

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “ C ”

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 2/92

TOPOLOGIA

Isabel G. Dotti – María J. Druetta



Editores: Isabel Dotti – Jorge Vargas

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

PROLOGO

Estas notas contienen lo que consideramos un curso básico de Topología General y que hemos dictado varias veces en FaMAF. Con el objeto de mostrar el uso de la Topología en distintas áreas, hemos incluido temas como propiedades topológicas de grupos y cocientes de grupo de matrices, realizaciones de espacios cocientes como superficies de $\mathbb{R}^3$, y topologías en espacios de funciones. Además tratamos de ilustrar los nuevos conceptos mediante ejemplos que aparecen frecuentemente en Matemática, poniendo especial énfasis en el caso de espacios métricos.

La presente es esencialmente una versión en español de una primera edición publicada por la Universidad Federal de Pernambuco, Brasil. La diferencia principal es la incorporación de las demostraciones de los teoremas en el capítulo VI y la inclusión de un capítulo sobre metrizabilidad e inmersión en cubos.

Queremos agradecer especialmente a Luisa Isabel Gallardo por el trabajo de dactilografía y por su gran predisposición ante las numerosas correcciones.

Isabel G. Dotti y María J. Druetta.

Córdoba, junio de 1992.

INDICE

CAPÍTULO I: ESPACIOS TOPOLOGICOS

1. Conceptos elementales.	1
2. Conjuntos cerrados. Entornos. Interior, clausura.	5
3. Base de una topología.	8
4. Espacios 1er. Axioma, 2do. Axioma y separables.	10
Ejercicios.	13

CAPITULO II: CONTINUIDAD.

1. Funciones continuas.	17
2. Funciones abiertas, cerradas. Homeomorfismos.	19
Ejercicios.	21

CAPITULO III: CONEXION Y COMPACIDAD.

1. Espacios conexos.	23
2. Componentes conexas.	27
3. Espacios conexos por curvas.	29
4. Espacios compactos.	33
Ejercicios.	37

CAPITULO IV: TOPOLOGIAS PRODUCTO Y COCIENTE.

1. Producto finito de espacios topológicos.	40
2. Producto arbitrario de espacios topológicos.	41

3. Topología cociente.	47
4. Ejemplos de espacios cociente.	49
5. Cocientes del cuadrado unidad.	53
6. Cocientes de grupos de matrices.	56
Ejercicios.	61

CAPITULO V: CONVERGENCIA.

1. Sucesiones en espacios topológicos.	63
2. Redes.	68
3. Subredes y puntos de aglomeración.	71
4. Compactos y redes.	72
Ejercicios.	77

CAPITULO VI: PROPIEDADES DE SEPARACION.

1. Espacios regulares, completamente regulares.	81
2. Espacios normales.	82
3. Espacios localmente compactos.	87
4. Compactificación de Alexandroff.	91
5. Paracompacidad.	94
Ejercicios.	97

CAPITULO VII: INMERSION Y METRIZACION.

1. Teoremas de Inmersión en cubos.	100
2. Espacios metrizables.	102
3. Otras propiedades de los espacios métricos.	106
4. Variedades topológicas.	108
Ejercicios.	111

CAPITULO I

ESPACIOS TOPOLOGICOS

1. Conceptos elementales.

Resumimos las propiedades de los abiertos en $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es abierto si para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$, donde

$$B(x, r) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : [\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2]^{1/2} < r\}.$$

Con esta definición de abierto resulta:

A_1 - $\mathbb{R}^n$ es abierto.

A_2 - El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto.

A_3 - Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto.

A_4 - Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de abiertos entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto.

Estas propiedades de los abiertos en $\mathbb{R}^n$ se verifican en un espacio métrico; esto es, un conjunto X munido de una aplicación $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, llamado distancia, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$d_1 - d(x, x) = 0 \qquad d(x, y) > 0 \qquad x \neq y$$

$$d_2 - d(x, y) = d(y, x)$$

$$d_3 - d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

donde x, y, z en X son arbitrarios.

Al par (X, d) lo llamaremos espacio métrico. En estas condiciones, para cada $x \in X$ y $r > 0$ definimos la bola abierta de centro x y radio r por $B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$. Diremos que $A \subset X$ es abierto si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

En un espacio métrico además de A_1, A_2, A_3, A_4 , se verifican:
 A_5 - $B(x,r)$ es abierto.

En efecto, si $y \in B(x,r)$ entonces $B(y,\delta) \subset B(x,r)$ con $\delta = r - d(x,y)$ pues $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x)$.

Resulta entonces que si $A \neq \emptyset$,

A es abierto $\Leftrightarrow A$ es unión de bolas abiertas.

A_6 - Si $x \neq y$ entonces existen A y B abiertos tales que $x \in A, y \in B, A \cap B = \emptyset$.

A_7 - Si $x \in A, A$ abierto en X , entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset A$. $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable con la siguiente propiedad: Si A es abierto y $x \in A$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset A$.

1.1.1. Ejemplo.

Consideremos ahora las siguientes métricas en $\mathbb{R}^n$.

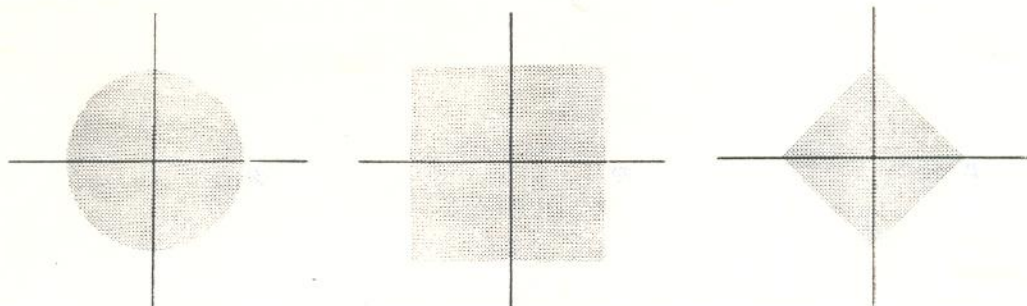
Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, definimos

$$d_1(x,y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

$$d_2(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

$$d_3(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Visualizando en $\mathbb{R}^2$, las bolas $B_i(0,1)$ en las métricas $d_i, i = 1,2,3$, son



Las funciones $d_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, dan a $\mathbb{R}^n$ tres estructuras diferentes de espacio métrico que son equivalentes en el siguiente sentido: las d_i , $i = 1, 2, 3$, definen la misma familia de abiertos. En efecto, dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se cumple

$$B_3(x, r) \subset B_1(x, r) \subset B_2(x, r) \subset B_3(x, nr) \subset B_1(x, nr)$$

ya que $d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_3(x, y) \leq n d_2(x, y)$.

De la observación de las propiedades de los abiertos en un espacio métrico surge, como generalización de este concepto, la noción de espacio topológico que será el objeto de estudio de este curso.

1.1.2. Definición. Un espacio topológico (X, τ) es un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X que satisface:

$$A_1 - X \in \tau.$$

$$A_2 - \emptyset \in \tau.$$

$$A_3 - \text{Si } A_i \in \tau, i \in I, \text{ entonces } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau.$$

$$A_4 - \text{Si } A_1, \dots, A_n \in \tau \text{ entonces } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau.$$

A los elementos de la familia τ los llamaremos abiertos. Una familia τ que satisface A_1 , A_2 , A_3 y A_4 se llama una topología en X .

1.1.3. Ejemplos.

- X conjunto, $\tau = \{X, \emptyset\}$ es la topología indiscreta.
- X conjunto, $\tau = \mathcal{P}(X)$ es la topología discreta.
- X conjunto, $\tau = \{A \subset X: CA \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$, donde $CA = X - A$ denota el complemento de A . τ se llama la topología de los complementos finitos.

- (X, d) espacio métrico. Definimos τ_d , llamada la topología métrica (o topología inducida por la métrica), de la siguiente manera,

$$A \in \tau_d \text{ sii para cada } x \in A \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subset A.$$

- Si $X = \mathbb{R}^n$, la topología dada por la métrica $d = d_1$ del

Ejemplo 1.1.1 se llama la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

1.1.4. **Definición.** Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X . Diremos que $\tau_1 < \tau_2$ (τ_1 es menos fina que τ_2) si todo abierto según τ_1 lo es según τ_2 . $\tau_1 = \tau_2$ (las topologías son iguales) si $\tau_1 < \tau_2$ y $\tau_2 < \tau_1$.

- Las topologías τ_{d_i} , $i = 1, 2, 3$, de 1.1.1. son iguales.

- Si $X = \mathbb{R}$ y definimos τ_1 , τ_2 de la siguiente manera,

$A \in \tau_1 \Leftrightarrow$ Para todo $x \in A$, $[x, b) \subset A$ para algún $b \in \mathbb{R}$.

$A \in \tau_2 \Leftrightarrow$ Para todo $x \in A$, $(b, x] \subset A$ para algún $b \in \mathbb{R}$.

Puede verse fácilmente que la topología usual de $\mathbb{R}$ es estrictamente menos fina que τ_1 (ó τ_2) y que τ_1 y τ_2 no son comparables.

1.1.5. **Definición.** Un espacio topológico (X, τ) se dice metrizable si en X está definida una distancia d tal que $\tau_d = \tau$.

- Todo espacio discreto X es metrizable con la métrica discreta así definida:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

1.1.6. **Definición.** Un espacio topológico se dice Hausdorff o T_2 si dados $x \neq y$ en X existen U, V abiertos disjuntos tales que $x \in U$ e $y \in V$.

- Todo espacio metrizable es T_2 (ver A_6).

- Como la topología de los complementos finitos en X infinito no es T_2 ($A \cap B = \emptyset$ con A, B abiertos $\Rightarrow X$ finito), X no es metrizable.

- Sea (X, τ) un espacio topológico e Y un subconjunto de X . Definimos en Y una topología $\tau|_Y$ de la siguiente forma:

$A \in \tau|_Y \Leftrightarrow A = B \cap Y$ con $B \in \tau$.

La topología $\tau|_Y$ se llama la topología relativa de X a Y .

- Si en $\mathbb{R}$ tomamos $Y = [0,1]$ entonces $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en Y pero no es abierto en $\mathbb{R}$.
- Si Y es abierto en X , todo abierto en Y es abierto en X .
- Si (X, τ) es un espacio topológico, $Z \subset Y \subset X$ entonces $\tau|_Z = (\tau|_Y)|_Z$.
- La restricción de la topología usual de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, $k < n$, es la topología usual de $\mathbb{R}^k$.

1.1.7. **Definición.** Un subconjunto Y de X se dice discreto si la topología relativa de X a Y coincide con la topología discreta en Y .

2. Conjuntos cerrados. Entornos. Interior, clausura.

1.2.1. **Definición.** Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ se dice cerrado si CA es abierto (o sea, $CA \in \tau$).

Resulta de la definición que,

- En la topología indiscreta los únicos cerrados son $\emptyset$ y X .
- En la topología discreta todo subconjunto es cerrado.
- En la topología de los complementos finitos, los conjuntos finitos, X y $\emptyset$ son los cerrados.
- En un espacio métrico (X, d) la bola cerrada de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ definida por $B^-(x, r) = \{y \in X: d(y, x) \leq r\}$ es cerrado en X con la topología métrica. Un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es cerrado.
- Si $Y \subset X$ tiene la topología relativa de X entonces A es cerrado en $Y \iff A = B \cap Y$ con B cerrado en X .

En un espacio topológico (X, τ) si $\mathcal{F}$ denota la familia de cerrados en X , se cumple:

$$F_1 - X \in \mathcal{F}.$$

$$F_2 - \emptyset \in \mathcal{F}.$$

$$F_3 - \text{Si } F_i \in \mathcal{F}, i = 1, \dots, n, \text{ entonces } \bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}.$$

$$F_4 - \text{Si } F_i \in \mathcal{F}, i \in I, \text{ entonces } \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}.$$

Recíprocamente, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia que satisface F_1 , F_2 , F_3 y F_4 entonces definiendo τ , $A \in \tau$ sii $CA \in \mathcal{F}$, se obtiene una topología τ en X cuya familia de cerrados es $\mathcal{F}$.

1.2.2. Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es un entorno de x si existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset V$.

- En la topología discreta cualquier conjunto que contenga a x es entorno de x .

- En la topología indiscreta el único entorno de x es X .

- En la topología usual de $\mathbb{R}$, un intervalo cerrado $[a, b]$ es entorno de todo $x \in (a, b)$.

- Si $V \subset X$ (espacio topológico) entonces,

V es abierto $\Leftrightarrow V$ es entorno de cada uno de sus puntos.

Para cada $x \in X$, denotamos con $\mathcal{V}(x)$ la familia de entornos de x . Entonces $\mathcal{V}(x)$ satisface:

V_1 - $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$.

V_2 - $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}(x)$.

V_3 - Si $V \in \mathcal{V}(x)$ y $U \supset V$ entonces $U \in \mathcal{V}(x)$.

V_4 - Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

V_5 - Si $U \in \mathcal{V}(x)$ entonces existe $V \subset U$ tal que $x \in V$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ para todo $y \in V$.

Sea X un conjunto y supongamos que cada $x \in X$ tiene asociado una familia $\mathcal{B}(x)$ que satisface V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5 . Entonces podemos definir en X una topología tal que para todo $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es la familia de entornos de x . Esta topología se llama Topología a partir de sistemas de entornos y se define así

$A \in \tau$ sii $A \in \mathcal{B}(x)$ para todo $x \in A$.

Es consecuencia inmediata de V_1, V_3 y V_4 que τ es una

topología. Para ver que $\mathcal{V}(x) = \mathcal{B}(x)$, notemos que si $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset V$ y por V_3 , $V \in \mathcal{B}(x)$. Si $U \in \mathcal{B}(x)$, la condición V_5 implica la existencia de W tal que $x \in W$, $W \subset U$ y $W \in \tau$ por definición de τ ; resulta entonces que $U \in \mathcal{V}(x)$.

1.2.3. **Definición.** (X, τ) espacio topológico, $A \subset X$. $x \in X$ es, punto interior de A si existe $B \in \tau$ tal que $x \in B \subset A$.

punto clausura de A si para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$.

punto de acumulación de A si para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Denotamos con A° , $\bar{A}$ y A' el conjunto de puntos en X que son puntos interiores, puntos clausura y puntos de acumulación de A respectivamente.

1.2.4. Ejemplos.

En $\mathbb{R}$ con la topología usual,

- $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$ $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ = conjunto de números enteros
- $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ = conjunto de números racionales
- $[a, b]^\circ = [a, b]^\circ = (a, b)$ $[a, b)^- = (a, b)^- = (a, b]^- = [a, b]$
- $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}^\circ = \emptyset$
- $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}^- = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$

1.2.5. **Proposición.** Sea A un subconjunto de espacio topológico X . Se cumple,

(i) $A^\circ = \cup \{B \subset A : B \text{ es abierto}\}$. En consecuencia, A° es el mayor abierto contenido en A .

(ii) $\bar{A} = \cap \{B \supset A : B \text{ es cerrado}\}$. En consecuencia $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A .

Demostración: (i) Si B es abierto, $B \subset A$ entonces $B \subset A^\circ$ y en consecuencia $\cup \{B \subset A : B \text{ es abierto}\} \subset A^\circ$. Si $x \in A^\circ$, por definición existe B abierto tal que $x \in B \subset A$.

(ii) Es claro que si B es cerrado tal que $A \subset B$, $\bar{A} \subset B$ y en consecuencia $\bar{A} \subset \cap \{B \supset A : B \text{ es cerrado}\}$. Recíprocamente, si $x \notin \bar{A}$ existe V entorno abierto de x tal que $V \cap A = \emptyset$. Luego $x \notin \bar{A}$,

siendo CV un cerrado que contiene a A . ■

- 1.2.7. **Corolario:** (i) A es abierto sii $A = A^\circ$.
(ii) A es cerrado sii $A = \bar{A}$.

3. Base de una topología.

Al definir la topología de un espacio métrico X comenzamos con las bolas abiertas y a partir de ellas definimos la topología como la familia de aquellos A tales que para cada punto en A existe una bola abierta centrada en dicho punto y contenida en A . Vamos a decir que $\mathcal{B} = \{B(x,r): x \in X, r > 0\}$ forma una base de la topología métrica en X .

1.3.1. **Definición.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ es base de la topología τ si para cada $A \in \tau$ y para cada $x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

1.3.2. **Proposición.** $\mathcal{B}$ es base de τ sii para todo $A \neq \emptyset$, $A \in \tau$, $A = \bigcup_i B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$.

Demostración: es una consecuencia inmediata de la definición ver que si $A \in \tau$, $A = \bigcup \{B \in \mathcal{B}: B \subset A\}$. ■

1.3.3. **Definición.** Una familia $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ es base de entornos de x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $U \subset V$.

1.3.4. Ejemplos.

- Si X tiene la topología discreta, $\mathcal{B} = \{\{x\}, x \in X\}$ es base de la topología y $\mathcal{U}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de $x \in X$.

- Si (X, d) es un espacio métrico y τ_d es la topología métrica entonces $\mathcal{B} = \{B(x,r): x \in X \text{ y } r > 0\}$ es base de τ_d y $\mathcal{B}(x) = \{B(x,r): r > 0\}$ es base de entornos de $x \in X$.

No es cierto que cualquier familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es base de alguna topología sobre X como lo muestra el siguiente ejemplo: $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{B} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Sin embargo se tiene la siguiente.

1.3.5. Proposición. Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de alguna topología sobre X sii $\mathcal{B}$ cumple

(i) $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{B}$ entonces para cada $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

Demostración: Si $\mathcal{B}$ es base de una topología τ sobre X es claro que $\mathcal{B}$ cumple (i) e (ii).

Recíprocamente si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ satisface (i) e (ii) definimos τ de la siguiente manera:

$$A \in \tau \text{ sii } A = \bigcup_i B_i \text{ con } B_i \in \mathcal{B} \text{ ó } A = \emptyset.$$

Se ve fácilmente que τ es una topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de τ . Mas aún, τ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{B}$. ■

Como una consecuencia inmediata de 1.3.5. se tiene,

1.3.6. Proposición. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ satisface $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ entonces la familia de intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$ es base de una topología sobre X y es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{S}$.

La topología dada por la proposición anterior se dice generada por $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ se llama sub-base de la topología.

1.3.7. Ejemplos.

- La topología generada por las semirrectas $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$ coincide con la topología usual.

- La topología de los complementos finitos es la topología en X

generada por los subconjuntos de X cuyo complemento es un punto.

4. Espacios N_1 , N_2 y separables.

Todo espacio topológico (X, τ) tiene una base $(\mathcal{B} = \tau)$. Interesan las bases formadas por subconjuntos simples y con mínimo número de elementos. Por ejemplo interesa el caso en que la topología tiene una base numerable. En esta situación diremos que el espacio topológico X satisface el 2do. axioma de numerabilidad o que X es N_2 .

Un espacio topológico X satisface el 1er. axioma de numerabilidad (X es N_1) si el sistema de entornos de cada punto tiene una base numerable.

- Todo espacio métrico X es N_1 , $\mathcal{B}(x) = \{B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$, $x \in X$.

- En $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{B((a_1, \dots, a_n), \frac{1}{m}) : a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de la topología usual.

1.4.1. **Definición.** Sea X un espacio topológico e Y un subconjunto de X . Y es denso en X si $\bar{Y} = X$. X se dice separable si existe un subconjunto de X denso y numerable.

1.4.2. **Proposición.** Un subconjunto Y de un espacio topológico X es denso si y solamente si $A \cap Y \neq \emptyset$ para todo abierto $A \neq \emptyset$.

La prueba queda como ejercicio.

1.4.3. **Proposición.** Dado un espacio topológico X , sean

- (i) X es N_1 .
- (ii) X es N_2 .
- (iii) X es separable.

Entonces $(ii) \Rightarrow (i)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$. No son ciertas las recíprocas.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de la topología de X . Para probar $(ii) \Rightarrow (i)$, sea $x \in X$. La familia

$\mathcal{B}(x) = \{B_n : x \in B_n\}$ es numerable y es una base de entornos de x ya que si A es abierto con $x \in A$, existe B_n tal que $x \in B_n \subset A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Para cada $B_n \neq \emptyset$, sea $b_n \in B_n$. El conjunto $A = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en X , por definición de base.

Veamos que no son ciertas las recíprocas.

Si X es un conjunto infinito no numerable con la topología discreta entonces X es N_1 , X no es N_2 puesto que no es separable (el único subconjunto denso de X es X).

Para probar que separable no implica N_2 , sea X un conjunto infinito no numerable con la topología de los complementos finitos. Si $A \subset X$ es infinito entonces A es denso. Resulta entonces que X es separable pues basta tomar un subconjunto de X infinito numerable.

Si $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de la topología ($B_n \neq \emptyset$), como $C(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_n C B_n$ es numerable ($C B_n$ es finito) y X no es numerable, existen $x \neq y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Esto contradice el hecho que $\mathcal{B}$ es base, ya que $x \in C\{y\}$, que es abierto, y no existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $x \in B_n \subset C\{y\}$. ■

Para espacios métricos se tiene que N_2 y separable son equivalentes.

1.4.4. Teorema. Sea X un espacio métrico. X es separable si y solamente si X es N_2 .

Demostración: Por la proposición anterior tenemos que probar que si X es separable entonces es N_2 . Sea $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso de X . Mostraremos que $\mathcal{B} = \{B(x_n, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$ es base de la topología métrica.

Sea A abierto y sea $x \in A$; por definición existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Sigue que existe m tal que $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$ y $B(x, \frac{1}{m}) \cap D \neq \emptyset$. Si $x_n \in B(x, \frac{1}{m}) \cap D$ entonces $x \in B(x_n, \frac{1}{m}) \subset B(x, r) \subset A$. ■

En general no es cierto que N_1 y separable implique N_2 . Consideremos como ejemplo $X = \mathbb{R}$ con la topología generada por los

intervalos semiabiertos $[a, b)$. Para ver que dicha topología no es N_2 observemos que si $x \in \mathbb{R}$, cualquier base debe contener un conjunto cuyo infimo es x .

1.4.5. Definición. Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de un conjunto B si $B \subset \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$. La familia es un cubrimiento abierto de B si los miembros de $\mathcal{A}$ son abiertos. Un subcubrimiento es una subfamilia que también es cubrimiento.

1.4.6. Teorema de Lindeloff: Si X es un espacio topológico N_2 entonces de todo cubrimiento por abiertos de $Y \subset X$ puede extraerse un subcubrimiento numerable.

Demostración: Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de Y y sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de la topología de X . Para cada $i \in I$, $A_i = \bigcup_{j \in I_i} B_{i_j}$ pues $\mathcal{B}$ es base. En consecuencia, $\mathcal{B}' = \{B_{i_j} : j \in I_i, i \in I\} \subset \mathcal{B}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{B}$ que la denotamos por $\{B_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. $\mathcal{B}'$ tiene la siguiente propiedad: para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $i_j \in I$ tal que $A_{i_j} \supset B_{n_j}$ (pues así fue construida $\mathcal{B}'$). Luego $\{A_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ cubre a Y ($Y \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{n_j}$) y además es numerable. ■

Un espacio topológico es un espacio de Lindelöf si todo cubrimiento abierto del espacio tiene un subcubrimiento numerable. Sigue de 1.4.6. que todo espacio topológico N_2 es un espacio de Lindelöf. La recíproca no vale (ver Ejercicio 13).

EJERCICIOS

1. Dar todas las topologías de $X = \{a, b\}$; $X = \{a, b, c\}$.

2.. Supremo e ínfimo de topologías.

a) La intersección de una colección cualquiera de topologías de X es una topología de X .

b) La unión de dos topologías de X puede no ser una topología de X (a menos que X no contenga más de dos puntos).

c) Para cualquier colección de topologías de X hay una única topología, ínfimo, que es la máxima entre aquellas menores que todos los miembros de la colección; y una única topología, supremo, que es la mínima entre aquellos mayores que todos los miembros de la colección. Dar la topología ínfimo.

3. Sea $c: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un operador que satisface.

i) $\emptyset = \emptyset^c$

ii) $A \subset A^c \quad \forall A \subset X$

iii) $(A^c)^c = A^c$

iv) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

Y sea $\tau^c = \{A \subset X: A = A^c\}$. Mostrar que $\tau = \{B \subset X: CB \in \tau^c\}$ es una topología en X tal que $\bar{A} = A^c$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

4. Mostrar: a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ y $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$.

b) Las igualdades $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ y $(A \cap B)^- = A \cap B$ no son ciertas en general.

5. Se define $\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{CA}$ (frontera de A). Mostrar:

a) $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$ y de un ejemplo donde la inclusión sea estricta.

b) $\bar{A} = A \cup \text{Fr}(A)$

c) $(CA)^- = C(\overset{\circ}{A})$

d) $\overset{\circ}{A} = A - \text{Fr}(A)$

e) Un conjunto es cerrado sii contiene a su frontera, y es abierto sii es disjunto con su frontera.

14

a) La topología del orden de X es la mínima topología en la cual el orden es continuo. Esto es, Si $a, b \in X$ y $a < b$ entonces existen entornos U de a y V de b tales que: $x \in U, y \in V \Rightarrow x < y$.

b) Cuál es la topología del orden en $\mathbb{R}$?

c) Sea Y una parte de X ordenado por $<$. Entonces Y está ordenado por $<$, pero la topología del orden en Y puede no ser la relativa a Y de la topología del orden de X .

10. En $\mathbb{R}^2$ dar la topología generada por $\mathcal{S}$ para

- $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las rectas paralelas al eje x .

11. Probar que en un espacio topológico N_2 toda base contiene una subfamilia numerable que también es base.

12. **Topología de los intervalos semiabiertos.** Sea $X = \mathbb{R}$ y sea J la topología que tiene como base a la familia de todos los intervalos $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Los miembros de la base son abiertos y cerrados.

b) (X, J) es separable, N_1 pero no N_2 .

c) Si $A \subset \mathbb{R}$, $A - A'$ es numerable.

d) Todo subespacio de (X, J) es separable.

e) Todo subespacio de (X, J) es un espacio de Lindelöf.

13. **Topología de los rectángulos semiabiertos.**

Sea $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea τ la topología generada por conjuntos de la forma $A \times B$ con $A = [a, b)$, $B = [c, d)$.

a) (Y, τ) es separable.

b) (Y, τ) contiene un subespacio cerrado que no es separable.

c) (Y, τ) no es Lindelöf pues admite un subespacio cerrado que no es Lindelöf.

14. Definamos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el siguiente orden: $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow a < c$ ó $a = c$ y $b < d$. Sea τ la topología del orden en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Analizar cuáles son los abiertos en esta topología y decir si es T_2 .

b) Si $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varphi(a,b) = (b,a)$, se define la topología σ de la siguiente manera: $U \in \sigma \Leftrightarrow \varphi(U) \in \tau$. Mostrar que $\mathcal{V}_{(0,0)}(\tau) \cap \mathcal{V}_{(0,0)}(\sigma) \neq \mathcal{V}_{(0,0)}(\tau \cap \sigma)$.

CAPITULO II

CONTINUIDAD

1. Funciones continuas.

Sean (X, τ) e (Y, J) espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

2.1.1. **Definición.** f se dice continua en $x \in X$ si para cada $U \in \mathcal{V}_J(f(x))$ existe $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ tal que $f(V) \subset U$. f se dice continua si lo es en cada $x \in X$.

2.1.2. **Proposición.** Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (i) f es continua.
- (ii) Para todo $x \in X$, si $U \in \mathcal{V}_J(f(x))$ entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_\tau(x)$.
- (iii) Para todo $A \in J$, $f^{-1}(A) \in \tau$.
- (iv) Si V es miembro de una base de J , $f^{-1}(V) \in \tau$.
- (v) Si V es miembro de una sub-base de J , $f^{-1}(V) \in \tau$.
- (vi) Para todo F cerrado en Y , $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .
- (vii) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.
- (viii) $f^{-1}(\bar{A}) \supset \overline{f^{-1}(A)}$ para todo $A \subset Y$.

Demostración:

Probaremos $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (viii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $U \in \mathcal{V}_J(f(x))$, por definición de continuidad en x existe $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ tal que $f(V) \subset U$. Luego $V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U)$ y en consecuencia $f^{-1}(U)$ es entorno de x .

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Basta observar que si A es abierto en Y y $x \in f^{-1}(A)$, A es entorno de $f(x)$ y en consecuencia $f^{-1}(A)$ es entorno de x .

$(iii) \Rightarrow (iv)$ y $(iv) \Rightarrow (v)$ son inmediatas.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Si F es cerrado en Y , $Y - F \in J$ y por lo tanto $Y - F = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^j$ con $S_i^j \in \mathcal{J}$, sub-base de J .

Luego, $X - f^{-1}(F) = f^{-1}(Y - F) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(S_i^j) \in \tau$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Sea $A \subset X$; como $\overline{f(A)}$ es cerrado en Y , $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es un cerrado en X que contiene a A ($A \subset f^{-1}(f(A))$).

Luego $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ y $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$.

(vii) $\Rightarrow$ (viii) sea $A \subset Y$. Aplicando (vii) a $f^{-1}(A)$ se tiene $\overline{f(f^{-1}(A))} \subset \overline{f(f^{-1}(A))} \subset \overline{A}$ y en consecuencia, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(A))}) \subset f^{-1}(\overline{A})$.

(viii) $\Rightarrow$ (i) queda como ejercicio para el lector. ■

Son consecuencias inmediatas de la definición las siguientes propiedades:

- Si $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ son funciones continuas entonces $g \circ f$ es continua.

- Si $f: X \rightarrow Y$ es continua y $A \subset X$ entonces $f|_A: A \rightarrow Y$ es continua, A con la topología relativa de X .

- Si $f: X \rightarrow Y$ es continua entonces $f: X \rightarrow f(X)$ es continua, $f(X)$ con la topología relativa de Y .

2.1.3. Ejemplos.

- Una función constante $f: X \rightarrow Y$ es siempre continua.

- Si X es discreto toda función $f: X \rightarrow Y$ es continua. Si Y es indiscreto y X es cualquier espacio topológico $f: X \rightarrow Y$ es continua.

- Si (X, d) e (Y, d') son espacios métricos entonces f es continua en x si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ tal que $d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$.

- Las siguientes funciones son ejemplos de funciones continuas.
 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ se consideran con la topología usual)

$$f(x,y) = x + y$$

$$f(x,y) = x \cdot y$$

$$f(x) = a x, \quad a \in \mathbb{R}$$

2. Funciones abiertas, cerradas. homeomorfismos.

2.2.1. **Definición.** Sean X e Y espacios topológicos.

Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice abierto si $f(A)$ es abierto en Y para todo A abierto en X . Análogamente, f se dice cerrada si $f(F)$ es cerrado para todo F cerrado en X .

f es un homeomorfismo si f es biyectiva, continua con inversa f^{-1} continua.

2.2.2. Ejemplos.

- Sea $I: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ la función identidad. Entonces I es continua sii $\tau_2 < \tau_1$. Si $\tau_1 \leq \tau_2$ entonces I es abierta pero no es continua. Además, I es homeomorfismo sii $\tau_1 = \tau_2$.

- Toda función $f: X \rightarrow Y$ con Y discreto es abierta y cerrada.

- Toda función biyectiva y continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un homeomorfismo. Ver Ejercicio 4.b.

- Existen funciones biyectivas y continuas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que no son homeomorfismos ($\mathbb{Q}$ con la topología relativa usual de $\mathbb{R}$). Para ejemplo de una tal función referimos a [D].

- Son ejemplos de homeomorfismos las siguientes funciones,

$$f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

$$g: (0,1) \rightarrow (a,b), \quad g(t) = (b-a)t + a$$

$$tgh: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1) \quad (\text{tangente hiperbólica})$$

- Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes reales

y sea $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ la biyección definida por

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix} \right) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

Demos a $M_n(\mathbb{R})$ la topología tal que φ es un homeomorfismo, o sea la topología inducida por la distancia d ,

$$d(A, B) = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2 \right)^{1/2}$$

que es la distancia usual en $\mathbb{R}^{n^2}$. Observemos que si $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $x \in \mathbb{R}^{n^2}$, $d(A, B) = \|\varphi(A) - \varphi(B)\|$.

Con esta topología en $M_n(\mathbb{R})$ la función determinante $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (resulta de considerar la fórmula para el cálculo del $\det A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$). Luego,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}): A \text{ es inversible}\}$$

es un abierto en $M_n(\mathbb{R})$, pues $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}): \det A \neq 0\}$.

2.2.3. Proposición. Sea $f: X \rightarrow Y$, X e Y espacios topológicos. Las siguientes propiedades son equivalentes.

- (i) f es homeomorfismo.
- (ii) f es continua y abierta.
- (iii) f es continua y cerrada.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Como f es biyectiva y f^{-1} es continua resulta $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ es abierto cualesquiera sea A abierto en X .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si F es cerrado en X , $f(CF) = Cf(F)$ es abierto en Y ó $f(F)$ es cerrado en Y .

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si A es abierto en X , $(f^{-1})^{-1}(A)$ es abierto en Y pues $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) = C(f(CA))$ y $f(CA)$ es cerrado. ■

EJERCICIOS

1. Sean X e Y espacios topológicos y $f, g: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Si Y es T_2 entonces $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X . En consecuencia si dos funciones continuas coinciden en un subconjunto denso, coinciden en todo el espacio.

2. Sea Γ un cubrimiento finito cerrado de un espacio topológico X tal que para cada $A \in \Gamma$ está definido $f_A: A \rightarrow Y$ continua con la propiedad $f_A|_{A \cap B} = f_B|_{A \cap B}$. Probar que $f: X \rightarrow Y$ definida por $f(x) = f_A(x)$ si $x \in A$, es continua.

3. Sean $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Probar:

a) $a f: x \rightarrow a f(x)$, $a \in \mathbb{R}$ es continua.

b) $|f|: x \rightarrow |f(x)|$ es continua.

c) Las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y si $g \neq 0$, $\frac{f}{g}$ son continuas.

$$\begin{aligned} \text{Aquí } (f+g)(x) &= f(x)+g(x), & (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), & \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

d) Las funciones $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ son continuas.

4. a) Probar que dos intervalos cualesquiera del mismo tipo (abiertos, semiabiertos o cerrados) son homeomorfos.

b) Toda biyección continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un homeomorfismo.

5. Probar que si p es un polinomio entonces $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ con } a_i \in \mathbb{R}, \text{ es una función cerrada.}$$

6. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y consideremos $X \times Y$ con la topología generada por $\{U \times V: U \text{ abierto en } X \text{ y } V \text{ abierto en } Y\}$.

Si $G(f) = \{(x, f(x)): x \in X\} \subset X \times Y$, probar que $F: X \rightarrow G(f)$ $x \rightarrow (x, f(x))$ es un homeomorfismo sii f es continua.

7. Sea $n \rightarrow r_n$ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Definimos en $[0, 1]$ la función $f(x) = \sum_{r_n < x} (1/2)^n$. Probar que la restricción

de f al conjunto de los números irracionales del $[0,1]$ es continua,
pero f no es continua en $[0,1]$.

CAPITULO III

CONEXION Y COMPACIDAD

1. Espacios conexos.

Intuitivamente, un espacio conexo está constituido de un único componente. Formalizamos enseguida esta idea.

3.1.1. Definición. Un espacio topológico X se dice conexo si no existen abiertos (resp. cerrados) A, B en X tales que: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$.

Sigue de la definición, que si X es un espacio topológico entonces:

- X es conexo si y solamente si cada vez que $X = A \cup B$, con A, B abiertos (cerrados) disjuntos en X entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

- X es conexo si y solamente si los únicos abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.

3.1.2. Proposición. Un espacio topológico X es conexo si y solamente si no existe $f: X \rightarrow \{0,1\}$ continua y suryectiva, $\{0,1\}$ con la topología discreta.

Demostración: Si existe $f: X \rightarrow \{0,1\}$ continua y suryectiva entonces $X = f^{-1}\{0\} \cup f^{-1}\{1\}$ es unión disjunta de abiertos no vacíos. Recíprocamente, si $X = A \cup B$, A, B abiertos no vacíos, $A \cap B = \emptyset$, la función $f: X \rightarrow \{0,1\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

resulta continua y suryectiva. ■

3.1.3. Definición. Un subconjunto Y de un espacio topológico X se dice conexo si, con la topología relativa, Y es un espacio conexo.

3.1.4. Ejemplos.

- Todo espacio topológico (X, τ) , τ topología indiscreta, es un espacio conexo.

- Con la topología discreta ningún espacio con más de un punto es conexo.

- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la topología inducida de $\mathbb{R}$ no es conexo pues $\mathbb{Q} = [(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}] \cup [(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}]$.

- Si X es un conjunto infinito y τ es la topología de los complementos finitos entonces (X, τ) es conexo.

3.1.5. Proposición. El intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ es conexo.

Demostración: Supongamos que $[0, 1] = A \cup B$ con A y B cerrados disjuntos, $0 \in A$. Sea

$$\alpha = \sup \{a \in A : a \leq b, \text{ para todo } b \in B\}.$$

Entonces $\alpha \in A$ (pues A es cerrado) y $\alpha \geq 0$. Probaremos que $\alpha = 1$ y como consecuencia resultará $B = \emptyset$.

Supongamos $0 \leq \alpha < 1$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $b \in B$ tal que $\alpha \leq b < \alpha + \varepsilon$ y por lo tanto $\alpha = \inf B$. Como B es cerrado resulta $\alpha \in B$ contradiciendo $A \cap B = \emptyset$. ■

3.1.6. Proposición. Sea X un espacio topológico y C un subconjunto de X . Si C es conexo entonces $\bar{C}$ conexo.

Demostración: Supongamos que $\bar{C}$ no es conexo y sean A, B abiertos en X tales que $\bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C})$, $A \cap \bar{C} \neq \emptyset$, $B \cap \bar{C} \neq \emptyset$ y $A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$.

Notemos que la condición A es abierto en X nos permite concluir que si $A \cap \bar{C} \neq \emptyset$ entonces $A \cap C \neq \emptyset$. Análogamente $B \cap C \neq \emptyset$. Como $A \cap B \cap C \subset A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$ resulta C no conexo. ■

3.1.7. Proposición. Sean X e Y espacios topológicos, X conexo. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración: Supongamos, por el absurdo, que $f(X)$ no es conexo.

Sigue de 3.1.2. que existe $g: f(X) \rightarrow \{0,1\}$ continua y suryectiva, $\{0,1\}$ con la topología discreta. Nuevamente la proposición 3.1.2., aplicada a la función $g \circ f: X \rightarrow \{0,1\}$, permite concluir que X no es conexo. ■

3.1.8. Proposición. Sea X espacio topológico e $\{Y_i\}_{i \in I}$ una colección de subconjuntos de X tales que para cada $i \in I$, Y_i es conexo e $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ cualesquiera sean $i, j \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} Y_i$ es conexo.

Demostración: Sea $f: \bigcup_{i \in I} Y_i \rightarrow \{0,1\}$ una función continua, $\{0,1\}$ con la topología discreta. Si x e y son elementos de $\bigcup_{i \in I} Y_i$, existen $i, j \in I$ tales que $x \in Y_i$, $y \in Y_j$ y siendo $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ podemos considerar $z \in Y_i \cap Y_j$.

Como Y_i e Y_j son conexos resulta $f(x) = f(z) = f(y)$ y en consecuencia f es una función constante. Aplicando la proposición 3.1.2. resulta $\bigcup_{i \in I} Y_i$ un subconjunto conexo. ■

3.1.9. Proposición. Sea $\{Y_i\}_{i \in I}$ una colección de subconjuntos de X tales que Y_i es conexo para todo $i \in I$, y $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i \in I} Y_i$ es conexo.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

3.1.10. Corolario. Sea $Y \subset X$, X espacio topológico. Entonces Y es conexo si y solamente si dados x e y en Y existe un conexo $C \subset Y$ tal que $x \in C$ e $y \in C$.

Demostración: Si Y es conexo, es inmediata la afirmación. Sea ahora $y \in Y$ y denotemos con C_x el conexo que contiene a x e y , cualquiera sea $x \in Y$. Es claro que $Y = \bigcup_{x \in Y} C_x$ e $y \in \bigcap_{x \in Y} C_x$. Se deduce entonces de la proposición anterior, que Y es un subconjunto conexo. ■

3.1.11. Definición. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ se dice convexo si dados

x e y en C , el segmento $[x,y] = \{(1-t)x+ty, t \in [0,1]\}$ que une x con y , está contenido en C .

Como $\{(1-t)x+ty, t \in [0,1]\}$ es imagen por una función continua del conexo $[0,1]$, resulta del Corolario anterior que $[x,y]$ es conexo.

3.1.12. Corolario. Todo convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ es conexo.

Sigue inmediatamente,

- $\mathbb{R}^n$ es conexo, $n \in \mathbb{N}$.

- $B^n(a,r) = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2\}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$,

es conexo.

- $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ es conexo.

- $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ es conexo.

Como consecuencia de 3.1.2. podemos también caracterizar los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

3.1.13. Proposición. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es conexo si y solamente si I es un intervalo.

Demostración: Recordamos que I es un intervalo si y solamente si cada vez que $a < b$ con $a, b \in I$ se cumple que si c satisface $a < c < b$ entonces $c \in I$. En particular I es convexo y por lo tanto conexo.

Supongamos ahora que I no es intervalo y sean $a, b \in I$, $c \notin I$ satisfaciendo $a < c < b$. Resulta entonces I no conexo pues $I = ((-\infty, c) \cap I) \cup ((c, \infty) \cap I)$. ■

Concluimos esta sección con más ejemplos de espacios conexos.

3.1.14. Ejemplos.

- $\mathbb{R}^n - \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0\}$ es conexo si $n \geq 2$.

En efecto, sean x e y en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Si x e y son linealmente independientes, el segmento $[x, y] \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$ contiene a x e y . Si x e y son linealmente dependientes, existe $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\{x, z\}$ y $\{z, y\}$ son conjuntos de vectores linealmente independientes. Sigue entonces que $[x, z] \cup [z, y] \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$ es un conexo que contiene a x e y . Como consecuencia del corolario 3.1.10. obtenemos que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo.

- $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$ es conexo si $n \geq 1$.

Para demostrar la afirmación anterior basta considerar

$$f: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{donde } \|x\|^2 = \sum x_i^2$$

y verificar que f es una función continua y suryectiva.

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ es inversible}\}$ no es conexo.

En 2.1.4. vimos que $GL(n, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R})$ con la topología de $\mathbb{R}^{n^2}$ (por lo tanto $M_n(\mathbb{R})$ es conexo). Como la función $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ es continua y suryectiva resulta $GL(n, \mathbb{R})$ no conexo.

En forma análoga podríamos considerar $M_n(\mathbb{C})$, matrices $n \times n$ con coeficientes complejos, con la topología de $\mathbb{C}^{n^2}$, luego $M_n(\mathbb{C})$ es conexo.

Veremos en 4.6.9., que $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A \text{ es inversible}\}$ es un abierto conexo de $GL(n, \mathbb{C})$. Notemos que el argumento anterior, utilizado para demostrar que $GL(n, \mathbb{R})$ no es conexo, no nos sirve en este caso pues la función $\det$ definida en $GL(n, \mathbb{C})$ tiene imagen $\mathbb{C} - \{0\} \cong \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y vimos que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es conexo.

2. Componentes conexas.

Sea X espacio topológico y definamos en X la siguiente relación:

$x \sim y$ si y solamente si existe $B \subset X$, B conexo, tal que $x, y \in B$.

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia. A la clase de equivalencia de x , que denotamos C_x , la denominamos componente

conexa de x . Resulta de 3.1.10 que las componentes conexas de x son conexos. Más aún, si $x \in B$ con B conexo entonces $B \subset C_x$. Por lo tanto C_x es el mayor subconjunto conexo de X al cual x pertenece.

3.2.1. **Definición:** Un espacio topológico X se dice localmente conexo si para cada $x \in X$ existe una base de entornos conexos de x .

3.2.2 Ejemplos.

Con los siguientes ejemplos mostraremos que los conceptos de conexión y conexión local son independientes.

- $X = (a,b) \cup (c,d)$ en $\mathbb{R}$ con $b < c$ es localmente conexo y no conexo.

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \cup \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$, es un conjunto conexo y no localmente conexo.

- $X = \mathbb{R}^n$ con la topología usual es un espacio conexo y localmente conexo.

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$, no es conexo ni localmente conexo.

3.2.3. **Teorema.** Si X es un espacio topológico, son equivalentes

- (i) X es localmente conexo.
- (ii) Si $A \subset X$ es abierto, las componentes conexas de A son abiertas.
- (iii) Los abiertos conexos constituyen una base para la topología de X .

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). La componente conexa de x en A es $C_x^A = \{y \in A : y \sim x \text{ en } A\}$. Sea entonces $y \in C_x^A$. Como X es localmente conexo y A es abierto, existe V_y entorno conexo de y , $V_y \subset A$. Luego, si $z \in V_y$, $z \sim y$ en A y como $y \sim x$ resulta $V_y \subset C_x^A$, o sea C_x^A es abierto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $x \in A$ y A es abierto entonces $x \in C_x^A \subset A$, C_x^A abierto y conexo.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Es inmediata. ■

Notemos que, debido a 3.1.6. y 3.2.2., las componentes conexas en un espacio topológico localmente conexo son abiertas y cerradas.

3.2.4. Proposición. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Si además f es abierta o cerrada, entonces $f(X)$, con la topología relativa de Y , es localmente conexo.

Demostración: Supongamos que f es suryectiva. Si f es abierta, Y resulta localmente conexo como consecuencia de la definición.

Sea entonces f cerrada. Si A es un subconjunto abierto de Y y D es una componente conexa en A , se verifica que

$f^{-1}(D) = \cup \{C: C \text{ es componente conexa en } f^{-1}(A) \text{ y } f(C) \cap D \neq \emptyset\}$,
y como consecuencia $f^{-1}(D)$ es abierto en X . Resulta entonces $Y-D = f(X-f^{-1}(D))$ cerrado, y por el teorema anterior Y es localmente conexo. ■

3. Espacios conexos por curvas.

Una curva en un espacio topológico X es una función continua $\alpha: [0,1] \rightarrow X$. Los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los extremos de la curva, cuando $\alpha(0) = \alpha(1)$ la curva se denomina cerrada. Observemos que si α es una curva en X , su imagen $\{\alpha(t): t \in [0,1]\}$ es un conexo en X .

Este concepto de curva permite definir en X la siguiente relación:

$x \sim y$ si y solo si existe α curva en X con $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$

Esta relación es de equivalencia pues,

- $x \sim x$. Basta tomar $\alpha(t) = x$, $t \in [0,1]$.

- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$. Si α es una curva tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ entonces $\alpha': [0,1] \rightarrow X$ definida por $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$ satisface $\alpha'(0) = y$, $\alpha'(1) = x$.

- $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Sean α y β curvas en X tales que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y = \beta(0)$, $\beta(1) = z$. Entonces $\gamma(t)$ definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una curva en X tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = z$.

3.3.1. Definición. Un espacio topológico X se dice conexo por curvas si $x \sim y$ cualquiera sean x e y en X . En otras palabras, dos puntos de X están ligados por una curva.

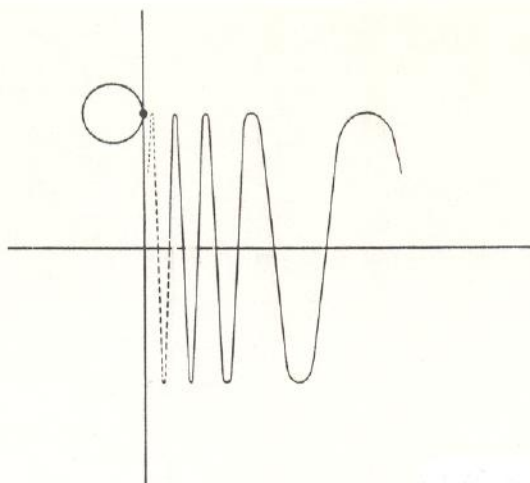
Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo por curvas si Y , con la topología relativa de X , es conexo por curvas.

A la clase de equivalencia de $x \in X$, dada por la relación $\sim$, la denotaremos B_x y la llamaremos componente conexa por curvas de x .

3.3.2. Proposición. Si X es un espacio conexo por curvas entonces X es conexo.

Demostración: Dados x e y en X , la imagen de la curva $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ que los liga es un conexo que los contiene. Por lo tanto la proposición resulta de 3.1.20. ■

La recíproca de 3.3.2. no es válida. En efecto, sea $X = X_1 \cup X_2$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$, donde $X_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq y \leq 1\}$ y $X_2 = \{(x, \sin \frac{1}{x}): x > 0\}$.



Entonces,

- X es conexo. Supongamos $X = A \cup B$, A y B abiertos en X , $A \cap B = \emptyset$. Si $(0,1) \in A$ entonces $B \cap X_1 = \emptyset$ (pues X_1 es conexo) y $B \cap X_2 = \emptyset$ (pues $A \cap X_2 \neq \emptyset$ y X_2 es conexo). Por lo tanto $B = \emptyset$ y resulta la afirmación. Si $(0,1) \in B$ vale el mismo argumento.

- X no es conexo por curvas. Lo que ocurre intuitivamente, es que puntos de X_1 y X_2 no están unidos por curvas en X . Probaremos a seguir que si $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ es una curva tal que $\alpha(0) = (0,1)$ entonces todo elemento de $\text{Im}(\alpha)$, en particular $\alpha(1)$, pertenece a X_1 .

Siendo X_1 un cerrado en X , resulta que $\alpha^{-1}(X_1)$ es cerrado y no vacío en $[0,1]$. Además $\alpha^{-1}(X_1)$ es abierto en $[0,1]$. En efecto, si $t_0 \in \alpha^{-1}(X_1)$ y $U = X \cap B(\alpha(t_0), \frac{1}{2})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset U$. Por lo tanto $\alpha(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset C_{\alpha(t_0)}$, la componente conexa de $\alpha(t_0)$ en U , y es claro que $C_{\alpha(t_0)} = U \cap X_1$, o sea $\alpha^{-1}(X_1)$ es abierto como queríamos mostrar. ■

Observación. El espacio X antes construido no es localmente conexo y posee dos componentes conexas por curvas, X_1 y X_2 . En particular, el ejemplo anterior muestra que las componentes conexas no son abiertas en general.

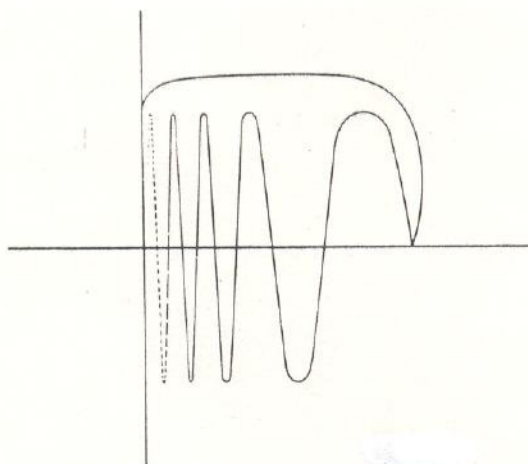
3.3.3. Ejemplos.

- Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo por curvas.

- $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo por curvas si $n \geq 2$. (Ver 3.1.14).

- Si X es conexo por curvas y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua entonces $f(X)$ es conexo por curvas. En particular, usando $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, $f: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^n$, resulta S^n conexo por curvas para $n \geq 1$.

- Sea $Y = X \cup C$ donde X es el espacio definido luego de 3.3.2 y C es la imagen de una curva que une $(0,1)$ con $(\frac{2}{\pi}, 1)$. Entonces Y es conexo por curvas.



3.3.4. **Definición.** Un espacio topológico X se dice localmente conexo por curvas si todo $x \in X$ posee una base de entornos conexos por curvas.

3.3.5. **Proposición.** Si X es un espacio conexo y localmente conexo por curvas entonces X es conexo por curvas.

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y sea $A = \{x \in X: x \sim x_0\}$, donde $\sim$ es la relación de conexión por curvas. Como X es localmente conexo por curvas resulta que A es un conjunto abierto y cerrado y por lo tanto $A = X$ y X es conexo por curvas.

Para ver que A es abierto, si $x \in A$ y U es un entorno conexo por curvas de x es claro que $U \subset A$ pues $y \sim x$ con $x \sim x_0$. De igual forma resulta A cerrado, o sea A es cerrado. ■

Se deduce de la prueba de la proposición anterior que sólo se necesita la hipótesis que todo punto en X tiene un entorno conexo por curvas.

Dejamos como ejercicio la demostración de los siguientes resultados.

3.3.6. **Proposición.** Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) X es localmente conexo por curvas.

(ii) Las componentes conexas por curvas de los subconjuntos abiertos de X son abiertas.

(iii) Los abiertos conexos por curvas constituyen una base para la topología de X .

3.3.7. **Corolario.** Si X es localmente conexo por curvas, las componentes conexas por curvas B_x son abiertas y coinciden con las componentes conexas C_x , cualesquiera sea $x \in X$.

4. Espacios compactos.

3.4.1. **Definición.** Un espacio topológico X se dice compacto si todo cubrimiento abierto de X admite subcubrimiento finito.

Un subconjunto $Y \subset X$ se dice compacto si lo es con la topología relativa de X .

3.4.2. **Definición.** Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos tiene la propiedad de intersección finita si la intersección de cada subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.

3.4.3. **Proposición.** Un espacio topológico X es compacto si y solamente si la intersección de toda familia de cerrados, con la propiedad de intersección finita, es no vacía.

Demostración: Es consecuencia inmediata de 3.4.1. y 3.4.2. considerando para una familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de cerrados con la propiedad de intersección finita la familia de abiertos $\{CF_i\}$ y viceversa. ■

3.4.4. Ejemplos.

- Todo intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto.

Este resultado, conocido como teorema de Heine Borel, se demuestra en cursos básicos de Análisis real. Daremos posteriormente, otra

demostración de este importante teorema. Ver 4.2.8.

- Si X es un espacio discreto entonces X es compacto si y solo si X es un conjunto finito.

- Cualquier conjunto con la topología indiscreta es un espacio compacto.

- Todo conjunto X con la topología de los complementos finitos es compacto.

- $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto pues el cubrimiento $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ no posee subcubrimiento finito. Análogamente, un intervalo (a, b) no es compacto pues el cubrimiento $\{(a, r) : a < r < b\}$ no posee subcubrimiento finito.

- Si consideramos en $\mathbb{R}$ la topología τ definida por $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \notin A \text{ ó } CA \text{ es finito}\}$ resulta $(\mathbb{R}, \tau)$ compacto y T_2 .

3.4.5. Proposición. Sea X un espacio compacto e $Y \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces Y es compacto.

Demostración: Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de Y y $\{A_i\}_{i \in I}$ la familia de abiertos en X tales que $U_i = A_i \cap Y$. Resulta entonces $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{CY\}$ un cubrimiento de X . Como X es compacto, esta familia admite un subcubrimiento finito de X y por lo tanto un subcubrimiento finito de Y . ■

3.4.6. Corolario. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados y compactos es compacto.

Demostración: Sigue inmediatamente de 3.4.5. ■

3.4.7. Proposición. Sea X un espacio T_2 , $K \subset X$ un subconjunto compacto y $x \in CK$. Entonces, existen abiertos disjuntos V y W tales que $K \subset V$ y $x \in W$.

Demostración: Como X es T_2 , para cada $y \in K$ existen abiertos V_y y W_y tales que $y \in V_y$, $x \in W_y$, $V_y \cap W_y = \emptyset$. Luego, existen $y_1, \dots, y_n$

en K tales que $K = \bigcup_{i=1}^n (V_{y_i} \cap K)$. Entonces $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ y $W = \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$ son los abiertos con las propiedades buscadas. ■

3.4.8. Corolario. Todo subconjunto compacto de un espacio T_2 , es cerrado.

3.4.9. Proposición. Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado.

Demostración: Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, K compacto. Como la topología usual de $\mathbb{R}^n$ es T_2 resulta K cerrado. Si K no fuese acotado, la familia $\{B((0,n): n \in \mathbb{N}) \cap K\}$ sería un cubrimiento de K sin subcubrimiento finito. ■

Probaremos en el capítulo IV que vale también la recíproca de 3.4.9. (Ver 4.2.9).

3.4.10. Proposición. Sean K_1 y K_2 subconjuntos compactos disjuntos de un espacio topológico T_2 . Entonces, existen abiertos disjuntos V y W tales que $K_1 \subset V$ y $K_2 \subset W$.

Demostración: Para cada $x \in K_2$, existen (por 3.4.7.) abiertos disjuntos V_x, W_x tales que $K_1 \subset V_x$ y $x \in W_x$. Como K_2 es compacto, existen $x_1, \dots, x_n$ en K_2 tales que $K_2 \subset \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$. Sean entonces $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, $W = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$. Se verifica fácilmente que V y W son abiertos disjuntos tales que $K_1 \subset V$ y $K_2 \subset W$. ■

3.4.11. Proposición. Sean X e Y espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración: Supongamos que f es suryectiva. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento de Y . Entonces $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de X y por lo tanto, existen $i_1, \dots, i_k$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(U_{i_j})$. Luego

$$Y = \bigcup_{j=1}^k U_{1_j} \quad \blacksquare$$

3.4.12. **Corolario.** Si X es compacto e Y es T_2 , toda $f: X \rightarrow Y$ continua es cerrada. En particular, si f es biyectiva y continua entonces f es un homeomorfismo.

Demostración: Sea F cerrado en X . Por 3.4.5. F es compacto, luego $f(F)$ es compacto por 3.4.11. Como Y es T_2 resulta de 3.4.8. que $f(F)$ es cerrado. $\blacksquare$

Dada $f: X \rightarrow Y$ continua y suryectiva interesa a menudo conocer condiciones que permitan obtener la compacidad de X a partir de la de Y . Las funciones propias tienen esa propiedad como probaremos a seguir:

Una función continua, suryectiva, cerrada $f: X \rightarrow Y$ y tal que $f^{-1}(y)$ es compacto, cualquiera sea $y \in Y$, se denomina propia.

3.4.13. **Proposición.** Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ propia. Si Y es compacto entonces X es compacto.

Demostración: Sea $\{W_i: i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X . Para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in I} W_i(y)$; por lo tanto existe un subcubrimiento $W_{1_j}(y)$, $j = 1, \dots, n(y)$ tal que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{j=1}^{n(y)} W_{1_j}(y)$. Como f es cerrada existe un entorno $V(y)$ que satisface $f^{-1}(V(y)) \subset \bigcup_{j=1}^{n(y)} W_{1_j}(y)$ y como Y es compacto existen $y_1, \dots, y_k$ tal que $Y = \bigcup_{i=1}^k V(y_i)$. Se verifica ahora facilmente que la subfamilia $\{W_{1_j}(y_s), j = 1, \dots, n(y_s), s = 1, \dots, k\}$ es un subcubrimiento de X . $\blacksquare$

EJERCICIOS

1. Muestre que:

- a) $\mathbb{R}$ con la topología generada por $\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$ es conexo.
- b) $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos semiabiertos no es conexo.

2. Pruebe que si B es un subespacio conexo de un espacio topológico X , entonces todo subconjunto D de X que satisface $B \subset D \subset \bar{B}$ es conexo.

3. Sea $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ una función continua. Muestre que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

4. Muestre que no son homeomorfos los siguientes espacios topológicos.

- | | |
|--|--|
| a) $X = [a,b)$ | $Y = (c,d)$ |
| b) $X = \{x \in \mathbb{R}^n, n \geq 2: x-x_0 ^2 < r^2\}$ | $Y = (c,d)$ |
| c) $X = S^1$ | $Y = \text{subespacio de } \mathbb{R}$ |
| d) $X = S^n, n > 1$ | $Y = S^1$ |

5. Sea $Y = \{ \frac{1}{n}: n \in \mathbb{N} \}$, $X = Y \times [0,1]$,
 $Z = Y \cup \{0\}$, $X' = Z \times [0,1]$,
 $X'' = X' \cup \{(x,0): x \in [0,1]\}$.

- a) Encuentre en X , X' y X'' las componentes conexas.
- b) ¿Cuáles de los espacios X , X' , X'' es conexo?, conexo por curvas? localmente conexo?
- c) Existe $f: I \rightarrow X, X', X''$ continua tal que $f|_{X, X', X''} = \text{id}$?

6. Sea Y un espacio topológico compacto, T_2 y $f: Y \rightarrow Y$ una función continua. Muestre que $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(Y) \neq \emptyset$ ($f^0 = I$, $f^n = f \circ f^{n-1}$).

7. Probar,

- a) Si A es un conjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$ entonces el supremo y

el ínfimo de A pertenece a A .

b) Toda función continua real f de un espacio compacto X toma su valor máximo y su valor mínimo. Es decir, hay puntos x e y en X tales que $f(x)$ y $f(y)$ son, respectivamente, el supremo y el ínfimo de $f(X)$ respectivamente.

c) Sea f una función real continua de un espacio compacto X . Si f es siempre positiva entonces f está separada de cero, en el sentido de que hay un $c > 0$ tal que $f(x) > c$, cualquiera sea $x \in X$.

8. Demostrar los siguientes resultados:

a) Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, x e $y \in X$ tales que $f(x) < f(y)$. Entonces para cada c tal que $f(x) < c < f(y)$ y para cada subconjunto conexo A de X que contiene a x e y existe $z \in A$ tal que $f(z) = c$.

b) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y biyectiva entonces f es homeomorfismo.

c) Todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

d) B_x , la componente conexa por curvas de $x \in X$, es conexa por curvas y es el mayor conjunto con dicha propiedad al cual x pertenece.

9. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que,

a) Si $A \subset X$ entonces $\bar{A} = \{x \in X: d(x, A) = 0\}$, donde $d(x, A) = \inf \{d(x, y): y \in A\}$

b) Si $A \subset X$ la función $d_A(x) = d(x, A)$ es continua en X .

c) Si A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X y A es compacto, entonces existe $x \in A$ tal que $d(x, B) = d(A, B) > 0$. Este resultado deja de cumplirse si ninguno de ellos es compacto.

d) Si A, B son cerrados y compactos entonces existen $x \in A$, $y \in B$ tales que $d(x, y) = d(A, B)$.

10. Sea $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función continua. Entonces si X es compacto f es uniformemente continua.

11. Muestre que la intersección de dos subconjuntos compactos K_1 y K_2 puede no ser compacta.

12. Sea Y espacio topológico y A un subconjunto de Y . Sea C un conexo en Y tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap CA \neq \emptyset$. Muestre que $C \cap \text{Fr}A \neq \emptyset$.

¿Por qué $A = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1\}$

$C = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3: |z| \leq 1\}$

no es un contraejemplo?

13. Considere en I^2 ($I = [0, 1]$) la topología del orden definida en el ejercicio 14 (Capítulo I). Encuentre las componentes conexas. ¿Es I^2 compacto con dicha topología?

CAPITULO IV

TOPOLOGIAS PRODUCTO Y COCIENTE

1. Producto finito de espacios topológicos.

Sean X_1 y X_2 espacios topológicos y sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los productos cartesianos $U_1 \times U_2$, donde U_i es abierto en X_i , $i = 1, 2$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de una topología en $X_1 \times X_2$ que se denomina topología producto de $X_1 \times X_2$. Un subconjunto $W \subset X_1 \times X_2$ es abierto en la topología producto si para cada $(x_1, x_2) \in W$, existen abiertos

$$U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2 \text{ tales que } (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset W.$$

Con esta topología las proyecciones $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$, $p_i(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1, 2$, son funciones continuas pues $p_i^{-1}(U_i) = U_i \times X_2$ y $p_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2$. La continuidad de las proyecciones sirve para caracterizar la topología producto en el siguiente sentido. Sea τ una topología en $X_1 \times X_2$ tal que $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$ es continua. Entonces $U_1 \times X_2$ y $X_1 \times U_2$ son abiertos en $X_1 \times X_2$ cualquiera sean los abiertos U_i en X_i , $i = 1, 2$, y por lo tanto $U_1 \times U_2 = U_1 \times X_2 \cap X_1 \times U_2$ es abierto en $X_1 \times X_2$. Resulta entonces que la topología producto en $X_1 \times X_2$ es la topología menos fina tal que las proyecciones son continuas.

Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de espacios topológicos, la topología producto de $X_1 \times \dots \times X_n$ está dada inductivamente por la topología producto de $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$.

4.1.1. Ejemplos.

- La topología producto en $\mathbb{R}^n$ coincide con la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times S^n$ con la topología producto, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$. La función

que le asocia a $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sus coordenadas polares $(\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$ es claramente un homeomorfismo.

Probaremos a continuación que un producto finito de espacios topológicos compactos es compacto.

4.1.2. Teorema. Si X_1 y X_2 son espacios topológicos compactos entonces $X_1 \times X_2$ es un espacio compacto.

Demostración: Veremos que $p_2: X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ es propia. La compacidad de $X_1 \times X_2$ seguirá de 3.4.12.

Es claro que p_2 es continua y suryectiva. Además $p_2^{-1}(x_2) = X_1 \times \{x_2\}$ es compacto, cualquiera sea $x_2 \in X_2$. Veamos que p_2 es cerrada. Sea ahora $F \subset X_1 \times X_2$ un cerrado y $x_2 \in X_2 - p_2(F)$. Entonces $X_1 \times \{x_2\} \cap F = \emptyset$ y como F es cerrado, existen U_{x_1} y V_{x_1} entornos de x_1 y x_2 tales que $U_{x_1} \times V_{x_1} \cap F = \emptyset$. Como X_1 es compacto, $X_1 = \bigcup_{i=1}^n U_{x_1}^i$. El entorno $W = \bigcap_{i=1}^n V_{x_1}^i$ satisface $W \cap p_2(F) = \emptyset$ y por lo tanto p_2 es cerrada. ■

2. Producto arbitrario de espacios topológicos.

No hay dificultad en extender la definición de topología producto al producto cartesiano de una familia arbitraria de espacios topológicos.

Sea I un conjunto de índices, $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, X un conjunto y $\{f_i\}_{i \in I}$ una colección de funciones, $f_i: X \rightarrow X_i$.

La topología generada por

$$\{f_i^{-1}(V_i): V_i \text{ abierto arbitrario en } X_i, i \in I\}$$

es la topología menos fina tal que las funciones f_i , $i \in I$, son continuas. A esta topología se la denomina topología inicial de la familia $\{f_i\}_{i \in I}$.

Si $\{X_i\}_{i \in I}$ son espacios topológicos, $X_i \neq \emptyset$ cualquiera sea $i \in I$, entonces definamos

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i: f(i) \in X_i\}.$$

$X = \prod_{i \in I} X_i$ está naturalmente identificado con el conjunto de uplas $(x_i)_{i \in I}$ con $x_i \in X_i$ para cada $i \in I$, mediante $f = (f(i))_{i \in I}$. Las proyecciones $p_i: X \rightarrow X_i$ están definidas como $p_i(f) = f(i)$.

La topología producto en X es la topología inicial de la familia $\{p_i\}_{i \in I}$. En otras palabras, la topología producto es la topología menos fina que hace de las proyecciones $p_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ funciones continuas.

Una base para la topología producto es

$$\mathcal{B} = \{ \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(V_i): J \text{ es finito, } J \subset I, V_i \subset X_i \text{ es abierto} \}$$

Notemos que

$$p_k^{-1}(V_k) = \prod_{i \in I} Y_i \text{ donde } Y_i = \begin{cases} V_k & i = k \\ X_i & i \neq k \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(V_i) = \prod_{i \in J} Y_i \text{ donde } Y_i = \begin{cases} V_i & i \in J \\ X_i & i \notin J \end{cases}$$

Resulta entonces que la base de la topología producto está dada por productos de abiertos, uno en cada factor X_i y salvo un número finito, los abiertos coinciden con X_i .

4.2.1. Ejemplo. Topología de la convergencia puntual.

Sean X e Y espacios topológicos. Si denotamos por

$$Y^X = \{f: X \rightarrow Y: f \text{ es una función}\},$$

como $Y^X = \prod_{x \in X} Y_x$, $Y_x = Y$ cualquiera sea $x \in X$, podemos considerar en Y^X la topología producto y transformar Y^X en un espacio topológico. La topología producto en Y^X se llama topología de la convergencia puntual (Ver 5.1.8).

Si $x_i \in X$ y $U_i \subset Y$ son abiertos, $i = 1, \dots, k$ entonces

$$E(x_1, \dots, x_k; U_1, \dots, U_k) = \{f \in Y^X: f(x_i) \in U_i, i = 1, \dots, k\}$$

es un elemento de la base de dicha topología.

Con $\mathcal{C}(X, Y)$ denotamos el subespacio de Y^X de funciones continuas de X en Y .

4.2.2. Proposición. Las proyecciones de un espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ sobre cualquiera de sus espacios coordenados son funciones abiertas.

Demostración: Sea $A = \prod_{i \in I} A_i$, A_i abierto en X_i , $A_i = X_i$ salvo para un número finito de índices.

Como $p_i(A) = A_i$, $i \in I$ y todo abierto en $\prod_{i \in I} X_i$ es unión de elementos de la base resulta p_i abierta, cualquiera sea $i \in I$. ■

4.2.3. Proposición. Una función $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, Y espacio topológico, es continua si y solamente si $p_i \circ f$ es continua, para todo $i \in I$.

Demostración: Si $p_i \circ f$ es continua, cualquiera sea $i \in I$ entonces f es continua pues

$$f^{-1}(p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n})) = (p_{i_1} \circ f)^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap (p_{i_n} \circ f)^{-1}(U_{i_n}). \quad \blacksquare$$

A continuación probaremos que ciertas propiedades topológicas como separación de puntos, conexión y compacidad se preservan al tomar productos arbitrarios.

4.2.4. Proposición. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es T_2 si y solamente si cada X_i , $i \in I$, es T_2 .

Demostración: Sean $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$, $x \neq y$. Por lo tanto existe $j \in I$ tal que $x(j) \neq y(j)$ y si X_j es T_2 , existen U, V entornos disjuntos en X_j de $x(j)$ e $y(j)$ respectivamente. Es claro entonces que $p_j^{-1}(U)$ y $p_j^{-1}(V)$ son entornos disjuntos de x e y en $\prod_{i \in I} X_i$.

Recíprocamente, supongamos que $\prod_{i \in I} X_i$ es T_2 y sean $x_j \neq y_j$ en X_j . Tomemos x, y en $\prod_{i \in I} X_i$, definidos como sigue: $x(j) = x_j$,

$y(j) = y_j$, $x(k) = y(k)$ si $k \neq j$. Como $\prod_{i \in I} X_i$ es T_2 , existen U y V , abiertos de la base, tales que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $p_j(U)$ y $p_j(V)$ son entornos (por 4.2.2.) de x_j e y_j respectivamente y $p_j(U) \cap p_j(V) = \emptyset$. ■

4.2.5. Teorema. El producto de espacios topológicos es conexo si y solamente si cada espacio coordenado es conexo.

Demostración: Es claro que si $\prod_{i \in I} X_i$ es conexo entonces X_i también es conexo, $i \in I$.

Supongamos entonces X_i conexo, cualquiera sea $i \in I$, y $\prod_{i \in I} X_i$ no conexo. Existe (por 3.1.2.) una función continua y suryectiva $f: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \{0,1\}$, $\{0,1\}$ con la topología discreta.

Si $a \in \prod_{i \in I} X_i$ es tal que $f(a) = 0$, sea

$$A_j(a) = \{y \in \prod_{i \in I} X_i : p_i(y) = p_i(a), \forall i \neq j\}.$$

Es claro que $A_j(a)$ es homeomorfo a X_j y que $a \in A_j(a)$, luego $f(y) = 0$, para $y \in A_j(a)$. Si

$$A_{j,k}(a) = \{y \in \prod_{i \in I} X_i : p_i(y) = p_i(a), \forall i \neq j,k\}$$

entonces $A_{j,k}(a) = \bigcup_{i \in A_j(a)} A_k(y)$, y por lo tanto $f(y) = 0$ para todo $y \in A_{j,k}(a)$. Continuando con este proceso podemos mostrar que el conjunto $\mathcal{A}$ de los elementos del producto que difieren de a en un número finito de coordenadas poseen la misma imagen por f . Como este conjunto $\mathcal{A}$ es denso en $\prod_{i \in I} X_i$ y f es continua, resulta f constante. ■

Precisaremos del siguiente lema para probar que la compacidad también se preserva al considerar productos arbitrarios.

4.2.6. Lema de Alexander. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una sub-base de la topología de X tal que todo cubrimiento de X por elementos de $\mathcal{S}$ admite subcubrimiento finito. Entonces X es un espacio compacto.

Demostración: Supongamos que (X, τ) no es compacto. Entonces

$\mathcal{F} = \{B \subset \tau: B \text{ cubre a } X \text{ y ninguna subfamilia finita de } B \text{ lo cubre}\}$ es no vacía. Ordenemos $\mathcal{F}$ por inclusión y sea $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0$ totalmente ordenado. Entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{F}_0} A$ es una cota superior de $\mathcal{F}_0$ y por el lema de Zorn existe un subconjunto maximal $\mathcal{M}$ en $\mathcal{F}$.

Notemos que:

- (i) $A \in \tau$, $A \notin \mathcal{M} \Rightarrow \exists M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}$ tal que $A \cup M_1 \cup \dots \cup M_k = X$.
- (ii) $A, B \in \tau$, $A \notin \mathcal{M}$, $B \notin \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \notin \mathcal{M}$.
- (iii) $B \in \mathcal{M}$, $A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{M}$.

Sea ahora $M \in \mathcal{M}$ y $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{P}$ tal que $M \supset S_1 \cap \dots \cap S_k$. Sigue de (iii) que $S_1 \cap \dots \cap S_k \in \mathcal{M}$ y de (ii), que existe j tal que $S_j \in \mathcal{M}$. Por lo tanto, si $X = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$, para todo $x \in M$ existe $S \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}$ tal que $x \in S$. Luego $X = \bigcup_{i \in I} S_j$, $S_j \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}$ y obtenemos un cubrimiento de X , por elementos de la sub-base, que no admite subcubrimiento finito. ■

4.2.7. Teorema (Tijonov). Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto si y solamente si cada X_i , $i \in I$, es compacto.

Demostración: Supongamos que X_i es compacto, para todo $i \in I$ y sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de $\prod_{i \in I} X_i$ por elementos de la sub-base $\mathcal{P} = \{p_i^{-1}(U_i): i \in I, U_i \text{ abierto en } X_i\}$. Si

$$\mathcal{A}_i = \{A \subset X_i: A \text{ es abierto y } p_i^{-1}(A) \in \mathcal{A}\},$$

existe un $j \in I$ tal que $\mathcal{A}_j$ cubre a X_j pues $\mathcal{A}$ es un cubrimiento. Como X_j es compacto, $X_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathcal{A}_j$, y como consecuencia $\prod_{i \in I} X_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} p_j^{-1}(A_k)$.

Recíprocamente, si $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto, X_i es compacto pues las proyecciones son continuas y suryectivas. ■

4.2.8. Aplicación. Teorema de Heine-Borel.

Como consecuencia del teorema de Tijonov daremos una demostración de la compacidad del intervalo $[0,1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $X_n = \{0,1\}$ con la topología discreta y

$f: \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow [0,1]$ definida por $f((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} a_i$. Probaremos que f es continua y suryectiva y como consecuencia de 4.2.7 obtendremos la compacidad de $[0,1]$.

Sea $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ y $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty$, existe $N > 0$ tal que $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Entonces, para todo $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $x_i = a_i$ si $i < N$ tenemos $|f((x_i)_{i=1}^{\infty}) - f((a_i)_{i=1}^{\infty})| = |\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a_i) \frac{1}{2^i}| \leq \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Como el conjunto de tales $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ constituyen un entorno de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ obtenemos la continuidad de f .

Probaremos ahora que f es suryectiva. Si $x \in [0,1]$ definimos inductivamente x_n ($n \in \mathbb{N}$) como sigue. Sea

$$x_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Supongamos que $x_1, \dots, x_n$ están definidas de manera que $x_i = 0$ o $x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ y además $0 \leq x - \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^n}$. Sea

$$x_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x - \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n+1}} \\ 1 & \text{si } x - \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Entonces $0 \leq x - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n+1}}$ y por lo tanto $f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = x$, como queríamos demostrar. ■

Los teoremas de Heine-Borel y Tjonov aseguran que I^n , $I = [0,1]$, es un espacio compacto. Por lo tanto vale la recíproca de 3.4.9. o sea

4.2.9. Corolario. $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.

3. Topología cociente.

Vimos en las secciones anteriores que si $f: X \rightarrow Y$ es una función del conjunto X con valores en un espacio topológico Y entonces es posible definir una topología en Y de manera que f es continua y que dicha topología es la menos fina con tal propiedad.

Interesa ahora considerar la situación recíproca. Si f es una función de un espacio topológico X en un conjunto Y , la familia

$$\{A \subset Y: f^{-1}(A) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología en Y , y es la más fina que hace de f una función continua. Dicha topología se llama la topología final para f .

Sea (X, τ) espacio topológico, $\sim$ relación de equivalencia en X , $X/\sim$ el conjunto cociente y $\theta: X \rightarrow X/\sim$ (la aplicación canónica) la función que asocia a cada $x \in X$ su clase de equivalencia en $X/\sim$.

4.3.1. Definición. La topología cociente en $X/\sim$ es la topología final para θ , esto es, la topología más fina que hace de θ una función continua. En dicha topología,

$$A \text{ es abierto en } X/\sim \iff \theta^{-1}(A) \text{ es abierto en } X.$$

4.3.2. Definición. Si B es un subconjunto de X , el saturado de B es el subconjunto $\theta^{-1}(\theta(B))$. Un subconjunto B de X se dirá saturado si $\theta^{-1}(\theta(B)) = B$.

Sigue de las definiciones anteriores,

- A es abierto en $X/\sim \iff A = \theta(B)$, B abierto saturado en X .
- A es cerrado en $X/\sim \iff A = \theta(B)$, B cerrado saturado en X .

4.3.3. Definición. La relación de equivalencia $\sim$ en X se dice abierta (resp. cerrada) si θ es una función abierta (resp. cerrada) en $X/\sim$ (con la topología cociente).

Se verifica fácilmente;

4.3.4. Proposición. Una relación $\sim$ en X es abierta (resp. cerrada) si y solamente si saturados de conjuntos abiertos (resp. cerrados) son abiertos (resp. cerrados).

4.3.5. Ejemplos.

- $X = \mathbb{R}$, y la relación $\sim$ definida por $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$.
Entonces $\sim$ es abierta pues $\theta^{-1}(\theta(a,b)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (a-n, b-n)$ y no es cerrada ya que tomando $F = \{n + \frac{1}{n} : n \geq 2, n \in \mathbb{Z}\}$ resulta que $0 \notin \theta^{-1}(\theta(F))$.

- $X = [0,1]$, $\sim$ la relación: $x \sim y \Leftrightarrow x = 0, y = 1 \text{ ó } x = 1, y = 0 \text{ ó } x = y$.

Esta relación es cerrada y no es abierta. Este ejemplo muestra que restricciones de relaciones abiertas pueden no ser abiertas.

- $X = \mathbb{R}$, $\sim$ dada por $x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ó } x, y \in \mathbb{Z}$.

Como $\theta^{-1}(\theta(F)) = F \text{ ó } F \cup \mathbb{Z}$ ($F \subseteq \mathbb{R}$), resulta $\sim$ una relación cerrada. Además la relación no es abierta pues $\theta^{-1}(\theta(0,2)) = (0,2) \cup \mathbb{Z}$.

El espacio cociente $X/\sim$ no es N_1 . Supongamos que lo es y sea $\{V_n\}$ una base numerable de entornos de $\theta(0)$. Entonces $\theta^{-1}(V_n)$ es una familia de entornos de $\mathbb{Z}$ y podemos elegir $a_n \in \theta^{-1}(V_n)$, $k < a_n < k+1$. Si $B = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ entonces CB es abierto saturado y $\theta(CB)$ no contiene a V_n cualquiera sea n .

4.3.6. Proposición. Sean X e Y espacios topológicos, $\sim$ relación de equivalencia en X y $f: X/\sim \rightarrow Y$. Entonces f es continua si y solo si $f \circ \theta$ es continua. Además f es abierta si y solo si $f(\theta(B))$ es abierto, cualquiera sea B el abierto saturado de X .

Demostración: Es claro que si f es continua, $f \circ \theta$ resulta continua. Recíprocamente, si A es abierto en Y , $(f \circ \theta)^{-1}(A) = \theta^{-1}(f^{-1}(A))$ es abierto en X y por definición de la topología cociente resulta $f^{-1}(A)$ abierto en $X/\sim$. Además, f es abierta si y solamente si, $f(A)$

es abierto, cualquiera sea el abierto A en $X/\sim$. Como todo abierto A en $X/\sim$ es de la forma $\theta(B)$ con B abierto saturado en X , sigue la última afirmación.

4.3.7. Proposición. Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X . Entonces

- (i) Si $X/\sim$ es T_2 entonces el gráfico de la relación $\sim$, $G_\sim = \{(x,y) \in X \times X: x \sim y\}$ es cerrado.
- (ii) Si $G_\sim$ es cerrado y θ es abierta, la topología cociente en $X/\sim$ es T_2 .

Demostración: (i) Sea $(x,y) \notin G_\sim$, o sea $\theta(x) \neq \theta(y)$ y sean U, V abiertos disjuntos en $X/\sim$ tales que $\theta(x) \in U$, $\theta(y) \in V$. El producto $\theta^{-1}(U) \times \theta^{-1}(V)$ es un entorno de (x,y) que no intersecta a $G_\sim$. Como (x,y) es arbitrario resulta $G_\sim$ cerrado.

(ii) Si $\theta(x) \neq \theta(y)$ en $X/\sim$ entonces $(x,y) \notin G_\sim$. Como $G_\sim$ es cerrado existen abiertos A y B en X , $x \in A$ e $y \in B$ tales que $A \times B \cap G_\sim = \emptyset$. Siendo θ abierta resultan $\theta(A)$ y $\theta(B)$ entornos disjuntos de $\theta(x)$ y $\theta(y)$ respectivamente. ■

4.3.8. Proposición. Sea X espacio topológico y $\sim$ relación de equivalencia en X . Si $X/\sim$ es conexo y $\theta^{-1}(\theta(x))$ es conexo para todo $x \in X$, entonces X es conexo.

Demostración: Supongamos $X = A \cup B$, A y B abiertos disjuntos, no vacíos. Como $\theta^{-1}(\theta(x))$ es conexo, cualquiera sea $x \in X$, resultan A y B abiertos saturados y como consecuencia $X/\sim$ no es conexo. ■

4. Ejemplos de espacios cocientes.

Son muy pocos los resultados de carácter general que se obtienen al estudiar propiedades topológicas en el cociente en término de las dadas en X . Esto se debe al hecho de que las posibles relaciones en X pueden ser muy variadas (ver 4.3.5.).

Sin embargo abundan los ejemplos y las realizaciones de

espacios conocidos como cocientes. En esta sección presentamos algunos de ellos; los cocientes de grupos de matrices aparecen en la sección 6.

Es claro, intuitivamente que si en $[0,1]$ identificamos solo 0 con 1 obtenemos un círculo. Comenzamos probando esta afirmación.

4.4.1. Si en $[0,1]$ consideramos $x \sim y \iff x = 0, y = 1$ ó $x = 1, y = 0$ ó $x = y$ entonces $[0,1]/\sim$ es homeomorfo a S^1 .

En efecto sea $\varphi: [0,1] \rightarrow S^1$ definida por $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. Como $\varphi(0) = \varphi(1)$ existe una única $\bar{\varphi}: [0,1]/\sim \rightarrow S^1$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \\ \theta \downarrow & \nearrow & \bar{\varphi} \\ [0,1]/\sim & & \end{array}$$

es conmutativo. Probaremos que $\bar{\varphi}$ es un homeomorfismo.

La función $\bar{\varphi}$ es inyectiva pues $\varphi(x) = \varphi(y)$ implica $x \sim y$. Además dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 = 1$, existe un único $\alpha \in [0,2\pi)$ tal que $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$. Tomando $t = \frac{\alpha}{2\pi}$ resulta $\varphi(t) = (x,y)$, o sea φ es suryectiva y por lo tanto $\bar{\varphi}$ también lo es. La continuidad de $\bar{\varphi}$ es consecuencia de 4.3.6 y como $[0,1]/\sim$ es compacto y S^1 es T_2 resulta $\bar{\varphi}$ un homeomorfismo. ■

4.4.2. **Definición.** El toro n-dimensional T^n es el espacio cociente denotado por $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, que se obtiene considerando en $\mathbb{R}^n$ la relación $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$.

4.4.3. T^n es homeomorfo a $(S^1)^n$.

Definamos $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow (S^1)^n$ por $\varphi(t_1, \dots, t_n) = (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$. Como elementos relacionados en $\mathbb{R}^n$ poseen igual imagen por φ , existe una única $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow (S^1)^n$ tal que el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & (S^1)^n \\ \theta \downarrow & \nearrow & \bar{\varphi} \\ \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n & & \end{array}$$

es conmutativo.

No es difícil verificar, utilizando argumentos como en 4.4.1 que $\bar{\varphi}$ es biyectiva y continua. Observando que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \theta(I^n)$, $I = [0,1]$, sigue que $\bar{\varphi}$ es cerrada y por lo tanto un homeomorfismo.

Sigue de 4.4.1 y 4.4.3.

4.4.4. $[0,1]/\sim \simeq S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

4.4.5. **Definición.** El espacio proyectivo real n -dimensional $\mathbb{RP}^n$ es el espacio cociente $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}/\sim$ donde $x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El espacio proyectivo complejo n -dimensional $\mathbb{CP}^n$ es el espacio cociente $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\sim$ donde $x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Consideremos en S^n la relación $\sim_R$ dada por $x \sim_R y \Leftrightarrow y = \pm x$. En S^{2n+1} la relación $\sim_C$ dada por $x \sim_C y \Leftrightarrow x = \lambda y$, $\lambda \in S^1$. Entonces

- 4.4.6. (i) $\mathbb{RP}^n$ es homeomorfo a $S^n/\sim_R$.
 (ii) $\mathbb{CP}^n$ es homeomorfo a $S^{2n+1}/\sim_C$.

(i) Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} & \xrightarrow{\varphi} & S^n \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta_R \\ \mathbb{RP}^n & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & S^n/\sim_R \end{array}$$

donde $\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y θ_R es la proyección en el espacio cociente obtenido por la relación $\sim_R$. Como,

$$\theta_R \circ \varphi(x) = \theta_R \circ \varphi(y) \Leftrightarrow y = \pm \varphi(x) \Leftrightarrow y = \frac{\|y\|}{\|x\|} x \Leftrightarrow \theta(y) = \theta(x)$$

existe una única $\bar{\varphi}: \mathbb{RP}^n \rightarrow S^n/\sim_R$ tal que $\bar{\varphi} \circ \theta = \theta_R \circ \varphi$ y además $\bar{\varphi}$ es inyectiva. Como $\theta_R \circ \varphi$ es suryectiva, $\bar{\varphi}$ también lo es. Sigue de 4.3.6. que $\bar{\varphi}$ es continua (pues $\theta_R \circ \varphi$ lo es) y abierta (pues φ manda abiertos saturados en abiertos y $\sim_R$ es claramente abierta).

(ii). Consideramos como antes el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & S^{2n+1} \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta_c \\
 \mathbb{CP}^n & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & S^{2n+1}/\sim_c
 \end{array}$$

y se demuestra en forma enteramente análoga que la función $\bar{\varphi}$ que hace conmutativo el diagrama es un homeomorfismo.

Es importante individualizar los espacios $\mathbb{RP}^1$ y $\mathbb{CP}^1$. Sigue de consideraciones previas.

- 4.4.7. (i) $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a S^1 .
(ii) $\mathbb{CP}^1$ es homeomorfo a S^2 .

Sabemos de 4.4.6. que $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1/\sim_R$ y $\mathbb{CP}^1 \simeq S^3/\sim_c$. Para probar (i) consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\
 \theta_R \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\
 S^1/\sim_R & &
 \end{array}$$

donde $f(z) = z^2$.

De la equivalencia

$$z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \pm z_2$$

resulta la existencia de $\tilde{f}$ inyectiva y tal que $\tilde{f} \circ \theta_R = f$. Es claro que además resulta $\tilde{f}$ continua y suryectiva (pues f lo es) y cerrada (pues $\mathbb{RP}^1$ es compacto y S^1 es T_2).

Para demostrar (ii), consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xrightarrow{f} & S^2 \\
 \theta_c \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\
 \mathbb{CP}^1 & &
 \end{array}$$

donde $f(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2)$.

Notar que $\theta_c(z_1, z_2) = \theta_c(z'_1, z'_2)$ implica $(z'_1, z'_2) = \lambda(z_1, z_2)$, $\lambda \in S^1$. Por lo tanto existe $\tilde{f}$ continua y tal que $\tilde{f} \circ \theta_c = f$. $\tilde{f}$

resultará inyectiva si verificamos que puntos identificados por f son también identificados por θ_c . Para ello observemos que si $(z_1, z_2), (z'_1, z'_2)$, son elementos de S^3 ,

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = |z'_1|^2 - |z'_2|^2 \Rightarrow z'_1 = \lambda z_1, \quad z'_2 = \mu z_2, \quad \lambda, \mu \in S^1.$$

La condición $z_1 \bar{z}_2 = z'_1 \bar{z}'_2$ implica $\lambda = \mu$ y por lo tanto $\theta_c(z_1, z_2) = \theta_c(z'_1, z'_2)$. Además f es suryectiva (luego $\tilde{f}$) pues,

$$\text{si } (a, z) \in S^2 \text{ entonces } f\left(\frac{(a+1)^{1/2}}{2}, \frac{z}{[2(a+1)]^{1/2}}\right) = (a, z).$$

Finalmente $\tilde{f}$ resulta cerrada pues $\mathbb{CP}^1$ es compacto y S^2 es T_2 .

5. Cocientes del cuadrado unidad.

Los siguientes espacios cocientes son obtenidos haciendo identificaciones en los bordes del cuadrado unitario J^2 con $J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4.5.1. Cilindro y cono.

Dada la relación $(1/2, t) \sim (-1/2, t)$, para todo $t \in J$, el espacio cociente $J^2/\sim$ resulta homeomorfo al cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$, $C = \{(\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, t) : (u, t) \in J^2\}$. Si identificamos además los puntos del borde superior de C entre sí, obtenemos el Cono = $\{((1/2-t) \cos 2\pi u, (1/2-t) \sin 2\pi u, t) : (u, t) \in J^2\}$.



4.5.2. Cinta de Möbius.

En J^2 consideramos ahora la relación $(-1/2, t) \sim (1/2, -t)$. Al

cociente $J^2/\sim$ se lo llama cinta de Möebius y se lo denota M .

Es posible pensar a M como subespacio de $\mathbb{R}^3$. Para ello definimos $\phi: J^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ así

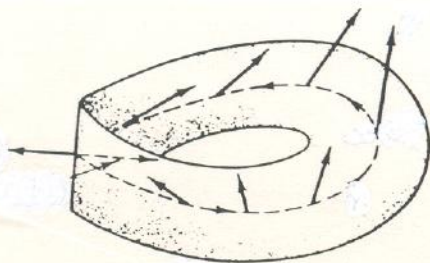
$$\phi(u,t) = ((1-t \operatorname{sen}\pi u) \cos 2\pi u, (1-t \operatorname{sen}\pi u) \operatorname{sen} 2\pi u, t \cos \pi u).$$

Es claro que ϕ es continua y verifica que $\phi(u,t) = \phi(u',t')$ si y solo si $(u,t) \sim (u',t')$. La función $\tilde{\phi}$ inducida en $J^2/\sim$ resulta ser un homeomorfismo sobre la imagen de ϕ .

Dicha imagen es

$$\{(\cos \theta(1-a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}), \operatorname{sen} \theta(1-a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}), a \cos \frac{\theta}{2}), a \in J, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

y se puede visualizar como la superficie descrita por un segmento unitario L cuyo punto medio P recorre la circunferencia unitaria S^1 en el plano XY . Simultáneamente el segmento L rota sobre el eje tangente a S^1 en cada instante. La velocidad de rotación de L sobre el eje es la mitad de la velocidad angular con que P recorre S^1 . Luego cuando P completa una vuelta, el segmento L gira π .



Las distintas relaciones entre las velocidades angulares de P y L permite obtener distintos modelos de cinta, torsión doble, triple, etc.

4.5.3. Toro.

El cociente $J^2/\sim$ donde $(-1/2, t) \sim (1/2, t)$ y $(u, -1/2) \sim (u, 1/2)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ pues la relación de equivalencia anterior es la restricción a J^2 de la relación $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}^2$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Podemos también identificar T^2 con el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$,

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: [(x^2 + y^2)^{1/2} - z]^2 + z^2 = 1\}.$$

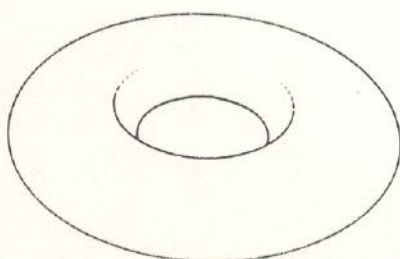


Fig. 5.18

La aplicación $\phi: J^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(u, t) = (\cos 2\pi u (\cos 2\pi t + 2), \sin 2\pi u (\cos 2\pi t + 2), \sin 2\pi t)$$

origina un homeomorfismo $\tilde{\phi}: T^2 \rightarrow Y$.

4.5.4. Espacio proyectivo.

El cociente $J^2/\sim$ donde $(u, -1/2) \sim (-u, 1/2)$ y $(-1/2, t) \sim (1/2, -t)$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2$. En efecto el homeomorfismo

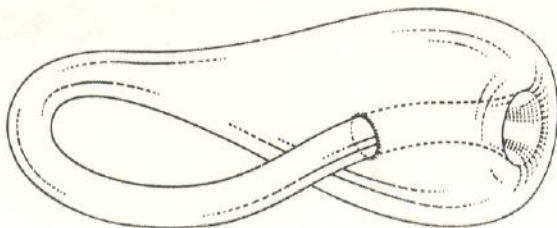
$$\psi(u, t) = \frac{2(u, t)}{1 + \min\{4u^2, 4t^2\}}$$

entre J^2 y D^2 induce un homeomorfismo entre $J^2/\sim$ y $D^2/\equiv$, donde $x \equiv y$ si y solo si $y = \pm x$, si $|x| = 1$ ó $y = x$ si $|x| < 1$.

La función $(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ de D^2 en S^2 induce un homeomorfismo entre $D^2/\equiv$ y $S^2/\sim_R = \mathbb{RP}^2$ (Ver 4.4.6) y por lo tanto $J^2/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2$ como afirmamos.

4.5.5. Botella de Klein.

En J^2 identificamos $(u, -1/2) \sim (u, 1/2)$ y $(-1/2, t) \sim (1/2, t)$ y obtenemos $J^2/\sim$, la botella de Klein K .



6. Cocientes de grupos de matrices.

Sea $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $M_n(K) = \{\text{matrices } n \times n \text{ con coeficientes en } K\}$. Se definen

$$GL(n, K) = \{A \in M_n(K) : A \text{ es inversible}\}$$

$$SL(n, K) = \{A \in M_n(K) : \det A = 1\}$$

$$O(n) = \{A \in M_n(K) : AA^t = A^t A = I\}$$

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = \bar{A}^t A = I\}$$

donde A^t y $\bar{A}$ denotan las matrices traspuesta y conjugada de A , respectivamente.

Dadas $A, B \in M_n(K)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$,

$$d(A, B) = \|A - B\| = \left[\sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2 \right]^{1/2}$$

define una distancia en $M_n(K)$; el espacio métrico que resulta es homeomorfo a $\mathbb{K}^{n^2}$ con la topología usual. (ver 2.1.4).

En lo que sigue consideraremos $M_n(K)$ con la topología métrica antes definida. Vimos en 2.1.4 que la función determinante $\det: M_n(K) \rightarrow K$ es continua, por lo tanto $GL(n, K)$ es un subconjunto abierto de $M_n(K)$. Además el producto de matrices

$$\begin{aligned} GL(n, K) \times GL(n, K) &\rightarrow GL(n, K) \\ (A, B) &\rightarrow A \cdot B \end{aligned}$$

y la inversión

$$\begin{aligned} GL(n, K) &\rightarrow GL(n, K) \\ A &\rightarrow A^{-1} \end{aligned}$$

son funciones continuas. (Resulta al considerar $(A \cdot B)_{ij}$, $(A^{-1})_{ij}$). $GL(n, K)$ con la topología relativa de $M_n(K)$ es un caso particular de una estructura mas general, la de grupo topológico.

En $SL(n, K)$, $O(n)$ y $U(n)$ consideraremos la topología relativa de $GL(n, K)$. En estos grupos de matrices resultan también funciones continuas las operaciones de multiplicación e inversión.

A continuación veremos algunas propiedades topológicas de estos

grupos de matrices.

4.6.1. **Proposición.** Los grupos $O(n)$ y $U(n)$ son compactos.

Demostración: Sea $A = (a_{ij}) \in O(n)$. La condición $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$ implica que las filas (columnas) son ortogonales y de longitud 1. Por lo tanto $|a_{ij}| \leq 1$ cualquiera sea i, j , y la imagen de $O(n)$, por el homeomorfismo entre $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$, está contenida en un conjunto acotado.

Como $O(n)$ es, por definición, la imagen inversa de I por una función continua, $O(n)$ es cerrado. Sigue de 4.2.9 que $O(n)$ es compacto. La demostración en el caso de $U(n)$ es similar. ■

Notemos que de $\det(A \cdot A^t) = 1$ obtenemos $(\det A)^2 = 1$ o sea, si $A \in O(n)$, su determinante es ± 1 . Como el determinante de $A = (a_{ij})$ definida por $a_{11} = -1$, $a_{ii} = 1$, $i > 1$ y $a_{ij} = 0$ $i \neq j$, es -1 , el determinante de la identidad I es 1 , y ambas son matrices de $O(n)$, resulta

4.6.2. **Proposición.** $O(n)$ no es conexo.

Sea

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$$

con la topología relativa de $M_n(\mathbb{R})$. Como $SO(n)$ es cerrado en $O(n)$, $SO(n)$ es compacto.

Veremos a continuación que $SO(n)$ es conexo. Comenzamos identificando $SO(n-1)$ con el subgrupo de $SO(n)$,

$$SO(n-1) = \{A \in SO(n) : Ae_1 = e_1, e_1 = (1, 0, \dots, 0)\}.$$

Definimos en $SO(n)$ la relación $A \sim B$ si y solo si $B^{-1} \cdot A \in SO(n-1)$.

Al espacio cociente $SO(n)/\sim$ lo denotamos $SO(n)/SO(n-1)$.

4.6.3. **Proposición.** $SO(n)/SO(n-1)$ es homeomorfo a S^{n-1} .

Demostración: Sea el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 SO(n) & \xrightarrow{\varphi} & S^{n-1} \\
 \theta \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\
 SO(n)/SO(n-1) & &
 \end{array}$$

donde $\varphi(A) = A(e_1)$ es la primera columna de la matriz A . (La condición $A^t A = I$ asegura que las columnas tienen longitud 1) Notemos que

$$\varphi(A) = \varphi(B) \Leftrightarrow Ae_1 = Be_1 \Leftrightarrow B^{-1}Ae_1 = e_1 \Leftrightarrow A \sim B.$$

Luego existe $\bar{\varphi}$ inyectiva y continua, $\bar{\varphi} \circ \theta = \varphi$.

La función φ (luego $\bar{\varphi}$) es suryectiva pues todo vector v_1 de longitud 1 en $\mathbb{R}^n$ puede completarse a una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de manera que la matriz, cuyas columnas son los vectores v_i , $i = 1, \dots, n$, pertenezca a $SO(n)$. Como $SO(n)/\sim$ es compacto $\bar{\varphi}$ resulta un homeomorfismo. ■

4.6.4. Corolario. $SO(n)$ es conexo.

Demostración: Si $n = 1$, $SO(1) = \{1\}$ es conexo. Supongamos que $SO(n-1)$ es conexo. Como $SO(n)/SO(n-1) = SO(n) = S^{n-1}$ es conexo y $\theta^{-1}(\theta(A))$, $A \in SO(n)$, es homeomorfo a $SO(n-1)$, aplicando 4.3.8 resulta $SO(n)$ un espacio conexo. ■

4.6.5. Corolario. $O(n)$ posee dos componentes conexas.

Demostración: Es inmediata. ■

Si $A \in U(n)$, la condición $A \cdot \bar{A}^t = 1$ implica que $\det(A \cdot \bar{A}^t) = \det A \det \bar{A}^t = \det A \overline{\det A} = 1$ o sea, si nos restringimos a $U(n)$ obtenemos

$$\det: U(n) \longrightarrow S^1$$

Mas aún, la función anterior es suryectiva pues la matriz (a_{ij}) tal que $a_{11} = e^{i\theta}$, $a_{ii} = 1$ si $i > 1$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, posee determinante $e^{i\theta}$.

$$SU(n) = \{A \in U(n): \det A = 1\}$$

es la imagen inversa del 1, cerrado en $U(n)$, luego compacto. Como en el caso de $SO(n)$ consideramos

$$SU(n-1) = \{A \in SU(n): Ae_1 = e_1\}$$

y la relación en $SU(n)$, $A \sim B$ si y sólo si $B^{-1} \cdot A \in SU(n-1)$. Denotamos con $SU(n)/SU(n-1)$ al cociente $SU(n)/\sim$.

4.6.6. Proposición. $SU(n)/SU(n-1)$ es homeomorfo a S^{2n-1} .

Demostración: Es análoga a la prueba de 4.6.3. ■

4.6.7. Corolario. $SU(n)$ es conexo.

Demostración: Similar a la de 4.6.4. ■

Vimos que $O(n)$ no es conexo. Sin embargo $U(n)$ es un espacio conexo pues

4.6.8. Proposición. El grupo $U(n)$ es homeomorfo a $S^1 \times SU(n)$. En particular $U(n)$ es conexo.

Demostración: Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ escribimos $A = (v_1, \dots, v_n)$, donde $v_i \in \mathbb{C}^n$ denotan las columnas de A y sea $\varphi: S^1 \times SU(n) \rightarrow U(n)$ definida por $\varphi(z, A) = (zv_1, v_2, \dots, v_n)$. La función φ es claramente continua. Además φ es inyectiva pues $\det(zv_1, \dots, v_n) = z$ para $(v_1, \dots, v_n) \in SU(n)$. Si $B = (w_1, \dots, w_n) \in U(n)$ y $w = \det B$ entonces $\varphi(w, (\bar{w}w_1, w_2, \dots, w_n)) = B$ y por lo tanto φ es suryectiva, luego un homeomorfismo. ■

Recordemos que $GL(n, \mathbb{R})$ no es conexo. Sin embargo,

4.6.9. Proposición. $GL(n, \mathbb{C})$ es conexo.

Demostración: Mostraremos primero que toda transformación $T \in GL(n, \mathbb{C})$ admite una descomposición polar $T = P \cdot R$ donde P es hermitiana definida positiva y R es unitaria.

Dado en $\mathbb{C}^n$ el producto interno

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum z_i \bar{w}_i,$$

una transformación T en $GL(n, \mathbb{C})$ se dice hermitiana si

$\langle Tz, w \rangle = \langle z, Tw \rangle$, $z, w \in \mathbb{C}^n$ ($\Leftrightarrow T^* = T$); definida positiva si $\langle Tz, z \rangle > 0$ si $z \neq 0$ y unitaria si $\langle Tz, Tw \rangle = \langle z, w \rangle$, $z, w \in \mathbb{C}^n$. Si $T \in GL(n, \mathbb{C})$, $T \cdot T^*$ es hermitiana y definida positiva; luego existe P , su raíz cuadrada ($P^2 = T \cdot T^*$). La transformación $R = P^{-1} \cdot T$ es unitaria pues

$$\langle Rz, Rw \rangle = \langle P^{-1} \cdot Tz, P^{-1} \cdot Tw \rangle = \langle Tz, P^{-2} \cdot Tw \rangle = \langle z, w \rangle$$

y $T = P \cdot R$ es una descomposición polar.

Para verificar que $GL(n, \mathbb{C})$ es conexo basta considerar el producto de la curva $(sP + (1-s)I)$ de transformaciones hermiticas definidas positivas y una curva R_s de transformaciones unitarias uniendo I con R . ■

EJERCICIOS

1. Sean X, Y, Z espacios topológicos, $X \times Y$ el espacio producto y $f: X \times Y \rightarrow Z$. Muestre que si f es continua entonces las funciones $f(x, \cdot): Y \rightarrow Z$, $f(\cdot, y)(x) = f(x, y)$ y $f(\cdot, y): X \rightarrow Z$, $f(\cdot, y)(x) = f(x, y)$ son continuas, cualquiera sean x e y . Dar un ejemplo mostrando que la recíproca no vale.

2. Sea $P = \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n$, $I_n = [0, \frac{1}{n}]$ y sea d la distancia $d(\bar{x}, \bar{y}) = [\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2]^{1/2}$, $\bar{x}, \bar{y} \in P$.

Pruebe que la topología métrica inducida por d coincide con la topología producto. Deduzca que $I^{\mathbb{N}}$ es compacto.

3. Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ espacios topológicos y $a \in X = \prod_{i \in I} X_i$. Muestre que el conjunto de elementos de X que difieren de a en un número finito de coordenadas es denso en X .

4. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. El espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ es N_1 (resp N_2) si y solamente si cada X_i es N_1 (resp N_2) y todos, salvo una cantidad numerable, son indiscretos.

5. En Y^X considere la topología cuya sub-base son los conjuntos

$$M(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subset U\}$$

donde K es compacto en X y U es abierto en Y . A esta topología se la denomina topología compacto abierta. Pruebe que la topología de la convergencia puntual (ver 4.2.1.) es menos fina que la topología compacto abierta.

6. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $\sim_i$ relaciones de equivalencia abiertas en X_i . Definamos $\prod_{i \in I} X_i$ la relación

$$f \sim g \Leftrightarrow p_i(g) \sim_i p_i(f) \text{ para todo } i \in I.$$

Pruebe que $(\prod_{i \in I} X_i)/\sim$ es homeomorfo a $\prod_{i \in I} (X_i/\sim_i)$.

7. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\sim$ dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

Muestre que la relación no es cerrada y que la topología cociente en $\mathbb{R}/\sim$ es la indiscreta.

8. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual considere $\mathcal{D}$, la partición formada por $\mathbb{R} \times \{0\}$ y todos los conjuntos $\{(x,y), y \neq 0\}$. Sea $\sim$ la relación dada por $\mathcal{D}$ y sea $\mathbb{R}^2/\sim$ el espacio cociente.

Muestre que la proyección canónica es cerrada, no es abierta y que $\mathbb{R}^2/\sim$ no es N_1 .

9. Sea $X = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, 1, -1\}$ y sea $\sim$ la relación de equivalencia asociada a

$$\mathcal{D} = \{\mathbb{Z} - \{0\}, \{0\}, \{x, \frac{1}{x} : 0 < |x| < 1\}.$$

Pruebe que la proyección no es abierta ni cerrada, que el gráfico de la relación es cerrado y que $X/\sim$ es T_2 .

10. Muestre que si X es localmente conexo y $\sim$ una relación de equivalencia entonces $X/\sim$ es localmente conexo.

11. Sea en D^n la relación $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$, $x, y \in S^{n-1}$. Pruebe que el espacio cociente que denotamos con D^n/S^{n-1} es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.

12. Si X es un espacio topológico, el cono de X se define por

$$CX = \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \equiv (x', 1)}, \quad x, x' \in X \text{ y la } \underline{\text{suspensión de } X} \text{ por}$$

$$SX = \frac{X \times [-1, 1]}{(x, 1) \equiv (x', 1), (x, -1) \equiv (x', -1)}, \quad x, x' \in X.$$

Pruebe que SS^n es homeomorfo a S^{n+1} y CS^n es homeomorfo a D^{n+1} .

CAPITULO V

CONVERGENCIA

Iniciaremos este capítulo introduciendo las nociones de sucesiones y redes.

Tradicionalmente las definiciones básicas de topología en $\mathbb{R}^n$, como continuidad y límite se hacían a partir de la idea de sucesiones, que es de gran utilidad práctica (Un ejemplo es la caracterización de conjuntos compactos por la propiedad de Bolzano-Weierstrass). Esto todavía es posible en espacios métricos, pero en el ámbito de los espacios topológicos las sucesiones no son suficientes y es preciso considerar una generalización, que es la noción de redes.

1. Sucesiones en espacios topológicos.

5.1.1. **Definición.** Dado un espacio topológico X , una sucesión en X es una función $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Denotaremos una sucesión por $\{x_n\}$ donde $x_n = f(n)$.

Una subsucesión de $\{x_n\}$ es una función $k \rightarrow x_{n_k}$ tal que $k \rightarrow n_k$ ($\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) es una función estrictamente creciente.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ converge a x ($x_n \rightarrow x$ para $n \rightarrow \infty$) si para cada U entorno de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.

- Para (X, d) espacio métrico tendremos que $x_n \rightarrow x$ si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ si $n \geq n_0$.

- Es inmediato que si $x_n \rightarrow x$ entonces para toda $\{x_{n_k}\}$ subsucesión, $x_{n_k} \rightarrow x$ para $k \rightarrow \infty$.

- Toda sucesión constante, $x_n = x_0$ para $n \geq n_0$, converge a x_0 .

- En un espacio discreto las únicas sucesiones convergentes son las constantes.

- Si X es un conjunto infinito con la topología de los complementos finitos, entonces existen sucesiones que convergen a más de un punto. Esto sucede porque el espacio no es T_2 .

5.1.2. Proposición. Si X es un espacio T_2 toda sucesión en X converge a lo sumo a un punto.

Demostración: Es inmediata ya que si $x \neq y$ en X , existen U, V entornos disjuntos de x e y respectivamente. Luego si $x_n \rightarrow x$ y $x_n \rightarrow y$ se tendría una contradicción, ya que existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \cap V$ para $n \geq n_0$. ■

La recíproca de la proposición anterior no es cierta como lo muestra el siguiente ejemplo: Sea X un conjunto infinito no numerable y definamos en X la topología de los complementos numerables de la siguiente manera,

$$\tau = \{ A \subset X : CA \text{ es finito o numerable} \} \cup \{\emptyset\}.$$

En esta topología las únicas sucesiones convergentes son las constantes pero el espacio no es T_2 . Por lo tanto el hecho que en un espacio topológico toda sucesión tenga a lo sumo un punto límite no caracteriza los espacios T_2 . Más adelante veremos que considerando redes en lugar de sucesiones vale la recíproca de 5.1.2.

5.1.3. Definición. Sea X espacio topológico. $x \in X$ es un punto de aglomeración de $\{x_n\}$ si para todo $U \in \mathcal{V}(x)$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, tal que $x_n \in U$.

5.1.4. Proposición. Sea X un espacio N_1 . Un punto x es un punto de aglomeración de $\{x_n\}$ si y solamente si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$).

Demostración: Es claro que si existe una subsucesión $x_{n_k} \rightarrow x$, x es punto de aglomeración de $\{x_n\}$ (Note que esta afirmación es válida para cualquier espacio topológico).

Recíprocamente, sea x un punto de aglomeración de $\{x_n\}$. Construiremos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$. Para ello, sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de x . Entonces $V_n = \bigcap_{i=1}^n B_i$ es también una base numerable en $\mathcal{V}(x)$ tal que $V_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{x_{n_k}\}$ definida de la siguiente manera: Supongamos definido n_{k-1} y sea $n_k = \min \{m \in \mathbb{N} : m > n_{k-1}, x_m \in V_k\}$. Por construcción $n_k > n_{k-1}$ y $x_{n_k} \rightarrow x$ si $k \rightarrow \infty$, ya que $x_{n_k} \in V_k$. ■

Mostraremos ahora que las sucesiones convergentes caracterizan las topologías N_1 .

5.1.5. **Proposición.** Sea X un espacio topológico N_1 y $A \subset X$.

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{existe } \{x_n\} \subset A \text{ tal que } x_n \rightarrow x.$$

Demostración: Sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de x tal que $V_{n+1} \subset V_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \bar{A}$ entonces $x_n \in V_n \cap A$ define una sucesión que converge a x .

La recíproca es trivial y es válida para cualquier espacio topológico. ■

Si el espacio no es N_1 , la proposición anterior no es verdadera. Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología de los complementos numerables y sea $A = (0, \infty)$. Entonces $0 \in \bar{A}$ pero ninguna sucesión en A converge a cero (Recordemos que en esta topología las únicas sucesiones convergentes son las constantes).

5.1.6. **Corolario.** Si X es un espacio N_1 entonces A es cerrado en X sii para toda $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$ se cumple $x \in A$.

Quedan así, en espacios N_1 , caracterizados los cerrados, y en consecuencia los abiertos, mediante la convergencia de sucesiones:

A es abierto sii ninguna sucesión en $X-A$ converge a puntos de A .

5.1.7. Proposición. Sea X un espacio topológico N_1 e Y un espacio topológico.

Una función $f: X \rightarrow Y$ es continua en $x \in X$ si y solamente si $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración: Sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de x tal que $V_{n+1} \subset V_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si f no fuese continua en x , existiría U entorno de $f(x)$ tal que $f^{-1}(U)$ no es entorno de x . Luego $V_n \not\subset f^{-1}(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pudiendo construir así una sucesión $x_n \in V_n$ tal que $f(x_n) \notin U$, $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_n \rightarrow x$ y $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$.

La recíproca es inmediata y válida para cualquier espacio topológico. ■

La topología de los complementos numerables en $\mathbb{R}$, provee un ejemplo de un espacio topológico que no es N_1 y donde la Proposición 5.1.7 deja de cumplirse.

Estudiamos ahora la convergencia de sucesiones en el producto de espacios topológicos.

5.1.8. Proposición. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X ,

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow p_i(x_n) \rightarrow p_i(x) \text{ para todo } i \in I,$$

donde $p_i: X \rightarrow X_i$ denota la proyección sobre X_i .

Demostración: Si $x_n \rightarrow x$ es claro que $p_i(x_n) \rightarrow p_i(x)$ ($i \in I$) ya que p_i es continua (Proposición 5.1.7.). Recíprocamente, sea $x \in V$ y V abierto de la base de la topología producto. O sea, $V = \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(V_j)$ donde J (finito) $\subset I$ y V_j es abierto en X_j ($j \in J$).

Para cada $j \in J$, como $p_j(x_n) \rightarrow p_j(x)$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $p_j(x_n) \in V_j \quad \forall n \geq n_j$. Si $n_0 = \max_{j \in J} \{n_j\}$ y $n \geq n_0$ entonces $p_j(x_n) \in V_j$ para todo $j \in J$ o sea, $x_n \in \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(V_j) = V$. ■

Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior veamos ahora como converge una sucesión de funciones en Y^X con la

topología definida en 4.2.1.

La topología producto en Y^X , o sea la topología de la convergencia puntual, recibe su nombre pues,

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f &\Leftrightarrow p_x(f_n) \rightarrow p_x(f) \text{ para todo } x \in X. \\ &\Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ para todo } x \in X. \end{aligned}$$

Como una aplicación de 5.1.7. describimos los homomorfismos continuos de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$.

5.1.9. Proposición. Todo homomorfismo continuo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de la forma $f(x) = a x$ con $a \in \mathbb{R}$. En general, todo homomorfismo continuo de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ es una transformación lineal.

Demostración: Para todo $x \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{Z}$ tenemos, $f(p x) = p f(x)$. Si $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ entonces para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$,

$$f(x) = f(q \frac{x}{q}) = q f(\frac{x}{q}) \quad \text{y} \quad f(\frac{x}{q}) = \frac{1}{q} f(x). \quad \text{Luego} \quad f(\frac{p}{q} x) = \frac{p}{q} f(x).$$

Sea ahora $r \in \mathbb{R}$, y $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ tal que $r_n \rightarrow r$. Como f es continua,

$$\begin{aligned} f(r x) &= f((\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) f(x) = r f(x). \end{aligned}$$

O sea, f es una transformación lineal. Luego si $f(1) = a$ tenemos $f(x) = f(1 x) = f(1) x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En forma análoga se prueba que todo homomorfismo continuo de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ es una transformación lineal.

No es cierto en general que todo homomorfismo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea continuo. Para construir un homomorfismo no continuo basta considerar $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial. Notemos que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ es infinito no numerable.

Sea B_0 una base de $\mathbb{R}$ (sobre $\mathbb{Q}$). Dado un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ cualesquiera, existe B base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $B \subset (a, b)$. En efecto, para $x \in B_0$, $\mathbb{Q} = \{qx: q \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ y en consecuencia existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $qx \in (a, b)$. Repetimos el argumento para todo elemento de B_0 y obtenemos una base B de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $B \subset (a, b)$.

Entonces para el intervalo $(0,1)$ es posible encontrar una base $B \subset (0,1)$ y además una sucesión $\{b_n\} \subset B$ tal que $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Definimos $f(b_n) = \frac{1}{n}$, $f(a) = 0$ para $a \in B$, $a \neq b_n$. Extendemos la definición linealmente y f resulta un homomorfismo. Como $f([0,1])$ es no acotado, f es un homomorfismo no continuo.

Observemos que el gráfico de $f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo denso de $\mathbb{R}^2$. Los puntos de la forma $(0, q)$, $q \in \mathbb{Q}$, son puntos de acumulación de dicho gráfico ya que

$$(0, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (q \frac{b_n}{n}, f(q \frac{b_n}{n}))$$

En el caso de un homomorfismo continuo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el gráfico de f es una recta y se puede probar (Bourbaki [2]) que si el gráfico de un homomorfismo no es un subgrupo denso entonces f es continuo.

2. Redes.

5.2.1. **Definición.** Una relación $\geq$ en un conjunto no vacío D se dice que dirige a D si cumple

- (i) $m \geq m$ para todo $m \in D$ ($\geq$ es reflexiva).
- (ii) $m \geq n$ y $n \geq p$ entonces $m \geq p$ ($\geq$ es transitiva).
- (iii) Si $m, n \in D$ entonces existe $p \in D$ tal que $p \geq m$ y $p \geq n$ ($\geq$ es filtrante).

Diremos que $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido y $\geq$ una relación que dirige a D .

5.2.2. Ejemplos.

- $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales y $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales están dirigidos por la relación usual $\geq$.

- En un espacio topológico X , para cada $x \in X$ el sistema de entornos de x , $\mathcal{V}(x)$, está dirigido por la relación de inclusión, " $\subseteq$ ".

- La familia de partes finitas de un conjunto X está dirigido por la relación " $\supset$ ".

5.2.3. Definición. Una red en un espacio topológico X es una función $S: D \rightarrow X$ donde $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido. Denotaremos una red por $\{S_n, n \in D, \geq\}$, donde $S_n = S(n)$. Para el caso $D = \mathbb{N}$ con la relación usual $\geq$, tenemos una sucesión.

Diremos que una red $S = \{S_n, n \in D, \geq\}$ en X converge a $x \in X$ si para cada $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $m \in D$ tal que $S_n \in U$ si $n \geq m$.

Observemos que la noción de convergencia depende de la función S , de la topología de X y de la relación $\geq$ en D . Cuando no haya lugar a confusión, diremos simplemente que la red S_n converge a x y denotaremos $S_n \rightarrow x$.

- Si X es un espacio indiscreto, toda red converge a todo punto de X .

- Si X es discreto, $S_n \rightarrow x$ sii $S_n = x$ para $n \geq n_0$.

Veamos ahora como es posible caracterizar la clausura de un conjunto, o sea la topología del espacio, en términos de la convergencia de redes.

5.2.4. Teorema. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

(i) $x \in \bar{A} \iff$ existe una red en A que converge a x .

(ii) A es cerrado en $X \iff$ ninguna red en A converge a puntos de $X-A$.

Demostración: (i) Si $x \in \bar{A}$ entonces para todo $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $x_U \in U \cap A$. La red $\{x_U, U \in \mathcal{V}(x)\}$ satisface $x_U \in A$ ($U \in \mathcal{V}(x)$) y converge a x . La recíproca es trivial.

(ii) es inmediato de (i) ya que A es cerrado sii $A = \bar{A}$. ■

La convergencia de redes también caracteriza las topologías T_2 .

5.2.5. Proposición. Un espacio topológico X es Hausdorff (T_2) si y solamente si toda red en X converge a lo sumo a un punto.

Demostración: Supongamos que $S = \{S_n, n \in D\}$ es una red en X tal que $S_n \rightarrow x$, $S_n \rightarrow y$ con $x \neq y$ en X . Por ser X un espacio T_2 y por

la definición de convergencia, sean U, V entornos disjuntos de x e y respectivamente y $m, m' \in D$ tales que si $n \geq m$, $S_n \in U$ y si $n \geq m'$, $S_n \in V$. Luego para $n \geq p$ ($p \geq m, p \geq m'$) tenemos $S_n \in U \cap V$, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que X no es T_2 . Luego existen $x \neq y$ en X tales que $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y)$. Sea $D = \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y)$ dirigido por la relación $\geq$ así definida: $(U, V) \geq (U', V') \Leftrightarrow U \subset U' \text{ y } V \subset V'$. Entonces la red $\{S_{(U,V)}, (U,V) \in D\}$, donde $S_{(U,V)} \in U \cap V$, converge a x e y . ■

Generalizamos ahora las proposiciones 5.1.7 y 5.1.8.

5.2.6. Proposición. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Entonces, f es continua en x sii para cada red S que converge a x se cumple que $f \circ S$ converge a $f(x)$.

Demostración: Supongamos que f es continua en x . Entonces para $V \in \mathcal{V}(f(x))$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ con $f(U) \subset V$; en consecuencia si S es una red tal que $S \rightarrow x$, $S_n \in U$ para todo $n \geq m$ en D . Luego $(f \circ S)(n) = f(S_n) \in V$ para $n \geq m$.

Supongamos ahora que f no es continua en x . Entonces existe $V \in \mathcal{V}(f(x))$ tal que $U \not\subset f^{-1}(V)$ cualesquiera sea $U \in \mathcal{V}(x)$. O sea, para cada $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $S_U \in U$ tal que $f(S_U) \notin V$. Luego $S = \{S_U, U \in \mathcal{V}(x)\}$ es una red en X tal que S converge a x , y $f \circ S$ no converge a $f(x)$. ■

5.2.7. Teorema. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, entonces una red S en $\prod_{i \in I} X_i$ converge a x sii $p_i \circ S$ converge a $p_i(x)$ en X_i para todo $i \in I$.

Demostración: Es inmediato por la continuidad de las proyecciones p_i que si $S \rightarrow x$ en $\prod_{i \in I} X_i$, $p_i \circ S(x) \rightarrow p_i(x)$ para todo $i \in I$.

Supongamos ahora que S es una red en $\prod_{i \in I} X_i$ tal que $p_i \circ S \rightarrow p_i(x)$, $i \in I$. Sea V entorno de x , miembro de la base de la topología producto, o sea $V = \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(V_i)$ donde J es un subconjunto finito de I . Para cada $j \in J$, como $p_j(S) \rightarrow p_j(x)$, existe $n_j \in D$

tal que $p_j(S_n) \in V_j$ para $n \geq n_j$. Si $n_0 \in D$ es tal que $n_0 \geq n_j$ $\forall j \in J$, (D es dirigido), resulta entonces que $p_j(S_n) \in V_j$ para todo $j \in J$ y $n \geq n_0$; en consecuencia, $S_n \in V$ para $n \geq n_0$ y $S \rightarrow x$. ■

3. Subredes y puntos de aglomeración.

Generalizamos ahora los conceptos de subsucesiones y puntos de aglomeración de una sucesión, para obtener una caracterización de los conjuntos compactos de un espacio topológico en términos de convergencia.

5.3.1. **Definición.** Una red $\{T_m, m \in E\}$ es una subred de la red $\{S_n, n \in D\}$ si existe una función $N: E \rightarrow D$ tal que,

(i) $T = S \circ N$

(ii) Para cada $n \in D$ existe $m \in E$ tal que si $p \geq m$ se cumple $N_p \geq n$.

Observe que una subsucesión es una subred de la sucesión $\{x_n\}$.

5.3.2. **Definición.** Un punto $x \in X$ es un punto de aglomeración de una red $S = \{S_n, n \in D\}$ si para todo $U \in \mathcal{V}(x)$ y para todo $m \in D$, existe $n \in D$ tal que $n \geq m$ y $S_n \in U$.

Las siguientes definiciones nos serán de utilidad para el enunciado del Lema 5.3.4.

5.3.3. Sea $S = \{S_n, n \in D\}$ una red en X y sea $A \subset X$. Diremos que, S está eventualmente en A si existe $m \in D$ tal que $S_n \in A$ para todo $n \geq m$. S está frecuentemente en A si para cada $m \in D$ existe $n \in D$ tal que $n \geq m$ y $S_n \in A$.

5.3.4. **Lema.** Sea S una red en X y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X tal que,

(i) S está frecuentemente en cada miembro de $\mathcal{A}$.

(ii) La intersección de dos miembros de $\mathcal{A}$ contiene un miembro de $\mathcal{A}$.

Entonces existe una subred de S que está eventualmente en cada miembro de $\mathcal{A}$.

Demostración: Consideremos la familia $\mathcal{A}$ dirigida por la relación " $\subset$ " (inclusión): Sea $E = \{(m, A) \in D \times \mathcal{A} : S_m \in A\}$ y notemos que de (i) se deduce que $E \neq \emptyset$. Definamos la siguiente relación en E : $(m, A) \geq (n, B) \iff m \geq n \text{ y } A \subset B$.

La condición (ii) y el hecho que D es un conjunto dirigido implican que E está dirigido por la relación $\geq$.

Definiendo $N: E \rightarrow D$ como $N(m, A) = m$, es fácil ver, usando (i), que $T = S \circ N$ es una subred de S . Veamos ahora que la red T está eventualmente en cada miembro de $\mathcal{A}$. Para $A \in \mathcal{A}$, sea $m \in D$ tal que $S_m \in A$, o sea $(m, A) \in E$; es claro que si $(n, C) \geq (m, A)$ entonces $T_{(n, C)} = S_n \in C \subset A$. ■

5.3.5. Teorema. Sea X espacio topológico. Entonces x es punto de aglomeración de una red S en X sii existe una subred de S que converge a x .

Demostración: Sea $x \in X$ punto de aglomeración de una red $S: D \rightarrow x$. Entonces $\mathcal{V}(x)$ satisface

- (i) S está frecuentemente en cada miembro de $\mathcal{V}(x)$.
 - (ii) La intersección de dos miembros de $\mathcal{V}(x)$ es un miembro de $\mathcal{V}(x)$.
- Luego por el lema anterior, existe una subred en S que converge a x .

Recíprocamente, sea $T = S \circ N$ una subred de S que converge a x ; probemos que x es punto de aglomeración de S . Sea $U \in \mathcal{V}(x)$ y sea $m \in D$. Tenemos,

- Existe $q \in E$ tal que $S_{N_p q} \in U$ si $p \geq q$ ($T \rightarrow x$).
- Existe $q' \in E$ tal que $N_p q' \geq m$ si $p \geq q'$ (T es subred de S).

Si elegimos $r \in E$ tal que $r \geq q$, $r \geq q'$ ($\geq$ dirige a D), tenemos que para $n = N_r$ se cumple $n \geq m$ y $S_n \in U$. ■

4. Compactos y redes.

Recordamos que un espacio topológico X es compacto si todo cubrimiento abierto de X admite subcubrimiento finito. Fue demostrado en 3.4.3. que un espacio es compacto si y solamente si toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita

tiene intersección no vacía.

El siguiente teorema da la caracterización de compactos mediante la convergencia de redes.

5.4.1. Teorema. Un espacio topológico X es compacto si y solamente si toda red en X tiene una subred convergente.

Demostración: Sea $S = \{S_n : n \in D\}$ una red en X . Para cada $n \in D$ consideremos $A_n = \{S_m : m \geq n\}$. Entonces $\{\bar{A}_n : n \in D\}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita ya que $\{A_n : n \in D\}$ tiene dicha propiedad. Si $x \in \bigcap_{n \in D} \bar{A}_n$ entonces x es punto de aglomeración de la red S y por el teorema 5.3.5. existe una subred de S que converge a x .

Para probar la recíproca, sean $\mathcal{F}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita y $\mathcal{F}_0$ la familia de intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{F}$. Es claro que $\mathcal{F}_0$ tiene la propiedad de intersección finita y en consecuencia para cada $F \in \mathcal{F}_0$ existe $S_F \in F$. Luego la red $S = \{S_F, F \in \mathcal{F}_0, \subseteq\}$ tiene una subred convergente y por el Teorema 5.3.5., un punto de aglomeración x . Veamos que $x \in F$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Sean $F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Por definición de punto de aglomeración, existe $F' \subseteq F$ tal que $S_{F'} \in U$. Como $S_{F'} \in F'$ y $F' \subset F$ se tiene que $S_{F'} \in F \cap U$, o sea $x \in \bar{F} = F$. ■

5.4.2. Teorema. Si X es un espacio topológico N_2 las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) X es compacto.

(ii) Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

Si además X es un espacio T_1 cualesquiera de las anteriores es equivalente a la siguiente,

(iii) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es válida para espacios N_1 .

Resulta de 5.4.1. y 5.3.5. que toda sucesión en X tiene un

punto de aglomeración, y aplicando la Proposición 5.1.4. se deduce la implicación, si X es un espacio N_1 .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X . Por 1.4.5, como X es un espacio N_2 , una subfamilia numerable, digamos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cubre a X , o sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Supongamos que ninguna subfamilia finita de $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ cubre a X . Como $U_1 \subsetneq X$, existen $x_1 \notin U_1$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $x_1 \in U_{n_1}$, y en consecuencia $x_1 \in A_1 = \bigcup_{j=1}^{n_1} U_j$. De igual modo, como $A_1 \subsetneq X$ existen $x_2 \notin A_1$ y $n_2 > n_1$ tales que $x_2 \in A_2 = \bigcup_{j=1}^{n_2} U_j$. Continuando con este procedimiento construimos una sucesión infinita $\{x_k\}$ (de infinitos elementos distintos) tal que,

$$x_k \in A_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} U_j, \quad n_k > n_{k-1} \quad \text{y} \quad x_k \notin A_{k-1}.$$

Dicha sucesión no tiene punto de aglomeración y en consecuencia no contiene subsucesiones convergentes.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Observemos también que es válida para espacios N_1 . Es claro que si A es un subconjunto de X con infinitos elementos, A contiene una sucesión de infinitos elementos todos distintos y en consecuencia si una subsucesión de dicha sucesión tiene un punto límite, dicho punto límite es puntos de acumulación de A .

Para la recíproca, queda como ejercicio para el lector probar que si X es un espacio N_1 y T_1 se cumple:

Si x es punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}$ entonces x es punto de aglomeración de $\{x_n\}$. ■

Es conveniente destacar que existen ejemplos de espacios no compactos con la propiedad que toda sucesión admite subsucesiones convergentes. Para tales ejemplos ver [K], Topología general, páginas 74 y 187.

Interesa ahora dar una caracterización de los subconjuntos compactos en espacios métricos.

5.4.3. Teorema. En un espacio métrico las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) X es compacto
- (ii) Toda sucesión en X admite subsucesión convergente.
- (iii) Todo subconjunto infinito en X tiene un punto de acumulación.

Demostración: Por las observaciones hechas en 5.4.2., (ii) y (iii) son equivalentes ya que un espacio métrico es T_1 . Además como X es N_1 , (i) $\Rightarrow$ (ii) y sólo resta probar que (ii) $\Rightarrow$ (i). Para ello mostraremos que si (X, d) es un espacio métrico satisfaciendo (ii) entonces X es separable y en consecuencia es N_2 . Luego aplicando Teorema 5.4.2. tendremos que X es compacto.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$M_n = \{M \subset X: d(x, y) \geq \frac{1}{n} \text{ para todo } x \neq y \text{ en } M\}.$$

Podemos suponer que $M_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ordenemos M_n por inclusión. Como todo subconjunto totalmente ordenado de M_n tiene cota superior, existe en M_n un elemento maximal que lo denotamos por M_n . Observemos que M_n es finito ya que X satisface la condición (ii). Veamos que el conjunto $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ es denso. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \notin M$ existe $y \in M_n$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{n}$ ya que M_n es maximal. Luego $y \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M \circ B(x, \frac{1}{n}) \cap M \neq \emptyset$. ■

Notemos que hemos probado el siguiente.

5.4.3. Teorema. Todo espacio métrico compacto es separable (en consecuencia N_2).

Terminamos este capítulo mostrando que los cubrimientos abiertos en un espacio métrico compacto tienen la siguiente importante propiedad.

5.4.5. Teorema. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X . Entonces existe un número positivo $\lambda = \lambda(\mathcal{U})$, llamado el número de Lebesgue del cubrimiento, tal que cada bola $B(x, \lambda)$ está contenida en algún miembro de $\mathcal{U}$.

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Para cada $x \in X$, elijamos $r(x) > 0$ tal que $B(x, r(x)) \subset U_i$ para algún $i \in I$, y del cubrimiento abierto

$\{B(x, \frac{1}{2} r(x))\}$ extraemos un subcubrimiento finito $\{B(x_i, \frac{1}{2} r(x_i))\}_{i=1 \dots n}$.

Si $\lambda = \min \{\frac{1}{2} r(x_i): 1 \leq i \leq n\}$, entonces $\lambda > 0$ es un número de Lebesgue. Para cualquier $B(x, \lambda)$, $x \in X$, tenemos $x \in B(x_i, \frac{1}{2} r(x_i))$ para algún i , y en consecuencia si $y \in B(x, \lambda)$,

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \lambda + \frac{1}{2} r(x_i) < r(x_i).$$

Esto es, $B(x, \lambda) \subset B(x_i, r(x_i)) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. ■

5.4.6. Corolario. Si A es un subconjunto compacto de un espacio métrico y U es entorno de A entonces existe un número positivo $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in A$, $B(x, \lambda) \subset U$.

5.4.6. Ejemplo. Con el siguiente ejemplo mostraremos que en un espacio métrico los subconjuntos cerrados y acotados pueden no ser compactos.

Sea $X = \{x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}: x_i \in \mathbb{R}, \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ con la distancia

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| \text{ si } x = \{x_i\} \text{ e } y = \{y_i\}$$

La sucesión $\{e_n\}$ con $(e_n)_i = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ n & i = n \end{cases}$ está contenido en la bola cerrada de centro 0 (todos los términos cero) y radio uno pero no tiene subsucesiones convergentes ya que $d(e_i, e_j) = 2$ para $i \neq j$. Más aún (X, d) es un espacio métrico completo en el cual no se cumple que las bolas cerradas y acotadas son compactas. Por definición, en un espacio métrico completo, toda sucesión de Cauchy converge (Ver Cap.VII, 3.)

EJERCICIOS

1. a) Si $\{x_n\}$ es una sucesión con rango finito entonces posee alguna subsucesión constante
b) Si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ es una biyección, todo número real es punto de aglomeración de $\{f(n)\}$.
2. Un punto $x \in X$ es punto de aglomeración de $\{x_n\}$ sii todo entorno de x tiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$.
3. Sea X un espacio topológico N_1 y T_1 ,
a) Si x es punto de acumulación de $\{x_n\}$ entonces x es punto de aglomeración de $\{x_n\}$.
b) Mostrar que la recíproca no es cierta en general.
4. Probar que si A es un subconjunto de un espacio topológico X entonces $x \in X$ es un punto de acumulación de A sii existe una red en $A - \{x\}$ que converge a x .
5. En un espacio métrico dos cualesquiera de las siguientes afirmaciones implica la tercera.
(a) X es compacto.
(b) X es discreto.
(c) X es finito.
6. Un espacio métrico compacto es completo.
7. Sea $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente en X . Probar que f es continua.
8. Sea X como en el ejercicio 8 del Cap. IV. Probar que para cada entero no negativo m , la sucesión $\{(m, \frac{1}{n+1}): n \in \mathbb{N}\}$ converge en el espacio cociente a $A = \mathbb{R} \times \{0\}$. Si $\{N_n: n \in \mathbb{N}\}$ es una subsucesión de $\mathbb{N}$ entonces la sucesión $\{(n, \frac{1}{N_n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ no converge a A .

9. Sea $I \times I$ ($I = [0,1]$) con la topología del orden definido en el Ejercicio 13 Cap. III, Probar que $I \times I$ no es metrizable.

10. Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subset X$ es un retracto de X si existe $r: X \rightarrow A$ continua tal que $r|_A = \text{id}_A$.

Probar que si A es retracto de X entonces A es cerrado en X .

11. Un espacio topológico se dice numerablemente compacto si todo cubrimiento abierto numerable tiene subcubrimiento finito.

Probar,

a) Un espacio T_1 es numerablemente compacto sii todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación.

b) Un espacio N_1 es numerablemente compacto sii toda sucesión tiene subsucesión convergente.

12. Mostrar que el conjunto de puntos de algomeración de una red en X es cerrado.

13. Sea X el conjunto de pares de enteros no negativos con la siguiente topología:

Si $(m,n) \neq (0,0)$ entonces $\{(m,n)\}$ es abierto.

Un subconjunto U es entorno de $(0,0)$ sii $\{n: (m,n) \notin U\}$ es finito salvo un número finito de enteros m . Probar que

a) X es un espacio Hausdorff.

b) Todo cubrimiento abierto de X admite subcubrimiento numerable.

c) Ninguna sucesión en $X - \{(0,0)\}$ converge a $(0,0)$.

d) Hay una sucesión S en $X - \{(0,0)\}$ que tiene a $(0,0)$ como punto de aglomeración, y S restringida a cualquier conjunto cofinal de enteros no converge.

14. Sea $I = [0,1]$, $X = I^I$ el espacio producto y sea A el subconjunto de X formado por las funciones características de puntos.

a) X es separable.

b) El conjunto A con la topología relativa de X es discreto y no separable.

c) Existe un único punto de acumulación x de A en X , y si U es un

entorno de x entonces $A \cup U$ es finito.

d) $\mathcal{C}(I, I)$ (ver 4.2.1) es un subespacio de I^I que no es cerrado y en consecuencia no es un subconjunto compacto de I^I .

Es $\mathcal{C}(I, I)$ un subconjunto compacto de I^I con la topología compacto abierta? (Ver ejercicio 5 de capítulo IV).

e) Probar que en I^I la topología de la convergencia puntual es estrictamente menos fina que la topología compacto abierta.

Considere la sucesión $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{n} \\ 1 & x = \frac{1}{n} \end{cases}$

que converge a la función nula.

15. Filtros.

Hay una teoría de la convergencia construida sobre el concepto de filtro. Sea X un espacio topológico. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es una familia de subconjuntos no vacíos de X tales que,

- i) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,
- ii) $A \in \mathcal{F}, B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ converge a x ($\mathcal{F} \rightarrow x$) sii todo $V \in \mathcal{V}(x)$ satisface $V \in \mathcal{F}$.

Probar las siguientes afirmaciones.

- a) Un subconjunto U es abierto sii U pertenece a todo filtro que converge a puntos de U .
- b) Un punto x es de acumulación de un subconjunto A sii $A - \{x\}$ pertenece a algún filtro que converge a x .
- c) Sea ϕ_x la familia de todos los filtros que convergen a x . Entonces $\bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \phi_x\} = \{x\}$.
- d) Si $\mathcal{F}$ es un filtro tal que $\mathcal{F} \rightarrow x$ y $\mathcal{U}$ es un filtro tal que $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{U} \rightarrow x$.
- e) Un filtro $\mathcal{F}$ que no está contenido propiamente en ningún otro filtro es un ultrafiltro.

Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X , se cumple.

$$A, B \subset X, A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F} \text{ ó } B \in \mathcal{F} \text{ (o excluyente)}$$

En particular, si $A \subset X$, $A \in \mathcal{F}$ ó $A^c \in \mathcal{F}$.

- f) Todo filtro está contenido en un ultra-filtro (Lema de Zorn).
- g) Una función $f: X \rightarrow Y$ es continua en $x \in X$ sii para todo filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \rightarrow x$ se cumple $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$.
- h) Un filtro $\mathcal{F}$ en $\prod_{i \in I} X_i$ converge a x sii $p_i(\mathcal{F})$ converge a $p_i(x)$ para todo $i \in I$.
- i) Un espacio X es compacto sii todo ultrafiltro en X converge.
- j) Filtros y redes conducen a teorías esencialmente equivalentes.
- Si $S = \{S_n: n \in D\}$ es una red en X , entonces la familia $\mathcal{F} = \{A \subset X: S \text{ está eventualmente en } A\}$ es un filtro en X .
 - Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X y sea $D = \{(x, F): x \in F \text{ y } F \in \mathcal{F}\}$
- Diríjase D así: $(y, G) \geq (x, F) \iff G \subset F$ y sea $S: D \rightarrow X$ definida por $S(x, F) = x$.
- Entonces $\mathcal{F} = \{A \subset X: S \text{ está eventualmente en } A\}$
- k) Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios compactos mostrar (usando filtros) que $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto.

CAPITULO VI

PROPIEDADES DE SEPARACION

En este capítulo introduciremos nuevas nociones en espacios topológicos y discutiremos las relaciones entre ellas. Estas nociones requieren que la topología "separe" ciertos tipos de subconjuntos del espacio. Las topologías Hausdorff que ya estudiamos tienen la propiedad más simple de separación que es, por definición, separar puntos distintos por abiertos disjuntos. Una condición de separación más fuerte se obtiene reemplazando uno de los puntos o también los dos puntos por subconjuntos cerrados y que son los espacios regulares y normales respectivamente.

1. Espacios regulares, completamente regulares.

6.1.1. **Definición.** Un espacio topológico X se dice regular si para cada $x \in X$ los entornos cerrados de x forman base de entornos.

La siguiente da una definición equivalente.

6.1.2. **Proposición.** X es regular si y solo si para cada A cerrado en X y para cada $x \notin A$ existen U, V abiertos disjuntos tales que $x \in U$, y $A \subset V$.

Demostración: Sea A cerrado en X y $x \notin A$. Como CA es entorno de x , por definición de regular, existen U abierto y V cerrado tales que $x \in U \subset V \subset CA$. Luego U y CV son abiertos disjuntos tales que $x \in U$, $A \subset CV$. La recíproca queda como ejercicio. ■

- Todo espacio métrico es regular. En efecto, $\{B(x,r)^- : r > 0\}$ es base de entornos cerrados de x .

- Todo subespacio de un regular es regular.

- Producto de espacios regulares es regular.

- Todo espacio compacto y T_2 es regular (Ver 3.4.7.).

En los espacios regulares, los puntos pueden reemplazarse por subconjuntos compactos como lo muestra la siguiente.

6.1.3. Proposición. Sea X un espacio topológico regular. Si K es un subconjunto compacto de X y U es entorno abierto de K entonces existe V entorno cerrado de K tal que $V \subset U$.

Demostración: Para cada $x \in K$, por la regularidad de X , existen W_x abierto y V_x cerrado tal que $x \in W_x \subset V_x \subset U$. De la compacidad de K ($K \subset \bigcup_{x \in K} W_x$), se deduce que $K \subset \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} = W \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = V$. Es claro que W es abierto, V es cerrado, y en consecuencia V es un entorno cerrado de K , contenido en U . ■

6.1.4. Definición. Un espacio topológico se dice completamente regular si para cada $x \in X$ y para cada U entorno abierto de x existe una función continua $f: X \rightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X-U) = 1$.

Es claro que todo espacio completamente regular es regular y todo subespacio de un completamente regular también es completamente regular.

2. Espacios normales.

6.2.1. Definición. Un espacio topológico se dice normal si para cada par de cerrados disjuntos A y B existen U y V abiertos disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

- Todo espacio discreto es normal. También un espacio indiscreto es normal.

- Todo espacio métrico (X,d) es normal.

En efecto, si A y B son cerrados disjuntos en X ,

$$U = \{x \in X: d(x,B) > d(x,A)\} \quad \text{y} \quad V = \{x \in X: d(x,A) > d(x,B)\}$$

son abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.

- Todo subespacio cerrado de un normal es normal.

- El producto de espacios normales no necesariamente es normal (ver Ejercicio 10).

- Todo espacio normal y T_1 es regular.
- Todo espacio compacto y T_2 es normal (Ver 3.4.10)
- Todo espacio compacto y regular es normal (Ver 6.1.3.)

6.2.2. Proposición. Si X es un espacio regular y N_2 (ó Lindelöf) entonces X es normal.

Demostración: Sean A, B cerrados en X tales que $A \cap B = \emptyset$. Es claro, por definición de regular, que para cada $x \in A$ existen U_x abierto y V_x cerrado tales que $x \in U_x \subset V_x \subset CB$. Luego $x \in U_x$ y $\bar{U}_x \cap B = \emptyset$. De esta forma la familia $\mathcal{U} = \{U_x \text{ abierto en } X: \bar{U}_x \cap B = \emptyset\}$ cubre a A y de la misma forma la familia $\mathcal{V} = \{V_x \text{ abierto en } X: \bar{V}_x \cap A = \emptyset\}$ cubre a B ; en consecuencia $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \{C(A \cup B)\}$ es un cubrimiento abierto de X que admite un subcubrimiento numerable. Obtenemos así $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cubrimientos abiertos de A y B respectivamente tales que $\bar{U}_n \cap B = \emptyset$, $\bar{V}_n \cap A = \emptyset$. Denotemos con

$$U'_n = U_n - \bigcup_{k \leq n} \bar{V}_k \quad \text{y} \quad V'_n = V_n - \bigcup_{k \leq n} \bar{U}_k.$$

Por construcción, $U'_n \cap V'_m = \emptyset$ si $m \leq n$ ($V'_m \subset V_m$) y de la misma forma (intercambiando los roles de U_n y V_n), $U'_m \cap V'_n = \emptyset$ si $m \leq n$. Observemos así que $U'_n \cap V'_m = \emptyset$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Definiendo $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n$ y $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n$ resulta que $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U$, $B \subset V$.

Probemos que $B \subset V$; para ello sea $x \in B$ y sea $n \in \mathbb{N}$ con $x \in V_n$. Como $\bar{U}_k \cap B = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ resulta que $B \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C\bar{U}_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C\bar{U}_k = C(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{U}_k)$ y en consecuencia, $x \in V_n \cap C(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{U}_k) = V_n - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{U}_k = V'_n$. ■

6.2.3. Teorema de Urysohn. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- X es normal.
- Para todo par A, B de cerrados disjuntos existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

Demostración: (ii) $\Rightarrow$ (i) es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sean A, B cerrados en X tales que $A \cap B = \emptyset$.

Sea $D = \{\frac{m}{2^n} : m, n \text{ son enteros no negativos}\}$. Si denotamos con $I = [0, 1]$, $D \cap I$ es denso en I .

Vamos a construir una familia de subconjuntos de X , $\mathcal{F} = \{U_t\}_{t \in D}$ tal que para $s < t$ se cumpla $\bar{U}_s \subset U_t$.

Definimos para $t \in D$, $t > 1$, $U_t = X$ y $U_1 = CB$. Es claro que se cumple para $t > 1$, $\bar{U}_1 \subset U_t = X$.

Construyamos U_0 : Sean U, V abiertos en X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ (X es normal) y $U \cap V = \emptyset$. Si $U_0 = U$, se cumple $\bar{U}_0 \subset \bar{CV} = CV \subset CB = U_1$.

Ahora, para todo $t \in D$, $0 < t < 1$, t puede expresarse unívocamente como una fracción irreducible de la forma $t = \frac{2m+1}{2^n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$.

Construyamos por inducción sobre n los conjuntos U_t .

Supongamos que si t es una fracción diádica ($t \in D \cap I$) con denominador menor o igual que 2^{n-1} han sido construidos los U_t con la propiedad: $t < s \Rightarrow \bar{U}_t \subset U_s$. Sea $t = \frac{2m+1}{2^n}$. Se tiene,

$$\alpha = \frac{m}{2^{n-1}} = \frac{2m}{2^n} < t < \frac{2m+2}{2^n} = \frac{m+1}{2^{n-1}} = \beta.$$

Luego U_α y U_β han sido construidos y $\bar{U}_\alpha \subset U_\beta$. Como $\bar{U}_\alpha$ y CU_β son cerrados disjuntos existen U' y W abiertos tales que $\bar{U}_\alpha \subset U'$, $CU_\beta \subset W$ y $U' \cap W = \emptyset$ pues X es normal. Definimos $U_t = U'$. Se cumple $\bar{U}_\alpha \subset U_t$ y $\bar{U}_t \subset U_\beta$ ($\bar{U}_t = \bar{U}' \subset \bar{CW} = CW \subset U_\beta$).

Queda como ejercicio verificar que los U_t así construidos satisfacen la propiedad $s < t \Rightarrow \bar{U}_s \subset U_t$, considerando los distintos casos correspondientes a los posibles denominadores de s y t .

La familia $\mathcal{F}$ es un cubrimiento abierto de X . Definimos $f: X \rightarrow I$ así,

$$f(x) = \inf \{t \in D : x \in U_t\}.$$

Resultan entonces $f(A) = 0$ ($A \subset U_0$) y $f(B) = 1$ (si $x \in B$, $x \notin U_1 = CB$ y en consecuencia $x \in U_t$ para todo $t > 1$).

Probemos la continuidad de f . Para ello basta mostrar que para $L_a = \{t \in I : t < a\}$ y $R_a = \{t \in I : t > a\}$ con $a \in I$, se cumple que $f^{-1}(L_a)$ y $f^{-1}(R_a)$ son abiertos en X .

Esto lo haremos mediante los siguientes pasos.

- (1) $f^{-1}(L_a) = \bigcup \{U_t : t \in D, t < a\}.$
- (2) $f^{-1}(I - R_a) = \bigcap \{U_t : t \in D, t > a\}.$
- (3) $f^{-1}(I - R_a) = \bigcap \{\bar{U}_t : t \in D, t > a\}.$

Para probar (1), observemos que si $x \in f^{-1}(L_a)$, o sea $f(x) < a$, por definición de ínfimo existe $t \in D$ con $x \in U_t$, $t > a$. Y si $x \in U_t$ con $t < a$, $f(x) \leq t < a$ o sea $x \in f^{-1}(L_a)$.

La prueba de (2) es inmediata, también por definición de ínfimo, observando que $I - R_a = \{t \in I : t \leq a\}$.

Probemos (3): Sea $r \in D \cap I$, $r > a$ arbitrario. Como $D \cap I$ es denso en r , sea $s \in D \cap I$ tal que $a < s < r$.

Por construcción de la familia $\mathcal{F}$, $\bar{U}_s \subset U_r$ y en consecuencia $\bigcap_{t \in D, t > a} \bar{U}_t \subset \bar{U}_s \subset U_r$ para todo $r > a$ ($r \in D \cap I$).

Luego $\bigcap_{t \in D, t > a} \bar{U}_t \subset \bigcap_{r \in D, r > a} U_r = f^{-1}(I - R_a)$ por (2). ■

6.2.4. Corolario. Todo espacio normal y T_1 es completamente regular.

El teorema de Urysohn puede ser considerado como un caso especial del siguiente teorema general.

Seguimos denotando con I el intervalo $[0,1]$.

6.2.5. Teorema de Extensión de Tietze. Sea X un espacio topológico. Las dos siguientes propiedades son equivalentes.

- (i) X es normal.
- (ii) Para todo cerrado $Y \subset X$, cada función continua $f: Y \rightarrow I$ tiene una extensión continua $F: X \rightarrow I$ (Esto es F satisface $F|_Y = f$).

Observación. Casos particulares de este importante problema de extensión de funciones continuas ya han sido resueltos con anterioridad. Como ejemplos, tenemos los siguientes resultados.

- Sea X un espacio completamente regular. A cerrado en

X y $x \notin A$. Si $Y = A \cup \{x\}$ entonces $f: Y \rightarrow I$ definida por $f(x) = 0$, $f|_A = 1$ es continua y admite una extensión continua $F: X \rightarrow I$.

- Sea X un espacio normal y A, B subconjuntos cerrados disjuntos de X . Si $Y = A \cup B$ y $f: Y \rightarrow I$ es definida como $f|_A = 0$, $f|_B = 1$ entonces f tiene una extensión continua a X (Teorema de Urysohn).

- Es claro que si Y es un subespacio no compacto (no conexo) de un espacio topológico compacto (conexo) X la identidad $I: Y \rightarrow Y$ no admite una extensión continua $\bar{I}: X \rightarrow Y$ (tal extensión sería suryectiva).

Prueba del teorema.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es inmediato ya que si A, B son cerrados disjuntos, $Y = A \cup B$ es cerrado y la función continua $f: Y \rightarrow I$ definida por $f(A) = 0$, $f(B) = 1$ se extiende a $F: X \rightarrow I$. Tomando U, V entornos abiertos disjuntos de 0 y 1 respectivamente, $A \subset f^{-1}(U)$, $B \subset F^{-1}(V)$ y $F^{-1}(U) \cap F^{-1}(V) = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Para cada A, B de subconjuntos cerrados de X denotamos con $f_{A,B}: X \rightarrow I$ una función continua (dada por el Teorema de Urysohn, por ejemplo) tal que $f_{A,B}(A) = 0$ y $f_{A,B}(B) = 1$. Definimos por inducción, funciones $f_n: Y \rightarrow I$, $g_n: X \rightarrow I$, $n = 0, 1, \dots$, como sigue:

Sea $f_0 = f$ y supongamos que f_n continua ha sido definida. Sean

$$A_n = \{x \in Y: f_n(x) \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n\} \text{ y } B_n = \{x \in Y: f_n(x) \geq \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^n\}.$$

Entonces A_n y B_n son subconjuntos cerrados disjuntos de X (son cerrados en Y pues $A_n = f_n^{-1}([0, \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n])$ y $B_n = f_n^{-1}([\frac{2}{3} (\frac{2}{3})^n, 1])$) y en consecuencia, están definidas $f_{A_n, B_n}: X \rightarrow I$ continuas.

Si $g_n = \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n f_{A_n, B_n}: X \rightarrow I$ definimos $f_{n+1}: Y \rightarrow I$ como $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x)$.

Veamos que $f_{n+1}(x) \geq 0$ o equivalentemente, $g_n(x) \leq f_n(x)$.

Para ello basta observar que si $x \in A_n$, $g_n(x) = 0$ y en consecuencia $0 = g_n(x) \leq f_n(x)$. Si $x \notin A_n$, $f_n(x) > \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n$ y como $g_n(x) \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n$,

también resulta $g_n(x) \leq f_n(x)$.

Probemos ahora que $f_n(x) \leq (\frac{2}{3})^n$ para todo n (*).

Supuesto válido para n , observemos que si $x \in B_n$, $g_n(x) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ y $f_{n+1}(x) = (\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$.

Para $x \notin B_n$, $f_n(x) < \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$ y en consecuencia $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) < (\frac{2}{3})^{n+1}$.

Observemos además que para cada $x \in X$, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$. Luego $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \leq \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ que es una serie numérica convergente.

Esto implica que $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ es una serie uniformemente convergente en X y define una función $F: X \rightarrow I$ continua. Probaremos que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in Y$. Para ello, como $g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$, se tiene

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n g_k(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - f_{n+1}(x)] = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = f(x) \quad \text{ya que } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ (por (*))}. \quad \blacksquare$$

Notemos que el teorema deja de cumplirse si X no es normal. Basta tomar X infinito con la topología de los complementos finitos. Como $Y \subseteq X$ cerrado es finito, cualquier $f: Y \rightarrow I$ no constante es continua y no admite extensión continua $F: X \rightarrow I$ (F sería constante).

3. Espacios localmente compactos.

6.3.1. **Definición.** Un espacio topológico se dice localmente compacto si para cada $x \in X$ existe un entorno compacto de x .

- Todo espacio discreto es localmente compacto.
- Todo espacio compacto es localmente compacto.
- $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto ($B(x, r)^-$, $r > 0$ es un entorno compacto de x).

- $\mathbb{Q}$ con la topología usual, no es localmente compacto.
- Un espacio métrico puede no ser localmente compacto.

6.3.2. **Proposición.** Si Y es un subespacio cerrado de X , localmente compacto, entonces Y es localmente compacto.

Demostración: Sea $Y \subset X$, $x \in Y$. Por la compacidad local de X , existe V entorno compacto de x . Como $V \cap Y$ es cerrado en V , $V \cap Y$ es un subconjunto compacto de X , y en consecuencia es un entorno compacto de x en Y . ■

6.3.3. **Proposición.** Si X es un espacio localmente compacto Hausdorff (o regular), entonces la familia de entornos cerrados y compactos de cada punto de X forma base de entornos.

Demostración: Sea $x \in X$ y U entorno abierto de x . Consideremos primero el caso X localmente compacto y regular. Por la compacidad local de X existe V entorno compacto de x . Como $U \cap V$ es entorno de x , la regularidad de X implica la existencia de W entorno cerrado de x tal que $W \subset U \cap V$. W resulta compacto ya que es cerrado en V . ($W \subset V$).

Supongamos ahora X localmente compacto y Hausdorff. Si V es un entorno compacto de x , por ser V un subespacio regular (V es compacto Hausdorff), existe W un entorno cerrado de x en V tal que $W \subset V \cap U$. W resulta así un entorno compacto de x en X pues V es entorno de x en X (W es entorno de x en V) y W es cerrado en V , que es compacto. ■

6.3.4. **Corolario.** Si X es localmente compacto Hausdorff entonces X es regular.

Como una aplicación del Teorema de Urysohn tenemos,

6.3.5. **Proposición.** Sea X un espacio localmente compacto y regular. Si A es un subconjunto cerrado y compacto de X y U es un entorno de A entonces existe un entorno cerrado y compacto V de A tal que

$V \subset U$. Más aún, existe $f: X \rightarrow [0,1]$ continua tal que $f(A) = 0$, $f(X-V) = 1$.

Demostración: Sea $A \subset U$, U entorno de A . Siguiendo la prueba de la Proposición 6.1.3. con V_x cerrado y compacto resulta $A \subset W \subset V \subset U$, W abierto y en consecuencia V es un entorno cerrado y compacto de A . Como A y $V-W$ son dos subconjuntos cerrados disjuntos en V , y V es un subespacio normal (V es regular y compacto) el Teorema de Urysohn asegura la existencia de $g: V \rightarrow [0,1]$ continua tal que $g(A) = 0$, $g(V-W) = 1$.

Definiendo $f: X \rightarrow [0,1]$ de la siguiente manera,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in V \\ 1 & \text{si } x \in X-W \end{cases}$$

f está bien definida (Para $x \in V - W = V \cap CW$, $g(x) = 1$) y resulta continua pues $\{V, X-W\}$ es un cubrimiento cerrado de X .

6.3.6. Corolario Si X es localmente compacto y regular (o Hausdorff) entonces X es completamente regular.

El siguiente teorema, importante por sus aplicaciones, también es válido para espacios métricos completos, según veremos en 7.3.3.

6.3.7. Teorema de Baire. Si X es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff (o regular) entonces la intersección de una familia numerable de abiertos densos en X es denso en X .

Demostración: Sea $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ con G_n abierto y denso en X ; probaremos que $\bigcap_n G_n$ es denso. Para ello sea U abierto en X y veremos que $U \cap \bigcap_n G_n$ es no vacío. Bajo nuestras hipótesis, podemos construir V_0 compacto tal que $\bar{V}_0 \subset U \cap G_0$. En efecto, $U \cap G_0$ es abierto no vacío y para $x \in U \cap G_0$, aplicando la Proposición 6.3.3., se tiene la existencia de V_0 abierto, V subconjunto cerrado y compacto de X tales que $x \in V_0 \subset V \subset U \cap G_0$; en consecuencia $\bar{V}_0$ es compacto y $\bar{V}_0 \subset U \cap G_0$ ($\bar{V}_0 \subset V$ por ser V cerrado).

De igual forma construimos, por recurrencia, una familia de

abiertos V_n , $n \in \mathbb{N}$, tales que

$\bar{V}_n$ es compacto y $\bar{V}_n \subset V_{n-1} \cap G_n$ ($V_{n-1} \cap G_n \neq \emptyset$).

Resulta así que $\{\bar{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $\bar{V}_0$ con la propiedad de intersección finita ($\bar{V}_n \subset \bar{V}_{n-1}$ para todo n). La compacidad de $\bar{V}_0$ implica que existe $x \in \bar{V}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\bar{V}_n \subset \bar{V}_0 \cap G_n \subset U \cap G_n$ se tiene que $x \in U \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$. ■

6.3.8. Corolario. Si X es localmente compacto Hausdorff (o regular) entonces X no puede expresarse como una reunión numerable de subconjuntos cerrados todos con interior no vacío.

Demostración: Mostraremos que si $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ con F_n cerrados, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{F}_n \neq \emptyset$.

En efecto si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\hat{F}_n = \emptyset$, resultará que $\{CF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de abiertos densos en X y en consecuencia $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} CF_n \neq \emptyset$ por el teorema de Baire. Esto contradice el hecho que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, pues de aquí se deduce $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} CF_n = \emptyset$. ■

Las hipótesis de abiertos y numerable en el Teorema de Baire son esenciales pues $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} (\mathbb{R} - \{x\}) = \emptyset$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \emptyset$.

6.3.9. Aplicaciones.

- Un espacio con la propiedad de que toda intersección numerable de abiertos densos es densa se llama espacio de Baire. El subespacio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es de Baire.

Un subconjunto $Y \subset X$ se dice magro si $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$. (o equivalentemente $X - \bar{Y}$ es denso).

Una reunión numerable de subconjuntos magros se llama conjunto de 1ra. categoría.

Por ejemplo, el conjunto de irracionales no es de 1ra. categoría ni tampoco un F_σ . Un conjunto se dice que es un F_σ si es reunión numerable de cerrados. Un G_δ es una intersección numerable

de conjuntos abiertos.

- El conjunto de puntos de discontinuidad de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un F_σ .

En efecto, para $\delta > 0$ si

$$\rho(t, \delta) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in (t - \delta, t + \delta) \}$$

entonces $\rho(t) = \inf_{\delta > 0} \rho(t, \delta)$ es semicontinua superiormente y f es continua en t sii $\rho(t) = 0$.

Luego $\{\text{discontinuidades de } f\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^{-1}[\frac{1}{n}, \infty)$ es un F_σ .

Tenemos así que no existe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $\mathbb{Q}$ y discontinua en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Sin embargo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } (p, q) = 1 \end{cases}$$

es una función continua en los irracionales y discontinua en el complemento (o sea $\mathbb{Q}$).

- Otra consecuencia del teorema de Baire (Ver Yoshida, pág. 12) es la siguiente:

Si $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ entonces el conjunto de puntos de discontinuidad de f es de 1ra. categoría.

- Como aplicación del resultado anterior, consideremos $X = I^{\mathbb{R}}$ o sea $X = \prod_{t \in \mathbb{R}} I_t$ con $I_t = I = [0, 1] \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Si $A = \{f_{n,m}(t) = |\cos 2\pi nt|^m : n, m \in \mathbb{N}\}$ y $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, entonces A es un conjunto numerable tal que $f \in \bar{A}$ pero ninguna sucesión en A converge a f .

- Existen funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ que no tienen derivada en ningún punto. Para una prueba, ver [D] pág. 300.

4. Compactificación de Alexandroff.

Veamos ahora que todo espacio localmente compacto X es

subespacio denso de un espacio compacto y Hausdorff. Por ejemplo podemos pensar $(-1,1)$ como subespacio de S^1 y también $(-1,1)$ como subespacio de $[-1,1]$. En el primer caso agregamos un punto al intervalo mientras que en el segundo agregamos dos puntos.

Existen varias formas de compactificar un espacio, la más simple consiste en agregar un punto que no pertenece al espacio y se denomina **compactificación de Alexandroff** o **compactificación por un punto**. Formalizaremos este concepto.

Supongamos que X es un espacio topológico no compacto y sea ∞ un punto que no pertenece a X . Sea $X^* = X \cup \{\infty\}$ y damos a X^* la siguiente topología.

$$\tau = \{U: U \text{ es abierto en } X\} \cup \{V \subset X^*: X^* - V \text{ es cerrado y compacto en } X\}$$

Tenemos el siguiente,

6.4.1. Teorema. X^* es un espacio topológico compacto, la inclusión $i: X \rightarrow X^*$ es un homeomorfismo sobre la imagen (o sea la topología de X coincide con la topología relativa de X^*) y X es un subespacio denso. Además X^* es T_2 sii X es localmente compacto y T_2 .

Demostración: Observemos que por definición de τ , un conjunto U es abierto en X^* sii a) $U \subset X$ es abierto en X , y b) si $\infty \in U$, entonces $X - U$ es cerrado y compacto. Además si U es abierto en X^* es claro que $U - \{\infty\}$ es abierto en X . Resulta entonces que si ∞ pertenece a la unión de los miembros de una familia de abiertos en X^* , entonces ∞ pertenece a alguno de los miembros U , y el complemento de la unión es un subconjunto cerrado del compacto $X - U$ y por lo tanto compacto. Si ∞ está en la intersección de dos abiertos de X^* , entonces el complemento de la intersección es la unión de dos cerrados compactos de X y por lo tanto es cerrado y compacto. Es fácil deducir ahora que unión arbitraria e intersección finita de miembros de τ es un miembro de τ .

Es claro que la topología de X coincide con la topología relativa de X^* y X es un subconjunto abierto y denso (X no es compacto).

Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X^* , entonces ∞ está en algún U de $\mathcal{U}$ y $X-U$ es compacto, de modo que existe un subfamilia finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $X-U$, que conjuntamente con U cubre a X^* . Luego X^* es un espacio compacto.

Mostremos ahora la última afirmación. Si X^* es T_2 , es claro que X también es T_2 pues tiene la topología relativa. Si $x \in X$, sean U, V abiertos en X^* tales que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ y $\infty \in V$. Luego $U \subset X^*-V$, $x \in U \cap X \subset X^*-V$ con $U \cap X$ abierto en X y X^*-V un subconjunto compacto de X , o sea X^*-V es un entorno compacto de x y X es localmente compacto. Para ver la recíproca, resta mostrar que $x \in X$ e ∞ poseen entornos disjuntos. Para ello, si V es un entorno compacto de ∞ , sea U abierto tal que $x \in U \subset V$; luego X^*-V es un entorno abierto de ∞ disjunto de U . ■

6.4.2. Observación. Si X ya es compacto, entonces ∞ es un punto aislado de X^* (es decir, $\{\infty\}$ es abierto y es cerrado). Recíprocamente, si ∞ es un punto aislado de X^* , entonces X es cerrado y por ende compacto (X resulta denso en X^* sii X no es compacto).

Para concluir notemos que la compactificación de Alexandroff de X es única en el siguiente sentido: Si $p_1 \neq p_2$ son dos puntos que no pertenecen a X . Luego $X_1^* = X \cup \{p_1\}$ y $X_2^* = X \cup \{p_2\}$ con la topología definida anteriormente en cada caso, son homeomorfos. La función $I: X_1^* \rightarrow X_2^*$ definida por $I(x) = x$ si $x \in X$ e $I(p_1) = p_2$ es un homeomorfismo.

6.4.3. La compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ es S^n . O sea $(\mathbb{R}^n)^* \approx S^n$.

Sea $e_{n+1} \in S^n$ el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\varphi: S^n - \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica, o sea

$$\varphi(x) = \frac{\langle x, e_{n+1} \rangle e_{n+1} - x}{\langle x, e_{n+1} \rangle - 1}$$

Definiendo $\bar{\varphi}: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $\bar{\varphi}(e_{n+1}) = \infty$ se obtiene un homeomorfismo de S^n sobre la compactificación de $\mathbb{R}^n$.

- Si en $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq 1\}$ identificamos su frontera S^{n-1} con un punto, el espacio obtenido D^n/S^{n-1} , es homeomorfo a S^n . El homeomorfismo f de $\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < 1\}$ definido por $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$ se extiende a un homeomorfismo con $f(\|x\| = 1) = \infty$.

5. Paracompacidad.

6.5.1. **Definición.** Una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es localmente finita si para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U \cap F_i = \emptyset$ para todo $i \in I - J$, donde $J \subset I$ es finito (pudiendo ser $J = \emptyset$).

Por ejemplo en $\mathbb{R}$ el cubrimiento $\{(n, n+2): n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita pero $\{(-\infty, n): n \in \mathbb{N}\}$ no lo es.

Si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son dos cubrimientos de X , se dice que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$.

6.5.2. **Definición.** Un espacio topológico X se dice paracompacto si todo cubrimiento abierto admite un refinamiento abierto localmente finito

- Todo espacio compacto es paracompacto.
- Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.
- Todo espacio métrico es paracompacto (Ver [D] pág. 186).
- Producto de espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto (Ver Ejercicio 16).

6.5.3. **Proposición.** Si X es un espacio paracompacto Hausdorff entonces X es regular.

Demostración: Sea A cerrado en X y $x \notin A$. Como X es Hausdorff,

para cada $y \in A$ existen U_y, V_y abiertos disjuntos tales que $y \in V_y, x \in U_y$. Entonces $\mathcal{U} = \{V_y: y \in A\} \cup \{X-A\}$ es un cubrimiento abierto de X , que admite un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$, abierto y localmente finito. Si $V = \bigcup \{V \in \mathcal{V}: V \cap A \neq \emptyset\}$ entonces V es un abierto que contiene a A . Sea W entorno abierto de x y sean $y_i \in A, V_i \in \mathcal{V}, i = 1, \dots, n$ tales que $V_i \cap A \neq \emptyset, V_i \subset V_{y_i}, V_i \cap W \neq \emptyset$ y $W \cap V_j = \emptyset \forall j \neq i, i = 1, \dots, n$ ($\mathcal{V}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$ localmente finito, pudiendo ser vacía esta familia finita de $V_i, i = 1, \dots, n$). Si $U = W \cap (\bigcap_{i=1}^n U_{y_i})$, U es entorno abierto de x tal que $U \cap V = \emptyset$. ■

6.5.4. Proposición. Si X es un espacio paracompacto y regular entonces X es normal.

Demostración: Sean A y B cerrados disjuntos de X . Para cada $x \in A$ sea U_x entorno abierto de x tal que $\bar{U}_x \cap B = \emptyset$ (X es regular). Luego $\mathcal{U} = \{U_x: x \in A\}$ es un cubrimiento abierto de X que admite un refinamiento $\mathcal{V}$ abierto y localmente finito. Luego $U = \bigcup \{V \in \mathcal{V}: V \cap A \neq \emptyset\}$ es un abierto que contiene a A . Construimos V abierto que contiene a B , disjunto de U así:
Para cada $y \in B$ sea W_y entorno abierto de y , $\mathcal{F}_y = \{V_i^y: i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathcal{V}$ (pudiendo ser vacía) tal que $V_i^y \cap W_y \neq \emptyset, i = 1, \dots, n = n(y), V_i^y \subset U_{x_i} = U_{x_i}^y$, para $x_1, \dots, x_n \in A$ y además $V_i^y \cap A \neq \emptyset$.
Luego $V_y = W_y \cap \bigcap_{i=1}^n (X - \bar{U}_{x_i})$ es abierto, y si $V = \bigcup_{y \in B} V_y$ tenemos que $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. ■

Por último damos algunas condiciones para que un espacio sea paracompacto.

6.5.5. Proposición. Si X es un espacio Lindeloff (N_2), y regular entonces X es paracompacto.

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X . Dado

$x \in X$ si $x \in U_i$ para algún $i \in I$, por la regularidad de X , existe V_i abierto tal que $x \in V_i$ y $\bar{V}_i \subset U_i$. Luego la familia

$$\mathcal{V} = \{V \text{ abierto en } X: \bar{V} \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}$$

es un cubrimiento (no vacío) de X del cual puede extraerse un subcubrimiento numerable, digamos $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $\bar{V}_n \subseteq U_n$ y en consecuencia $\{\bar{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cubre a X . Entonces $\{U'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $U'_n = \bar{U}_n - \bigcup_{i < n} \bar{V}_i$ es un cubrimiento abierto de X , refinamiento de $\mathcal{U}$ ($U'_n \subset U_n$) que además es localmente finito ($U'_k \cap V_n = \emptyset$ si $k > n$).

6.5.6. Partición de la unidad. Definiciones.

Dado un espacio topológico X y una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definimos $\text{Sop}(f) = \{y: f(y) \neq 0\}^-$ (Soporte de f).

Dada una familia $\{f_i: i \in I\}$ de funciones continuas $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que dicha familia es una partición de la unidad de X si,

(a) $\{\text{Sop}(f_i)\}_{i \in I}$ forman un cubrimiento cerrado de X que es localmente finito.

$$(b) \sum_i f_i(x) = 1 \text{ para todo } x \in X.$$

Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X , una partición de la unidad $\{f_i\}_{i \in I}$ se dice subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$ si $\text{Sop}(f_i) \subset U_i$ para todo $i \in I$.

Finalizamos esta sección con el enunciado del siguiente teorema y para cuya prueba nos remitimos a [D], pág. 170.

6.5.7. Teorema. Sea X un espacio paracompacto y T_2 . Para cada cubrimiento abierto de X , existe una partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento.

EJERCICIOS

1. Dar ejemplos de espacios X tales que
 - a) X es regular, no T_1 y no T_2 .
 - b) X no regular, no T_2 .
 - c) X es T_2 y no regular.

2. a) Si X es un espacio regular y A es un subconjunto compacto de X , entonces $\bar{A}$ es compacto.
 b) Dar un ejemplo de un espacio en el cual no se cumple a).

3. Sean X e Y espacios topológicos, A y B subconjuntos compactos de X e Y respectivamente. Si W es entorno de $A \times B$ en $X \times Y$, entonces existen U, V entornos de A y B respectivamente tales que $U \times V \subset W$.

4. Sea X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia cerrada en X .
 - a) Si U es abierto en X entonces la unión de las clases de equivalencias contenidas en U es un conjunto abierto.
 Si además toda clase de equivalencia en X es finita entonces,
 - b) X Hausdorff $\Rightarrow X/\sim$ es Hausdorff.
 - c) X regular $\Rightarrow X/\sim$ es regular.

5. Sea $X = [0, 1]$, $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Demos a X la topología que tiene por sub-base a todo abierto de $X - \{0\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, y todo conjunto $B_a = \{t \in X : t < a, t \notin D\}$ con $0 < a < 1$.
 Probar que X es T_2 pero no es regular ni compacto.

6. Sea $X = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. Los conjuntos

$$B_{a,b} = \{x \in X : a < x < b\} \quad \text{con} \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2} \leq b < 1$$
 forman una topología sobre X . Mostrar que X es normal y no T_2 .

7. Sea X un espacio completamente regular y $K \subset X$ un subconjunto

compacto. Si U es un entorno abierto de K , mostrar que existe

$$f: X \rightarrow I \text{ continua tal que } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ 1 & x \in X-U. \end{cases}$$

8. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos

a) Si X_i es T_1 para todo $i \in I$ entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es T_1 .

b) Si X_i es regular para todo $i \in I$ entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es regular.

c) Si X_i es completamente regular entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es completamente regular.

9. a) La imagen de un espacio normal por una función continua y cerrada es un espacio normal.

b) a) Deja de cumplirse si la función no es cerrada.

10. El producto de espacios normales puede no ser normal. Para ello considere $\mathbb{R}^2$ con la topología producto y $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos semiabiertos $[a, b)$. Además este espacio es regular y no es normal.

11. a) La imagen de un espacio localmente compacto por una función continua y abierta es localmente compacto.

b) a) deja de cumplirse si la función no es abierta.

12. a) Si A es un subconjunto denso de un espacio topológico y U es abierto, entonces $U \subset (A \cap U)^-$.

b) Si X es un espacio T_2 e Y es un subespacio localmente compacto entonces Y es abierto en X .

c) Si X es un espacio localmente compacto regular e Y es un subespacio abierto de X , entonces Y es localmente compacto.

13. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos.

a) Si una cantidad infinita de espacios coordenados no son compactos entonces todo subconjunto compacto de $\prod_{i \in I} X_i$ tiene interior vacío.

b) $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto sii todos los X_i son localmente

compactos y todos, salvo un número finito, son compactos.

14. a) Dar sobre el conjunto de los números reales una topología que lo haga compacto y T_2 .

b) Si una topología hace de un conjunto X un espacio compacto y T_2 , ninguna otra topología estrictamente más fina o estrictamente menos fina hace de X un espacio compacto y T_2 .

15. Sea X un espacio T_2 , regular que no sea normal, y sean A, B dos cerrados disjuntos tales que todo entorno de A corta a todo entorno de B . Sea

$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ y $R = \Delta \cup (A \times A)$.

a) R es cerrado en $X \times X$ y el espacio cociente $(X \times X)/R$ es un espacio T_2 que no es regular.

b) Si $S = \Delta \cup (A \times A) \cup (B \times B)$ entonces S es cerrado en $X \times X$ pero $(X \times X)/S$ no es un espacio T_2 .

16. El producto de espacios paracompactos puede no ser paracompacto. Considere $\mathbb{R}$ en la topología generada por los intervalos semiabiertos $[a, b)$. $\mathbb{R}^2$ con la topología producto es regular, Lindelöf y no es normal (luego no es paracompacto).

17. Probar a) $(\mathbb{R}^n)^* \simeq S^n$

b) $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$

CAPITULO VII

INMERSION Y METRIZACION

1. Teoremas de inmersión en cubos.

Un cubo es el producto cartesiano de intervalos unitarios cerrados. Esto es, un cubo es el conjunto $I^A = \{f: A \rightarrow I, I = [0,1]\}$ con la topología de la convergencia puntual. El cubo se usa como un espacio canónico, conocemos sus propiedades topológicas y nos interesa describir aquellos espacios topológicos que son homeomorfos a subespacios de cubos.

7.1.1. Sean X e $\{Y_i\}_{i \in I}$ espacios topológicos y sea $\mathcal{F} = \{f_i: X \rightarrow Y_i: f_i \text{ es continua}\}_{i \in I}$. Consideramos $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ con la topología producto y denotamos con $f: X \rightarrow Y = \prod_{i \in I} Y_i$ a la función natural definida por

$$f(x)(i) = f_i(x)$$

Definición. Diremos que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados si para cada A cerrado en X y $x \notin A$ existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$.

Diremos que la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos de X si para cada par de puntos $x \neq y$ en X existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

7.1.2. **Lema de Inmersión.** Seguimos con la notación anterior

- (i) La función f es continua.
- (ii) Si $\mathcal{F}$ distingue puntos de conjuntos cerrados de X entonces f es abierta sobre $f(X)$.
- (iii) f es una biyección sobre $f(X)$ sii $\mathcal{F}$ distingue puntos de X .

Demostración: (i) Es claro que f es continua pues $p_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$.

(ii) Sea U abierto en X y probaremos que $f(U)$ es abierto en $f(X)$. Sea $y \in f(U)$, $y = f(x)$ con $x \in U$. Luego, $x \notin X-U$ existiendo $f_j \in \mathcal{F}$ tal que $f_j(x) \notin \overline{f_j(X-U)}$. Si

$$V = \{y \in Y: y_j \notin \overline{f_j(X-U)}\} = p_j^{-1}(Y_j - \overline{f_j(X-U)}),$$

el cual es abierto en Y , mostraremos que $f(U) = V \cap f(X)$ y en consecuencia $f(U)$ es abierto.

Es claro que $f(U) \subset V \cap f(X)$. Para la inclusión inversa, si $z = f(x_0)$ con $z_j = f_j(x_0) \notin \overline{f_j(X-U)}$, tenemos que $f_j(x_0) \notin \overline{f_j(X-U)}$ y en consecuencia, $x_0 \notin X-U$; o sea $x_0 \in U$ y $z = f(x_0) \in f(U)$.

(iii) es inmediato que f es inyectivo si $\mathcal{F}$ distingue puntos de X . ■

7.1.3. Teorema de Inmersión 1 (de Tijonov). Un espacio topológico X es completamente regular y T_1 sii X es homeomorfo a un subespacio de un cubo.

Demostración: Es claro que si X es homeomorfo a un subespacio de un cubo es completamente regular y T_1 ya que un cubo tiene estas propiedades.

Recíprocamente, sea $\mathcal{F} = \{f: X \rightarrow I: f \text{ es continua}\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ distingue puntos de cerrados. Si A es cerrado en X y $x \in X-A$, que es abierto, existe $f: X \rightarrow I$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$ pues X es completamente regular. Luego $f(x) \notin f(A)^- (f(A)^- = \{1\})$.

Como X es un espacio T_1 , es claro que $\mathcal{F}$ distingue puntos y por el Lema de Inmersión, la función

$$F: X \rightarrow I^{\mathcal{F}}, \quad F(x)(f) = f(x),$$

es un homeomorfismo sobre el subespacio $F(X)$ del cubo $I^{\mathcal{F}}$. ■

7.1.3. Teorema de Inmersión 2. (de Urysohn). Un espacio topológico X es regular, Hausdorff y T_1 sii X es homeomorfo a un subespacio de un cubo $I^{\mathbb{N}}$ (producto numerable de intervalos unitarios cerrados I).

Demostración: Es claro que un subespacio de un cubo $I^{\mathbb{N}}$ es regular, T_1 y N_2 pues $I^{\mathbb{N}}$ tiene estas propiedades.

Recíprocamente, mostraremos que existe una familia numerable de

funciones continuas de X en I que separan puntos de cerrados de X . Para ello, sea $\mathcal{B}$ una base numerable de la topología de X y sea $\mathcal{A} = \{(U, V): U, V \in \mathcal{B} \text{ y } \bar{U} \subset V\}$. Esta familia es no vacía (X es regular) y además es numerable. Notemos que por 6.2.2., X es un espacio normal, y por Teorema 6.2.3., para cada par $(U, V) \in \mathcal{A}$ existe $f_{U,V}: X \rightarrow I$ continua tal que $f(\bar{U}) = 0$, $f(X-V) = 1$ ($\bar{U} \cap X-V = \emptyset$). Luego $\mathcal{F} = \{f_{U,V}: (U, V) \in \mathcal{A}\}$ es una familia numerable de funciones continuas que distingue puntos de cerrados de X . En efecto, si A es cerrado y $x \notin A$, por definición de base y por la regularidad, sea $(U, V) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U$ y $V \subset X-A$ ($\bar{U} \subset V$). Por definición $f_{U,V}$ satisface $f_{U,V}(x) = 0 \notin \overline{f_{U,V}(A)}$ ($f_{U,V}(A) = 1$). Nuevamente por el Lema de Inmersión, la función $F: X \rightarrow I^{\mathcal{F}} (= I^{\mathbb{N}})$, $F(x)(f_{U,V}) = (f_{U,V})(x)$, define un homeomorfismo de X sobre su imagen. ■

2. Espacios metrizables.

Recordamos que un espacio topológico X se dice metrizable si la topología de X es inducida por una métrica en X .

7.2.1. Definición. Dos métricas ρ, d en X son llamadas equivalentes si las topologías métricas inducidas por ρ y d coinciden.

7.2.2. Proposición. Una condición necesaria y suficiente para que dos métricas ρ y d sean equivalentes en X es que para cada $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ las siguientes dos condiciones se cumplan:

$$(1) \exists \delta_1 = \delta_1(x_0, \varepsilon): \rho(x_0, x) < \delta_1 \Rightarrow d(x_0, x) < \varepsilon.$$

$$(2) \exists \delta_2 = \delta_2(x_0, \varepsilon): d(x_0, x) < \delta_2 \Rightarrow \rho(x_0, x) < \varepsilon.$$

Demostración: La prueba es inmediata teniendo en cuenta que las topologías métricas tienen por base las bolas abiertas $\{B_\rho(x, r): x \in X, r > 0\}$ y $\{B_d(x, r): x \in X, r > 0\}$. ■

7.2.3. Corolario. Sea (X, d) es un espacio métrico. Entonces para cada $M > 0$ existe una métrica ρ_M equivalente a d tal que $\rho_M(x, y) \leq M$

para todo (x,y) .

Demostración: Basta definir $\rho_M(x,y) = \min \{M, d(x,y)\}$. ρ_M es una métrica sobre X la cual es equivalente a d . ■

7.2.4. Propiedades de las topologías métricas.

Ya hemos estudiado muchas de las propiedades topológicas de los espacios métricos y de algunos espacios en particular,

- Metrizabilidad es un invariante topológico.
- Todo subespacio Y de un espacio metrizable X es metrizable. Si d es la métrica que induce la topología de X , $d' = d|_{Y \times Y}$ induce la topología relativa de Y .
- Todo espacio metrizable es N_1 (1.1.1).
- Todo espacio metrizable es T_2 y en consecuencia es T_1 . (1.1.5).
- Todo espacio metrizable es regular y normal (Ver 6.1.2. y 6.2.1.).
- Todo espacio metrizable es paracompacto (Ver [D], pág. 186 ó [K] pág. 184).
- $\mathbb{R}^n$ es metrizable.

- Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de espacios metrizables entonces $X = \prod_{i=1}^n X_i$, con la topología producto, es metrizable.

Si d_i ($i = 1, \dots, n$) define la topología de X_i , la distancia d , definida por $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}$ si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, induce la topología de X .

Más generalmente tenemos.

7.2.5. Proposición. Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de

espacios metrizablees entonces $X = \prod_{i=1}^n X_n$, con la topología producto, es metrizable.

Demostración: Sea d_n la distancia que define la topología de X_n ($n \in \mathbb{N}$), y supongamos, por 7.2.3., que $d_n \leq \frac{1}{2^n}$ (esto es, $\forall x, y \in X_n$, $d_n(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$).

Definimos d en X de la siguiente manera,

$$d(x, y) = \sup \{d_n(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\} \text{ si } x = (x_n) \text{ e } y = (y_n)$$

Es fácil ver que d es una distancia en X . Veamos ahora que d induce la topología producto.

Sea $x \in X$ y sea U en la base de la topología producto. O sea,

$$U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ con } U_n = \begin{cases} B_n(x_n, r_n) & n \in J \\ X_n & n \notin J \end{cases}, \text{ donde } J \subset \mathbb{N} \text{ es finito.}$$

Si $r = \min_{i \in J} r_i$, es claro que $B(x, r) \subset U$. Luego la topología producto es menos fina que la topología métrica.

Recíprocamente, sea $x \in X$, y $r > 0$. Si

$$\delta_n(X_n) = \sup \{d_n(x_n, y_n) : x_n, y_n \in X_n\},$$

$\delta_n(X_n) \rightarrow 0$ (pues $d_n \leq \frac{1}{2^n}$) y en consecuencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta_n(X_n) < \frac{r}{2} \text{ si } n \geq n_0.$$

Si $U_i = B_i(x_i, r/2)$ $i = 1, \dots, n_0$ y $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ donde $U_n = X_n$ para $n \geq n_0$ tenemos que $U \subset B(x, r)$. En efecto, si $y \in U$ se cumple que $d_n(x_n, y_n) < \frac{r}{2}$ para $n \geq n_0$. O sea $d_n(x_n, y_n) < \frac{r}{2}$ cualesquiera sea n , y en consecuencia $d(x, y) \leq \frac{r}{2} < r$. ■

7.2.6. Proposición. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos cada uno de ellos con más de un punto. Si $X = \prod_{i=1}^n X_i$ con la topología producto es metrizable entonces X_i es metrizable para todo $i \in I$, y además la familia de índices I es numerable.

Demostración: Supongamos que X es metrizable, y sea $x_0 = (x_i^0)_{i \in I}$

con $x_i^0 \in X_i$ ($i \in I$). Para cada $j \in I$, la inclusión

$$i_j: X_j \rightarrow X, \quad x_j \rightarrow (x_i) \quad \text{con } x_i = \begin{cases} x_i^0 & i \neq j, \\ x_j & i = j \end{cases}$$

es un homeomorfismo de X_j sobre un subespacio de X y la distancia d_j en X_j , inducida por i_j , define la topología de X_j .

Como X es N_1 (por ser metrizable), sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de x_0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I(n) \subset I$ un subconjunto finito tal que $x \in B_{I(n)} \subset V_n$ donde $B_{I(n)} = \prod_{i=1}^{\infty} U_i$ con

$$U_i = \begin{cases} X_i & i \notin I(n) \\ U_i^n & i \in I(n) \end{cases} \quad \text{donde } U_i^n \text{ es abierto en } X_i.$$

Notemos que $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I(n)$ es numerable. Si I no fuera numerable tendríamos $J \subsetneq I$ y existiría $i_0 \in I$ tal que $i_0 \notin J$. Como X_{i_0} contiene más de un punto, sea U_{i_0} entorno abierto de $x_{i_0}^0$ en X_{i_0} tal que $U_{i_0} \subsetneq X_{i_0}$. Entonces el abierto U definido en X por $U = \prod_{i=1}^{\infty} U_i$ donde $U_i = \begin{cases} X_i & i \neq i_0 \\ X_{i_0} & i = i_0 \end{cases}$, es un entorno abierto de x_0 tal que

$V_n \subset U$ para todo n , lo cual contradice el hecho que $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de entornos de x_0 . Luego I es numerable. ■

Estamos en condiciones de caracterizar los espacios metrizables.

7.2.7. Teorema. Si X es un espacio topológico T_1 , las siguientes propiedades son equivalentes.

- (i) X es regular y 2do. axioma.
- (ii) X es homeomorfo a un subespacio de un cubo $I^{\mathbb{N}}$.
- (iii) X es metrizable y separable.

Demostración: Es inmediato de Teorema 7.1.3, de las propiedades de

$I^{\mathbb{N}}$ y de Proposición 1.4.3. ■

En general, un espacio topológico X es metrizable sii X es T_1 , regular y la topología tiene una base $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ donde cada $\mathcal{B}_n$ es una familia localmente finita. Ver [K] pág. 149.

3. Otras propiedades de los espacios metricos.

En 1.4.5. vimos que si X es un espacio N_2 entonces es Lindelöf, o sea de todo cubrimiento por abiertos de X puede extraerse un subcubrimiento numerable. Veamos que si X es métrico se cumple la recíproca. Luego en un espacio métrico separable, N_2 y Lindelöf son equivalentes.

7.3.1. **Proposición.** Si X es un espacio métrico que es Lindelöf entonces X es separable (luego N_2).

Demostración: Mostremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $D(\varepsilon)$ numerable con la siguiente propiedad:

Para cada $x \in X$ existe $x_\varepsilon \in D(\varepsilon)$ tal que $d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$.

En efecto, como $X = \bigcup \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ y es Lindelöf, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon)$. Si definimos $D(\varepsilon) = \bigcup_n \{x_n\}$, $D(\varepsilon)$ tiene la propiedad deseada.

Para mostrar que X es separable sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\frac{1}{n})$, D es numerable y mostremos que es denso. Para ello sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Si n satisface que $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon)$ entonces $D(\frac{1}{n})$ satisface que existe $x_n \in D(\frac{1}{n})$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Luego $x_n \in B(x, \varepsilon)$ y $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. ■

7.3.2. **Definición.** Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) se dice que es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge.

Mostramos ahora el teorema de Baire para espacios métricos completos.

7.3.3. Teorema. Si (X, d) es un espacio métrico completo entonces la intersección de toda familia numerable de subconjuntos abiertos densos de X es denso en X .

Demostración: Sean $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con V_n subconjuntos abiertos densos en X . Si $W \neq \emptyset$ es un abierto en X , mostraremos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ tiene un punto en W .

Como V_1 es denso, $W \cap V_1$ es un conjunto abierto no vacío, y en consecuencia existen x_1 y r_1 tales que

$$(1) \quad B(x_1, r_1)^- \subset W \cap V_1 \quad \text{y} \quad 0 < r_1 < 1.$$

Si $n \geq 2$, x_{n-1} y r_{n-1} son elegidos, la densidad de V_n muestra que $V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \emptyset$ y podemos encontrar x_n y r_n satisfaciendo

$$(2) \quad B(x_n, r_n)^- \subset V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \quad \text{y} \quad 0 < r_n < 1.$$

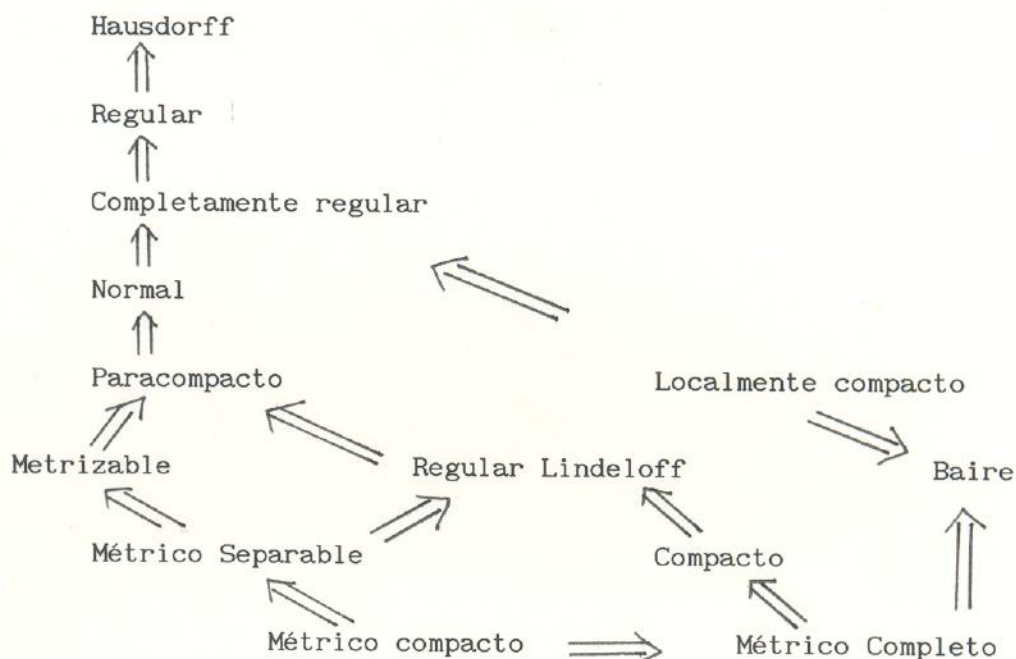
Por inducción, este proceso produce una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en X . En efecto, si $i > n$ y $j > n$, la construcción muestra que x_i y x_j ambos pertenecen a $B(x_n, r_n)$ y luego $d(x_i, x_j) < 2r_n < 2/n$. Por la completitud de X existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Como $x_i \in B(x_n, r_n)^-$ si $i > n$, resulta que $x \in B(x_n, r_n)^-$, y en consecuencia $x \in V_n$ por (2). Usando (1) tenemos que $x \in W$, lo cual completa la prueba. ■

7.3.4. Corolario. En un espacio métrico completo, la intersección de una familia numerable de G_δ 's densos es un G_δ .

Demostración: Esto resulta del teorema, ya que todo G_δ es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos y la unión numerable de familias numerables es numerable. ■

Finalizamos esta sección con un diagrama de las nociones topológicas, y relaciones entre ellas, más importantes discutidas en estos capítulos; los espacios son siempre Hausdorff.



Observación: sin hipótesis adicionales, en general no se cumplen las implicaciones inversas.

4. Variedades topológicas.

7.4.1. **Definición.** Un espacio topológico Hausdorff X se dice que es una variedad topológica de dimensión n si para todo $x \in X$ existe un entorno de x que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

7.4.2. Ejemplos.

- $\mathbb{R}^n$, S^n , $\mathbb{R}P^n$, T^n son variedades topológicas.
- Con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$, la figura ocho no es una variedad topológica.
- Si X es una variedad topológica conexa la dimensión de X está bien definida. Esto se deduce del hecho que un abierto de $\mathbb{R}^n$ no puede ser homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$. Este resultado no es trivial y se prueba con herramientas de Topología Algebraica.

Como las variedades topológicas son localmente euclídeas, ellas son localmente compactas, regulares, localmente conexas y localmente conexa por curvas. Además son N_1 y localmente metrizable. En una variedad topológica los conceptos de conexión y conexión por curvas son equivalentes (Proposición 3.7.5).

El siguiente teorema muestra que en una variedad topológica conexa, además de metrizabilidad, paracompacidad y 2do. axioma son equivalentes.

7.4.3. Teorema. Sea X una variedad topológica conexa. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (i) X es N_2
- (ii) X es metrizable.
- (iii) X es paracompacto.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Resulta del Teorema 7.1.3. ya que X es N_2 , regular y T_1 .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ver [D] pág. 186.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por ser X una variedad topológica paracompacta, existe un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X por abiertos de clausura compacta homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$, que es localmente finita (primeramente se cubre X por abiertos de ese tipo y se toma un refinamiento abierto localmente finito de dicho cubrimiento).

Sea U_0 uno de esos abiertos; cubriendo $\bar{U}_0$ por entornos abiertos que cortan a $\mathcal{U}$ a lo sumo en una cantidad finita ($\mathcal{U}$ es localmente finita), por ser $\bar{U}_0$ compacto, $\bar{U}_0$ interseca a lo sumo una cantidad finita de abiertos de $\mathcal{U}$ que los denotamos por $U_1, U_2, \dots, U_{n_1}$. De la misma forma tenemos que $\bar{U}_0 \cup \bar{U}_1 \dots \cup \bar{U}_{n_1}$ (es compacto) interseca un número finito $U_{n_1+1}, \dots, U_{n_2}$ del cubrimiento $\mathcal{U}$. Continuando con este proceso por inducción, obtenemos

$$U = \bar{U}_0 \cup \bigcup_{j=1}^{n_1} \bar{U}_j \cup \bigcup_{j=n_1+1}^{n_2} \bar{U}_j \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i,$$

igualdad que se cumple por construcción de los U_i 's.

Claramente U es abierto. También es cerrado pues, como $\mathcal{U}$ es localmente finita, la familia $\{U_i\}_{i \in I}^\infty \subset \mathcal{U}$ también es localmente finita y $\bar{U} = \bigcup_{i=0}^\infty \bar{U}_i = U$.

Como X es conexo, $X = \bigcup_{i=0}^\infty U_i$ es una unión numerable de abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, luego unión numerable de abiertos N_2 y en consecuencia X es N_2 . ■

EJERCICIOS

1. Si (X, d) es un espacio métrico, probar que la función distancia d es continua.

2. Probar que metrizable es una propiedad topológica.

3. Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia de espacios metrizables, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$, con la topología producto, es metrizable.

4. Si (X, d) es un espacio métrico probar que $d' = \frac{d}{1+d}$ define una métrica en X equivalente a d .

5. Sea $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente tal que $f(x) = 0 \iff x = 0$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Si (X, d) es un espacio métrico y $\rho(x, y) = f(d(x, y))$ entonces ρ es una métrica sobre X que es equivalente a d .

6. Sea $f: X \rightarrow Y$ continua. Si X es compacto y metrizable e Y Hausdorff entonces $f(X)$ es metrizable.

7. Sea (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es una isometría sii

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Probar que una isometría es un homeomorfismo sobre su imagen.

8. Sea I^I con la topología producto.

a) Probar que I^I es compacto, Hausdorff, conexo y normal.

b) Si $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $\prod_{i \in I} A_i$ donde $A_i = A$ ($i \in I$) es un subespacio de I^I que no es normal.

9. Sea X un espacio métrico. a) Si $\{x_n\}$ es de Cauchy, y alguna subsucesión converge a x , entonces $\{x_n\}$ converge a x .

b) Si X es un espacio compacto entonces X es completo.

BIBLIOGRAFIA

- [B] Bourbaki Nicolas, General Topology, Elements of Mathematics. Addison-Wesley, 1966.
- [D] Dugundji James, Topology. Allyn and Bacon. Inc., 1978.
- [K] Kelley John, Topología General. Eudeba, 2da. Edición, 1975.
- [Y] Yosida K., Functional Analysis. Springer Verlag. New York, 1980.