODUCCION

Primero, haremos un listado de los axiomas, a los que analizaremos y luego resolveremos ejercicios y problemas, siempre en el contexto de la Geometría Euclideana.

Axioma I.- Dados dos puntos distintos del plano A,B existe una única recta $l = l(A,B)$ que contiene a dichos puntos.

Axioma II.- Todos los puntos del plano que no estan en l, forman dos conjuntos disjuntos no nulos.

Axioma III.- Dos puntos A y B pertenecen a distintos semi-planos determinados por la recta l si y solo si $l \cap (A,B) \neq \phi$.

Axioma IV.- Si $B \in (A,C) \Rightarrow C \notin (A,B)$.

Axioma V.- Existe una recta.

Axioma VI.- Para toda recta l existe una única función G_l del plano en el plano que aplica a los puntos de un semiplano determinado por l en h puntos del otro semiplano.

Axioma VII.- G_l mapea rectas en rectas.

Axioma VIII.- $G_l^2 = i\ l$

Axioma IX.- $\forall\ L \in l:\ G_l\ L = L$

Axioma X.- Todo ángulo tiene una recta bisectriz.

Axioma XI.- Todo segmento tiene una recta mediatriz.

Axioma XII.- Si un producto de reflexiones mapea una semirrecta a sobre si misma, entonces es G_a o i.

Axioma XIII.- Si $a \| b$ y $d \perp a$, ent. $d \perp b$.

Completando esta lista de axiomas incluimos los siguientes aunque no los usaremos.

Axioma (A) si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a < \frac{1}{n} b$, para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $a=0$

Axioma X*.- si una recta tiene un punto interior a un circulo, entonces interseca a este circulo en dos puntos.

Axioma XIII*.- Si dos rectas paralelas tienen un fin en común, entonces no tienen una perpendicular común. Si ellos no tienen un fin en común, entonces tienen una única perpendicular común.

1.- Conjuntos en el plano

La geometría plana es el estudio de ciertos conjuntos llamados planos (los notaremos con letras griegas minúsculas) y sus elementos son los puntos. Otros conjuntos de puntos son los singles y las rectas.

No definiremos puntos ni rectas porque para nosotros su interés reside en las propiedades que son descriptas por los Axiomas, los que son el mínimo necesario para demostrar algunos teoremas de la geometría euclideana. Cabe aquí aclarar, que a los puntos los notaremos con letras mayúsculas y a las rectas con minúsculas; además usaremos símbolos y conceptos básicos de la teoría de conjuntos por todos conocidos.

1.1. Def.: Dos rectas disjuntas son paralelas.

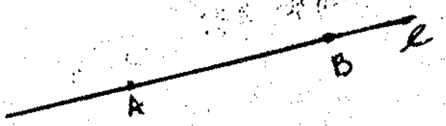
e.d. $a \parallel b$ si y solo si $a \cap b = \phi$

si $a \cap b \neq \phi$ son rectas concurrentes.

2.- Los axiomas y sus consecuencias

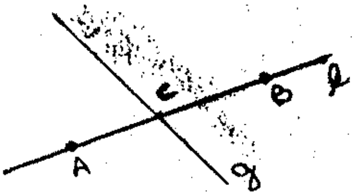
Axioma I: Dos puntos distintos del plano A y B, determinan una única recta $l = l\ (A,B)$ que contiene a dichos puntos.

Axioma II: Todos los puntos del plano que no estan en l, forman dos conjuntos disjuntos no nulos.



Los subconjuntos descriptos en el Axioma II se llaman semiplanos.

2.1.1. Def.: Un punto C está entre dos puntos A y B si $C \in l\ (A,B)$ y si existe alguna recta g que pase por C de modo que A y B queden en distintos semiplanos.



2.1.2. Def.: Llamamos segmento (A,B) al conjunto de puntos que están entre A y B.

Nota: Los puntos extremos A y B no pertenecen al segmento.

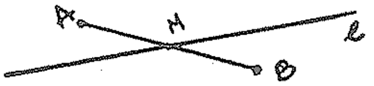
2.1.3. Def.: Llamamos segmento cerrado de extremos A y B si (A,B) le unimos sus puntos extremos. e.d.:

$$[A,B] = (A,B) \cup A \cup B$$

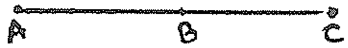
Ejercicio 1.- Probar que $(A,A) = \phi$

D‖. Supongamos que $(A,A) \neq \phi$, entonces existe $1 \in (A,A)$, luego existe g que pasa por C que deja a A en distintos semiplanos lo que contradice al Axioma II (los semiplanos son disjuntos).

Axioma III: Dos puntos A y B pertenecen a distintos semiplanos determinado por la recta l si y solo si $l \cap (A,B) = \phi$



Axioma IV: Si $B \in (A,C)$ entonces $C \notin (A,B)$



El conjunto vacío satisface naturalmente los Axiomas I al IV.-

Axioma V: Existe una recta.

Probaremos la siguiente proposición:

2.1.4. Prop.: Dos rectas distintas tienen a lo más un punto en común.

Demost.: Es inmediata; si tuvieran dos puntos en común por el Axioma I la recta sería única.

La proposición siguiente es una reformulación del Axioma III.

2.1.5. Prop.: Si C está entre A y B, entonces A y B están en distintos semiplanos para toda recta g que pasa por C, distinta de l(A,B).

Ejercicio 2.- $B \in (A,C) \Rightarrow (A,B) \cap (B,C) = \phi$

Demost.: Supongamos que existe $D \in (A,B) \cap (B,C)$

En efecto, $D \in (A,B)$, luego por la proposición 2.1.5. toda recta que pasa por D, distinta de l(A,B) deja a A y a B en distintos semiplanos, por otro lado, $D \in (B,C)$, análogamente, toda recta que pasa por D deja a B y a 1 en distintos semiplanos, entonces A y C pertenecen al mismo semiplano, lo que contradice la hipótesis.

Ejercicio 3.- Probar que el plano contiene infinitos puntos.

[Recordar: Un conjunto contiene infinitos puntos si para cualquier número N de estos, contiene N+1 puntos distintos].

Demost.: 1) Existe un punto por el Axioma V, existe una recta: l y por el Axioma II, l determina dos semiplanos disjuntos no vacíos, luego existen al menos dos puntos, uno en cada semiplano.

2) Tenemos ahora N puntos, probaremos que existen N+1. Estos N puntos determinan un número finito de rectas (Ax. I), es obvio que podemos considerar una de estas rectas de modo tal que queden los N puntos en uno de los semiplanos determinados por ella, luego por el Axioma II en el otro semiplano ($\neq \phi$) existe al menos otro punto.

2.2.- Conjuntos convexos

2.2.1. Def.: Un subconjunto del plano es convexo si y solo si para todo par de puntos distintos de este conjunto, el segmento que determinan está incluido en él.

Ejemplos: Son conjuntos convexos: el vacío, el plano, los segmentos, las rectas, las semirrectas, los semiplanos, etc,

2.2.2. Proposición: La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Demost.: Sean α y β dos conjuntos convexos del plano, P y Q dos puntos del plano, tal que:

$$P \in \alpha \cap \beta \qquad y \qquad Q \in \alpha \cap \beta$$

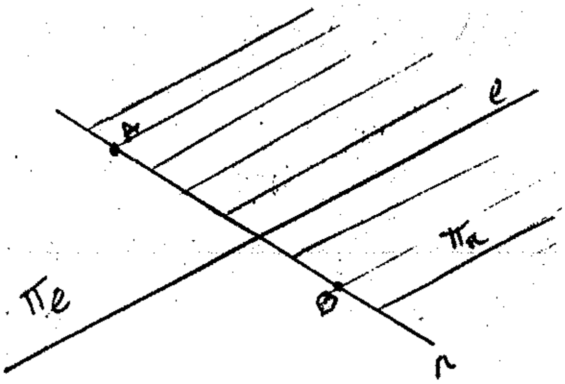
como P y Q pertenecen a α y como α es convexo entonces el segmento $(P,Q) \subseteq \alpha$.

Del mismo modo, P y Q pertenecen a β y como β es convexo, el segmento $(P,Q) \subseteq \beta$.

Por lo tanto el segmento $(P,Q) \subseteq \alpha \cap \beta$, luego $\alpha \cap \beta$ es un conjunto convexo.

Ejercicio 4.- Mostrar que la unión de dos conjuntos convexos no siempre es convexo.

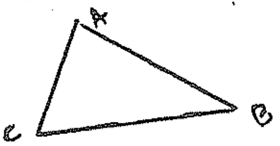
Demost.: Por el Axioma V, existe la recta l que determina dos semiplanos, sean A y B dos puntos que estan en distintos semiplanos respecto de l, luego por el Axioma I, los puntos A y B determinan una recta a la que llamamos r = r(A,B), esta también divide al plano de dos semiplanos.



Consideremos los semiplanos π_l y π_r mostrados en la fig. es evidente que la unión $\pi_l \cup \pi_r$ no es un conjunto convexo.

2.3.- Triángulos

2.3.1. Def.: Dados tres puntos no alineados, se llama triángulo al conjunto unión de los segmentos que ellos determinan dos a dos, es decir,



$\Delta\ (A,B,C) = [A,B] \cup [B,C] \cup [C,A]$

Notación: En adelante notaremos al semiplano determinado por la recta $l(A,B)$ al que pertenece el punto C por $\overleftrightarrow{AB}_C$.

2.3.2. Def.: Dados tres puntos no alineados A, B, C llamamos interior del triángulo $\Delta\ (A,B,C)$ a la intersección de los semiplanos $\overleftrightarrow{AB}_C$, $\overleftrightarrow{BC}_A$ y $\overleftrightarrow{CA}_B$.

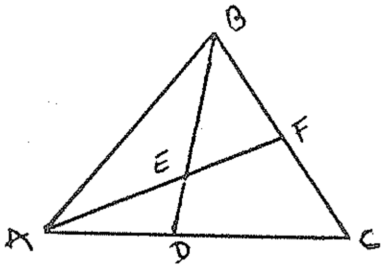
2.3.3. Prop.: El interior de un triángulo es convexo.

Demost.: Consecuencia inmediata de la Prop. 2.3.2, por ser el interior del triángulo intersección de semiplanos.

2.3.4. Teorema de Pasch's: "Si una recta interseca a un lado de un triángulo y no pasa por ningún vértice, interseca exactamente a uno de los otros lados"

Ejercicio 5.- Probar que si $D \in (A,C)$ en el triángulo $\Delta\ (A,B,C)$ y $E \in (B,D)$, entonces existe $F \in (B,C)$ tal que $E \in (A,F)$.

Demost.: Por el Axioma I existe una única recta $l = l(A,F)$, como l interseca al lado $\overline{BD}$ del triángulo $\Delta\ (B,D,C)$, entonces por el Teorema de Pasch's interseca a (B,C) o (D,C) en un punto F. Si $F \in (D,C)$ entonces por el Ax. I, dos puntos determinan una única recta $l(A,F) = l(A,D)$ en consecuencia $E \in l(A,D)$, lo que es absurdo, luego $F \in (B,C)$.



2.4. Simetrías

Introduciremos la idea de "Simetría" apoyándonos en otros conceptos básicos:

Intuitivamente: dos figuras son congruentes si existe un "movimiento" que superpone una sobre otra, de esta idea intuitiva daremos una noción axiomática, para ello explicaremos claramente su significado.

Una primera explicación de la idea de movimiento sería considerar el plano como algo estático y solo se mueven ciertos conjuntos de puntos en el mismo, por ejemplo triángulos, esto lo podemos visualizar como tener dos copias idénticas del plano ambas con las mismas figuras. Dos puntos en planos distintos se corresponden uno al otro en este movimiento de tal forma que al final coinciden.

Esta identificación de dos planos con un movimiento, matemáticamente lo podemos describir usando la idea de función $y = f(x)$, que a puntos de un plano le asigna puntos en el plano.

2.4.1. Simetría respecto de una recta: Decimos que una función σ_l es una simetría respecto de una recta l si a cada punto A le asocia otro $\sigma_l(A)$ tal que l es "mediatríz" del segmento $[A,\sigma_l(A)]$.

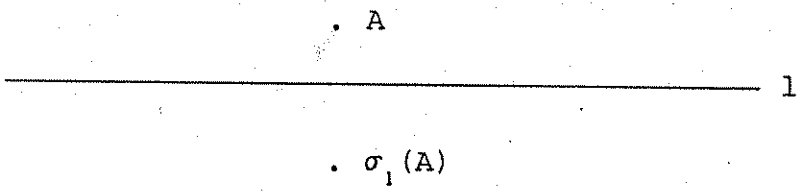
Las propiedades de las simetrías son descriptas por ocho axiomas, los que damos en dos grupos:

Axioma VI.- Para toda recta l existe una única función σ_l del plano en el plano que aplica a los puntos de un semiplano determinado por l en h puntos del otro semiplano.

Axioma VII.- σ_l mapea rectas en rectas.

Axioma VIII.- $\sigma_l^2 = i\ l$

Axioma IX.- $\forall\ L \in l: \sigma_l\ L = L$



2.4.2. Def.: Llamamos involución a la función que compuesta con si misma nos dá la identidad

$$\sigma^2 = i$$

Nota: Por el Axioma VIII la simetría axial es una involución.

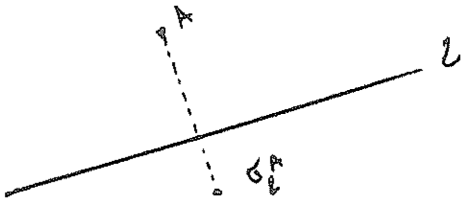
2.4.3. Prop.: Una involución es una función uno a uno del plano en si mismo.

Demost.: Sean A, B, C puntos del plano tal que $B = \sigma A$ y $B = \sigma C$, entonces:

$$\begin{array}{l} \sigma B = \sigma^2 A = A \\ \sigma B = \sigma^2 C = C \end{array} \qquad \text{de aquí } \underline{A = C}$$

Esto prueba que las imágenes de dos puntos distintos del plano por una involución no coinciden.

2.4.4. Prop.: $[A, \sigma_1 A] \cap 1 \neq \phi$

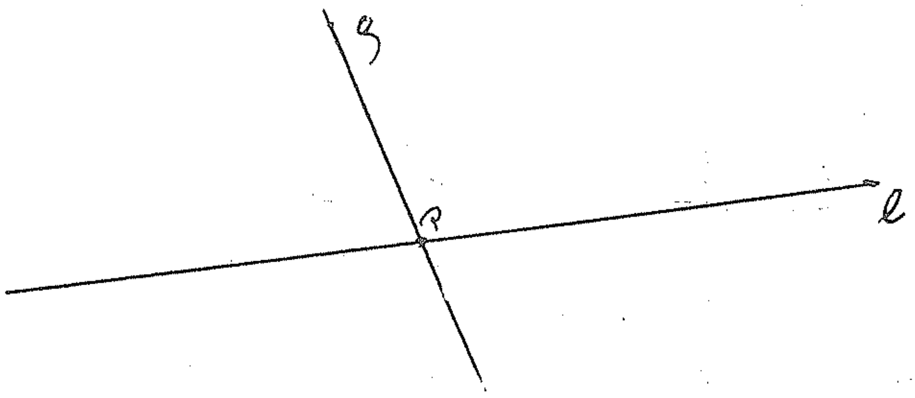


Demost.: Esto es consecuencia de los axiomas III y VI.

Para los últimos axiomas necesitamos algunos conceptos complementarios.

2.5. Semirrectas

Un punto P sobre una recta l determina dos semirrectas. Cada semirrecta es la unión del punto P con la intersección de la recta l con uno de los semiplanos determinados por una recta g (distinta de l) que pasa por P.

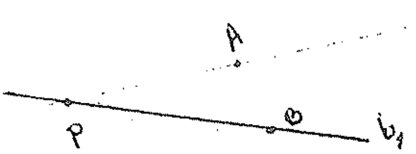


La notación que usaremos será l_1 y l_2, o la semirrecta de orígen P que contiene al punto $Q \neq P$, lo que notamos por P[Q].

2.6. Angulos

2.6.1. Def.: Angulo es la unión de dos semirrectas con orígen común:

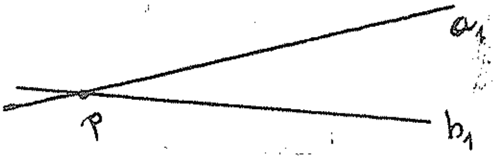
$$a_1 \cup b_1 = \sphericalangle (a_1, b_1)$$



si $a_1 = P[A]$ y $b_1 = P[B]$

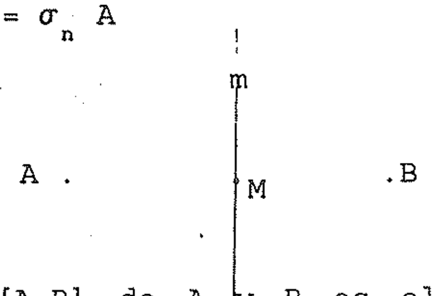
$< (a_1,b_1) = < APB = < BPA$

2.6.2. Def.: La bisectríz de un ángulo $< (a_1,b_1)$ es la recta $t = t(a_1,b_1)$ tal que $b_1 = \sigma_t a_1$



2.7. Mediatríz

2.7.1. Def.: La mediatríz de dos puntos A, B a la recta $m = m(A,B)$ tal que $B = \sigma_n A$



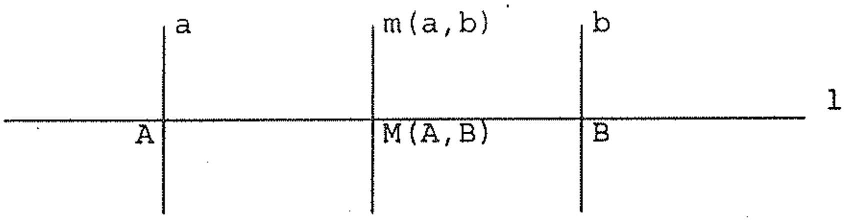
El punto medio $M[A,B]$ de A y B es el punto m n $[A,B]$, su existencia está asegurada por la Prop. 2.4.4.

2.8. Rectas perpendiculares

2.8.1. Def.: Una recta a es perpendicular a otra b ($a \perp b$) si $a \neq b$ y $\sigma_b a = a$.

La recta perpendicular a la recta l en el punto A, la notaremos por p(l,A).

2.8.2. Def.: Si a y b son perpendiculares a l(A,B) en A y B, entonces la recta m(A,B) = p(l(a,B), M(A,B)) la llamamos recta media entre a y b, la que también notaremos m(a,b).



2.9. Movimientos

2.9.1. Def.: La composición de un número finito de simetrías es llamado movimiento y lo notaremos por el símbolo Σ.

Ahora si estamos en condiciones de enunciar los últimos axiomas:

Axioma X.- Todo ángulo tiene una recta bisectriz.

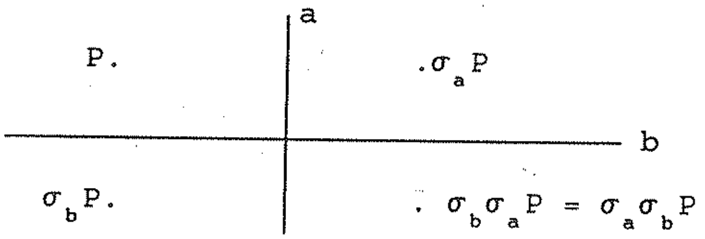
Axioma XI.- Todo segmento tiene una recta mediatriz.

Axioma XII.- Si un producto de reflexiones mapea una semirrecta a sobre si misma, ent. es G_a o i.

Axioma XIII.- Si $a \| b$ y $d \perp a$, ent. $d \perp b$.

2.10. Propiedades o consecuencias de los Axiomas

2.10.1. Prop.: $a \perp b$ si y slo si $a \neq b$ y $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a$



2.10.2. Prop.: $a \perp b$ entonces $b \perp a$

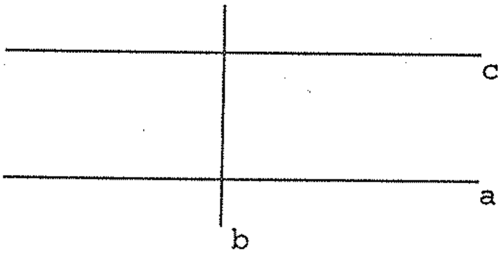
2.10.3. Prop.: $\sigma_a = \sigma_b$ entonces $a = b$

2.10.4. Prop.: La bisectriz de un ángulo es única.

2.10.5. Prop.: $a \perp b$ entonces $\Sigma a \perp \Sigma b$

2.10.6. Prop.: A través de cualquier punto P existe una única recta perpendicular p(g,P), a la recta g.

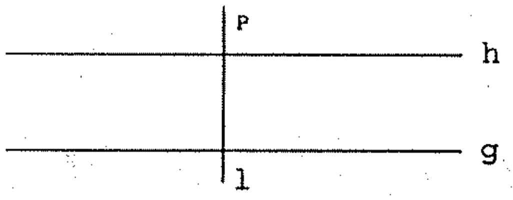
2.10.7. Prop.: Si $a \perp b$ y $b \perp c$ entonces $a \| c$



Ejercicio 6.- A través de cualquier punto $P \notin g$ existe una única paralela a g.

Demost.: Probaremos la existencia y unicidad de tal recta:

1°) Existencia.



Dada g y $P \notin g$, por la Prop. 2.10.6 existe $l=p(g,P)$ y también $h=p(g,P)$, luego entonces por Prop. 2.10.7

$$h \parallel g$$

2°) Unicidad.

Supongamos que por P pasan dos paralelas a g, sean ellas e y h: como $c \parallel g$ y $l \parallel g$, por el Ax. XIII $c \perp l$ y como $p(h,p)$ es única entonces $c=h$.

2.11. Congruencias de figuras

2.11.1. Def.: Dos figuras en el plano S y S' son congruentes ($S \cong S'$) si y solo si existe un movimiento Σ tal que S' es la imágen de S en la transformación Σ.

e.d. $S' = \Sigma(S)$

Enunciamos lo siguiente:

2.11.1. Prop.: La congruencia es una relación de equivalencia en el conjunto de figuras del plano.

i) $S \cong S$

ii) Si $S \cong S'$ entonces $S' \cong S$

iii) Si $S \cong S'$ y $S' \cong S''$ entonces $S \cong S''$

Este concepto, tiene muchas aplicaciones, una de las más conocidas es la congruencia de triángulos.-

PLANOS Y ESPACIOS PROYECTIVOS

Monografía elaborada por:

- CALI, Ana Lucía

Introducción: En esta monografía se dará la construcción de la Geometría Plana y del Espacio Proyectivo. La construcción que se elaborará, será dada de un punto de vista abstracto, partiendo de un conjunto de entes, indefinidos, que se llamarán "puntos" y "rectas", ligados por ciertas relaciones cuyo sentido se expresará por medio de un sistema de axiomas. Las consecuencias lógicas que se deriven a partir del sistema de axiomas, constituirá la Geometría Plana y del Espacio Proyectivo. El sistema de axiomas que se considerará para desarrollar esta teoría, será la propuesta por Adler, [6], pág. 70.

Se enunciarán los teoremas de Desargues, Pascal y Brianchon y se dará un ejemplo de un plano no arquesiano.

En este resúmen no será presentada la geometría métrica proyectiva que puede verse en [6], capítulo X.

1. Axiomas de Incidencia y Existencia

Axiomas de Incidencia

1. Si A y B son puntos distintos, existe al menos una recta que contiene A y B.
2. Si A y B son puntos distintos, existe a lo más una recta que contiene A y B.
3. Si A, B, C son puntos que no están todos sobre una misma recta y si D, E son puntos distintos tales que B, C, D están sobre una misma recta y C, A, E también están sobre una recta, existe un punto F tal que los puntos A, B, F están sobre una recta y los puntos D, E, F están también sobre una recta (Fig. 1.1).

Notación: La única recta determinada por los puntos distintos A y B (Ax 1 y 2) se denotará con AB .

Definición de triángulo. Diremos que tres puntos cualesquiera que no están en una recta (no colineales), A, B, C, determinan un triángulo. Los puntos A, B, C y las rectas AB, AC, BC son llamados respectivamente los vértices y los lados del triángulo ABC.

Después de definir triángulo, el axioma 3, se puede sustituir por 3'.

3'. Si una recta interseca dos lados de un triángulo, entonces interseca al tercer lado.

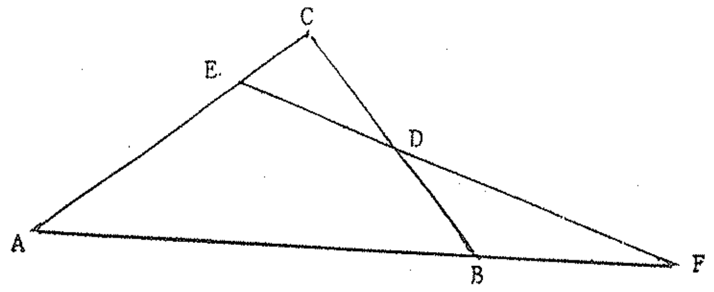


Fig. 1.1

Axiomas de Existencia

4. Existe al menos una recta.
5. Existen al menos tres puntos distintos sobre toda recta.
6. No todos los puntos están sobre una misma recta.
7. No todos los puntos están sobre un mismo plano.
8. Si S es un 3-espacio, todo punto está en S.

Naturalmente los Axiomas 7 y 8 adquieren significado, solo después de definir plano y 3-espacio. Para definir plano, necesitamos la existencia de tres puntos no colineales. La existencia de tres puntos no colineales está garantizada por los Axiomas 1, 2, 4 y 6.

Definición de plano. Sean A, B, D tres puntos no colineales. Llamaremos plano AB;D al conjunto de los puntos de las rectas que ligan el punto D, con puntos de la recta AB. Diremos que el plano AB;D es el plano generado por la recta AB y el punto D.

Usando el Axioma 3, se demuestra que el plano AB;D coincide con el plano BD;A y el plano AD;B. Por eso podemos referirnos al plano determinado por los tres puntos no colineales A, B, D, que denotaremos plano A B D.

Diremos que cuatro puntos son no coplanares, si no están en un mismo plano. La existencia de cuatro puntos no coplanares está garantizada por el Axioma 7.

Definición de 3-espacio. Dados el punto P y el plano ABD con P no perteneciente al plano ABD, llamaremos 3-espacio proyectivo o espacio proyectivo de 3 dimensiones al conjunto de los puntos de las rectas que ligan P con puntos del plano ABD.

También aquí se puede demostrar que el conjunto de puntos de las rectas que ligan un punto, de los cuatro A, B, D, P, con puntos del plano determinado por los tres puntos restantes es siempre el mismo.

La geometría plana proyectiva se obtiene reemplazando los Axiomas 7 y 8 por un solo Axioma.

7'. Si S_2 es un plano, todo punto está sobre S_2.

2. Consistencia del Sistema de Axiomas 1 a 8.

Desde un punto de vista lógico, podemos sentar la siguiente definición.

Definición. Un sistema axiomático, se llama consistente si no implica enunciados contradictorios. [1], Vol.5 pág. 50, [2] pág. 50.

La consistencia de un sistema de axiomas está estrictamente vinculado con la existencia de un modelo. Modelo es una atribución de significados a los términos indefinidos, donde todos los axiomas del sistema se convierten en enunciados verdaderos. Si el sistema de axioma conduce a contradicciones, evidentemente no puede tener un modelo.

El sistema axiomático 1 a 8 es consistente. Se dará primero modelos del sistema 1 a 7′ y después modelos del sistema 1 a 8.

Sea K un cuerpo. Definimos un punto P, como una terna (x,y,z) de elementos de K, no todos nulos, tales que $(>x,>y,>z)$ con $0\neq>\in K$, cualquiera es idéntico a (x,y,z).
Una recta está definida como el conjunto de puntos que satisface una ecuación de la forma $ax + by + cz=0$, con $a,b,c \in K$, no todos nulos. Se verifican facilmente los axiomas 1 a 7′.

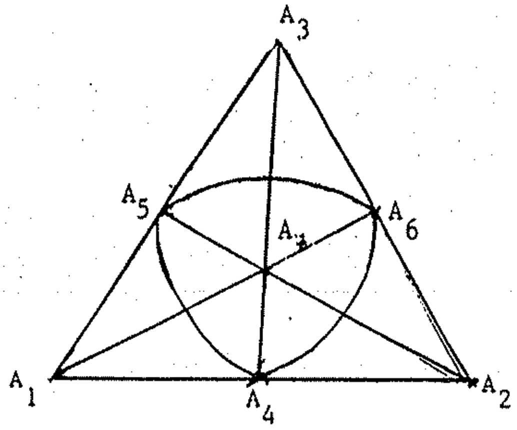
Observemos que el plano proyectivo $\mathcal{P}$, definido, contiene un plano afín. En efecto, consideremos la siguiente función inyectiva.
$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}$ definida por $(x,y) \longrightarrow (x,y,1)$ ó $(>x, >y, >)$, con $> \neq 0$.
Las rectas de $\mathcal{A}$ corresponde a rectas de $\mathcal{P}$, pero no recíprocamente la recta $z = 0$ en el plano $\mathcal{P}$ no es correspondiente de ninguna recta de $\mathcal{A}$, porque, está excluida la posibilidad $a=b=0$. Daremos el nombre de recta al infinito o recta impropia en $\mathcal{P}$ a la recta de ecuación $z = 0$. Cualquier punto de $\mathcal{P}$ de coordenadas $(x,y,0)$ es punto de la recta $z = 0$. Llamaremos puntos impropios o puntos al infinito los puntos de coordenadas $(x,y,0)$. Se concluye, que los puntos del plano proyectivo son los puntos del plano afín correspondiente más los puntos de la recta $z = 0$. Observemos que dos rectas distintas de $\mathcal{P}$ que se cortan sobre la recta $z = 0$, serán paralelas distintas en el plano afín, teniendo ambas el mismo punto al infinito.

Se han construído modelos del plano proyectivo, dependiendo del cuerpo K considerado. Si K es un cuerpo infinito, se obtiene un modelo con infinitos puntos. Si K tiene k elementos, entonces cada recta definida sobre K, tiene k+1 puntos y el plano proyectivo tiene $k^2 + k + 1$ puntos. Demostremos esto. Una recta g es el conjunto de soluciones de una ecuación del tipo $ax+by+cz=0$, con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, $a,b,c \in k$. Supongamos $a\neq0$, entonces la recta g es el conjunto de soluciones de la ecuación $x + \frac{b}{a} y + \frac{c}{a} z=0$.

Las soluciones son las ternas $(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z, y, z)$. Puede ser $y=0$ ó $y\neq 0$. Si $y=0$, se obtienen $(-\frac{c}{a}z, 0, z)$, y como debe ser $z \neq 0$ el punto $(-\frac{c}{a}z,\ 0,\ z)$ es idéntico al punto $(-\frac{c}{a},\ 0,\ 1)$. Si $y\neq 0$, el punto $(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z, y, z)$ es idéntico al punto $(-\frac{b}{a} - \frac{c}{a}\frac{z}{y}$ $1,\ \frac{z}{y})$ y hay k puntos de este tipo.

En total en la recta $x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z = 0$ hay $k+1$ puntos. Veamos ahora que el plano proyectivo tiene k^2+k+1 puntos. Sea (x,y,z) un punto. Puede ser $x\neq 0$ ó $x=0$. Si $x\neq 0$ el punto (x,y,z) es idéntico al punto $(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ y hay k^2 puntos con primera coordenada distinta de cero. Si $x=0$, $y=0$ ó $y\neq 0$. Si $y=0$ el punto $(0,0,z)$ es idéntico al $(0,0,1)$ porque $z\neq 0$. Si $y\neq 0$ el punto $(0,y,z)$ es idéntico al punto $(0,1, \frac{z}{y})$ y hay k puntos de este tipo. O sea que hay $k+1$ puntos con primera coordenada igual a cero. En total se obtiene k^2+k+1 puntos.

Tomando $K = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, el plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}_2$ tiene $2^2 + 2 + 1 = 7$ puntos. Estos puntos son $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$ $A_3(0,0,1)$, $A_4(1,1,0)$, $A_5(1,0,1)$, $A_6(0,1,1)$ y $A_7(1,1,1)$. Tal plano puede ser representado por:



La recta A_1A_3 tiene ecuación $y = 0$, la recta A_4A_5 tiene ecuación $x + y + z = 0$, etc. La descripción de este plano se debe a Fano (1892), [3] pág. 23 y tiene 7 puntos. Se demuestra, sin dificultad que en cualquier espacio proyectivo que satisfaga los Axiomas 1 a 6, todo plano proyectivo contiene al menos 7 puntos.

Construiremos ahora un modelo de un 3-espacio proyectivo. Sea K un cuerpo. Definimos punto P, como una 4-upla (x_1,x_2,x_3,x_4), con $x_i \in K$, $i=1,2,3,4$ y no todos nulos, considerando $(> x_1, > x_2, > x_3, > x_4)$ idéntico a (x_1,x_2,x_3,x_4) siempre que $>\neq 0$. Plano, como el conjunto de puntos que satisface una ecuación lineal homogenea $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$ con $a,b,c,d \in K$ y $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$. Recta, el conjunto de puntos que satisface dos ecuaciones lineales homogéneas distintas. Se verifican fácilmente los Axiomas 1 a 8.

3. No categoricidad del Sistema de Axiomas 1 a 8

Un sistema de axiomas es categórico, cuando existe un único modelo salvo isomorfismos, [2], pág. 60

Tomando $K = \mathbb{Z}_2$ y $K = \mathbb{R}$, se ve que el sistema de Axiomas 1 a 8 no es categórico.

El sistema de axiomas que define el cuerpo de los números reales como cuerpo ordenado, arquimediano y completo (completo con respecto a las sucesiones fundamentales o de Cauchy) es categórico, [4] pág. 137. También el sistema de axiomas de Peano que define los números naturales es categórico, [4] pág. 41.

4. Algunas consecuencias de los Axiomas de Incidencia y Existencia

La estructura axiomática presentada es suficiente para la prueba de los siguientes teoremas:

Teorema 1. Si dos puntos de una recta están sobre un plano α, todo punto de la recta está sobre α.

Teorema 2. Dos rectas cualesquiera, distintas se intersecan en un único punto.

Teorema 3. Una recta y un plano en un 3-espacio tienen al menos un punto común.

Teorema 4. Dos planos distintos en un 3-espacio se intersecan en un recta.

Teorema 5. Tres planos distintos en un 3-espacio tiene al menos un punto común.

El Teorema 2 marca la esencial diferencia que hay entre el plano euclidiano y el plano proyectivo. En el plano euclidiano dos rectas distintas no se intersecan si son paralelas. La demostración de estos teoremas puede verse en [5] pág. 17-23. Aquí daremos la demostración del Teorema 1.

Sea α el plano determinado por los puntos A, B y D y sea r la recta PQ con $P \in \alpha$ y $Q \in \alpha$.

Pueden ocurrir las siguientes posibilidades

1) $P \in AB$ ó 2) $P \notin AB$

1) Si $P \in AB$ y $Q \in AB$ por Ax.2 $PQ=AB$ y por definición de α, $AB = PQ \subset \alpha$. Si $Q \notin AB$, como $Q \in \alpha$, Q es punto de la recta que liga D con un punto S de la recta AB (Fig. 4-1).

Supongamos $P \neq S$, entonces los puntos P,Q,S no están sobre una misma recta. Sea $R \in PQ$. Podemos suponer $D \neq R$ porque si $R=D$, $R \in \alpha$.

S, Q y D están en una misma recta y P, Q, R están también en una misma recta, por el Axioma 3, existe F tal que los puntos P,S,F están en una recta y los puntos F,R,D están también sobre una recta

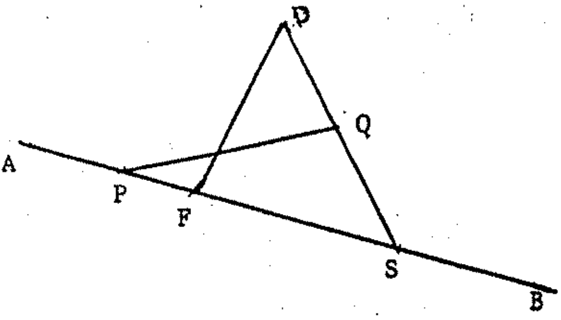


Fig. 4-1

$F \in PS = AB$ y $R \in DF$, R pertenece a α porque pertenece a una recta que liga D, con el punto F de la recta AB. Si $P=S$, $DP=PQ$ (Ax.2) y entonces $R \in PQ=DP$ pertenece a α, porque

$P \in AB$.

2) $P \notin AB$. Como $P \in \alpha$, P es punto de la recta que liga D con el punto S de la recta AB (Fig.4-2)

$S \neq A$ ó $S \neq B$ porque $A \neq B$.

Si $S \neq A$ $AB = SA$ y el plano α está generado por SA y D, pero entonces α también está generado por SD y A. $P \in SD$ y haciendo el mismo análisis que en 1, resulta que todo punto de la recta PQ está en α.

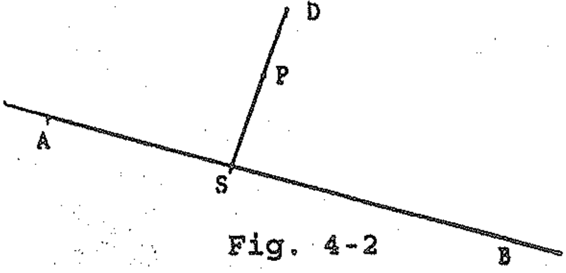


Fig. 4-2

5. Principio de Dualidad

Este principio fué establecido por Gergonne Joseph Diez (1771-1859) distinguido geómetra que publicó en su revista cerca de doscientos trabajo, que establece: Toda propiedad de una figura plana, subsiste cuando en su enunciado se cambian las palabras "punto" por "recta", "recta" por "punto" y las frases "pasan por" por "están en" y "están en" por "pasan por".

Este principio se amplía al espacio, sustituyendo la palabra punto por plano y recíprocamente, la palabra recta por recta y la frase "pasan por" por "están en" y recíprocamente.

Ejemplo en el plano: "Recta que pasa por dos puntos distintos" (Ax.1) por "Punto que está en dos rectas distintas" (Teorema 2). En el espacio "Recta que pasa por dos puntos distintos" por "Recta que está en dos planos distintos" (Teorema 5).

El Principio de Dualidad es uno de los recursos más fecundos de la Geometría Proyectiva que no comparte la Geometría Euclidiana (no vale Teorema 2, enunciado dual del Ax.1). Así por ejemplo, demostrado el Teorema de Pascal (Teorema de Brianchon) se demuestra inmediatamente el Teorema de Brianchon (Teorema de Pascal).

Teorema de Pascal

Pascal Blaise, nació en Clermont, Francia en el año 1623 y murió en 1662. Con el nombre de hexagrammum mysticum dió a conocer Pascal en su Essai pour les Coniques, escrito cuando apenas contaba dieciseis años, el teorema que lleva su nombre enunciándolo así: En todo exágono inscripto en una circunferencia, los puntos de intersección de tres pares de lados opuestos están en línea recta, entendiendo por lados opuestos dos tales que, cualquiera que sea el sentido en que se recorra el contorno del exágono, quedan separados por un vértice (vale el Teorema para un exágono inscripto en una cónica, Fig. 5-1).

Teorema de Brianchon

Brianchon Charles Jules, Geómetra Francés (1785-1864), a quién se debe un profundo estudio de las cónicas, demostró el teorema que lleva su nombre y que se enuncia así: En todo exágono circunscripto a una cónica, las rectas que unen tres pares de vértices opuestos se cortan en un punto, entendiendo por vértices opuestos dos tales que, cualquiera que sea el sentido en que se recorra el contorno del exágono, quedan separados por un lado (Fig. 5-2).

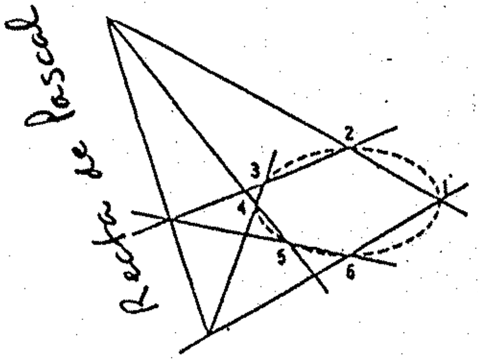


Fig. 5-1

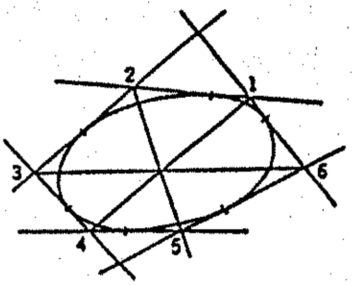


Fig. 5-2

6. Teorema de Desargues

Trataremos ahora el Teorema de Desargues (1593-1662) que lo enunció en 1643 y relaciona dos triángulos homológicos. Este teorema establece: Sean dos triángulos ABC y A'B'C' situados en el mismo plano o en diferentes planos que cumplen que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto 0, entonces los puntos comunes a la recta AB y A'B', BC y B'C', AC y A'C' son distintos y colineales (Fig. 6-1)

Estos triángulos se llaman homológicos y de ellos ha hecho Bertrand Gambier un estudio sistemático: Triangles homoliques, París 1938.

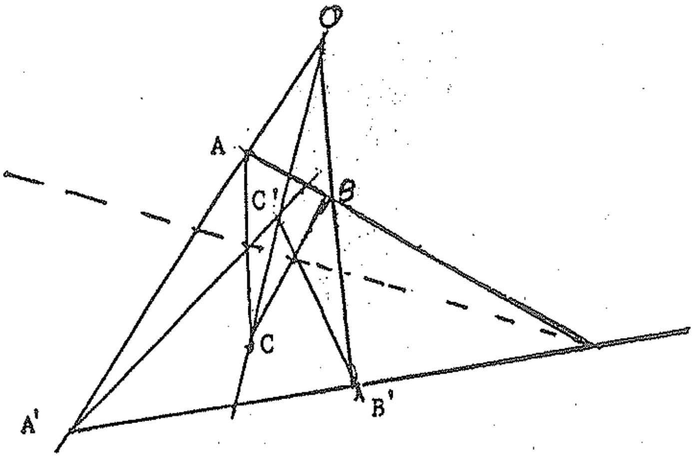


Fig. 6-1

La demostración de este teorema puede verse en [3], pág. 27 o en [6] pág. 77. Hay que considerar dos casos, el caso en que ambos triángulos están en diferentes planos y el caso en que ambos triángulos están en un mismo plano. Si los triángulos están en diferentes planos, naturalmente se miran los triángulos en un 3-espacio y se usan recursos de un 3-espacio. Si los triángulos están en un mismo plano, en la demostración del teorema interviene de manera esencial que el plano que contiene ambos triángulos está en un 3-espacio. No es posible la demostración si se considera solamente un plano (no inmerso en el espacio) que contenga ambos triángulos, es decir no es posible la demostración con los recursos de la Geometría Proyectiva de dos dimensiones. Mostraremos con un ejemplo, que existen planos proyectivos en los cuales no vale el Teorema de Desargues. Hilbert, [7], fué el primero en considerar un plano no arguesiano, considerando el problema de la inmersión de un plano en un espacio de tres dimensiones, concluyendo que una condición necesaria y suficiente para que exista tal inmersión que en el plano valga el Teorema de Desargues.

El ejemplo que daremos de un plano no arguesiano se debe a F.R. Moulton [8], y es copia de [3] (pág. 29-30-31).

Consideremos en un plano euclidiano, un sistema de ejes Oxy ortonormados. Tomemos como puntos del plano que luego, denominaremos no arguesiano, los puntos del plano euclidiano y para rectas (no arguesianas) los puntos, soluciones de

$$y=m(x-a)f(y,m),$$

donde m es el coeficiente angular y f definido de la siguiente manera

(1) si $m \le 0$ $f(y,m) = 1$

(2) si $m > 0$ e $y \le 0$ $f(y,m) = 1$

(3) si $m > 0$ e $y > 0$ $f(y,m) = \frac{1}{2}$

Por lo tanto las rectas del plano no arguesiano son las rectas del plano euclidiano, excepto aquellas que tienen pendiente m positiva ($\neq 0$). Así si $m>0$, una recta no arguesiana será construída por dos semi-rectas LM definida por (2) y MN definida por (3) como en la Fig. 6-2.

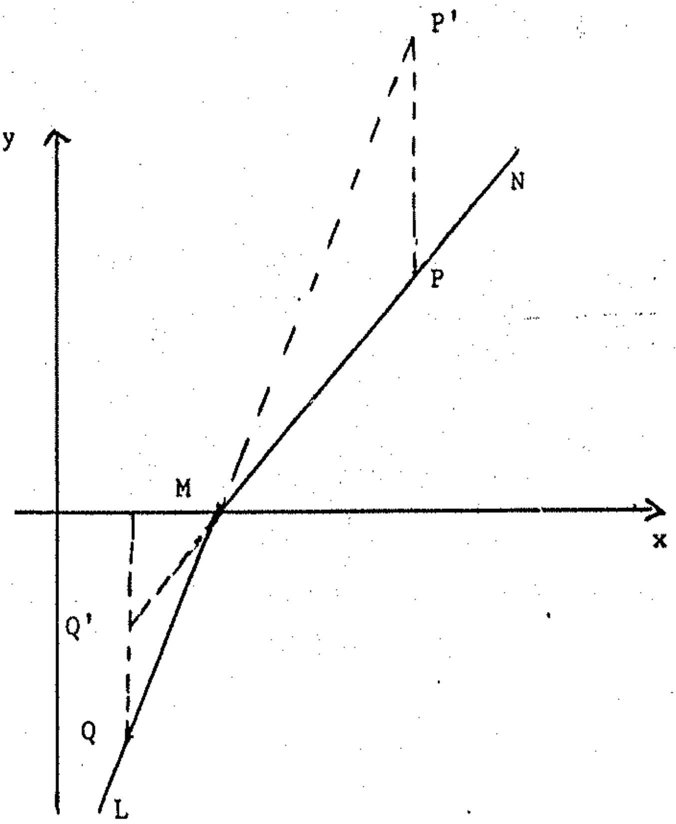


Fig. 6-2

Si P y Q son dos puntos distintos, uno encima del eje x y otro debajo, P y Q determinan una y solo una recta no arguesiana. En efecto: De P se obtiene P′ duplicando la ordenada de P, y de Q se obtiene Q’, tomando la mitad de la ordenada de Q. Por propiedades de proporción, PQ’ y P’Q intersecan el eje x en el punto M, luego hay una única recta determinada por P y Q, la recta Q,M,P.

Dos rectas no arguesianas se dice paralelas, si sus semirectas correspondientes son paralelas en el sentido usual.

Demostraremos que este plano es no arguesiano.

Consideremos la Fig. 6-3

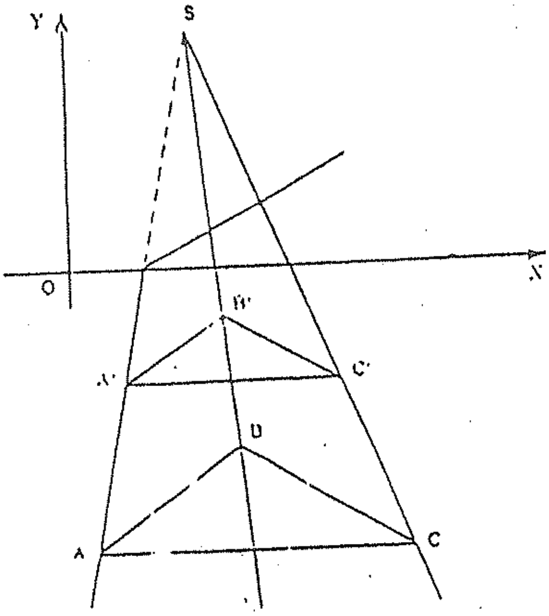


Fig. 6-3

Las rectas AB, BC y CA son respectivamente paralelas a las rectas A’B’, B’C’ y C’A’, en el semiplano debajo del eje x. Entonces las rectas no arguesianas correspondientes también lo son $m \leq 0$ para las rectas BB’ y CC’ y $m > 0$ para la recta AA’, se sigue que la recta no arguesiana AA’, no pasa por el punto S, común a las rectas BB’ y CC’, como queríamos mostrar.

En este ejemplo el plano proyectivo, está formado por los puntos del plano euclidiano, juntamente con las rectas no arguesianas y la "recta al infinito".

REFERENCIAS

[1] Colección Sigma: Ediciones Grijalbo S.A.

[2] Earl Perry - Geometry. M. Dekker, Inc. New York - Basel - Hong Kong.

[3] María Laura Monsinho Leite Lopes: Conceitos Fundamentais Da Geometria. Facultade Nacional de Filosofia Universidade do Brasil.

[4] Delgado-Gonzalez: "Fundamentación del Análisis" curso dictado por el Dr. E. Burger (1968). Apuntes tomados por la Prof. Nelly Interguglielmo de Delgado y revisados por la Prof. Nora Gonzalez de Moyano. Biblioteca, Universidad Nacional de San Luis. 1977.

[5] Veblen and Young. Proyective Geometry. Boston 1916.

[6] Adle, Claire Fisher "Modern Geometry". Mc Graw - Hill Book Company, Inc.

[7] Hilbert, David. Fundamentos de Geometría. Lisboa 1952.

[8] F.R. Moulton. Trans Am. Math Soc. (Vol. 3) 1902. pág. 192-195.

CONSTRUYENDO LA METRICA A PARTIR DE UNA ESTRUCTURA VECTORIAL DEL ESPACIO

MonografÀa elaborada por:

- AURIOL, Iris
- BERRAONDO, MarÀa Rosa
- CERIZOLA, Norma

> *Creo que todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico en general, en cuanto que está maduro para la formación de una teoría, cae en el ámbito del método axiomático, y así, indirectamente, en el de la matemática. Bajo la bandera del método axiomático, la matemática parece llamada a tener un papel rector en la ciencia.*
>
> *David Hilbert*

§ 0 - UN POCO DE HISTORIA

Los conceptos geométricos más antiguos que se conocen pertenecen a tiempos prehistóricos y surgieron para satisfacer necesidades prácticas y de la vida cotidiana.

El hombre construyó objetos con bordes rectos, necesitó dibujar sobre el suelo líneas rectas, triángulos, cuadrados, etc. Medir longitudes, determinar distancias, estimar áreas y volúmenes.

Los egipcios y babilonios poseían ya una cantidad respetable de conocimientos geométricos. Sabían estimar las áreas y volúmenes más sencillos, conocían con considerable exactitud el cociente de la longitud de una circunferencia, a su diámetro. Esta geometría era más que nada una colección de reglas extraídas de la experiencia y no se distinguía en general de la aritmética, pero no estaban todavía en posesión de la geometría como ciencia teórica.

El contacto creciente entre el Oriente y los griegos que comienza en los tiempos del imperio persa y culmina con las expediciones de Alejandro, permitió tener acceso a los griegos de estos conocimientos geométricos.

En Grecia, la geometría continuó desarrollándose bajo la tutela de grandes filósofos: Thales, Demócrito, Eudoxio y otros. Hicieron también grandes aportes Pitágoras y sus sucesores.

Así, la geometría se vio encauzada hacia la recopilación de nuevos resultados y a la clarificación de las relaciones de unos con otros.

Estas relaciones se fueron transformando en forma gradual en deducciones lógicas de unas proposiciones a partir de otras, lo que llevó a dos resultados: primero, al concepto de **teorema** y su demostración, segundo, a la clarificación de aquellos principios fundamentales a partir de las cuales se pueden deducir los restantes, es decir los **axiomas**.

Así fue como la geometría se convirtió gradualmente en una teoría matemática.

Es en la época griega donde se produce una ruptura con una forma del pensamiento matemático, sometiéndolo a otras exigencias y se la orienta hacia la construcción de modelos que pueden operar independientemente de la realidad, representando un mundo ideal y abstracto, desconectado de las exigencias de la vida cotidiana.

Hacia el año 300 a. de C., llegó a Alejandría Euclides.

Lo que ha convertido a Euclides en uno de los hombres más famosos en la historia de las matemáticas fue su libro de los "Elementos".

A partir del cuerpo conocido de las matemáticas griegas, compuso un tratado magistralmente organizado y que ha tenido tanto éxito que suplantó -en lo que al tratamiento de la geometría se refiere- a otras exposiciones sistemáticas griegas.

A lo largo de siglos, han aparecido más de 2.000 ediciones de los "Elementos", teniendo éxito no sólo en su época sino cuando volvió a conocerse en Europa durante el Renacimiento.

Fue leído posteriormente por grandes matemáticos como Newton, Leibnitz, Bertrand Russell. Este último, quien lo recordó con gran cariño. En su autobiografía escribió:

"A la edad de 11 años empecé a leer a Euclides con la guía de mi hermano. Este fue uno de los más grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor".

Tanta ha sido su influencia que se ha constituído en el paradigma científico hasta la actualidad. En topología, en el álgebra abstracta y en el análisis funcional, los matemáticos presentan los axiomas y luego proceden, paso a paso, hasta construir sus teorías.

La Axiomática:

Las ventajas de una teoría axiomática son:

-Evita caer en un razonamiento circular.

-Cada proposición tiene una sucesión de precedentes claros que se deducen de los axiomas y definiciones.

-Permite escoger los antecedentes de una proposición y detectar si se altera o elimina un postulado básico (ver Apéndice 1).

-También hace más fácil dar con generalizaciones y aplicaciones que podrían haber pasado inadvertidas si se utiliza un método más intuitivo (ver Apéndice 2).

Comentario:

El libro en el que se ha fundamentado esta monografía: "L'enseignement de la Geometría" de Gustave Choquet, presenta una axiomática de la Geometría basada en las nociones de paralelismo, perpendicularidad y distancia, pero bajo una forma que conduce natural y rápidamente a la estructura algebraica del plano y del espacio.

Apéndice 1:

La sorpresa de los matemáticos ante construcciones geométricas que contradecían a la euclídea y que eran tan consistentes como ella desde el punto de vista lógico (postulado de la paralela única - V Postulado) fue un punto de partida muy importante para el hallazgo de las geometrías no euclídeas, dado que este postulado es realmente **independiente** de los otros.

Así Bolyai (1802-1860) y Lobakevski (1793-1856) resolvieron la cuestión construyendo la geometría hiperbólica, y Riemann la elíptica, en las cuales el postulado de las paralelas no se verifica.

En la geometría hiperbólica, por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que no la cortan. En la geometría elíptica -en cambio- por un punto exterior a una recta no pasan rectas paralelas.

De este modo, la geometría euclídea queda entonces como caso intermedio entre la hiperbólica y la elíptica y por ello suele denominarse parabólica.

Apéndice 2:

Rara vez se obtiene un descubrimiento significativo si se hace uso de un procedimiento puramente axiomático. El pensamiento constructivo, guiado por la intuición es la verdadera fuente de creación matemática.

NOCIONES PRELIMINARES

Trabajaremos con un conjunto llamado plano y notado π. Llamaremos a sus elementos puntos. Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de π que llamaremos rectas.

Presentamos una axiomática de la geometría que contiene los axiomas necesarios para construirla.

Pasaremos a detallar los mismos

AXIOMA 0: El plano contiene al menos dos rectas y toda recta contiene al menos dos puntos.

Definición 1: Decimos que las rectas **A,B** de π son **paralelas (A $\parallel$ B)** si ó bien **A=B** ó bien $A \cap B = \phi$.

AXIOMAS DE INCIDENCIA

AXIOMA I_a: Para todo par (x,y) de puntos de π existe una y sólo una recta que contiene a "x" y a "y".

AXIOMA I_b: Para toda recta **D** y para todo punto **x** pasa por **x** una paralela y sólo una a **D**.

Notación: Para todo par de puntos distintos notaremos ▲(x,y) la recta que pasa por **x** e **y**.

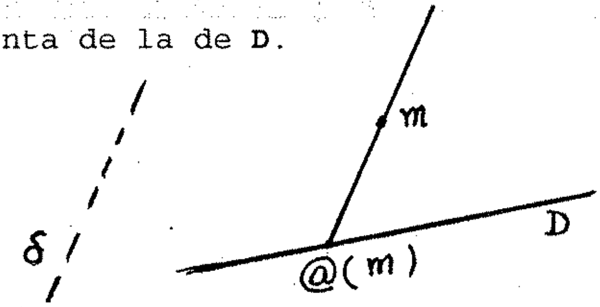
Definición 2: Las clases de equivalencias sobre $\mathcal{D}$ asociadas al paralelismo son llamadas las **direcciones**; la clase de equivalencia a la que pertenece la recta **D** se llama la dirección de **D**.

Definición 3: Proyección oblicua: Sea **D** una recta y **δ** una dirección distinta de la de **D**. Se llama proyección oblicua paralela a **δ** a la aplicación

$$\begin{aligned} @ \ : \pi &\longrightarrow D \\ m &\longmapsto @\ (m) \end{aligned}$$

tal que a cada **m** $\in$ π le hace corresponder el punto **@ (m)** que resulta de la intersección entre **D** y la recta de dirección **δ** que pasa por **m**.

Observación: Se puede demostrar que dada una recta **D** existe una dirección **δ** distinta de la de **D**.



AXIOMAS DE ORDEN:

AXIOMA II_a: A toda recta **D** están asociados dos estructuras de orden total opuestas una de la otra.

Utilizaremos la siguiente terminología:

1) Se llama **recta orientada** a toda recta munida de algunos de sus órdenes.

2) Para todo par de puntos **a** y **b** distintos, la expresión "recta orientada $\Delta(a,b)$", designa la recta $\Delta(a,b)$ orientada de tal forma que $a < b$.

3) Para toda recta orientada **D** y para toda $a \in D$, se llama **semirrecta positiva abierta** (respectivamente cerrada) de origen **a de D**, al conjunto $\{x : a < x\}$ (respectivamente $\{x : a \leq x\}$.

La expresión "semirrecta $D(a,b)$" designa la semirrecta positiva (abierta o cerrada) de origen **a** de la recta orientada $\Delta(a,b)$.

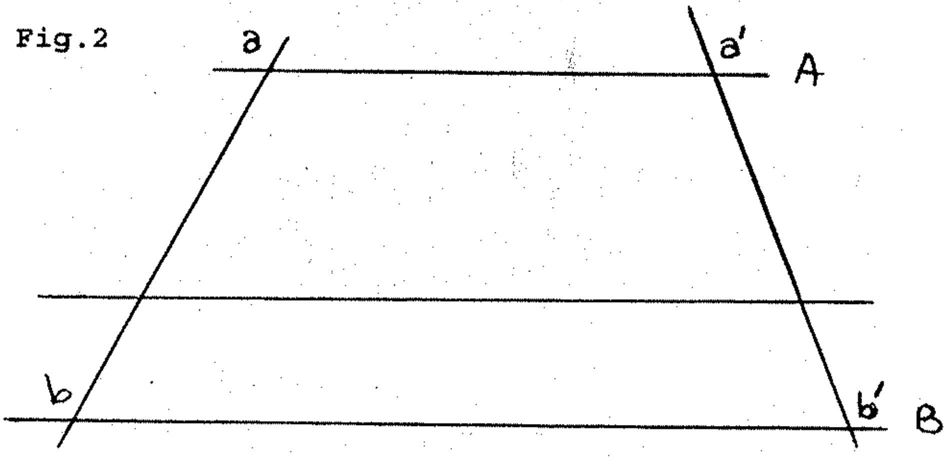
4) Los intervalos $[a,b]$, $[a,b[$, y $]a,b[$ se definen como es habitual y no dependen del orden que se haya tomado sobre la recta que pasa por **a,b** $(a \neq b)$.

Definición 4: Se dice que un subconjunto X de π es convexo si para todo **x,y** perteneciente a X se cumple $[x,y] \subset X$.

AXIOMA II_b: (Relación entre las estructuras de orden de diversas rectas).

Para todo par **(A,B)** de rectas paralelas, y para todos los puntos **a, b, a', b'** tales que **a, a'** ϵ **A** y **b, b'** ϵ **B**, toda paralela a estas rectas que corta al **[a,b]** corta también **[a',b']**.

Fig.2



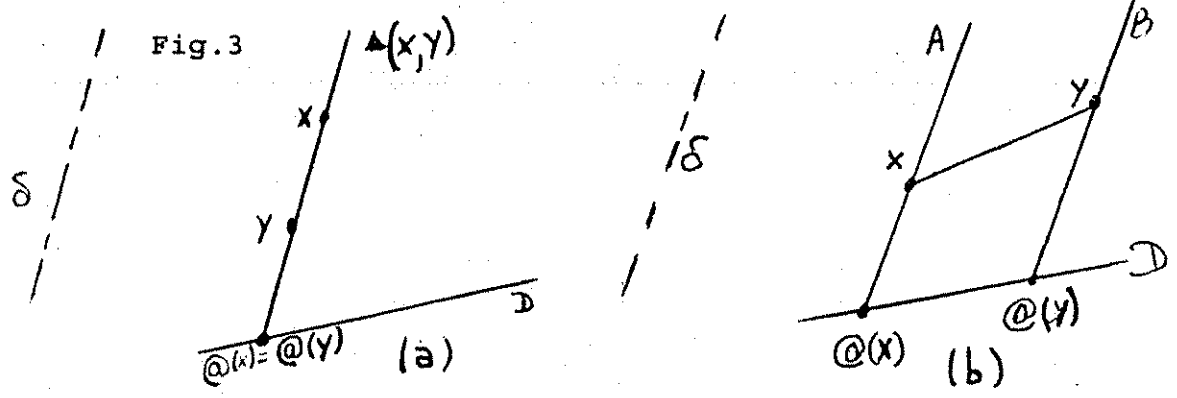
Proposición 1: Sea **D** una recta, δ una dirección distinta de la de **D** y sea **@** la proyección oblicua sobre **D** paralela a δ. Entonces, para todo **x, y** ϵ π tenemos

$$@ ([x,y]) = [@ (x), @ (y)]$$

Demostración: Si $\blacktriangle$**(x,y)** tiene dirección δ, es evidente (Fig.3a).

En otro caso, si **A** y **B** son las rectas de dirección δ que pasan por **x** e **y** respectivamente, el Axioma II_b dice que @ es una biyección de **[x,y]** sobre **[@ (x), @ (y)]** **(Fig.3b)**

Fig.3



Proposición 2: Si el cardinal de cada recta es > 2, para toda recta **D** existe una partición única de $(\pi-\mathbf{D})$ en dos conjuntos convexos, π_1 y π_2 no vacíos y tales que si $x_1\in\pi_1$, $x_2\in\pi_2$ entonces el intervalo $[x_1,x_2]$ encuentra a **D**.

Los conjuntos π_1 y π_2 de la proposición se llaman semiplanos abiertos asociados a **D**; π_1 **U** **D**, π_2 U D son los semiplanos cerrados asociados a **D** y también son convexos.

> *Que todo nuestro conocimiento empieza con la experiencia, es efectivamente cosa sobre la cual no hay duda..., pero aunque nuestro conocimiento empieza con la experiencia no nace todo él de la experiencia.*
>
> *Emmanuel Kant*

§ 1 - AXIOMAS DE ESTRUCTURA AFIN

El axioma siguiente y sus consecuencias utilizan los números reales R con la estructura de cuerpo conmutativo, ordenado, arquimediano y completo [7].

AXIOMA III_a: (Estructura afín de cada recta)

Al plano π está asociada una aplicación

$d: \pi \times \pi \longrightarrow R_+$

llamada distancia y tal que

1. $d(y,x) = d(x,y) \qquad x,y \in \pi$

2. Para toda recta orientada **D**, todo $x \in D$ y todo $l \geq 0$, existe en **D** un punto **y** único tal que

$x \leq y$ y $d(x,y) = l$

3. Para $x \in [a,b]$, $d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)$

Este axioma concierne a la estructura afín de cualquier recta de π; y será completado por el Axioma III_b que establece una relación entre las estructuras afines de las diversas rectas.

Observación: Se deduce fácilmente del Axioma III_{a2} y III_{a3} que

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

Proposición 3: Para toda recta orientada **D** y para todo **a** $\in$ **D** existe una única aplicación creciente $f : D \longrightarrow R$ tal que

$f(a) = 0$ y $d(x,y) = |f(y) - f(x)|$ para todo $x,y \in D$.

Esta f es una biyección de **D** sobre **R**, llamada aplicación canónica.

Demostración 1: Unicidad

De las hipótesis se ve que $d(x,a) = |f(x)|$

y que $$f(x) = \begin{cases} d(a,x) & \text{si } a < x \qquad (I) \\ -d(a,x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

Mostrando que si definiéramos f por la relación (I) se cumplirían las hipótesis del enunciado, resultará la unicidad:

De III_{a3} se deduce que:

$x \leq a \leq y \quad d(x,y) = d(x,a) + d(a,y) = -f(x) + f(y)$

$a \leq x \leq y \quad d(a,y) = d(a,x) + d(x,y) = f(x) + d(x,y)$

$x \leq y \leq a \quad d(x,a) = d(x,y) + d(y,a)$ o sea $-f(x) = d(x,y) - f(y)$

y así siempre que $x \leq y$, se tiene

$$d(x,y) = f(y) - f(x)$$

Como $\mathbf{d(x,y)\geq 0}$,

$$\mathbf{d(x,y) = |f(y) - f(x)| \quad y \quad f(x)\leq f(y) \quad (si\ x \leq y)}$$

y resulta f creciente

Por otra parte, $\mathbf{(x<y \quad f(y) - f(x) = d(x,y)\neq 0)}$ y esto prueba la inyectividad.

Por último, para $\ell \geq 0$ el Axioma III$_{a2}$ muestra que existen $\mathbf{x,y}$ tales que

$$\mathbf{a\leq x \quad y \quad d(a,x) = \ell \quad ó\ sea\ f(x) = \ell}$$

$$y \quad \mathbf{y\leq a \quad y \quad d(a,y) = \ell\ ó\ sea\ f(y) = -\ell}$$

por lo tanto $f(\mathbf{D})=\mathbf{R}$ y f es suryectiva.

La existencia de f está dada por **(I)**$\blacksquare$

Nota: Esta proposición muestra que toda recta con origen es isomorfa a **R** mediante un isomorfismo único que conserva la estructura de esa recta asociada a su orden y a su distancia.

Por esto, siempre que sea conveniente, podremos identificar toda recta orientada con origen, con **R** y trasladar sobre ella las propiedades de los reales mediante el isomorfismo f.

Consideraremos entonces una recta orientada con origen **(D,0)** y su "aplicación canónica" f sobre **R**, para dar la siguiente terminología y/u observaciones:

1. La **abcisa de x ($\mathbf{x\in D}$)** en **(D,0)** es $f(\mathbf{x})$, y vale $\mathbf{d(0,x)}$ ó $-\mathbf{d(0,x)}$ según que $\mathbf{0 < x}$ ó $\mathbf{x < 0}$.

2. La **medida algebraica** de un par (x,y) de puntos de (D,0) es el número

$$\overline{xy} = f(y) - f(x) = \overline{0y} - \overline{0x}$$

y vale d(x,y) ó -d(x,y) ($x \leq y$ ó $y \leq x$); además no depende del origen **0** elegido sobre **D** (es fácil verlo) y cambia por su opuesto cuando se toma el orden inverso en **D**.

Cuando el origen **0** considerado en **D** permanece invariable a lo largo de todo un tema, es cómodo identificar a **x** con su abscisa $f(x)$ y así escribir por ejemplo

$\overline{xy} = y - x$ **como en R.**

3. La Recta (D,0) está provista de una estructura de **espacio vectorial** uni-dimensional con origen **0** (transferida por el isomorfismo canónico f).

4. El punto medio de un par de puntos (x,y) distintos de π es el punto m de $\vartriangle(x,y)$ definido sobre esta recta con origen arbitrario, por

$$m - x = y - m;$$

entonces $m = \frac{1}{2}(x+y)$

El medio de (x,x) es x

5. Debido al isomorfismo canónico existe el punto medio y es único.

6. La recta de π tiene infinitos puntos.

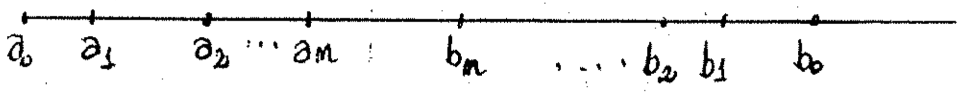
Ahora demostraremos una afirmación que, a través de los recursos gráficos habitualmente utilizados en geometría para representar entes geométricos resulta "evidente", pero que, sin embargo exige una demostración, resultando un teorema fundamental de la geometría.

Para ello se utiliza la completitud de la recta que es trasladada a ella desde **R** por el isomorfismo canónico establecido en la Proposición 2 y en cuya demostración se utiliza de manera esencial el Axioma III_{a2}.

AXIOMA DE COMPLETITUD (de encaje de intervalos)

Si se tiene un sistema de segmentos en el cual cada uno contiene al siguiente y si en este sistema siempre puede encontrarse un segmento de medida menor que cualquier número dado, existe un punto único que se halla dentro de estos segmentos.

Fig.4



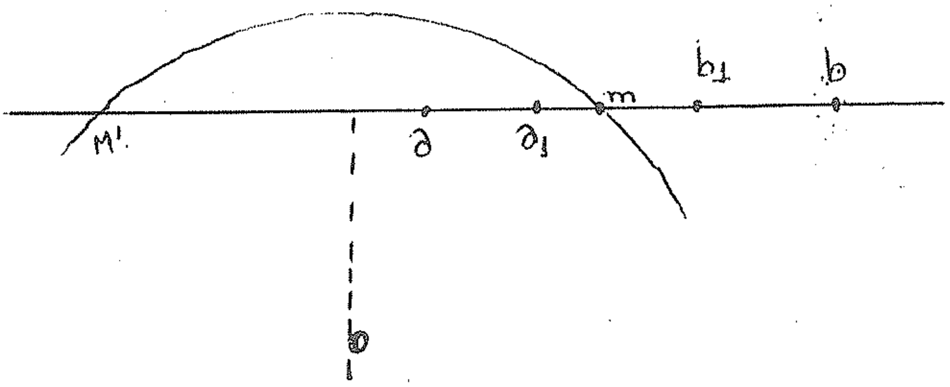
Recordemos que una circunferencia se determina por su centro y su radio. Los puntos del plano que se encuentran a una distancia del centro mayor que el radio, se llaman **externos** con respecto a la circunferencia y los que se hallan a una distancia del centro menor que el radio se llaman **internos** con respecto a la misma.

Los intervalos **[a,b]** también son llamados segmentos.

Pasaremos ahora a enunciar y demostrar el siguiente

Teorema 1: Un segmento que una un punto interno, con respecto a la circunferencia, con otro externo, tendrá con la circunferencia un punto común, y solamente uno.

Fig.5



Demostración: Sea $C(0,r)=\{x\in\pi \mid d(x,0)=r\}$ la circunferencia de centro **o** y radio **r**; **a** punto interno y **b** punto externo con respecto a **C(0,r)**

Sea **m** el punto medio de **(a,b)**. Entonces

I. Si $d(m_1,o)=r$, m_1 es el punto buscado

II. Si $d(m_1,o)<r$, m_1 es interno y re-denominamos:

$a_1= m_1$ y $b_1=b$ (así $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$)

III. Si $d(m_1,o)>r$, m_1 es externo y re-denominamos:

$a_1= a$ $b_1= m_1$ (así $[a_1,b_1] \subset [a,b]$)

En los casos II y III buscamos el punto medio **m_2 de (a_1,b_1)** y hacemos el mismo análisis anterior, obteniendo el punto buscado ó en caso contrario otro subintervalo

$[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$

Así sucesivamente, en caso de no encontrar el punto buscado como punto medio de algún subintervalo, se obtiene una sucesión de "intervalos encajados"

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset \ldots\ldots \supset [a_n,b_n]$

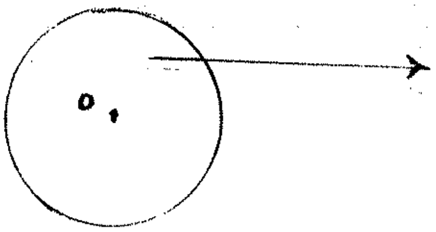
donde todo **a_1** es interno y todo **b_1** es externo a la circunferencia, y cada intervalo tiene longitud igual a la mitad del anterior.

Entonces por el Axioma de encaje (o de completitud) existe un único punto situado dentro de todos estos segmentos. Como ese punto se encuentra entre todos lo internos y todo los externos (con respecto a la circunferencia) del segmento **$[a,b]$**, no puede ser ni interno ni externo, y por consiguiente será un punto de la circunferencia∎

Otra forma equivalente de enunciar este teorema es:

Teorema 1': Toda semirrecta que nace en el interior de una circunferencia, tiene con ella un punto en común.

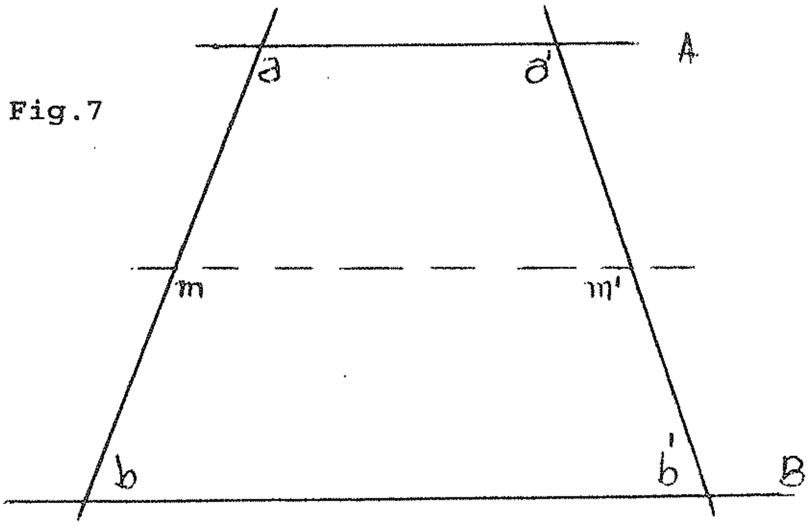
Fig.6



AXIOMA III$_b$: (Relación entre las estructuras afines de diferentes rectas)

Para todo par de rectas paralelas **(A,B)**, y puntos **a, b, a', b'** tales que **a,a'ϵA** y **b,b'ϵB**, la paralela a estas rectas que pasa por el medio de **(a,b)**, pasa también por el medio de **(a',b')**

Fig.7

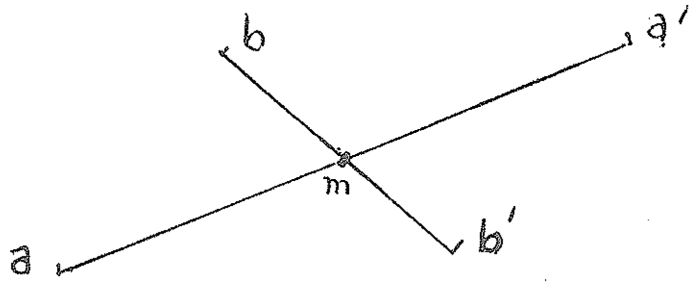


Daremos ahora algunas definiciones:

Definición 4: Se llama Paralelogramo a toda cuatriupla **(a,b,a',b')** de puntos de π tal que **(a,a')** y **(b,b')** tienen el mismo punto medio.

Los pares **(a,a')** y **(b,b')** se llaman diagonales

Fig.8



Definición 5: Si **x,y,m$\epsilon\pi$**, se dice que **x** e **y** son simétricos con respecto a **m** si el punto medio de **(x,y)** es **m**.

Definición 6: Para cada $\mathbf{m}\in\pi$ se llama simetría de centro **m** a la aplicación **S** de π en π que a cada **x** le asigna el punto **s(x)** simétrico de **x** con respecto a **m**.

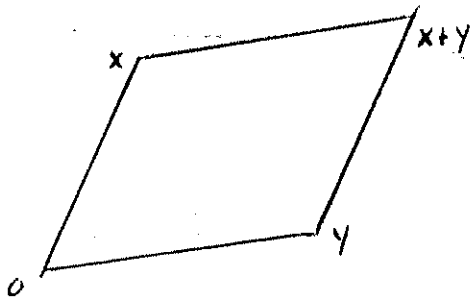
Observación: Es importante notar que para cualesquiera puntos $\mathbf{a,b,b'}\in\pi$ existe un **a'** único tal que **(a,b,a',b')** es un paralelogramo: **a'** es el simétrico de **a** con respecto al punto medio de **(b,b')**

Definición 7: Para cada $0\in\pi$ se llama **plano π provisto del origen 0**, al par $(\pi,0)$.

Definición 8: La adición + en **$(\pi,0)$**, es la operación interna $(x,y) \longrightarrow x+y$

donde **x+y** es el punto tal que **(0,x,x+y,y)** es un paralelogramo.

Fig.9



De lo anterior se obtiene el siguiente resultado que no demostraremos

Teorema 2: a) El plano **$(\pi,0)$** con la operación + es un grupo abeliano con elemento neutro **0**.

b) Para todo par de rectas $\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}$ distintas que pasan por $\mathbf{0}$, el grupo $(\pi,\mathbf{0})$ es suma directa de los subgrupos $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$, es deçir que todo $\mathbf{x}\in\pi$ se escribe $\mathbf{x=x_1+x_2}$ para algún $\mathbf{x_1}\in\mathbf{D_1}$ y algún $\mathbf{x_2}\in\mathbf{D_2}$.

Para dar a $(\pi,\mathbf{0})$ estructura de espacio vectorial, definiremos la multiplicación por escalares de $\mathbf{R}$.

Definición 9: En $(\pi,\mathbf{0})$ la aplicación $(\vdash,\mathbf{x}) \longrightarrow \vdash\cdot\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}\times\pi\longrightarrow\pi$ se define por:

1. $\vdash\cdot\mathbf{0=0}$

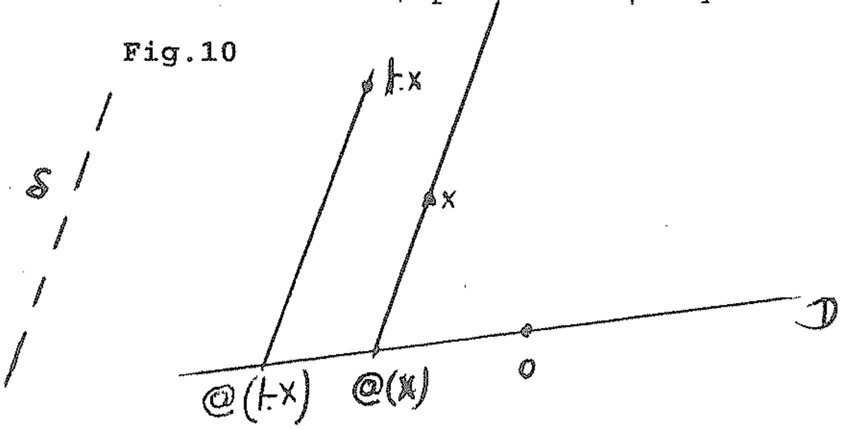
2. Si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, $\vdash\cdot\mathbf{x}$ es el producto de $\mathbf{x}$ por $\vdash$ en el espacio vectorial constituído por la recta $\blacktriangle(\mathbf{0},\mathbf{x})$ con origen $\mathbf{0}$.

Esta operación se llama **multiplicación escalar en** $(\pi,\mathbf{0})$.

El resultado que damos a continuación no es otro que el Teorema de Thales.

Teorema 3: Sea $\mathbf{D}$ una recta que pasa por $\mathbf{0}$, δ una dirección distinta de la de $\mathbf{D}$, y $@$ la proyección oblicua sobre $\mathbf{D}$ paralela a δ. Entonces, para todo $\vdash\in\mathbf{R}$ y todo $\mathbf{x}\in\pi$, $@(\vdash\mathbf{x})=\vdash\cdot@(\mathbf{x})$

Fig.10



Demostración 1° caso: Sea ├ racional.

Para **n** entero no negativo, la igualdad

$$nx= \underbrace{x+....+x}_{n \text{ veces}}$$

muestra que

$@(nx)= n@(x)$ **(*)**(ver Nota al final de la demostración)

Como $(-n)\mu= -(n\mu)$ y $@(-\mu)= -@(\mu)$, la igualdad (*) vale para todo $n\in Z$.

Si **x** es de la forma $\frac{1}{n}$ y $(n\neq0)$ la igualdad (*) da $@(y)= n@(\frac{1}{n} y)$ y así $@(\frac{1}{n} y) = \frac{1}{n} @(y)$

Entonces para todos los enteros **p,q,≠0** y todo $x\in\pi$:

$$@(\frac{p}{q} x) = @ (p(\frac{1}{q}x)) = p@ (\frac{1}{q}x)) = p[\frac{1}{q} @ (x)] = \frac{p}{q} @(x).$$

Ahora para ├∉Q sigamos considerando **x≠o** (pues si **x=o** es trivial).

Si **▲(,x)** tiene dirección **§**, se tiene **@(├.x)=o** ├ y el teorema se verifica.

En caso contrario **@(x)≠o**, y orientamos **▲(o,x)** y **D** de modo que **o<x** en **▲(o,x)** y **o<@(x)** en **D**.

La aplicación ├ ⟼├**.x** de **R** en **▲(o,x)** es creciente.

La aplicación **y⟼@(y)** de **▲(o,x)** en **D** es creciente.

Entonces también lo son las aplicaciones ├ ⟶**@(├x)** y ├ ⟶ ├@(x) . Como hemos demostrado que estas dos aplicaciones coinciden para $\vdash$ racional ellas resultan idénticas por una propiedad de **R** que admitiremos■.

Nota: Usando Axioma III_b se puede probar que si **@** es una proyección oblicua y **m** es punto medio de **(x,y)** entonces **@(m)** es el medio de **(@(x),@(y))**.

En consecuencia resulta que toda proyección oblicua de un paralelogramo es un paralelogramo, y entonces como **(0,x,x+y,x)** es paralelogramo, también lo es **(0,@(x), @(x+y), @(y))** por lo que resulta que **@(x)+@(y)= @(x+y)** (definición de suma).

Se puede demostrar que para todo $\vdash \in$**R** y todos los **x,y**$\in\pi$ se cumple

$$\vdash(x+y) = \vdash x+\vdash y$$

y entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4: El plano (π,0) provisto de la adición y de la multiplicación escalar es un **espacio vectorial** sobre **R** de dimensión 2, donde los subespacios afines de dimensión 1 son las rectas de π.

Aplicación: Dada una recta **D**, y una dirección $\boldsymbol{\delta}$ distinta de la de **D**, la proyección oblicua de (π,0) en (D,0) es una aplicación lineal.

> *No hay problemas resueltos, hay solamente problemas más o menos resueltos.*
>
> *H. Poincare*

§ 2 - AXIOMAS DE ESTRUCTURA METRICA

Perpendiculares

Axioma de las perpendiculares

Hemos utilizado una distancia para enunciar el Axioma III pero el plano definido por los Axiomas I, II y III no posee estructura métrica verdadera; cada una de las rectas de π está munida de una métrica pero las métricas de las diversas rectas no están relacionadas por ningún axioma de paso; el Axioma III_b no hace más que introducir los puntos medios o sea un noción afín.

Vamos ahora a relacionar las métricas de diversas rectas de π gracias a las proyecciones ortogonales; para eso vamos a precisar en primer lugar la noción de rectas perpendiculares.

AXIOMA IV_a: (de las perpendiculares)

La perpendicularidad (notada $\perp$) es una relación binaria sobre el conjunto **D** de las rectas de π, tal que

1. $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$ <==> $\mathbf{B}\perp\mathbf{A}$ (simetría)

2. $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$ ==> **A** y **B** no son paralelas

3. Para toda recta **A** existe al menos una recta **B** tal que $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$

4. Para todo par de rectas **(A,B)** tal que $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$ se tiene la siguiente equivalencia

$$\mathbf{B}\|\mathbf{B}' \Longleftrightarrow \mathbf{A}\perp\mathbf{B}'$$

Perpendicularidad de dos direcciones

Diremos que dos direcciones δ,δ', son perpendiculares, y notaremos $\delta\perp\delta$ si existen dos rectas $\mathbf{D},\mathbf{D}'$ de direcciones δ,δ' tales que $\mathbf{D}\perp\mathbf{D}'$.

Se define así una relación binaria sobre el conjunto $\mathfrak{B}$ de direcciones; el IV_a muestra que esta relación posee las propiedades **P'** siguientes:

1. Simetría

2. Antirreflexividad ($\delta\perp\delta$ imposible)

3. Para toda dirección δ, existe una dirección δ' única tal que $\delta\perp\delta'$.

Inversamente se verifica que toda relación binaria sobre el conjunto $\mathfrak{B}$ de direcciones que posee las propiedades **P'** es la relación asociada a una relación de perpendicularidad sobre el conjunto $\mathfrak{D}$ de rectas.

Luego, dar una relación de perpendicularidad sobre $\mathfrak{D}$ que satisface el Axioma IV equivale a dar sobre $\mathfrak{B}$ una relación que satisface las propiedades **P'**; eso vuelve a dar una partición de ß en subconjuntos tales que cada uno contiene solamente dos elementos (que constituyen un par de direcciones perpendiculares).

En consecuencia el Axioma IV_a no contribuiría en nada al estudio métrico del plano si no fuera complementado por el Axioma IV_b que va a hacer intervenir las distancias.

Cociente de proyección de un par de semirrectas del mismo origen

Definición 10: Para cada recta **D** llamamos proyección ortogonal sobre **D** a la proyección oblicua sobre **D** paralela a la dirección perpendicular a la de **D**.

Sean entonces $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ dos semirrectas de origen **0** y sean $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$ las rectas que las contienen orientadas de tal modo que $\mathbf{A_1 \geq 0}$ y $\mathbf{A_2 \geq 0}$

($\mathbf{A_1} \geq 0$ significa que $\mathbf{0} \leq \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a \epsilon A_1}$)

Para cada $\mathbf{x \epsilon D_1}$, notaremos $\overline{\mathbf{0x}}$ la medida algebraica de $\mathbf{(0,x)}$ sobre la recta orientada $\mathbf{D_1}$; en forma análoga sobre $\mathbf{D_2}$.

Sea **@** la proyección ortogonal sobre $\mathbf{D_1}$ y sea **a** el punto de $\mathbf{A_2}$ tal que $\overline{\mathbf{0a}}\mathbf{=1}$.

Para cada $\vdash \epsilon \mathbf{R}$ se tiene $\mathbf{@(\vdash a) = \vdash @(a)}$.

Entonces, como todo $\mathbf{x \epsilon D_2}$ es de la forma $\vdash . \mathbf{a}$, el cociente $\overline{\mathbf{o@(x)}}/\overline{\mathbf{0x}}$ está definido para todo $\mathbf{x \neq 0}$, es constante e igual a $\overline{\mathbf{o@(a)}}$; de aquí la definición.

Definición 11: En base a las consideraciones anteriores, llamamos **cociente de proyección** de A_2 sobre A_1 al escalar **k (notando** $c(A_1,A_2)$) tal que $\overline{o@(x)} = k\overline{0x}$ para todo $x \epsilon D_2$.

Tenemos entonces $c(A_1,A_2)= \overline{o@(a)}$

Resulta obvio que $c(A_1,A_2)= 0 <==> @(a)= 0 <==> A_1 \perp A_2$.

Si $A_1=A_2$, $c(A_1,A_2)=1$; si A_1 y A_2 son opuestas $c(A_1,A_2)= -1$

Nota: el $c(A_1,A_2)$ no es otra cosa que el coseno del ángulo entre A_1 y A_2.

Producto escalar

Axioma de simetría

AXIOMA IV_b: Para todo par (A_1,A_2) de semirrectas del mismo origen se tiene

$$c(A_1,A_2)= c(A_2,A_1)$$

Norma y producto escalar

Definición 12: En el plano con origen **$(\pi,0)$** llamamos norma de **x (para $x\epsilon\pi$)** al número positivo **$\|x\|=d(0,x)$**.

Es inmediato que $\|x\|$ es nulo sólo si **$x=0$**, y que para todo escalar $\vdash$, $\| \vdash x\| = |\vdash| \; \|x\|$, siendo en particular $\|-x\|=\|x\|$.

Definición 13: En el plano **$(\pi,0)$** llamamos producto escalar de los vectores **x** e **y** al número real notado **x.y** así definido

1. Si al menos uno de los vectores **x o y es 0, x.y=0**
2. Si **$x\neq 0$ e $y\neq 0$**, y si ponemos **$X=D(0,x)$, $Y=D(0,y)$**,

$$x.y=\|x\| \;.\; \|y\| \;.\; c(X,Y)$$

Es a veces cómodo escribir **x.x** como **x^2**.

Consecuencias inmediatas:

1. La relación **x.y=0** equivale a decir que **x** o **y** es **0**, o bien que $X \perp Y$.

En este caso también diremos que $x \perp y$, o sea

$$x.y= 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

2. Sea **D** una recta orientada que contenga a **0** y **x**; si **@** designa la proyección ortogonal sobre **D**, se tiene que

$$x.y= \overline{0x} \;.\overline{0@(y)}$$

Esta relación es evidente si **x** o **y** es **0**; en otro caso, como el cambio de orientación de **D** no cambia el producto

$\overline{0x} \cdot \overline{0@(y)}$ es suficiente demostrar la relación cuando D es la recta orientada $\vartriangle(0,x)$; entonces:

$$\overline{0x} = \|x\|, \text{ y } \quad \overline{0@(y)} = \|y\| c(X,Y)$$

y de aquí resulta la relación.

Es a veces cómodo notar $c(x,y)$ en lugar de $c(X,Y)$.

Teorema 5: La aplicación $(x,y) \longrightarrow x.y$ de $(\pi,0)x(\pi,0)$ en **R** es simétrica y bilineal.

Además es positiva en el sentido que $x.x>0$ para todo $x \neq 0$; más precisamente se tiene que para todo x, $x.x=\|x\|^2$.

Demostración:

La simetría resulta de la igualdad $c(x,y)=c(y,x)$ que se deduce del Axioma IV_b.

Ahora, para cada x, la aplicación $y \longrightarrow x.y$ de $(\pi,0)$ en **R** es lineal:

Si $x=0$, es evidente.

Si $x \neq 0$, sea @ la proyección ortogonal sobre la recta orientada $\vartriangle(0,x)$; entonces la aplicación $y \longrightarrow @(y)$ de $(\pi,0)$ en la recta orientada $\vartriangle(0,x)$ provista del origen **0** es lineal, y como la aplicación $\mu \longrightarrow \overline{0\mu}$ de $\vartriangle(0,x)$ en **R** es también lineal, así resulta la aplicación compuesta $y \longrightarrow \overline{0@(y)}$, y por consiguiente es lineal $y \longrightarrow \overline{0x} \cdot \overline{0@(y)} = x.y$. Debido a la simetría se obtiene la bilinealidad.

La igualdad $\mathbf{x.x=\|x\|^2}$ es inmediata de la definición de producto escalar y de $\mathbf{c(x,x)=1}$■

Identidades y desigualdades

1. $(\sum_i \alpha_i x_i) \;.\; (\sum_j ß_j y_j) = \sum_{i,j} \alpha_i ß_j x_i y_j$ **para** $\alpha_i, ß_j \in \mathbf{R}$

$x_i, y_j \in \pi$

de donde en particular se obtiene para $\mathbf{a,b} \in \pi$

$$\mathbf{(a\pm b)^2 = a^2+b^2 \pm 2a \,.\, b}$$

y de aquí

$$\mathbf{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)}$$

$$\mathbf{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\, a \,.\, b}$$

2. $|\mathbf{x.y}| \le \|\mathbf{x}\| \,.\, \|\mathbf{y}\|$

Demostración: Para todo $\vdash \in \mathbf{R}$, se tiene

$\mathbf{(\vdash x-y)^2 = \vdash^2 x^2 - 2 \vdash .x.y + y^2 \ge 0.}$

(la igualdad vale por la igualdad 1).

El trinomio de 2do grado en $\vdash$ es positivo para todo $\vdash$, y por consiguiente el discriminante deber se $\mathbf{\le 0}$, o sea

$$\mathbf{(x.y)^2 \le x^2y^2} \quad \textbf{y así} \quad |\mathbf{x.y}| \le \|\mathbf{x}\| \,.\, \|\mathbf{y}\|$$

La igualdad resultará cuando el trinomio se anule, es decir para $\vdash$ tal que $\mathbf{y= \vdash x}$ y esto significa que $\mathbf{0,x,y}$ estén alineados.

Proposición 3: Para todo x,y de $(\pi,0)$ con $x\neq 0$ e $y\neq 0$, se cumple:

$|c(x,y)|<1 \iff 0,x,y$ no están alineados.

$c(x,y)=1 \iff$ las semirrectas $D(0,x)$ y $D(0,y)$ son idénticas.

$c(x,y)=-1 \iff$ las semirrectas $D(0,x)$ y $D(0,y)$ son opuestas.

Definición 14: Se llama rectángulo a todo paralelogramo (a,b,a',b') tal que en el plano (π,a) se cumple $b.b'=0$ (es decir $b\perp b'$).

Enunciaremos algunos lemas y proposiciones:

Lema: En todo rectángulo las longitudes de los lados opuestos son iguales.

Proposición 4: Toda traslación es una isometría.

Corolario: En $(\pi,0)$, para $x,\ y\in\pi$ se tiene

$d^2(x,y)=\|y-x\|^2 = (x-y)$

Proposición 5: Para todo $a,b\in\pi$, si f es la traslación $a \longrightarrow b$, y $\circ,*$ son productos escalares en (π,a) y (π,b) respectivamente, entonces, si $x\in\pi$, $y\in\pi$:

$x\circ y= f(x)*f(y)$

de lo cual se deduce que f es un isomorfismo del espacio vectorial (π,a) con su producto escalar sobre (π,b).

El pensar está muy lejos del saber.

Proverbio

§ 3 - PROPIEDADES METRICAS ELEMENTALES

Relaciones métricas en paralelogramos y triángulos

Proposición 6:

a) En todo paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

b) Decir que un paralelogramo es un rectángulo equivale a decir que sus diagonales son iguales.

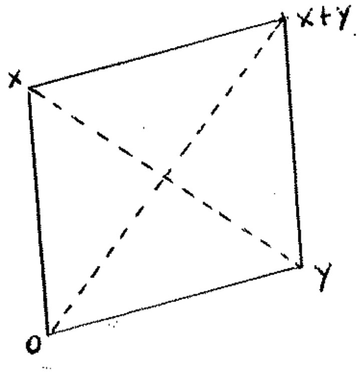
Demostración: Para simplificar cálculos supongamos que $\mathbf{0}$ es uno de sus vértices; el paralelogramo es entonces de la forma $\mathbf{(0,x,x+y,y)}$.

La identidad

$$\mathbf{(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)}$$

demuestra (a)

Fig.11



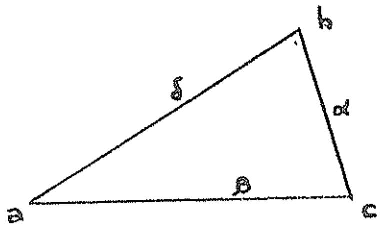
Para (b), la identidad $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4x.y$ muestra que $\|x+y\| = \|x-y\| \iff x.y=0 \iff (0,x,x+y,y)$ es un rectángulo■

Proposición 7: Sea $(a,b,c,)$ un triángulo cualquiera de π tal que $a \neq b$ y $a \neq c$; sean $\alpha, ß, \delta$ sus lados y k el cociente de proyección de las semirrectas $D(a,b)$, $D(a,c)$. Entonces

$$\alpha^2 = ß^2 + \delta^2 - 2kß\delta$$

En particular $\alpha^2 = ß^2 + \delta^2 \iff D(a,b) \perp D(a,c)$

Fig.12



Demostración: En el plano (π,a) podemos escribir $\alpha^2 = d^2(b,c) = (c-b)^2 = c^2 + b^2 - 2c.b = ß^2 + \delta^2 - 2k\ ß\delta$

Por otra parte dado que $ß\delta \neq 0$,

$kß\delta = 0 \iff k = 0 \iff D(a,b) \perp D(a,c)$■

Reconocemos en la última parte de la proposición, el Teorema de Pitágoras, del cual se puede dar una demostración que no usa el producto escalar explícitamente.

Proposición 8: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x,y \in (\pi,0)$ y la igualdad vale si $x \in [0,y]$ o $y \in [0,x]$.

Demostración: Si $x=0$ o $y=0$ es trivial.

En otro caso; sea $\alpha = \|x\|$, $ß = \|y\|$, $\delta = \|x+y\|$.

Tenemos $\delta^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta c(x,y) \leq \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$, y la igualdad vale cuando $c(x,y)=1$.

Así $\delta\leq\alpha+\beta$ y la igualdad vale si $x\in[0,y]$ ó $y\in[0,x]$.

Corolario: Para todo $x,y,z\in\pi$ se cumple $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ y la igualdad vale cuando x,y,z están alineados.

Demostración: En (π,z) la relación a demostrar sería

$$\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

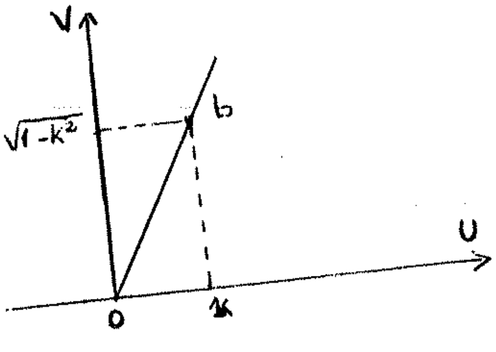
y esto vale por Proposición 8.

Lema: Para todo $k\in[-1,1]$ existe un par (A,B) de semirrectas de origen 0 tal que $c(A,B)=1$.

Demostración: Sean U,V dos rectas orientadas perpendiculares que pasen por 0 y sea b el punto de coordenadas $(k,\sqrt{1-k^2})$ en el sistema de coordenadas (U,V).

Las semirrectas A,B buscadas serán: la semirrecta positiva de U y la semirrecta $D(0,b)$.

Fig.13



Comentario: Notemos que esta construcción usa de manera esencial la existencia de la raíz cuadrada $\sqrt{1-k^2}$; el lema puede no ser cierto en ciertos planos en que se satisfagan los axiomas I, II, III, IV donde el cuerpo **R** sea reemplazado por un subcuerpo conveniente **K** de **R**, en el cual no siempre exista dicha raíz cuadrada.

Proyección ortogonal

Proposición 9: Sea **D** una recta, $a \in \pi$ y sea **p** la proyección ortogonal de **a** sobre **D**. Entonces

1. Para todo $x, y \in D$

$$d(p,x) = d(p,y) \Longleftrightarrow d(a,x) = d(a,y)$$

2. Si D_1 es una de las semirrectas de **D** de origen **p**, la aplicación $x \longrightarrow d(a,x)$ de D_1 en **R** es estrictamente creciente.

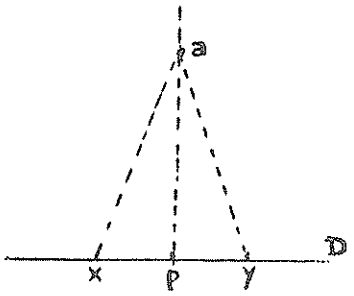
Demostración:

1. Dado que $D(p,a) \perp D$, por una proposición anterior se tiene que

$$d^2(a,x) = d^2(x,p) + d^2(a,p)$$

$$d^2(a,y) = d^2(y,p) + d^2(a,p)$$

Fig.14



así $\mathbf{d(x,p)= d(y,p)} \Longleftrightarrow \mathbf{d^2(x,p)= d^2(y,p)} \Longleftrightarrow \mathbf{d^2(a,x)= d^2(a,y)} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \mathbf{d(a,x)= d(a,y)}$

2. Usando también $\mathbf{d^2(a,x)= d^2(x,p) + d^2(a,p)}$, resulta que a medida que $\mathbf{d(x,p)}$ crece estrictamente, también lo hace $\mathbf{d(a,x)}$.

Corolario: La distancia $\mathbf{d(a,x)}$ es mínima en el único punto $\mathbf{x=p}$.

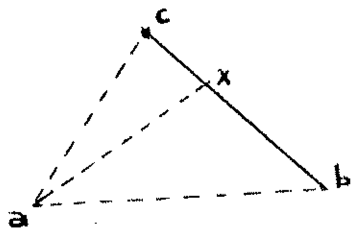
En efecto, esto resulta del estricto crecimiento de $\mathbf{d(a,x)}$.

Corolario: Sea $\mathbf{D}$ una recta, $\mathbf{a \in D}$ y $\mathbf{b \notin D}$, entonces $D^{\perp}\ \blacktriangle\mathbf{(a,b)} \Longleftrightarrow \mathbf{d(a,b) \leq d(b,x)}$ para todo $\mathbf{x \in D}$.

Corolario: Para todo $\mathbf{a,b,c,\in \pi}$ y todo $\mathbf{x \in [b,c]}$ se cumple

$\mathbf{d(a,x) \leq sup(d(a,b),d(a,c))}$

Fig.15



Proposición 10: La proyección ortogonal sobre una recta disminuye las distancias.

Demostración: Designamos por $\mathbf{D'}$ la paralela a $\mathbf{D}$ que pasa por $\mathbf{x}$; $\mathbf{x',y'}$ las proyecciones ortogonales de $\mathbf{x,y}$ sobre $\mathbf{D}$ y por $\mathbf{y''}$ la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{D'}$.

así $d(x,p)= d(y,p) \Longleftrightarrow d^2(x,p)= d^2(y,p) \Longleftrightarrow d^2(a,x)= d^2(a,y) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow d(a,x)= d(a,y)$

2. Usando también $d^2(a,x)= d^2(x,p) + d^2(a,p)$, resulta que a medida que $d(x,p)$ crece estrictamente, también lo hace $d(a,x)$.

Corolario: La distancia $d(a,x)$ es mínima en el único punto $x=p$.

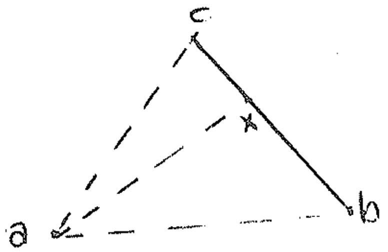
En efecto, esto resulta del estricto crecimiento de $d(a,x)$.

Corolario: Sea D una recta, $a \in D$ y $b \notin D$, entonces $D^{\perp} \Delta(a,b) \Longleftrightarrow d(a,b) \le d(b,x)$ para todo $x \in D$.

Corolario: Para todo $a,b,c, \in \pi$ y todo $x \in [b,c]$ se cumple

$d(a,x) \le \sup(d(a,b),d(a,c))$

Fig.15



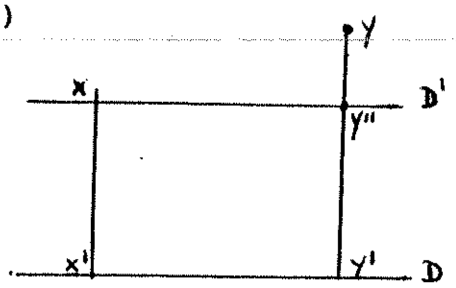
Proposición 10: La proyección ortogonal sobre una recta disminuye las distancias.

Demostración: Designamos por D' la paralela a D que pasa por x; x',y' las proyecciones ortogonales de x,y sobre D y por y'' la proyección ortogonal de y sobre D'.

En el rectángulo **(x,y'',y',x')**, se cumple

$d(x',y')= d(x,y'')$

Fig.16



En el triángulo rectángulo **(x,y,y'')** tenemos **$d(x,y'') \leq d(x,y)$**.

Así, **$d(x',y')\leq d(x,y)$**, y la igualdad se da solamente si **x,y** están sobre una paralela a **D**.

Producto escalar y distancia en una base cualquiera

Una base del plano **$(\pi,0)$** es un par **(a_1,a_2)** de elementos de π distintos de **0** y no alineados con **0**.

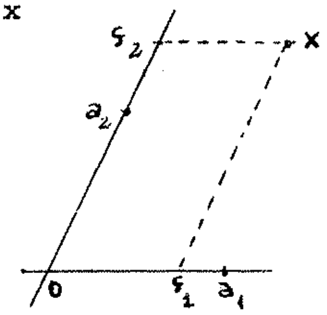
Todo **$x\epsilon\pi$** se escribe entonces de forma única,

$x= \varsigma_1 a_1 + \varsigma_2 a_2$

Los escalares **$\varsigma_1,\varsigma_2 \epsilon R$** son las coordenadas de **x** con respecto a la base **(a_1,a_2)**;

$\varsigma_1 a_1, \varsigma_2 a_2$ son las componentes de **x**

Fig.17



con respecto al sistema de ejes ($\vartriangle(0,a_1)$, $\vartriangle(0,a_2)$).

Sean $x,x' \in \pi$ y $(ç_1,ç_2),(ç_1',ç_2')$ sus coordenadas con respecto a la base dada. Las relaciones

$$x = ç_1a_1+ç_2a_2$$

$$x' = ç_1'a_1+ç_2'a_2$$

dan

$$x.y= ç_1ç_1'a_1^2 + ç_2ç_2'a_2^2 + (ç_1ç_2' + ç_2ç_1')\, a_1.a_2$$

Para $x=y$ obtenemos la forma cuadrática que expresa $\|x\|^2$ en función de $ç_1,ç_2$.

Las fórmulas se simplifican si (a_1,a_2) es una base ortonormal, es decir tal que:

$$\|a_1\| = \|a_2\| = 1 \quad \text{y } a_1 \perp a_2$$

Entonces

$$x.y = ç_1ç_1'+ç_2ç_2' \quad \text{y} \quad \|x\|^2 = x.x= ç_1^2+ç_2^2 .-$$

Los matemáticos son como los amantes... Conceded a un matemático el mínimo principio que él sacará de allí una consecuencia que tendréis que concederle también, y de esa consecuencia otra.

Fontenelle.

BIBLIOGRAFIA:

[1] **CHOQUET, Gustave:** "L'enseignement de la Geometría", Editorial Herman, Paris. 1964.

[2] **ALEKSANDROW, KOLMOGOROV, LAURENTIEV y OTROS,** "La matemática, método y significado", Alianza Editorial, Madrid. 1985.

[3] **COURANT - ROBBINS** "¿Qué es la matemática?", Editorial Aguilar. 1971.

[4] **FETISOF, A.I.** "Acerca de la demostración en geometría", Editorial MIR, Moscú. 1980.

[5] **NEWMAN, James R.** "Colección Sigma. El mundo de las matemáticas", Editorial Grijalbo, Madrid. 1976.

Revistas:

[6] Escuela Aula Taller. Año 1, N°1. 1989, pag.30/35. Artículo: "Aprender matemática". María F. Giordano, Violeta Guyot, Norma C. de Celorrio y otros.

[7] Revista de Educación Matemática UMA - FAMAF; Vol.I, N°2, Año 1982. Artículo: "Números Reales", Autor: Jorge A. Vargas.

INDICE GENERAL