

## 4.2. Control de OPIs en el PC3CR

En el PC3CR, la posición en  $\Sigma$  de un PPI y la dirección de sus variedades estables e inestables dependen del valor de la constante de Jacobi  $h$ . Tomando  $h$  como parámetro de control e implementando el método de OGY [13], podríamos imprimir un pequeño impulso que modifique el valor de  $h$  y el valor del punto fijo  $\xi_F$  en  $\Sigma$ , de manera tal que, en la próxima iteración del mapa de Poincaré, nuestra trayectoria se encuentre lo más próxima posible de la variedad estable del nuevo punto fijo  $\xi'_F$ . De esta manera, la dinámica actuaría sobre la trayectoria, acercándola a  $\xi'_F$ . Si bien esto es posible, en general, no suele ser conveniente, puesto que al cambiar el valor de  $h$  estamos cambiando la OPI original adoptada como referencia. En particular, para algunas de las órbitas de transferencia que hemos determinado en el PC3CR (Sec. 2.3.5), si modificamos  $h$  tendremos órbitas que colisionen con la Luna o que aumenten su inestabilidad. Si queremos mantener la OPI original de referencia deberemos ejercer control sin modificar el valor de  $h$ .

El objetivo de la próxima Sección es mostrar un método control de baja energía que permite estabilizar OPIs en el PC3CR por intervalos de tiempo razonables y que resulta de fácil implementación práctica. El lector puede considerar esta Sección como una introducción que ayuda al entendimiento del método de control general de OPIs en el PCBC que se desarrolla en la Sección 4.4.

### 4.2.1. Control de OPIs manteniendo $h$ constante.

El método que se describe a continuación impone la condición  $h$  constante y fué implementado con éxito por Leiva y Briozzo sobre trayectorias de transferencia de baja energía [1]. A través del análisis local se logra la estabilización de OPIs con impulsos realistas sobre tiempos razonables ( $\sim 20$  años) sin modificar la posición de los puntos de control en  $\Sigma$ .

Sea  $r^*$  un punto fijo en  $\Sigma$  correspondiente a una OPI y consideremos una trayectoria en la vecindad de  $r^*$  representada por el punto  $r$ . Mediante un impulso  $\Delta$  no podemos cambiar instantáneamente la posición de la trayectoria en  $\Sigma$  (*teletransportación*). Aún así, podemos ejercer control de una manera sencilla modificando la velocidad de  $m$  manteniendo constante el valor de la energía  $h$ , de manera tal que  $r$  se aproxime a la variedad estable de  $r^*$  antes de ser iterado por el correspondiente mapa de Poincaré  $P$ .

#### Algoritmo de control

Debido a la existencia de la integral de Jacobi en el PC3CR, en el caso planar, una superficie de Poincaré  $\Sigma$  será bidimensional y la matriz  $M$  que aproxima la acción del mapa alrededor de un PPI será  $2 \times 2$ .

Consideremos la superficie de Poincaré  $\Sigma_1 = \{x = x_{L1}, y, \dot{x} > 0, \dot{y}\}^1$ , y los vectores  $r^* = (y^*, \dot{y}^*)^T$ ;  $r_n = (y_n, \dot{y}_n)^T$  y  $\delta r_n = (\delta y_n, \delta \dot{y}_n)^T$  en  $\Sigma_1$ . Así, para un punto  $r_n$  que sufre una pequeña desviación  $\delta r_n$  del punto fijo  $r^*$  podremos aproximar la acción del mapa

---

<sup>1</sup> $x_{L1} = 0,836915310$  es la coordenada  $x$  del punto Lagrangeano colineal L1 (ver Cap. 2)

$r_{n+1} = P(r_n)$  a primer orden según:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} y^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \delta y_n \\ \delta \dot{y}_n \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

con

$$M = \left[ \frac{\partial P(y, \dot{y})}{\partial (y, \dot{y})} \right]_{(y=y^*, \dot{y}=\dot{y}^*)}. \quad (4.5)$$

Ahora, consideremos una variedad lineal *estable*  $W$  definida por todos los vectores  $r = r^* + a_1 \vec{a}$  ( $a_1 \in \mathbb{R}$ ), con el vector  $\vec{a} = (a_y, a_{\dot{y}})^T$  paralelo al autovector estable  $\vec{e}_s$  correspondiente al autovalor  $\lambda_s$  de  $M$ , y definamos una región de control alrededor de  $r^*$  donde es válida la aproximación lineal <sup>2</sup>:

$$d = \sqrt{(y_n - y^*)^2 + (\dot{y}_n - \dot{y}^*)^2} < \varepsilon_0. \quad (4.6)$$

En cada iteración del mapa  $P$ , se aplicará un impulso de control  $\delta \dot{y}$  para forzar al punto  $r_n$  a posicionarse lo más cerca posible de la variedad  $W$ , ésto es:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ \dot{y}_n + \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} a_y \\ a_{\dot{y}} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Además, deberemos aplicar un impulso  $\delta \dot{x}$  para mantener  $h$  constante. Este segundo impulso deberá satisfacer la condición

$$(\dot{x}_n + \delta \dot{x})^2 + (\dot{y}_n + \delta \dot{y})^2 = (\dot{x}_n + \dot{y}_n)^2. \quad (4.8)$$

Resolviendo las ecuaciones (4.7) y (4.8) obtenemos el siguiente algoritmo de control:

$$\delta \dot{y} = \frac{a_{\dot{y}}}{a_y} (y_n - y^*) - (\dot{y}_n - \dot{y}^*), \quad (4.9)$$

$$\delta \dot{x} = -\dot{x}_n \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2\dot{y}_n \delta \dot{y} + (\delta \dot{y})^2}{\dot{x}_n^2}} \right). \quad (4.10)$$

El signo de la raíz cuadrada en la Ecuación (4.10) es elegido para preservar el signo de  $\dot{x}_n$  y además minimiza el valor del impulso aplicado.

La Figura 4.3 representa esquemáticamente como actúa el algoritmo de control.

*Principales ventajas del método:*

- Siempre se utiliza la misma OPI de referencia.
- Resulta de fácil implementación práctica. Sólo se requieren dos impulsos en cada región de control;  $\delta \dot{x}$  y  $\delta \dot{y}$ .
- Sólo necesitamos determinar la variedad estable  $W$  y el radio  $\varepsilon_0$  en cada PPI.
- Los impulsos requeridos son mínimos.

---

<sup>2</sup>En la práctica es necesario determinar el valor de  $\varepsilon_0$  para cada PPI.

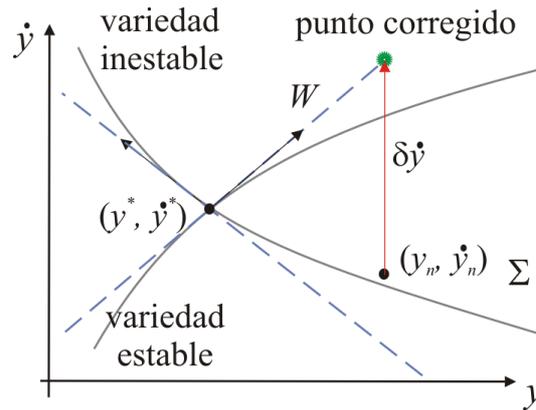


Figura 4.3: Representación esquemática del algoritmo de control en una vecindad del punto fijo manteniendo  $h$  constante.

- Podemos aumentar el número de puntos de control que se utilizan considerando todos los puntos que representan la OPI en  $\Sigma_1$  o nuevos puntos fijos en otras superficies de Poincaré.
- El algoritmo fácilmente puede ser extendido al PC3CR tridimensional.

*Principales desventajas:*

- El éxito de la estabilización depende fuertemente de la precisión con la que se determina la dirección estable  $\vec{e}_s$ .
- Variedades estables e inestables aproximadamente paralelas. En estos casos, imprecisiones en los impulsos aplicados pueden posicionar al punto  $r_n$  sobre la variedad inestable de  $r^*$ .
- Para grandes valores de la pendiente de la variedad lineal  $W$  debemos aplicar grandes cambios en  $\delta y$ . Además, estos impulsos pueden expulsar al punto  $r_n$  de la región de control ( $d > \varepsilon_0$ ).
- La linealización debe ser válida en un entorno relativamente grande del punto control. Cambios extremadamente pequeños en  $\delta \dot{x}$  o  $\delta \dot{y}$  carecen de sentido físico. (En la práctica, el error cometido cuando se aplican impulsos es de unos pocos cm/s).
- Cuando se utilizan pocos puntos de control, las trayectorias pueden diverger rápidamente si los valores absolutos de los autovalores del PPI son grandes ( $|\lambda_u| \gg 1$ ).

## Discusión

En primer lugar, es necesario determinar una OPI que satisfaga todas las condiciones requeridas por el algoritmo de control. En particular, si deseamos utilizar como referencia órbitas periódicas de transferencia rápida de baja energía, esta tarea no presenta mayores dificultades debido al Atlas de familias de OPs presentado en el Capítulo 2. Por otro lado, todas las trayectorias pueden estabilizarse cuando se aplican impulsos

extremadamente pequeños, aún si se utilizan pocos puntos de control. Para OPs de transferencia con autovalores  $|\lambda_u| \leq 4 \times 10^4$ , los valores típicos de los impulsos resultan menores a  $10^{-7}$  ( $\sim 0,1$  mm/s). Este control no es relevante, puesto que los valores de los impulsos son menores que los errores que se cometen en la práctica (algunos cm/s). Aplicar el algoritmo de control sobre cualquier OPI utilizando impulsos realistas no es un problema fácil de resolver y constituye una nueva limitación de nuestro método.

A continuación, presentamos como ejemplo, los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de control en una OPI de transferencia de la familia 197A<sup>3</sup>. El período de la órbita seleccionada es  $T = 18,123920$  ( $\sim 78$  días) con  $h = -1,588700$  y  $\lambda_u = -2,648$  y con las condiciones iniciales  $x^* = 0,836915$ ;  $y^* = -0,014627$ ;  $\dot{x}^* = 0,095516$ ;  $\dot{y}^* = -0,028192$ . En  $\Sigma_1$ , se definió una región de control  $\varepsilon_0 = 0,01$  y para que la estabilización sea realista sólo se ejerció el control sobre la trayectoria cuando los valores de los impulsos requeridos superaron el valor mínimo  $\Delta_0 = 5 \times 10^{-4}$  ( $\sim 50$  cm/s)<sup>4</sup>.

La Figura 4.4 muestra la evolución de la trayectoria cuando se aplica el algoritmo de control durante  $330T$  ( $\sim 71$  años).

Este ejemplo constituye un caso especial, dado que la estabilización se logró con éxito empleando un solo punto de control. En  $\Sigma_1$ , la trayectoria controlada no se aleja en más

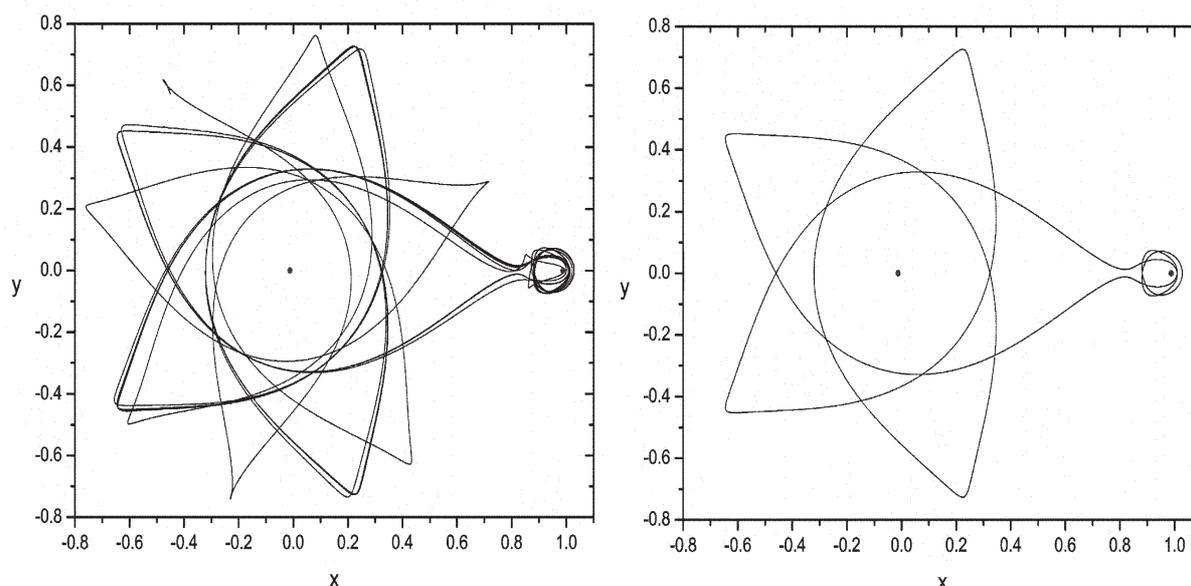


Figura 4.4: Evolución de la trayectoria seleccionada. Izq.: Sin aplicar control durante  $10T$  ( $\sim 2$  años). Der.: Aplicando control durante  $330T$  ( $\sim 71$  años).

de  $10^{-3}$  ( $\sim 384$  km y  $\sim 1$  m/s) del punto fijo  $r^*$  e insume un consumo total acumulado durante toda la etapa de control de 628 m/s que, en promedio, resulta equivalente a un impulso medio anual extremadamente bajo de  $\sim 8,7$  m/s [1]. Este consumo podría optimizarse aún más aumentando la cantidad de puntos de control.

<sup>3</sup>Esta OPI fué publicada por Leiva y Briozzo [1] y es un miembro de la familia 197A del Atlas [4].

<sup>4</sup>En este trabajo consideramos como valores realistas a impulsos que superen los valores de 20cm/s (ver Sec. 4.5)

Es importante remarcar que el método funciona muy bien con órbitas de pequeña amplitud (arcos pequeños) y corto período pero, en nuestro caso, utilizando solamente un punto de control se ha logrado estabilizar una OP de transferencia de período  $T \sim 78$  días constituida por grandes arcos. En otros trabajos [36, 37], hemos aplicado el método con éxito utilizando OPs de transferencia que presentan mayor inestabilidad y que poseen períodos mayores.

Es necesario mencionar que, en general, para este tipo de trayectorias, los resultados dejan de ser válidos cuando se consideran las acciones gravitatorias del Sol, la excentricidad y la inclinación de la órbita lunar, etc...

### 4.3. Ejerciendo Control en el PCBC.

En el caso tridimensional, las ecuaciones de movimiento de  $m$  pueden expresarse como un sistema no-autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, t), \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad (4.11)$$

donde  $\vec{r} \in U \subset \mathbb{R}^6$  y  $\vec{f}$  es  $T^\odot$ -periódica en  $t$ .

Para alguna solución  $\vec{r} = \vec{r}(t; \vec{r}_0, t_0)$  (periódica o no), la evolución de las trayectorias cercanas puede analizarse por la linealización de la dinámica alrededor de ésta, la cuál conduce a la ecuación

$$\dot{\mathbf{m}} = A(t)\mathbf{m}, \quad \mathbf{m}(t_0) = I \quad (4.12)$$

para la matriz fundamental de soluciones  $\mathbf{m}(t; t_0)$  en términos de la matriz *gradiente de fuerzas* [12]

$$A(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right]_{\vec{r}=\vec{r}(t; \vec{r}_0, t_0)}. \quad (4.13)$$

Si  $\vec{r}_0$  es una condición inicial que da origen a una órbita  $T$ -periódica, también es un punto fijo  $\vec{r}^*$  del mapa de Poincaré  $P: \vec{r}(t_0 + nT; \vec{r}_0, t_0)$  ( $n$  entero) correspondiente al muestreo del espacio de fases en los instantes  $t_0 + nT$ . Bajo la acción de  $P$ , la dinámica está contenida en una variedad 6-dimensional. En esta superficie de sección  $\Sigma$ , la linealización alrededor de  $\vec{r}^*$  está dada por la matriz de monodromía,  $6 \times 6$ :

$$M = \mathbf{m}(t_0 + T; t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^{t_0+T} A(t) dt \right) = \exp(T\bar{A}), \quad (4.14)$$

donde  $\bar{A} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(t) dt$ , es el promedio temporal de  $A(t)$  sobre un período de la OP. Las expresiones completas de las matrices  $A$  y  $\bar{A}$  del PCBC se muestran en el Apéndice D.3.

Nuevamente podemos estudiar la estabilidad de la OP a través de la linealización de la dinámica alrededor de un punto fijo  $\vec{r}^*$  en  $\Sigma$ , la cuál está determinada por los autovalores de  $M$ . Como se demuestra en el Apéndice D.4, los autovalores están determinados por pares complejos conjugados, tal que, si  $\lambda$  es un autovalor,  $\lambda^{-1}$  también lo es. Así, el polinomio característico de  $M$  tiene la forma:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - s_1\lambda + 1)(\lambda^2 - s_2\lambda + 1)(\lambda^2 - s_3\lambda + 1),$$

donde  $s_k = \lambda_k + 1/\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  son los parámetros de estabilidad. Por lo tanto, bajo el análisis lineal,  $\Sigma$  puede separarse en tres variedades bidimensionales, cada una asociada con cada par de autovalores  $\{\lambda_k, \lambda_k^{-1}\}$ . Ellas serán, individualmente invariantes bajo la acción de  $M$ . Para cada una de estas variedades obtenemos los casos descritos en la Sección 4.1.1, éstos es, estructuras hiperbólica ( $H$ ), elíptica ( $E$ ) y lineal ( $L$ ). En una estructura  $H$ , identificaremos los autovalores  $\lambda_s, \lambda_u$  y sus autovectores  $\vec{e}_s, \vec{e}_u$  con las direcciones estable e inestable respectivamente y en una estructura  $E$  utilizaremos el subíndice  $e$ , éste es,  $\lambda_{e1}, \lambda_{e2}, \vec{e}_{e1}$  y  $\vec{e}_{e2}$  para los autovalores y autovectores respectivamente. Las OPs de transferencia rápida en el PCBC presentadas en el Capítulo 3 y en el Apéndice C presentan estructuras  $H$  y  $E$ , debido a esto, en este trabajo no consideraremos la estructura  $L$ .

## 4.4. Método de control para el PCBC.

Continuando con las ideas de la Sección 4.2, para estabilizar una órbita en una vecindad de un PPI deberemos aplicar perturbaciones para forzar a que la trayectoria esté contenida en los subespacios estables de la OPI.

En la Sección 4.4.1 diseñamos un algoritmo de control lineal que aplica sólo un impulso de control en cada período orbital. En la Sección 4.4.2 extendemos el algoritmo permitiendo la aplicación de múltiples impulsos por período.

### 4.4.1. Control con un solo impulso

Como mencionamos anteriormente, la linealización de la dinámica alrededor de una OP permite separar  $\Sigma$  en tres variedades bidimensionales independientes que se intersectan en el punto fijo  $\vec{r}^*$ , cada una es invariantes bajo la acción de  $M$  y tendrá alguna de las estructuras  $H$  o  $E$ . Estas variedades lineales son tangentes en  $\vec{r}^*$  a las variedades del sistema completo. En principio, uno podría pensar que esto permite diseñar un algoritmo de control sencillo compuesto de tres algoritmos independientes, cada uno actuando sobre cada variedad. En esta Sección veremos que, en general, éste no es el camino adecuado.

Consideremos los vectores

$$\begin{aligned}\vec{r}^* &= (x^*, y^*, z^*, \dot{x}^*, \dot{y}^*, \dot{z}^*)^T = (x, y, z, u, v, w)^T, \\ \delta\vec{r} &= (\delta x, \delta y, \delta z, \delta u, \delta v, \delta w)^T, \\ \vec{\Delta} &= (0, 0, 0, \Delta u, \Delta v, \Delta w)^T,\end{aligned}\tag{4.15}$$

donde  $\vec{r}^* = \vec{r}_0 \in \Sigma$  es un punto fijo del mapa  $P$  correspondiente a una órbita periódica  $\vec{r}(t; \vec{r}_0, t_0)$ , el punto  $\vec{r} = \vec{r}^* + \delta\vec{r}$  representa una trayectoria vecina que presenta un pequeño desplazamiento  $\delta\vec{r}$  respecto de  $\vec{r}^*$  y el vector  $\vec{\Delta}$  corresponde al impulso de control que queremos aplicar sobre esta trayectoria.

Las tres primeras componentes de  $\vec{\Delta}$  son nulas debido a que sólo podemos cambiar instantáneamente el valor de la velocidad de la órbita actual. Como veremos a continuación, esta condición restringe la separación del algoritmo de control en tres algoritmos

independientes que actúen sobre cada variedad bidimensional.

Primero, consideremos el caso de una variedad con una estructura hiperbólica  $H$ . El desplazamiento en  $\Sigma$  que se obtiene para una trayectoria vecina quedará expresado como  $\delta\vec{r} = \xi\vec{e}_u + \eta\vec{e}_s + \vec{d}$ , donde  $\xi$  y  $\eta$  son números reales arbitrarios,  $\vec{e}_u$  y  $\vec{e}_s$  son los autovectores de  $\bar{A}$  (y entonces de  $M$ ) que generan  $H$  correspondientes a los autovalores reales  $\mu$  y  $-\mu$  respectivamente <sup>5</sup> (ver Apéndice D.4), y el vector  $\vec{d}$  es una combinación lineal arbitraria de los autovectores restantes de  $\bar{A}$ . Para ejercer control sobre esta variedad independientemente de las demás, debemos aplicar a  $\delta\vec{r}$  un impulso  $\vec{\Delta} \in H$  para posicionar la órbita sobre la dirección lineal estable  $\vec{e}_s$ , ésto significa que deberemos determinar el valor  $\eta'$  tal que  $\delta\vec{r} + \vec{\Delta} = \eta'\vec{e}_s$ . Sin embargo, como muestra la Ecuación (D.13) los autovectores linealmente independientes  $\vec{e}_u$  y  $\vec{e}_s$  están separados proporcionalmente en componentes de coordenadas y velocidades según

$$\vec{e}_u = \begin{pmatrix} \vec{u}_u \\ \mu\vec{u}_u \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_s = \begin{pmatrix} \vec{u}_s \\ -\mu\vec{u}_s \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

donde  $\vec{u}_u$  y  $\vec{u}_s$  son vectores tridimensionales linealmente independientes. Con todo lo expuesto resulta  $\xi\vec{u}_u + (\eta - \eta')\vec{u}_s = 0$ , lo cuál implica que  $\xi = 0$  y  $\eta = \eta'$ . Así, sólo podremos ejercer control de manera independiente en el caso trivial en el que  $\delta\vec{r}$  no tenga componentes en la dirección de  $\vec{e}_u$ . Así, en el caso general, no podremos lograr el control de manera independiente sobre esta estructura.

Consideremos ahora una variedad bidimensional con una estructura elíptica  $E$ . La primera impresión es que no es necesario ejercer control debido a que nos encontramos ante un caso de estabilidad orbital. Sin embargo, esta característica es derivada del análisis lineal y la dinámica completa del sistema no lineal puede ser inestable alrededor de  $\vec{r}^*$ . Más aún, desde un punto de vista práctico, esta estabilidad neutral puede conducir a la acumulación de perturbaciones externas y de errores numéricos que alejen la trayectoria actual de la vecindad de  $\vec{r}^*$ . Pero el factor determinante que impone la necesidad de ejercer control sobre esta estructura se debe a que, como se mostró anteriormente, en general para lograr la estabilización tenemos que ejercer control sobre las tres variedades simultáneamente.

En una estructura  $E$  no existen direcciones estables e inestables y no podemos exigir que la dinámica actúe de manera tal que la trayectoria se acerque a  $\vec{r}^*$ , pero podemos imponer que los impulsos aplicados mantengan el movimiento sobre  $E$  lo más cerca posible del punto fijo, debido a que, sobre  $E$  los conjuntos invariantes del mapa son elipses que mantienen una proporción fija [27]. Así, podemos imponer como condición de estabilización que el movimiento se desarrolle sobre una elipse que resulte lo más pequeña posible. Como se muestra en el Apéndice D.5, si aplicamos un impulso  $\vec{\Delta}$  que posicione a  $\delta\vec{r}$  sobre una adecuada combinación lineal de las direcciones simétricas  $Re(\vec{e}_e)$  y  $Im(\vec{e}_e)$  de los conjuntos invariantes elípticos, el vector  $\delta\vec{r} + \vec{\Delta}$  yacerá sobre un nuevo conjunto invariante que tendrá las amplitudes de los semiejes más pequeños posibles.

---

<sup>5</sup>Los autovalores de  $M$  son  $\lambda_u = e^{\mu T}$  y  $\lambda_s = e^{-\mu T}$  respectivamente.

A continuación, con las ideas expuestas elaboraremos un algoritmo de control mediante la aplicación de un solo impulso.

Sean tres *vectores de control*  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  en  $\Sigma$ , uno en cada una de las tres variedades bidimensionales correspondientes a cada par de autovalores de  $M$ , y asumamos que éstos son  $\vec{e}_s$  para estructuras  $H$  y la adecuada combinación lineal de  $Re(\vec{e}_e)$  y  $Im(\vec{e}_e)$  para estructuras  $E$  (ver Apéndice D.5). Estos vectores generan una variedad lineal tridimensional  $W \subset \Sigma$  que contiene a  $\vec{r}^*$ . El objetivo del algoritmo es encontrar un impulso de control  $\vec{\Delta}$  que posicione al punto  $\delta\vec{r} + \vec{\Delta}$  sobre  $W$ . Tendremos entonces que

$$\vec{r}^* + \delta\vec{r} + \vec{\Delta} = \vec{r}^* + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \Rightarrow \vec{\Delta} = -\delta\vec{r} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad (4.17)$$

Escribiendo explícitamente las coordenadas de los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  según:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x_a, y_a, z_a, u_a, v_a, w_a)^T, \\ \vec{b} &= (x_b, y_b, z_b, u_b, v_b, w_b)^T, \\ \vec{c} &= (x_c, y_c, z_c, u_c, v_c, w_c)^T, \end{aligned} \quad (4.18)$$

de la Ecuación (4.17) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \\ u_a \\ v_a \\ w_a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \\ u_b \\ v_b \\ w_b \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ u_c \\ v_c \\ w_c \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

En esta expresión consideremos separadamente las ecuaciones que involucran las posiciones y las velocidades. Tomando las tres primeras filas, y asumiendo (ver Apéndice D.4) que:

$$\det \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{pmatrix} \neq 0, \quad (4.20)$$

obtenemos un sistema de ecuaciones que permite determinar los valores de las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Una vez que tenemos determinados los valores  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , fácilmente podemos resolver el segundo grupo de las ecuaciones (4.19) que dará los valores correspondientes al impulso  $\vec{\Delta}$ :

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Seleccionada una OP, determinadas las direcciones  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ , las Ecuaciones (4.21) y (4.22) permitirán calcular los valores de los impulsos necesarios para ejercer el control.

### 4.4.2. Múltiples impulsos de control

Para una estructura  $H$  se presenta un problema potencial cuando el autovalor inestable  $\lambda_u$  de  $M$  es extremadamente grande. En una iteración del mapa  $P$ , una condición inicialmente cercana a  $\vec{r}^*$  puede ser posicionada en una región alejada del punto fijo donde deja de ser válida la linealización. Este razonamiento también es válido cuando consideramos OPs de inestabilidad moderada con grandes períodos; la Ec. (4.14) muestra que, aún en el caso en que un autovalor de  $\tilde{A}$  sea pequeño pero positivo se pueden obtener para  $M$ , autovalores mayores que la unidad cuando el período de la órbita crece. Un problema similar puede ocurrir para estructuras  $E$  debido a la acumulación de perturbaciones y errores numéricos. Ésto ocurre con frecuencia en el caso de las OPs de transferencia Tierra-Luna del PCBC consideradas en este trabajo.

Para contrarrestar estos problemas deberemos aplicar impulsos en intervalos de tiempo menores que un período. Dada una órbita  $T$ -periódica  $\vec{r}(t; \vec{r}_0, t_0)$ , seleccionamos un conjunto de instantes  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0 + T$  y definimos los *puntos de control*

$$\vec{r}_k^* = \vec{r}(t_k; \vec{r}_0, t_0), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

sobre las nuevas superficies de sección  $\Sigma_k$  (notar que  $\Sigma_0 = \Sigma$ ).

Sean  $m_k = m(t_{k+1}; t_k)$  las soluciones en los tiempos  $t_{k+1}$  de

$$\dot{m} = A(t)m, \quad m(t_k) = I, \quad (4.23)$$

las cuáles se corresponden con los mapas linealizados de  $\Sigma_k$  sobre  $\Sigma_{k+1}$ , así

$$M_{k+1} = m_k M_k m_k^{-1}, \quad n = 0, \dots, n-1, \quad (4.24)$$

donde  $M_n = M_0 = M$  y  $m_k^{-1} = m(t_k; t_{k+1})$ . Ahora,  $M_k$  es la matriz de monodromía que representa la linealización del mapa de Poincaré sobre  $\Sigma_k$  alrededor de  $\vec{r}_k^*$ . Cada una de estas matrices tiene la misma estructura que  $M$ , en particular, sus autovalores también vienen dados en pares inversos. Con las propiedades enunciadas en la Sec. 4.4 y mediante el formalismo desarrollado en la Sec. 4.4.1, si reemplazamos  $M$  por  $M_k$ ,  $\vec{r}^*$  por  $\vec{r}_k^*$  y  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  por  $\vec{a}_k$ ,  $\vec{b}_k$ ,  $\vec{c}_k$ , podremos aplicar el algoritmo de control de manera equivalente determinando los impulsos  $\vec{\Delta}_k$  a través de las Ecuaciones (4.21) y (4.22). Una esquema del algoritmo de control con múltiples impulsos se muestra en la Figura 4.5.

Elaborar analíticamente un algoritmo que permita determinar la cantidad de puntos de control que son necesarios para lograr la estabilización de una OP resulta extremadamente complejo. Existen gran cantidad de factores que se deben tener en cuenta como, por ejemplo, el valor del impulso mínimo  $\vec{\Delta}_0$  que se aplicará en cada región de control <sup>6</sup>, la validéz de la linealización en la vecindad de cada punto de control  $\vec{r}_k^*$ , la elección de la posición de los puntos de control a lo largo de la órbita, el período  $T$  de la OP, los valores de los autovalores de  $M$ , el tipo de estructura de cada caso particular, etc..

Por otro lado, asumamos que para una OP hemos determinado de alguna forma el número mínimo de puntos de control  $n_0$  que logra la estabilización aplicando impulsos de estabilización superiores a un valor mínimo  $\vec{\Delta}_0$  <sup>7</sup>. En general, con esta cantidad

<sup>6</sup>En la práctica, impulsos de control extremadamente pequeños carecen de sentido físico

<sup>7</sup>En este trabajo,  $n_0$  se determinó en forma numérica para cada caso, realizando distintos intentos aumentando la cantidad de puntos de control utilizados (Sec. 4.5).

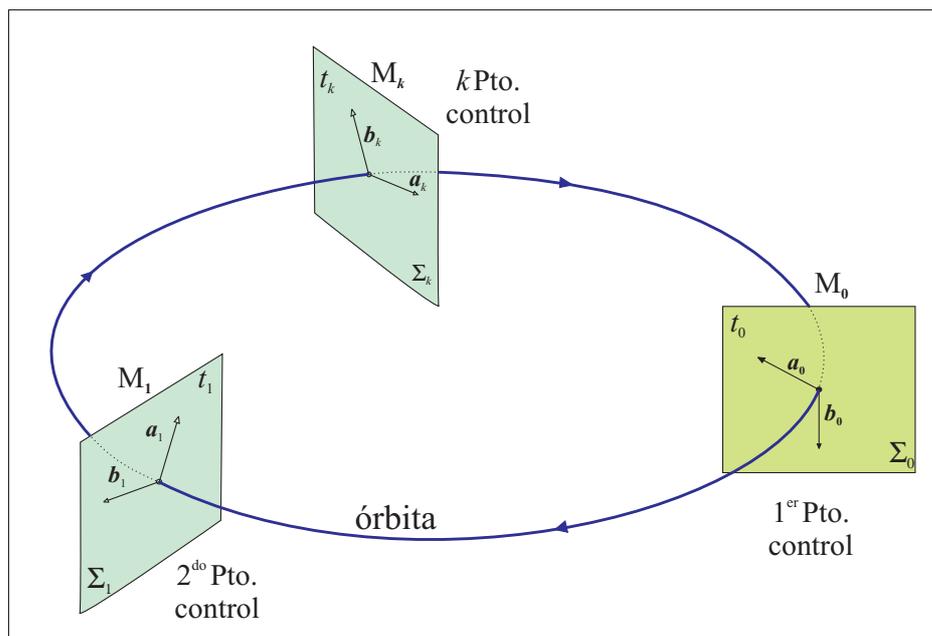


Figura 4.5: Representación del algoritmo utilizando más puntos de control.

de puntos no obtendremos un consumo óptimo <sup>8</sup>. Tampoco mejoraremos los resultados si aumentamos extremadamente el número de puntos utilizados. Por ejemplo, para una estructura  $H$ , los puntos  $r_k^*$  podrían encontrarse muy próximos entre sí; cuando la trayectoria es corregida en alguna región de control, evolucionará sin permitir que la dinámica actúe en forma efectiva y al ingresar en alguna región vecina, el algoritmo de control aplicará un nuevo impulso produciendo un aumento de consumo y en algunos casos, desestabilizando la trayectoria <sup>9</sup>.

Así, en la Sección 4.5 aplicaremos el algoritmo de control y resolveremos estas cuestiones numéricamente para cada caso particular.

#### ***Principales ventajas del método:***

- Resulta de fácil implementación práctica.
- Es un método de control de baja energía.
- El control se logra a través de pequeños impulsos.
- Podemos aumentar los puntos de control que se utilizan. Además, es posible determinar el número óptimo de puntos de control que estabilizan una OPI (Sec. 4.5).
- En cada región de control, sólo necesitamos determinar las direcciones  $\vec{a}_k$ ,  $\vec{b}_k$  y  $\vec{c}_k$  de las variedades tridimensionales estables  $W_k$ .

<sup>8</sup>El consumo de combustible es proporcional a los impulsos aplicados.

<sup>9</sup>En general, ésto no ocurrirá cuando utilicemos impulsos permitidos  $\vec{\Delta}_0$  extremadamente pequeños. Notar que para  $\vec{\Delta}_0 \rightarrow \vec{0}$  y  $n \rightarrow \infty$ , la clasificación de nuestro algoritmo será *Control Feedback*.

- Los instantes en los que se ejerce control están determinados sólo por la fase solar.
- En general, se logra estabilizar cualquier trayectoria si se aplican impulsos extremadamente pequeños. (En la práctica, estos impulsos carecen de sentido físico).
- El método se aplica sin restricciones a todo tipo de OPIs existentes en el PCBC.
- El algoritmo fácilmente puede ser extendido al PBC.

***Principales desventajas:***

- La linealización debe ser válida en un entorno relativamente grande del punto control.
- El éxito de la estabilización depende fuertemente de la precisión con la que se determinen las direcciones  $\vec{a}_k$ ,  $\vec{b}_k$  y  $\vec{c}_k$ .
- Variedades aproximadamente paralelas. En estos casos, imprecisiones en los impulsos aplicados pueden posicionar al punto  $\vec{r}$  sobre alguna de las variedades inestables del correspondiente punto fijo  $\vec{r}_k^*$ .
- En general, OPIs de períodos grandes ( $T \gg T^\odot$ ) requieren gran cantidad de puntos de control y son difíciles de estabilizar.
- Aplicar el algoritmo con impulsos realistas aún, cuando se utilizan gran cantidad de puntos de control (valores del impulso mínimo  $\vec{\Delta}_0$  grandes).
- A priori, el método no permite saber la cantidad mínima de puntos de control  $n_0$  que se deben utilizar y la posición de éstos a lo largo de la órbita.

## 4.5. Procedimientos utilizados y resultados.

Para aplicar el algoritmo de control seleccionamos algunas de las OPIs que figuran en las Secciones 3.2.1 y 3.4.1 y en el Apéndice C. Para obtener mayor precisión en los resultados refinamos cada condición inicial mediante un algoritmo que implementa el método de Newton-Raphson hasta lograr la convergencia con un error menor a  $10^{-11}$ . Todas estas OPs yacen en el plano  $xy$  ( $z = \dot{z} = 0$ ). Como se muestra en el Apéndice D.4, según el análisis lineal, el plano  $(z, \dot{z})$  presenta una estructura  $E$ . Así, en todos los casos, asumimos los vectores  $\vec{c}_k = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$  como una de las tres direcciones que generan las variedades lineales  $W_k$ .

Como puntos de control utilizamos  $n$  puntos que se encuentran equiespaciados temporalmente a lo largo del período  $T$  de la órbita. Cada punto se corresponde con un instante de tiempo  $t_k = t_0 + \frac{k}{n}T$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  y un valor de fase solar  $\phi_k = \frac{2\pi}{T^\odot}(t_0 + \frac{k}{n}T) \bmod(2\pi)$ . Integrando las ecuaciones de movimiento y las Ecuaciones (4.23) y (4.24) se obtuvieron los puntos fijos  $\vec{r}_k^*$  y las direcciones estables  $\vec{a}_k$  y  $\vec{b}_k$  correspondientes. Para cada OP, se confeccionaron 15 grupos de puntos de control ( $1 \leq n \leq 15$ ). En un primer intento y con el fin de aplicar impulsos de control realistas, se aplicó el método de control a cada grupo de puntos de control de una OP durante  $1000 T^\odot$  ( $\sim 81$  años) utilizando sólo impulsos superiores a  $|\vec{\Delta}_0| = 2 \times 10^{-4}$  ( $\sim 20$  cm/s). En cada caso, se determinó el

número mínimo de puntos  $n_0$  que logra la estabilización, el consumo total acumulado  $\Delta_T(n) = |\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w|$ <sup>10</sup> para cada grupo y el número óptimo de puntos de control  $n_{\otimes}$  que minimiza el consumo. Para las OPIs que no se pudieron estabilizar con este criterio, se asumieron valores  $|\vec{\Delta}_0|$  menores. Las integraciones numéricas se realizaron con una rutina en lenguaje Fortran90 con un integrador Bulirsch - Stoer de precisión  $10^{-14}$  empleando el algoritmo de bisección para determinar los valores  $t_k$  correspondientes a cada región de control con un error  $< 10^{-13}$  [20]. En todos los casos se dejó evolucionar la trayectoria a partir de la condición inicial sin aplicar perturbaciones.

La Figura 4.6 muestra las curvas de consumo total acumulado  $\Delta_T(n)$  obtenidas para cada OP y para cada grupo de puntos de control aplicando el algoritmo con impulsos  $|\delta\dot{x}| = |\Delta u|$  y  $|\delta\dot{y}| = |\Delta v|$  superiores al valor  $|\vec{\Delta}_0|$  (ver Tabla 4.1). Los valores de los puntos de control  $\vec{r}_k^*$  y de las direcciones estables  $\vec{a}_k$  y  $\vec{b}_k$  que logran un consumo óptimo en cada trayectoria se anexan en el Apéndice D.6.

---

<sup>10</sup>Notar que para OPs que yacen en el plano  $xy$  se tiene  $z = \dot{z} = 0$ , así  $\Delta w = 0$ .

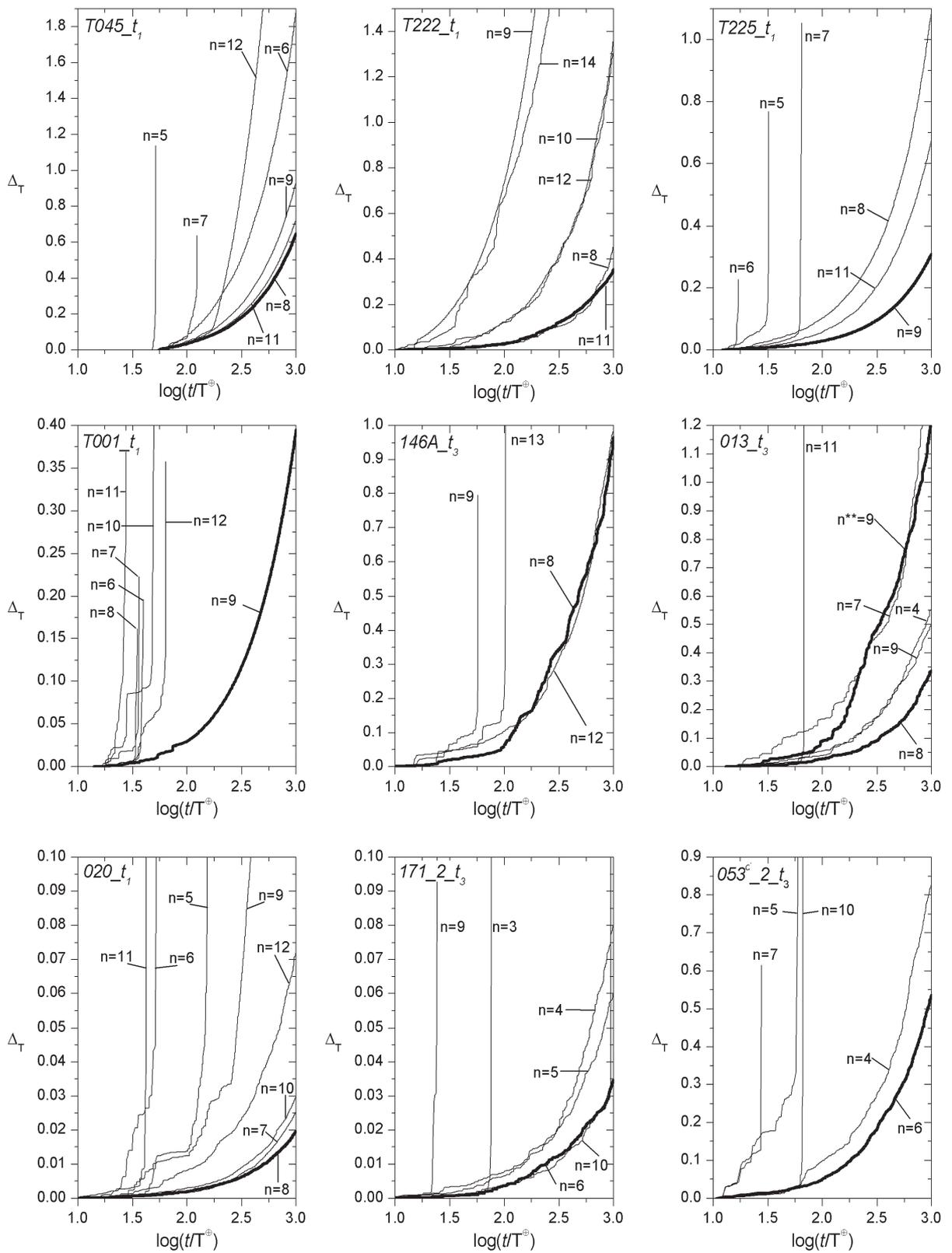


Figura 4.6: Curvas de consumo obtenidas con  $n$  puntos de control. La curva resaltada corresponde al consumo óptimo.

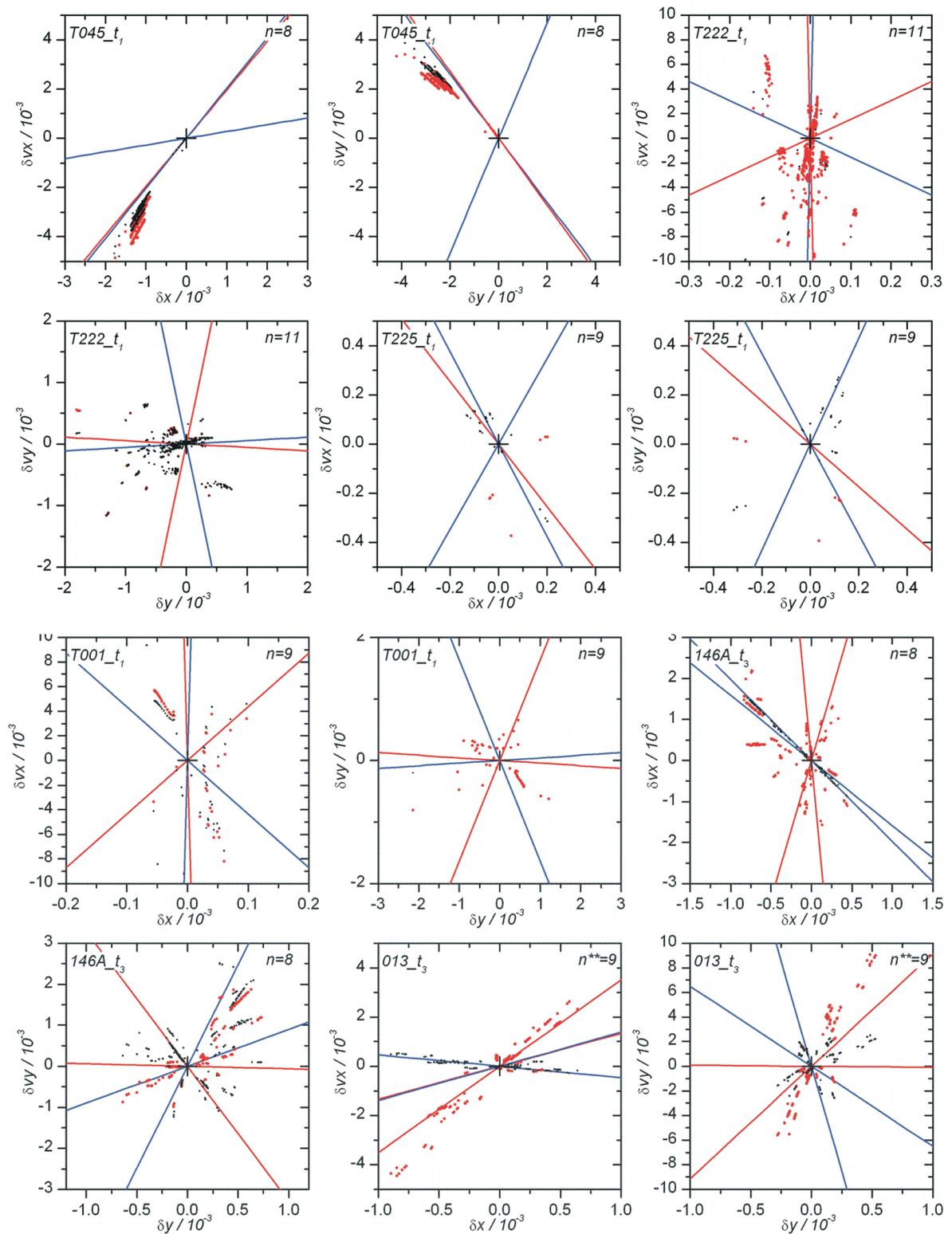


Figura 4.7: Evolución de las trayectorias en la región de control de  $r_0^*$  (cruz). Las líneas azules (rojas) se corresponden con la proyección de las direcciones estables (inestables) de  $W$ .

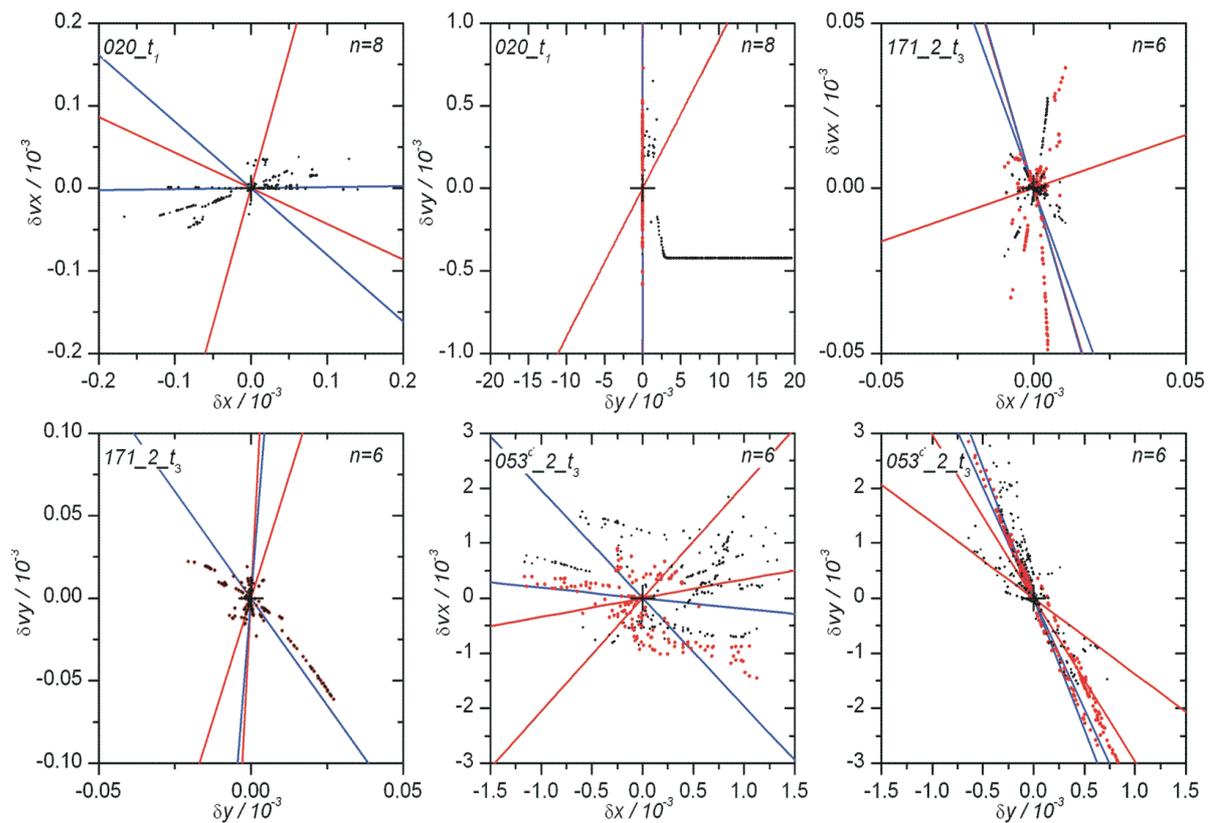


Figura 4.8: Evolución de las trayectorias en la región de control de  $\bar{r}_0^*$  (cruz). Las líneas azules (rojas) se corresponden con la proyección de las direcciones estables (inestables) de  $W$ .

#### 4.5.1. Discusión.

El método de control resultó efectivo en todos los casos, permitiendo estabilizar OPs con estructuras  $E \times E \times H$  (1-inestables) y  $E \times H \times H$  (2-inestables) durante un intervalo de tiempo mayor al requerido en implementaciones prácticas y utilizando valores de impulsos realistas ( $1000T^\odot \sim 81$  años). Es importante remarcar que todas las OPs utilizadas realizan transferencias entre la Tierra y la Luna y, en particular, las órbitas 146A\_t3, 013\_t3, 020\_t1, 171\_2\_t3 y 053^d\_2\_t3 son de baja energía con períodos  $3T^\odot$ ,  $4T^\odot$  y  $5T^\odot$ , y presentan gran acercamiento a la Luna. En un trabajo anterior [6], se aplicó con éxito el método en OPIs tipo satélite <sup>11</sup> y en órbitas que se desarrollan alrededor de los puntos lagrangeanos. En estos casos, debido a las características que presentan estas órbitas (forma, amplitud y períodos más pequeños), la estabilización resultó más efectiva.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se refleja la efectividad del algoritmo. En este caso, las trayectorias controladas evolucionan en una región muy pequeña alrededor de  $\bar{r}_0^*$ . En general, todas las trayectorias retornan a  $\Sigma$  con apartamientos menores a  $\sim 2000$  km y  $\sim 5$  m/s

<sup>11</sup>Estas órbitas se desarrollan en la parte exterior del sistema Tierra-Luna sin realizar transferencias.

Tabla 4.1: Resultados obtenidos al aplicar el método de control.  $|\vec{\Delta}_0|$ : impulso mínimo ejercido;  $n_0$ : cantidad mínima de puntos que logran la estabilización;  $n_{\otimes}$ : número óptimo de puntos de control;  $t_{ini}/T^\odot$ : instante en que se aplica el primer impulso;  $\Delta_T(n_{\otimes})$ : consumo óptimo acumulado en 1000  $T^\odot$ ;  $\bar{\Delta}/$  año: consumo medio anual requerido.

OP	estruc.	$ \vec{\Delta}_0 $	$n_0$	$n_{\otimes}$	$t_{ini}/T^\odot$	$\Delta_T(n_{\otimes})$	$\bar{\Delta}/$ año
$T045_{t_1}$	$E \times E \times H$	0,00020	6	8	55,4	0,6477	8,71 m/s
$T222_{t_1}$	$E \times H \times H$	0,00020	8	11	10,5	0,3531	4,54 m/s
$T225_{t_1}$	$E \times E \times H$	0,00020	3	9	12,0	0,3095	3,98 m/s
$T001_{t_1}$	$E \times H \times H$	0,00020	9	9	14,0	0,3948	5,09 m/s
$146A_{t_3}$	$E \times H \times H$	0,00020	2	8	9,0	0,9664	12,39 m/s
$013_{t_3}$	$E \times H \times H$	0,00020	9	9	16,0	0,1219	1,57 m/s
$020_{t_1}$	$E \times H \times H$	0,00001	7	8	10,5	0,0196	0,25 m/s
$171_{t_3}$	$E \times H \times H$	0,00001	4	6	8,7	0,0042	0,05 m/s
$053^d_{t_3}$	$E \times H \times H$	0,00020	4	6	10,8	0,5364	6,89 m/s

respecto de la OPI de referencia. Los máximos desplazamientos en velocidad de  $\sim 10$  m/s se obtienen en las OPs  $T222_{t_1}$  y  $T001_{t_1}$  de alta energía y en la OP  $013_{t_3}$  de baja energía. Sólo se registra un caso de apartamiento espacial de  $\sim 8000$  km en la OP asimétrica de baja energía  $020_{t_1}$ , en este caso particular, se puede ver que en el plano  $(y, \dot{y})$  las proyecciones uno de los pares de variedades estable e inestable son similares (variedades paralelas).

Las curvas de consumo total acumulado (Fig. 4.6) corroboran lo expuesto en la Sección 4.4.2. El control no se optimiza si se utilizan gran cantidad de puntos de control, más aún, en algunos casos la trayectoria no se estabiliza y es expulsada fuera de la región donde es válida la linealización.

El consumo medio anual requerido ( $\bar{\Delta}/$  año) resultó extremadamente bajo y en todos los casos, utilizando un impulso mínimo de control  $|\vec{\Delta}_0| = 0,0002$  ( $\sim 20$  cm/s), resultó  $< 12,39$  m/s. Sólo las órbitas  $020_{t_1}$  y  $171_{t_3}$  se estabilizaron utilizando valores de impulsos mínimos más pequeños  $|\vec{\Delta}_0| = 0,00001$  ( $\sim 1$  cm/s). La OP  $013_{t_3}$  se logró estabilizar con impulsos mayores a  $|\vec{\Delta}_0| = 0,00020$  para un solo grupo de puntos de control  $n^{**} = 9$ . En la Figura 4.6 se agregaron para esta órbita, las curvas de consumo obtenidas aplicando impulsos  $\geq 0,00001$ .

Mediante el análisis lineal podemos realizar una estima del tiempo necesario que debe transcurrir antes de requerir la aplicación del primer impulso de control. Una condición inicial que se encuentre a una distancia  $d_0$  de  $\bar{r}_0^*$ , incrementará su valor con cada iteración del mapa de Poincaré según  $d_n \sim |\bar{\lambda}|^n d_0$ , donde  $\bar{\lambda}$  es la suma cuadrática de los autovalores con valores absolutos más grandes que la unidad.

Teniendo en cuenta los valores de los impulsos aplicados  $|\vec{\Delta}_0|$ , la precisión numérica con

la que se ha determinado cada órbita  $T$ -periódica y asumiendo  $d_n = |\vec{\Delta}_0|$  tendremos:

$$t_{ini} \simeq \frac{T}{T^\odot} \frac{\log(|\vec{\Delta}_0|/d_0)}{\log(|\bar{\lambda}|)}. \quad (4.25)$$

En la Tabla 4.2 se muestran los valores de los tiempos iniciales  $t_{ini}$  estimados para un apartamiento inicial  $d_0 \sim 10^{-11}$ . Estos resultados son coherentes con los obtenidos numéricamente al ejercer control (ver Tabla 4.1).

Tabla 4.2: Valores estimados de los tiempos iniciales  $t_{ini}$  necesarios para ejercer control a partir de una distancia inicial  $d_0 \sim 10^{-11}$ .

OP	$ \vec{\Delta}_0 $	$ \bar{\lambda} $	$t_{ini}$
$T045_{t_1}$	0,00020	1,341	57,3
$T222_{t_1}$	0,00020	5,465	9,9
$T225_{t_1}$	0,00020	3,207	14,4
$T001_{t_1}$	0,00020	12,194	13,4
$146A_{t_3}$	0,00020	338,619	8,7
$013_{t_3}$	0,00020	159,959	13,3
$020_{t_1}$	0,00001	766,288	8,3
$171_2_{t_3}$	0,00001	1336,886	7,7
$053^d_2_{t_3}$	0,00020	3878,905	10,1

### Estabilidad del algoritmo de control

Es natural plantearse sí, fijado un impulso mínimo  $|\vec{\Delta}_0|$ , el algoritmo de control será capaz de estabilizar la trayectoria cuando consideremos perturbaciones y posibles errores en la aplicación de los impulsos de control.

En general, podemos esperar que el algoritmo funcione correctamente cuando se consideren perturbaciones que provoquen diferencias entre la trayectoria y la OPI del mismo orden que las diferencias encontradas en cada caso cuando se ejerce el control (ver Figuras 4.7 y 4.8).

Para realizar una estima, asumamos que en la práctica la aplicación de los impulsos contiene un error aproximado de un  $\sim 20\%$  del valor utilizado  $|\vec{\Delta}_0|$ . Ésto, se corresponde con una perturbación que no superará un apartamiento  $d_P \sim 4 \times 10^{-5}$  respecto de la trayectoria original corregida. Analizando los resultados obtenidos en la estabilización, podemos concluir que ésto no afectará la efectividad del algoritmo.

Por otro lado, consideremos al PCBC perturbado por una masa  $m_J$  que se mueve en una órbita circular de radio  $d_J$  alrededor del Sol. Usando los valores equivalentes al planeta Júpiter, el valor de la perturbación en el PCBC será:

$$m_J \sim \frac{m_s}{1047} \sim 314 \quad ; \quad d_J \sim 5,2a_s \sim 2022 \quad ; \quad d_P \sim 1,2 \times 10^{-4},$$

así,  $d_P \sim O(\Delta_0)$  y nada garantizará que el algoritmo funcione. La estabilización dependerá principalmente de la validéz del análisis lineal en las regiones de control utilizadas

y deberemos analizar cada caso.

Para ver si aún es posible lograr la estabilización de las OPIs se perturbó el PCBC con 7 masas que se mueven en el plano  $xy$  en órbitas circulares alrededor del Sol. Para cada masa se utilizaron los valores correspondientes a los planetas Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno <sup>12</sup>. Se seleccionó la OPI  $146A_t3$  y para ejercer control se utilizaron los valores que optimizaron la estabilización en el PCBC no perturbado;  $|\vec{\Delta}_0| = 0,00020$  y  $n_{\oplus} = 8$ .

Se realizaron 400 integraciones numéricas de la trayectoria en intervalos de  $500T^{\oplus}$ , eligiendo aleatoriamente en cada integración, los valores de las fases iniciales de las masas perturbadoras.

En todos los casos el algoritmo de control resultó efectivo y requirió aplicar impulsos de control desde el inicio de las integraciones. La Figura 4.9 muestra las curvas de consumo obtenidas en las 400 integraciones. Para esta OP, obtenemos un consumo medio anual  $\bar{\Delta}$ /año mínimo y máximo de  $\sim 10$  m/s y  $\sim 71$  m/s respectivamente.

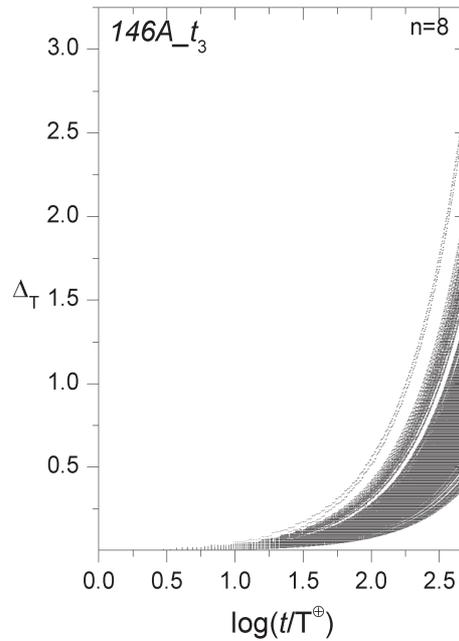


Figura 4.9: Curvas de consumo en el PCBC perturbado para la OP  $146A_t3$  obtenidas al realizar 400 integraciones numéricas durante un intervalo de  $500T^{\oplus}$ .

#### 4.5.2. Comentarios Finales y Conclusiones.

El método de control fué implementado con éxito. En particular, se lograron estabilizar OPIs de baja energía que realizan transferencias rápidas entre la Tierra y la Luna con períodos  $3T^{\oplus}$ ,  $4T^{\oplus}$  y  $5T^{\oplus}$  por un intervalo de tiempo de  $1000T^{\oplus}$  utilizando

<sup>12</sup>Por completitud se utilizaron 7 masas pero la mayor perturbación es ejercida por la masa equivalente al planeta Júpiter.

impulsos de control realistas que en la mayoría de los casos resultaron mayores a 20 cm/s. Estas trayectorias poseen gran acercamiento a la Luna y algunas de ellas pueden ser capturadas alrededor de la Luna con sólo aplicar impulsos menores a 10 m/s (ej. OPs 013\_ $t_3$  y 013\_ $t_4$ ). Estas características las hacen potencialmente interesantes para ser utilizadas en misiones de larga duración que resulten económicas.

La estabilización utiliza impulsos acumulados mínimos; en todas las OPs los impulsos anuales medios no superaron el valor  $\bar{\Delta}/\text{año} \sim 12,39$  m/s (Tabla 4.2).

Por otro lado, se ha logrado estabilizar la OP 146A\_ $t_3$  utilizando el PCBC perturbado. En este caso, vemos que el algoritmo funciona sobre trayectorias complejas<sup>13</sup> aún cuando consideramos perturbaciones realistas. Si bien no se puede generalizar, en este caso hemos demostrado que se puede determinar una OPI de transferencia de baja energía que cumpla con los requisitos necesarios para aplicar el algoritmo y que se puede estabilizar con impulsos realistas durante intervalos de tiempo que resultan extremadamente significativos ( $500T^\odot$ ) cuando se consideran perturbaciones realistas.

El algoritmo puede optimizarse sí, dada una OPI, reconstruimos las variedades estables e inestables del sistema no-lineal completo. Ésto, obviamente permitiría estabilizar nuevas trayectorias que no pueden ser estabilizadas según la aproximación lineal, mejorar los consumos obtenidos e implementar impulsos  $|\vec{\Delta}_0|$  mayores. Comparando este procedimiento con las bases de nuestro método, se mejorarían los consumos pero se aumentaría la complejidad del problema, no sólo por la dificultad que se presenta al intentar reconstruir numéricamente las variedades estables del punto  $\vec{r}^*$ , sino porque se perdería efectividad en la simplicidad de la implementación práctica del algoritmo. En nuestro método, las ecuaciones que permiten determinar los impulsos necesarios están desacopladas en dos sistemas de ecuaciones lineales sencillas. A ordenes más altos las ecuaciones no se desacoplan y deberíamos analizar cada caso en particular.

Existen órbitas en el PCBC que fácilmente pueden extenderse al sistema solar real (SSR)(ej. órbitas lagrangeanas de pequeña amplitud [7, 38, 39]). En estos casos, se puede aceptar que los resultados obtenidos en el PCBC sirven de referencia para ser utilizados en trayectorias reales. En nuestro caso, hemos logrado estabilizar OPs considerando perturbaciones realistas, pero estas perturbaciones no son representativas cuando consideramos la inclinación de la órbita lunar. Así, podremos esperar que nuestras OPs de transferencia, dadas sus características, no siempre permitan la extensión al SSR. Al respecto remarcamos dos cosas: primero, existen OPIs en el PCBC que pueden tomarse como referencia en el SSR y pueden ser estabilizadas utilizando, como una primera aproximación, los resultados que arroja nuestro método de control; en segundo lugar, todo el análisis que hemos desarrollado en los capítulos 2, 3 y 4 ha permitido acortar de manera significativa la barrera entre lo que denominamos trayectorias sólo de importancia teórica y órbitas de referencia para ser utilizadas en la práctica, además, estas OPs de transferencia en el PCBC pueden utilizarse como paso intermedio para encontrar arcos equivalentes en el SSR, lo que implica un gran avance. En el siguiente capítulo abordaremos este problema y determinaremos trayectorias en el SSR a partir de los resultados encontrados en el PCBC.

---

<sup>13</sup>El término *complejo* se utiliza aquí para describir a una trayectoria que realiza transferencias, que posee una gran extensión o amplitud y que además posee un período mayor al del sistema  $T > T^\odot$ .

Como comentario final es importante mencionar que existen trabajos actuales que abordan el problema de la identificación, estabilización y control de trayectorias en el Sistema Tierra-Luna enfocados en el diseño de misiones espaciales que puedan implementarse (ej. [7, 33, 34, 38, 39, 40]). En particular, en el trabajo de Gómez (2001) [33] se implementa una estrategia de control sobre órbitas Halo que presenta características similares a las empleadas en el algoritmo de control presentado en la Sección 4.4. A partir del análisis de la evolución *futura* de las variedades de una OP de referencia, se determinan los valores de los impulsos de control y los instantes de tiempo correspondientes en los que se deben aplicar. Logran mantener una trayectoria estabilizada transformándola en una órbita Halo alrededor de L2 cuasi-periódica en el sistema Tierra-Luna.

En nuestro caso, las trayectorias utilizadas realizan transferencias entre la Tierra y la Luna; fijando una OP de referencia y determinando los puntos de control  $\vec{r}_k^*$ , las correspondientes direcciones estables  $\vec{a}_k$ ,  $\vec{b}_k$  y  $\vec{c}_k$  se mantienen fijas y la determinación de los impulsos que se deben aplicar sólo depende de las variedades lineales  $W_k$  (ver D.5). En ambos métodos los valores de los impulsos aplicados y los consumos obtenidos son comparables.

Por otro lado, en los trabajos de Bollt y Meiss [15], Yagasaki [16, 17], Scheeres [41], entre otros, se determinan trayectorias y OPs de transferencia Tierra-Luna en el PC3CR, PCB y en modelos simplificados (aproximación de Hill aplicada al problema de cuatro cuerpos restringido), en los cuales, se extiende la validéz de los resultados al SSR. En general, ésto no es cierto y hay que tener extremo cuidado en la interpretación los mismos. En el Sistema Solar real, cuando se intentan reconstruir numéricamente trayectorias que están compuestas por grandes arcos y que además se desarrollan por intervalos de tiempo grandes utilizando las condiciones iniciales determinadas en otros modelos, se obtienen resultados significativamente distintos. La extensión al SSR no constituye en absoluto un problema trivial.

# Capítulo 5

## Trayectorias en el Sistema Solar Real.

### 5.1. Introducción.

En este Capítulo discutimos la extensión al Sistema Solar real (SSR) de las OPs y las órbitas *arco* de transferencia determinadas en el PCBC.

El *Jet Propulsion Laboratory* (JPL) de la N.A.S.A. [42], proporciona en forma libre y gratuita, las efemérides de los cuerpos del Sistema Solar y rutinas construídas en Fortran77 que permiten interpretarlas y utilizarlas. Mediante la rutina JPLEPH.FOR, se pueden obtener las posiciones y velocidades respecto de un sistema de coordenadas con origen en el baricentro Tierra-Luna (sistema baricéntrico, SCB) referidas a una época estándar (1950, 2000, . . .) expresadas en unidades del sistema internacional. En particular, en este trabajo se utilizó sólo el período comprendido entre los años 2000 a 2020 del paquete DE405 (ascp2000.405) referido a la época inicial 1 Enero de 2000 (día Juliano 2451545.0).

Para realizar la extensión de las trayectorias utilizamos un sistema de coordenadas sinódico con origen en el baricentro Tierra-Luna (SCS). En este sistema, el factor de escala espacial se elige de manera tal que la distancia entre la Tierra y la Luna resulte unitaria; el factor de escala temporal impone que el SCS rote con velocidad angular constante  $|\vec{\omega}| = 1$ <sup>1</sup>.

Sean  $t$  y  $\tau$  las expresiones del tiempos en los sistemas de coordenadas SCS y SCB. El tiempo sinódico  $t$  no variará uniformemente con  $\tau$  y deberá satisfacer la siguiente relación:

$$\omega dt = dt = \Omega d\tau,$$

donde  $\Omega$  representa la velocidad angular de rotación del SCS respecto del SCB.

A partir de las efemérides del JPL se integraron numéricamente todas las cantidades involucradas y se confeccionó una nueva efemérides simplificada **JPL2** que expresa el tiempo sinódico  $t$  y las posiciones del Sol, la Tierra y la Luna en el SCB en intervalos de

---

<sup>1</sup>Este sistema tiene las mismas unidades que el PCBC.

tiempo regulares  $\Delta\tau$  a partir de un instante inicial arbitrario  $\tau_0$ . Esta efemérides permitió disminuir el uso de memoria y el tiempo de cómputo requerido por las integraciones numéricas. En la siguiente Sección se describen las características de JPL2.

En el Apéndice E.1 se muestran las relaciones y equivalencias entre los sistemas SCS y SCB. En las Secciones 5.3 y 5.4 se detallan los procedimientos utilizados en la extensión de trayectorias y se muestran algunos resultados.

## 5.2. Efemérides utilizada. JPL2.

Como primer paso, se determinó un instante de tiempo  $\tau_0$  en el cuál, el SSR presenta valores similares a los asumidos en el modelo PCBC <sup>2</sup>. Mediante las efemérides del JPL se analizaron los valores de las siguientes magnitudes durante los años 2007, 2008 y 2009:

- $s = |\vec{R}_{TL}| = |\vec{R}_L - \vec{R}_T|$ : distancia entre la Tierra y la Luna (factor sinódico de escala espacial),
- $v = \frac{1}{s\Omega} \vec{V}_{TL} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{TL})$ : factor de escala sinódico de velocidades,
- $\Omega$ : velocidad angular de rotación del SCS respecto del SCB,
- $r_s, x_s, y_s, z_s$ : distancia baricéntrica solar y coordenadas sinódicas del Sol.

Así, para intentar la extensión numérica se seleccionó como tiempo inicial  $\tau_0$  el día Juliano 2454217.6 (correspondiente a la fecha 9 de Febrero de 2008). La Tabla 5.1 muestra los valores obtenidos de las magnitudes en el SSR y el PCBC para  $\tau_0$ .

Tabla 5.1: Valores del SSR y el PCBC en  $\tau_0$ .

	SSR	PCBC
$s$	$\sim 383745$ km	$\sim 384400$ km
$v$	$\sim 954$ m/s	$\sim 1024$ m/s
$\Omega$	$\sim 2,68 \times 10^{-6}$ rad/s	$\sim 2,46 \times 10^{-6}$ rad/s
$r_s$	$\sim 385,48$ un. sinódicas	$\sim 392,08$ un. sinódicas
Coordenadas sinódicas del Sol		
$x_s$	$\sim 385,47$	392,08
$y_s$	$\sim 1 \times 10^{-8}$	0
$z_s$	$\sim -2,56$	0

Las trayectorias determinadas en el PCBC (Sec. 3.4.1, Ap. C) tienen períodos  $T \leq 5T^\odot$ . A partir de  $\tau_0$  ( $t = 0$ ) y como paso final, se integraron las efemérides del JPL y se confeccionó una nueva efemérides JPL2 con las posiciones y velocidades del Sol, la Tierra y la Luna en el SCB y el correspondiente valor del tiempo sinódico  $t$ , extraídos en intervalos regulares de  $\Delta\tau = 3600$  segundos para el rango  $-T^\odot \leq t \leq 6T^\odot$ .

<sup>2</sup>Se intentó determinar como fecha inicial algún instante de tiempo próximo a la fecha de presentación y defensa de este trabajo (primer cuatrimestre del año 2008).

Para realizar la extensión de las trayectorias (Sec. 5.3.1) se utilizó como variable independiente el tiempo sinódico  $t$ <sup>3</sup>.

En la implementación de JPL2, las posiciones y velocidades en un tiempo  $t$  se determinaron mediante un algoritmo de interpolación polinomial de 11 puntos que asume como punto central de la secuencia al valor de tiempo  $t_i$  más próximo a  $t$ . En el período considerado, los valores obtenidos con este procedimiento registran en error absoluto máximo de  $\sim 10^{-12}$  respecto de los obtenidos directamente utilizando las efemérides del JPL. La Figura 5.1 muestra un esquema del algoritmo utilizado.

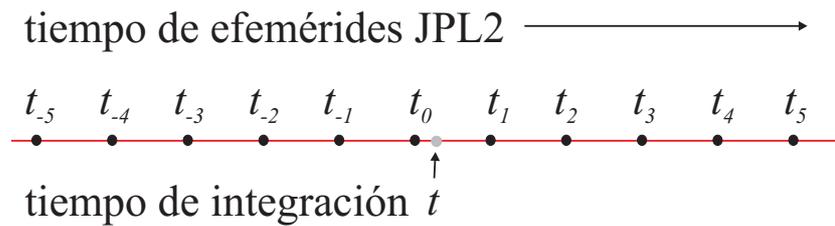


Figura 5.1: Esquema del algoritmo de interpolación utilizado en la lectura de JPL2.

La Figura 5.2 muestra los espaciamientos temporales  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  de los puntos que constituyen las efemérides JPL2 respecto de los intervalos  $\Delta\tau$ . Claramente se refleja la no uniformidad entre los tiempos  $t$  y  $\tau$ .

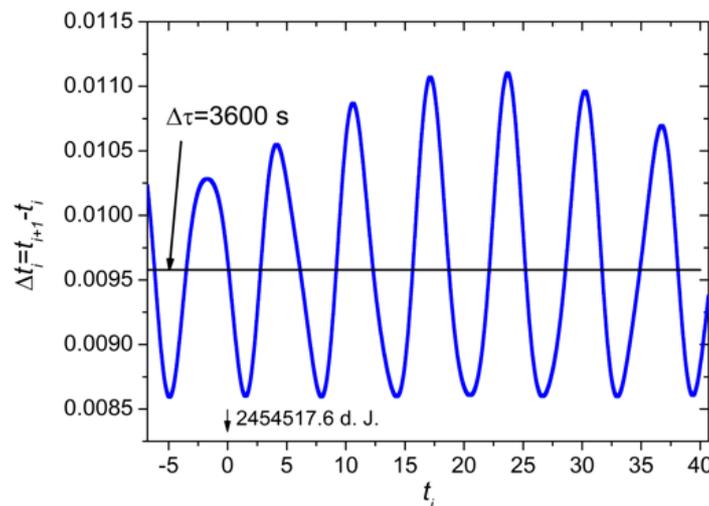


Figura 5.2: Espaciamientos  $\Delta t_i$  en JPL2.

En la Figura 5.3, se representa variación de las magnitudes  $s$ ,  $v$ ,  $\Omega$  y  $r_s$  (curvas en rojo) y los correspondientes valores asumidos en el PCBC (curvas en azul). Las variaciones

<sup>3</sup>Es el tiempo utilizado en las ecuaciones del PCBC.

mínimas se registran en el intervalo  $-5 \lesssim t \lesssim 5$  y aumentan gradualmente para valores crecientes de  $t$ . En  $\tau_0$  ( $t = 0$ ) los valores de todas las magnitudes son extremadamente cercanos (Tabla 5.1). Además, la Figura 5.4 permite ver que, el Sol, la Tierra y la Luna son prácticamente colineales en  $t = 0$ <sup>4</sup>. Lo expuesto anteriormente justifica nuestra elección para del origen del tiempo.

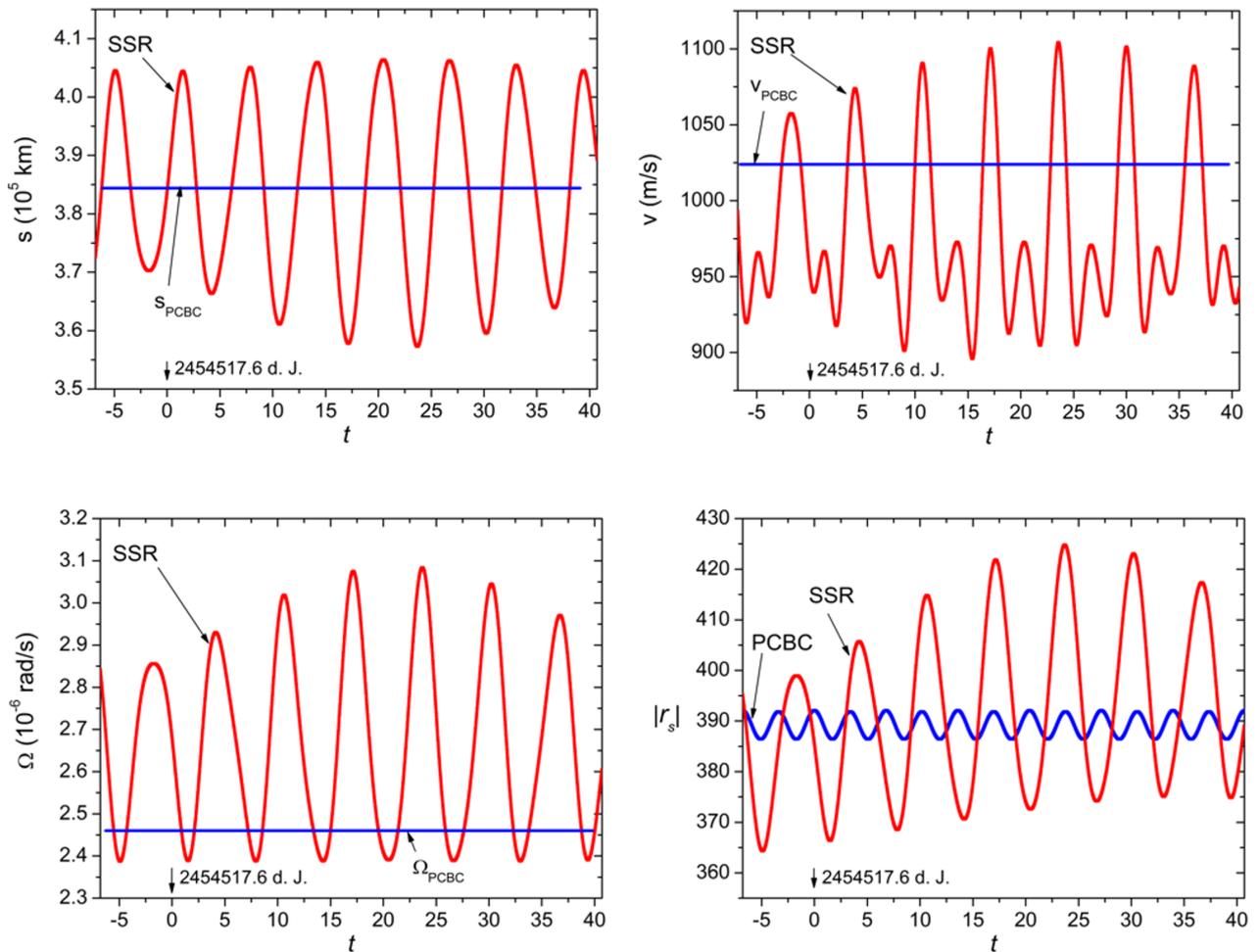


Figura 5.3: Variación de  $s$ ,  $v$ ,  $\Omega$  y  $|r_s|$  con el tiempo sinódico  $t$ . En azul (rojo) se muestran los valores correspondientes al PCBC (SSR).

<sup>4</sup>El 8 de febrero, un día antes del correspondiente al tiempo  $\tau_0$ , ocurre un eclipse de Luna.

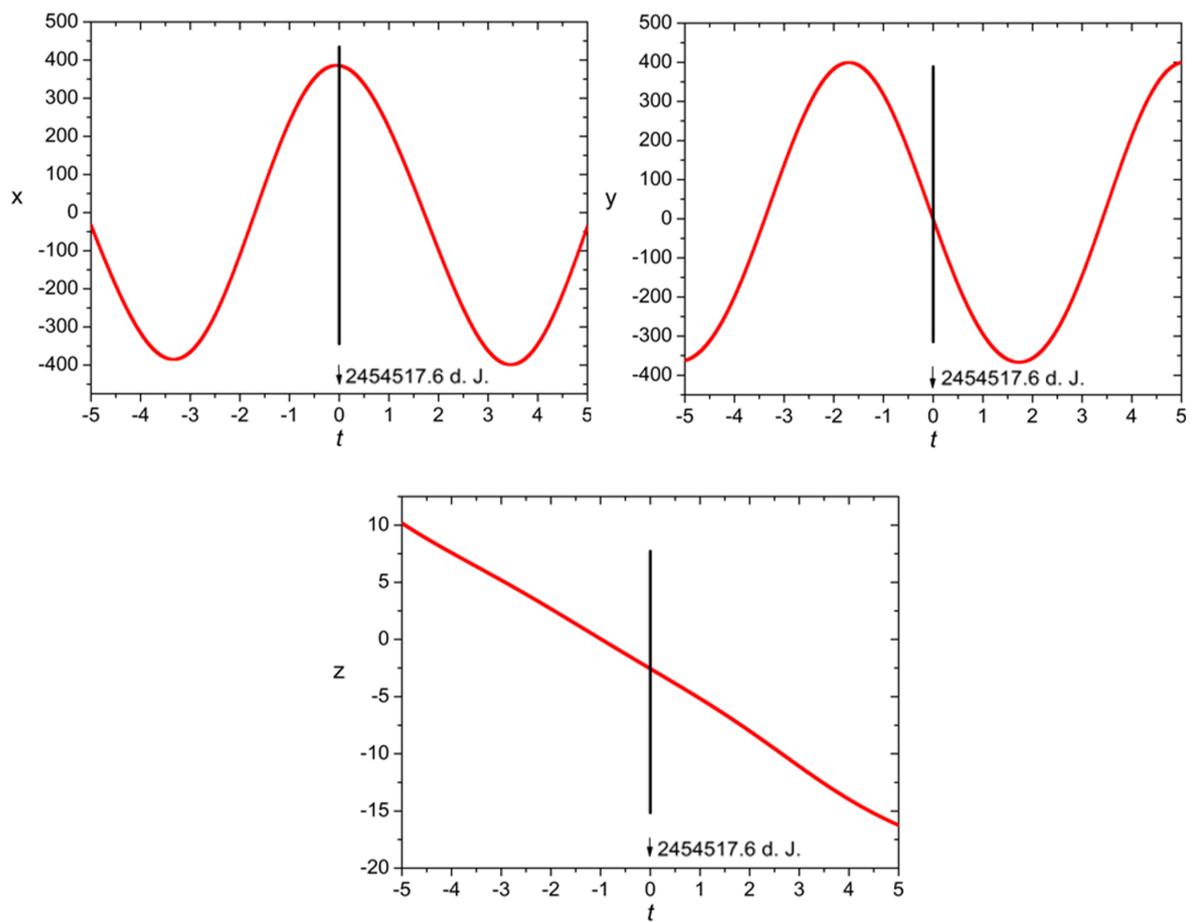


Figura 5.4: Variación de las coordenadas del Sol en el SCS para el intervalo  $-5 \leq t \leq 5$ .

### 5.3. Extensión al SSR.

Para extender los resultados al SSR, resulta natural considerar la siguiente familia monoparamétrica de sistemas dinámicos:

$$\dot{x} = (1 - \varepsilon) f_{PCBC}(x, t) + \varepsilon g_{SSR}(x, t), \quad (5.1)$$

donde las funciones  $f_{PCBC}(x, t)$  y  $g_{SSR}(x, t)$  representan las ecuaciones de movimiento del PCBC y el SSR respectivamente. En el Apéndice E.1 se muestran las relaciones que permiten expresar las componentes de la función  $g_{SSR}(x, t)$  en el SCS.

Para que la extensión resulte realista, debemos tener en cuenta correcciones relativistas. En particular, podemos estimar la corrección relativista en la fase solar. La perturbación del Sol tendrá un retraso temporal aproximado  $\Delta\tau \sim 500$  s, equivalente a  $\Delta t \sim 0,001$  en unidades de tiempo sinódico. Así, en cada instante, esta corrección se corresponde con una variación en la fase solar  $\Delta\phi \sim 0,07^\circ$  y es extremadamente significativa para las trayectorias consideradas en este trabajo <sup>5</sup>.

En las integraciones numéricas, implementar las correcciones aumenta considerablemente el tiempo de cómputo y en la práctica, no resulta efectivo intentar la continuación numérica de las trayectorias a través de la familia (5.1).

Para reducir el tiempo de las integraciones se utilizó una nueva función  $G$ :

$$G(x, t, \alpha) = (1 - \alpha) g_0(x, t) + \alpha g_{SSR}(x, t), \quad (5.2)$$

donde la función  $g_0(x, t)$  representa las ecuaciones de movimiento del SSR sin contemplar las correcciones. Se realizó la continuación numérica de las trayectorias empleando la siguiente familia biparamétrica de sistemas dinámicos:

$$\dot{x} = (1 - \varepsilon) f_{PCBC}(x, t) + \varepsilon(1 - \alpha)g_0(x, t) + \alpha g_{SSR}(x, t), \quad (5.3)$$

considerando dos etapas <sup>6</sup> (ver Fig. 5.5). Primero, se varió el parámetro  $\varepsilon$ , desde  $\varepsilon = 0$  hasta  $\varepsilon = 1$  manteniendo constante el valor de  $\alpha = 0$ .

$$(\varepsilon, \alpha) = (0, 0) \quad \rightarrow \quad (\varepsilon, \alpha) = (1, 0).$$

Como paso final, se varió  $\alpha$ , desde  $\alpha = 0$  hasta  $\alpha = 1$  manteniendo fijo  $\varepsilon$ .

$$(\varepsilon, \alpha) = (1, 0) \quad \rightarrow \quad (\varepsilon, \alpha) = (1, 1).$$

Este procedimiento redujo considerablemente los tiempos de cómputo <sup>7</sup>.

---

<sup>5</sup>Las integraciones numéricas muestran que, para una dada OP de transferencia, si cambiamos el valor de la fase solar inicial en  $\Delta\phi \sim 0,07^\circ$  manteniendo los valores de las condiciones iniciales, la nueva trayectoria cambia significativamente y en algunos casos, ni siquiera describe un arco similar.

<sup>6</sup>Para los valores  $(\varepsilon, \alpha) = (0, 0)$  obtenemos las ecuaciones movimiento del PCBC; para  $(\varepsilon, \alpha) = (1, 1)$  las ecuaciones corresponden al SSR.

<sup>7</sup>Con un procesador Intel 2.8 Ghz - 1GRam cada trayectoria demandó  $\sim 2$  días.

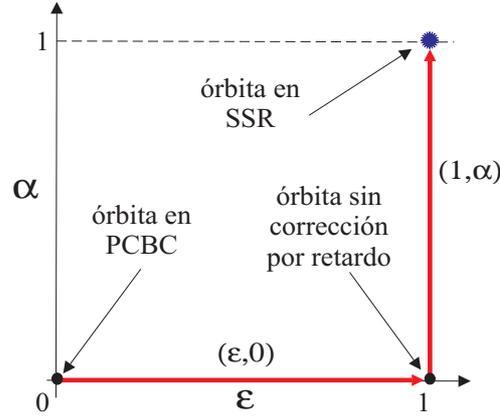


Figura 5.5: Esquema utilizado para la extensión de trayectorias.

### 5.3.1. Continuación numérica.

Se seleccionaron algunas condiciones iniciales  $(t_i, x_i, y_i, z = 0, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i = 0)$  correspondientes a OPs y órbitas arco determinadas en el PCBC (Cap. 3, Ap. C).

Para cada trayectoria se intentó la extensión al SSR en el intervalo de tiempo  $t_i \leq t \leq t_i + T$  a través de la familia biparamétrica (5.3). En la primera etapa, se utilizaron incrementos  $\Delta\varepsilon \leq 10^{-2}$  (en general, el valor típico fue  $\Delta\varepsilon \sim 5 \times 10^{-3}$ ). En cada paso, las nuevas coordenadas y velocidades fueron estimadas por extrapolación polinomial a partir de los últimos 3 puntos calculados y fueron refinados mediante un algoritmo de Newton-Raphson hasta lograr la convergencia con un error  $< 7 \times 10^{-7}$  [20]. El valor adoptado para el error de convergencia fue elegido con el fin de ahorrar tiempo de cómputo. Las trayectorias que pudieron extenderse hasta  $\varepsilon = 1$  fueron reconvergadas hasta obtener un error  $< 10^{-9}$ .

La corrección por retardo variando  $\alpha$  ( $g_0 \rightarrow g_{SSR}$ ) resultó significativamente más rápida ( $\sim 30$  minutos por trayectoria) y permitió utilizar incrementos  $\Delta\alpha \sim 0,05$ . En este proceso también se utilizaron las cotas  $7 \times 10^{-7}$  para el error de convergencia de las nuevas condiciones iniciales durante la continuación y  $10^{-9}$  para la trayectoria final ( $\alpha = 1$ ).

Todas las integraciones numéricas se realizaron con un integrador Bulirsch-Stoer de paso variable de precisión  $10^{-14}$ .

En algunos casos, no se pudo completar la extensión al SSR debido al comportamiento extremo de las curvas características con alguno de los parámetros (ver Fig. 5.6). El análisis de estos casos especiales está lejos de los objetivos de este trabajo (ver Sec. 5.5). En la Figura 5.7 se muestra la variación de las condiciones iniciales en los planos  $(x, \dot{x})$ ,  $(y, \dot{y})$  y  $(z, \dot{z})$  de algunas de las trayectorias extendidas. En todos los casos se observa una gran diferencia entre los valores de las condiciones iniciales de las trayectorias en el PCBC y el SSR. Para trayectorias que están compuestas por grandes arcos y que además se desarrollan por intervalos de tiempo grandes no se puede extender la validez de resultados encontrados en modelos más simples (PC3CR, PBC, PCBC). Nuevamente remarcamos que la extensión al SSR no constituye en absoluto un problema trivial (ver Sec. 4.5.2).

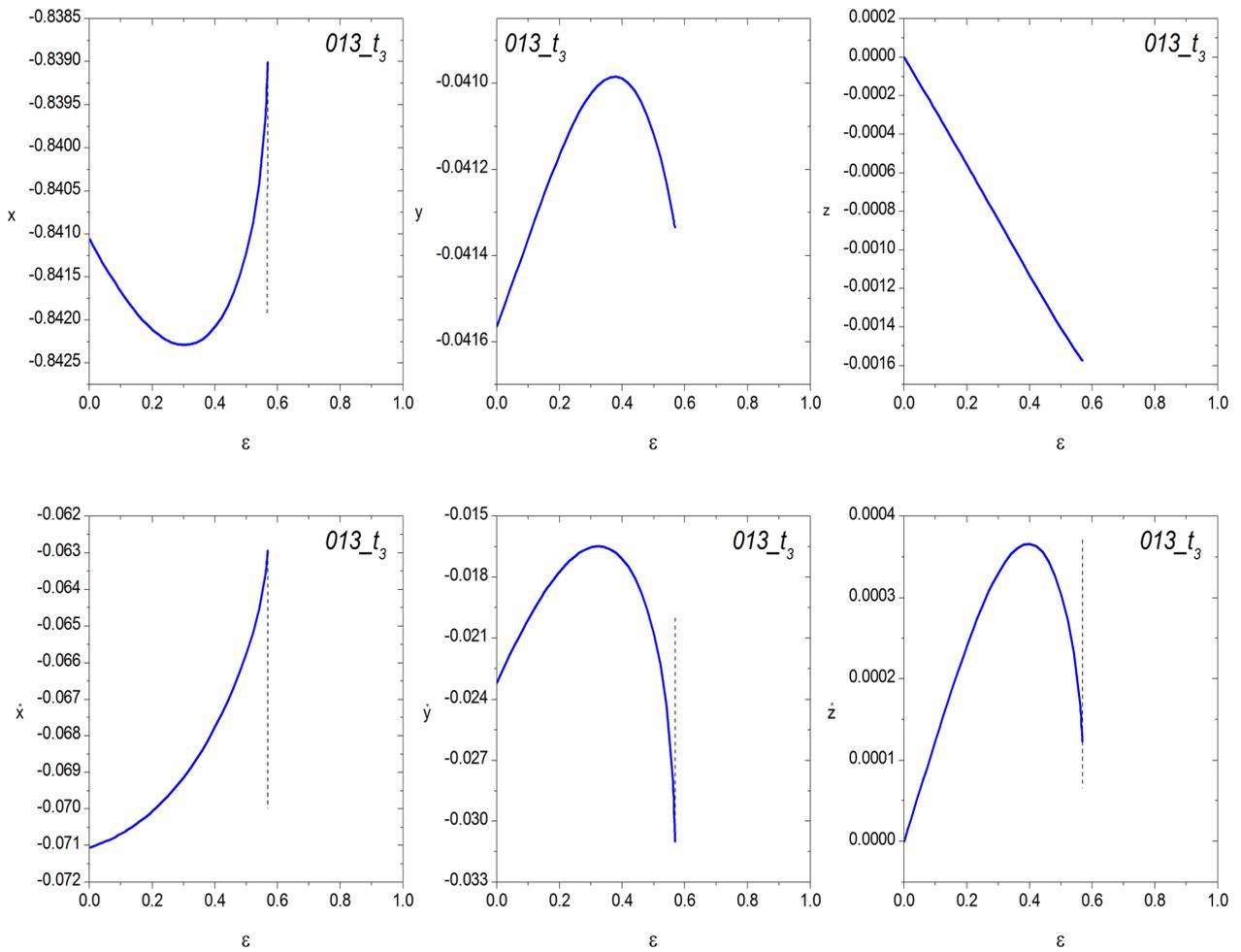


Figura 5.6: Curvas características  $x(\varepsilon)$ ,  $y(\varepsilon)$ ,  $z(\varepsilon)$ ,  $\dot{x}(\varepsilon)$ ,  $\dot{y}(\varepsilon)$  y  $\dot{z}(\varepsilon)$  obtenidas en la continuación numérica del arco 013\_t3. En algunas curvas se observa un comportamiento extremo ( $\partial x_i / \partial \varepsilon \rightarrow \infty$ ) para  $\varepsilon \sim 0,569$ .

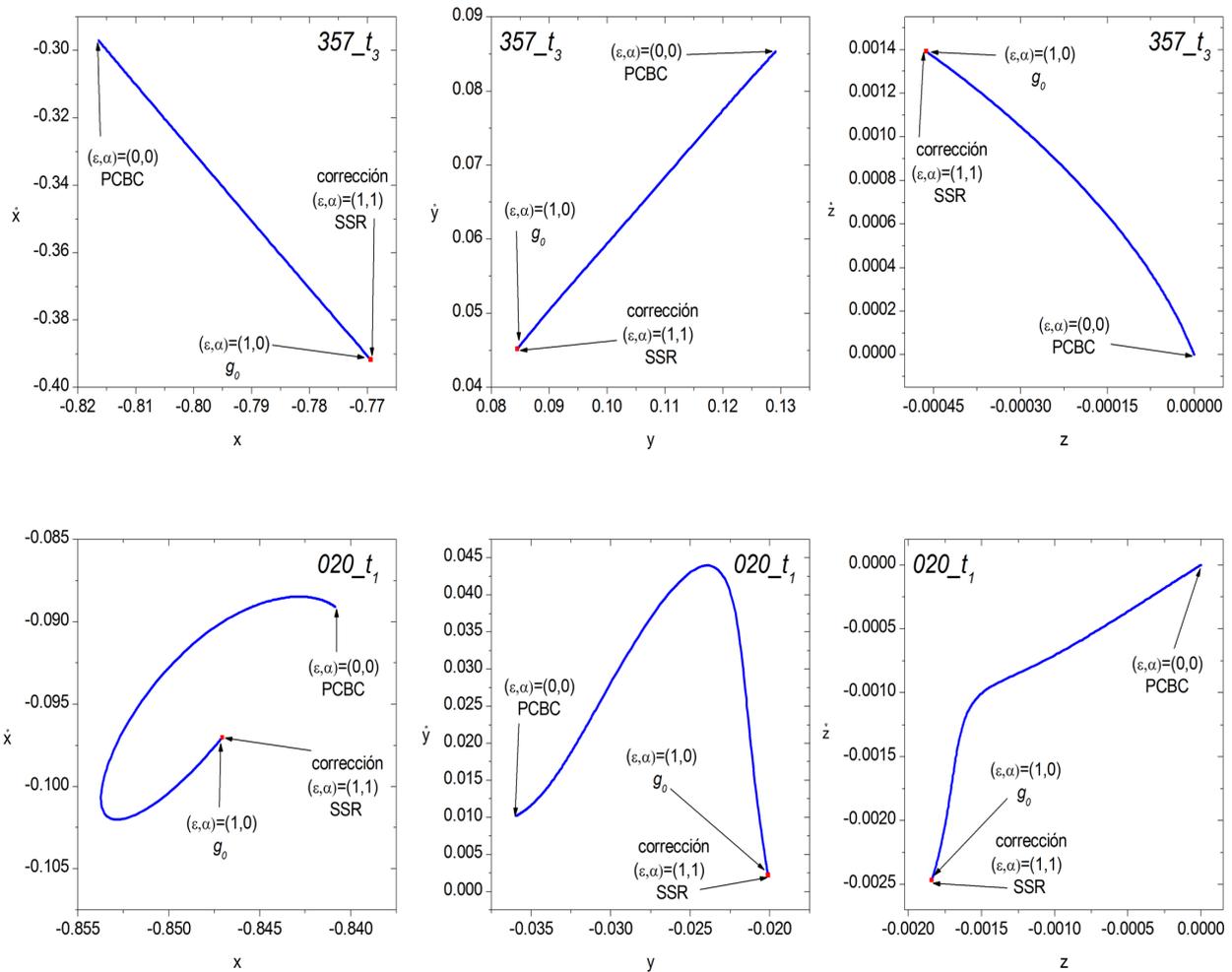


Figura 5.7: Curvas características  $(x, \dot{x})$ ,  $(y, \dot{y})$  y  $(z, \dot{z})$  obtenidas en la continuación numérica de los arcos 357\_t3 y 020\_t1. Las curvas azules y rojas se corresponden con las condiciones iniciales obtenidas al variar  $\varepsilon$  y  $\alpha$  respectivamente.

## 5.4. Resultados. Arcos en el SSR.

Con las OPs seleccionadas en el PCBC (Sec.3.4.1, Ap. C) se determinaron, para el año 2008, 10 arcos *periódicos* en el SSR que realizan transferencias rápidas entre la Tierra y la Luna. En los instantes de tiempo  $t_i + T$ , cada arco recupera los valores de las condiciones iniciales en  $t_i$  con un error  $< 10^{-9}$ , ésto es:

$$|\vec{R}(t_i + T) - \vec{R}(t_i)| \lesssim 40cm, \quad |\vec{V}(t_i + T) - \vec{V}(t_i)| \lesssim 10^{-3}mm/s.$$

6 trayectorias son de baja energía. La Tablas 5.2 y 5.3 muestran los valores de las condiciones iniciales y las características principales de cada trayectoria. Las Figuras 5.8 a 5.12 muestran la evolución completa de cada trayectoria.

Tabla 5.2: Condiciones iniciales de los arcos determinados en el SSR.  $t_i$ : día juliano inicial;  $T$ : *período* en días. Las posiciones y velocidades están expresadas en el SCS.

órbita	$t_i$	$x$	$y$	$z$
	$T$	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
053_1_ $t_3$	2454626,7	-0,7872690477	0,0411771264	-0,0007190262
	73,14	-0,2578792456	0,0074495166	0,0013192629
180A_1_ $t_1$	2454524,7	-0,7968572176	0,0036148447	0,0002366434
	73,23	-0,1399182783	-0,0507016068	0,0020125793
357_ $t_3$	2454530,8	-0,7693821885	0,0844663795	-0,0004626769
	73,08	-0,3917453064	0,0451458532	0,0013908436
018A_ $t_1$	2454626,7	-0,7938896575	-0,0097192978	-0,0002468129
	102,80	-0,1242827338	-0,1118393228	0,0013637023
187A_ $t_1$	2454530,8	-0,8735584435	0,0057022646	-0,0003046196
	73,08	-0,1029898914	0,1103333206	0,0013413242
020_ $t_1$	2454524,0	-0,8470457106	-0,0020098692	-0,0018399914
	118,65	-0,0970146060	0,0021535852	-0,0024675996
T045_ $t_2$	2454533,1	-0,7288632414	-0,4601252979	-0,0034870935
	29,44	-1,0955112737	1,7109524011	-0,0029112721
T225_ $t_1$	2454523,6	0,9994957212	-0,0392874202	0,0001603297
	29,79	-0,1188568682	-1,7388695679	0,0013990772
T108_ $t_1$	2454518,9	-0,4867604442	0,7332638113	-0,0003602190
	74,14	1,8410409802	0,9441484097	-0,0003626825
T132_ $t_1$	2454520,7	-0,8517376567	0,2188283902	-0,0054312779
	103,23	0,4915725257	-0,1214801046	-0,0030478683

Tabla 5.3: Distancias y velocidades en el punto de máximo acercamiento a la Tierra y a la Luna de las órbitas determinadas en el SSR (SCS).

órbita	$d_{Tmin}$ (km)	$V_T$	$d_{Lmin}$ (km)	$V_L$
	Tierra	Tierra	Luna	Luna
053_1_ $t_3$	94443	2,380	19249	0,557
180A_1_ $t_1$	119437	1,744	7817	0,979
357_ $t_3$	82074	2,656	14532	0,715
018A_ $t_1$	131121	1,683	12714	0,705
187A_ $t_1$	144623	1,565	5958	1,117
020_ $t_1$	129105	1,675	2132	1,949
T045_ $t_2$	317115	2,031	41412	2,069
T225_ $t_1$	145021	2,342	15686	1,901
T108_ $t_1$	315802	2,116	7160	2,314
T132_ $t_1$	185900	1,351	43838	0,596

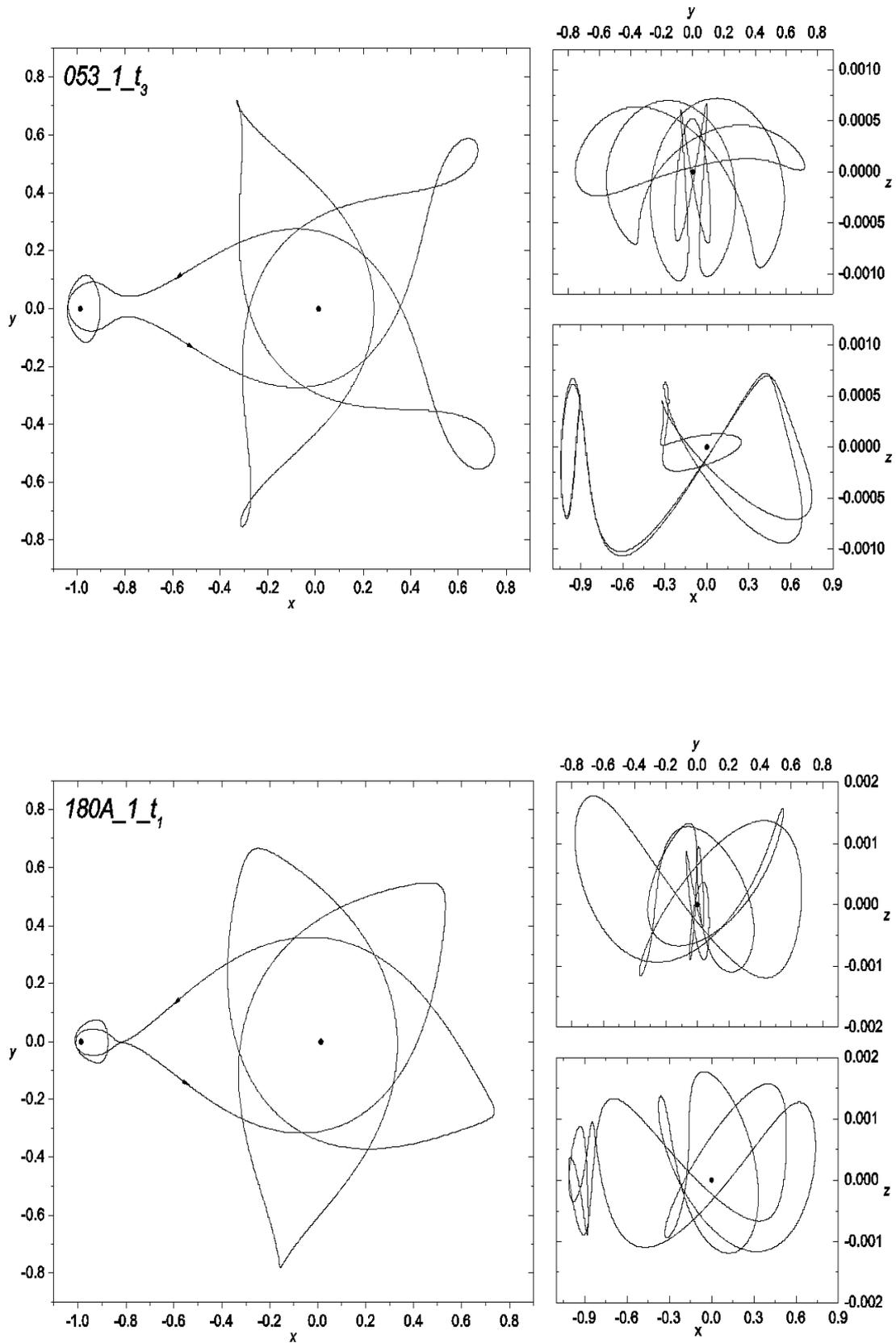


Figura 5.8: Arcos de baja energía en el SSR. Sup.:053\_1\_t3; Inf.:180A\_1\_t1.

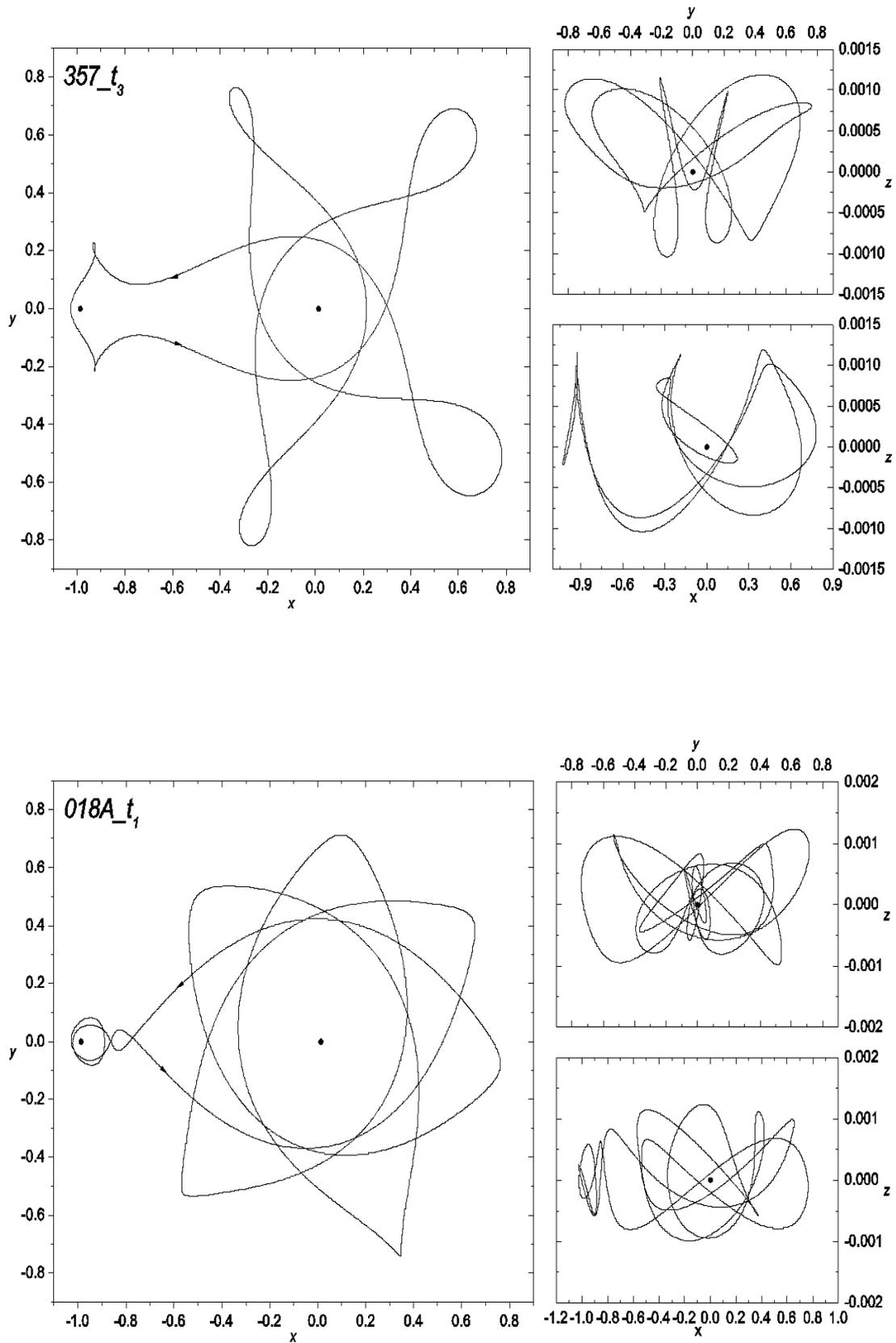


Figura 5.9: Arcos de baja energía en el SSR. Sup.: $357_{t_3}$ ; Inf.: $018A_{t_1}$ .

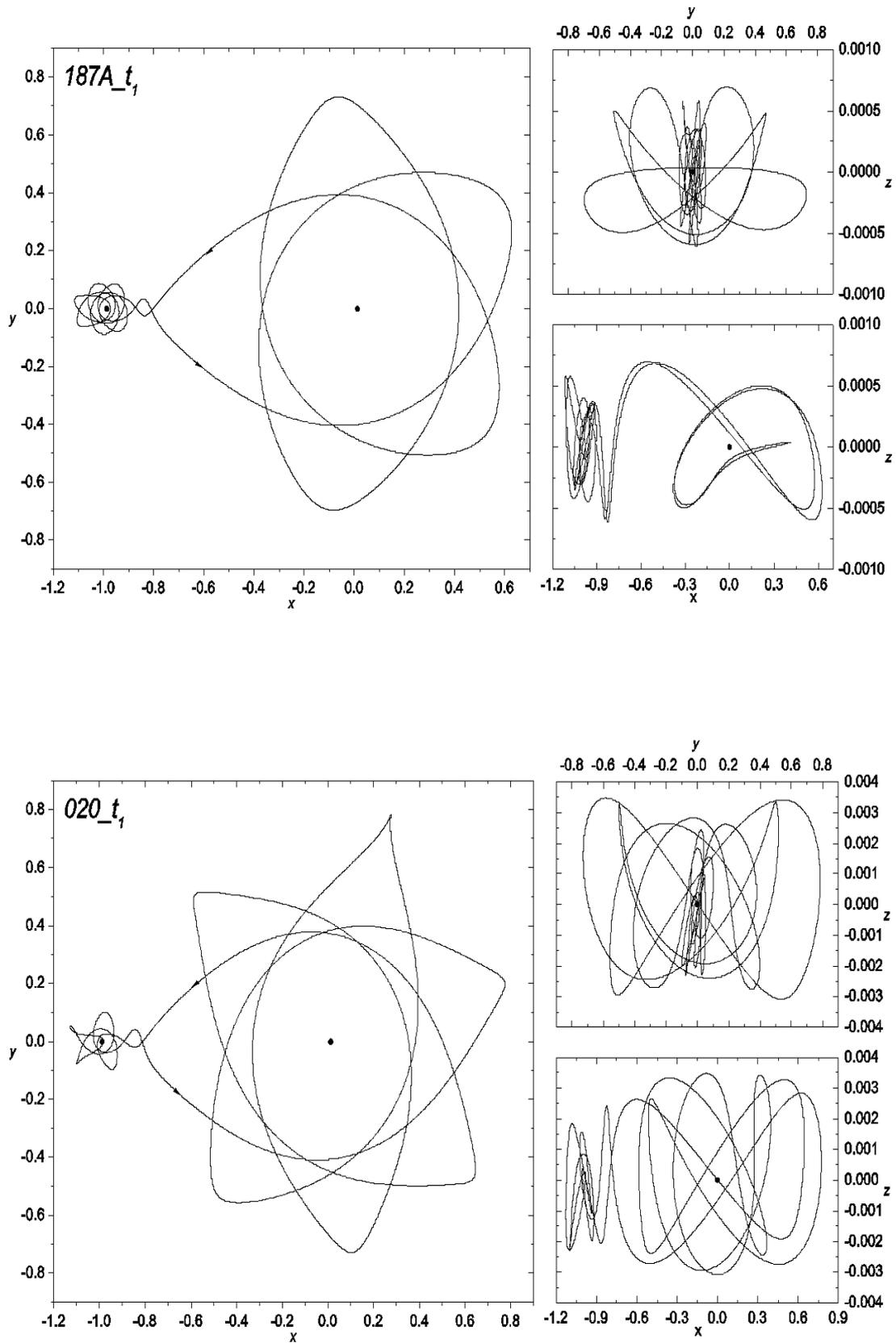


Figura 5.10: Arcos de baja energía en el SSR. Sup.: $187A_{t_1}$ ; Inf.: $020_{t_1}$  .

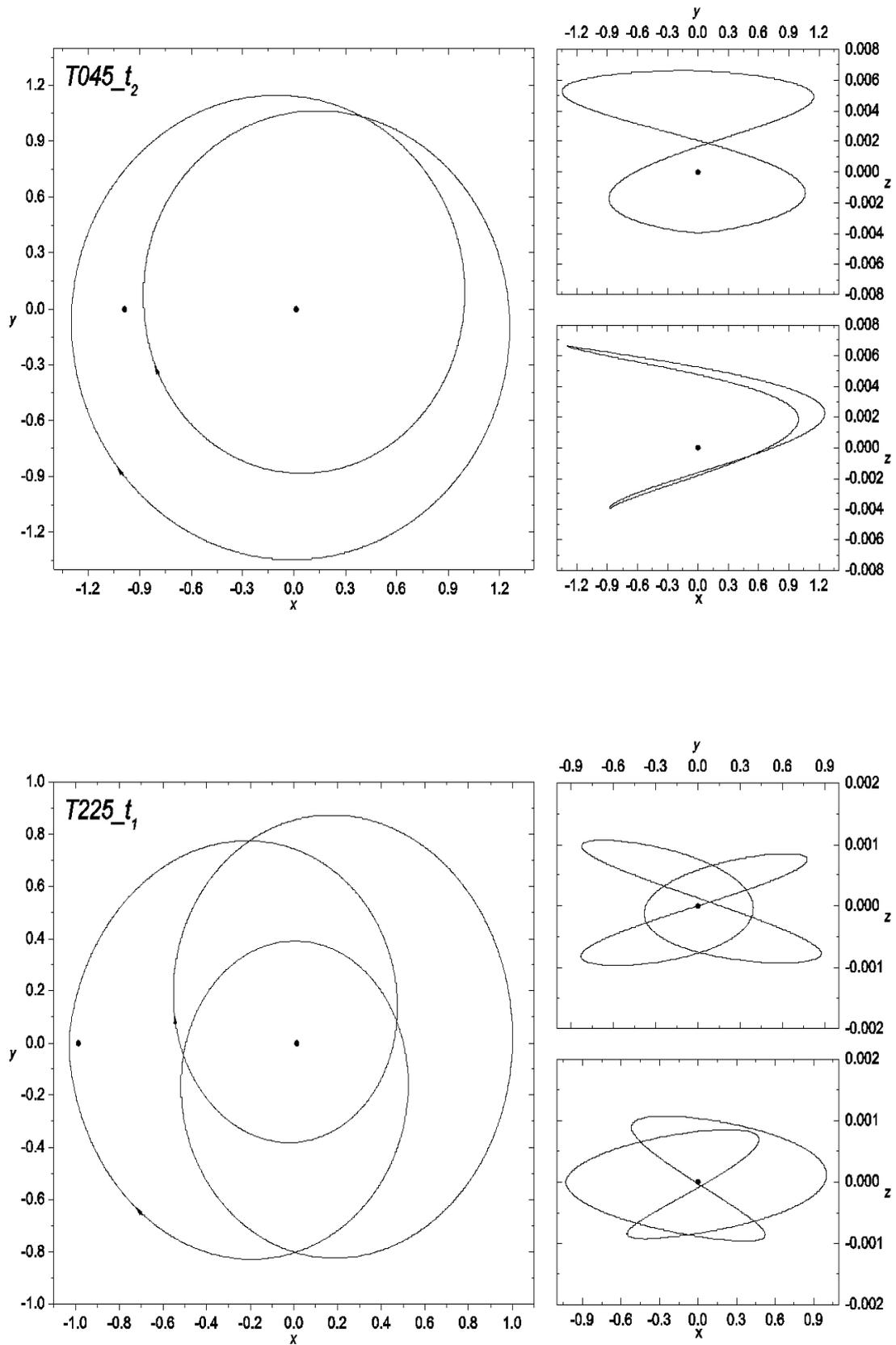


Figura 5.11: Arcos en el SSR. Sup.:  $T045_{t_2}$ ; Inf.:  $T225_{t_1}$ .

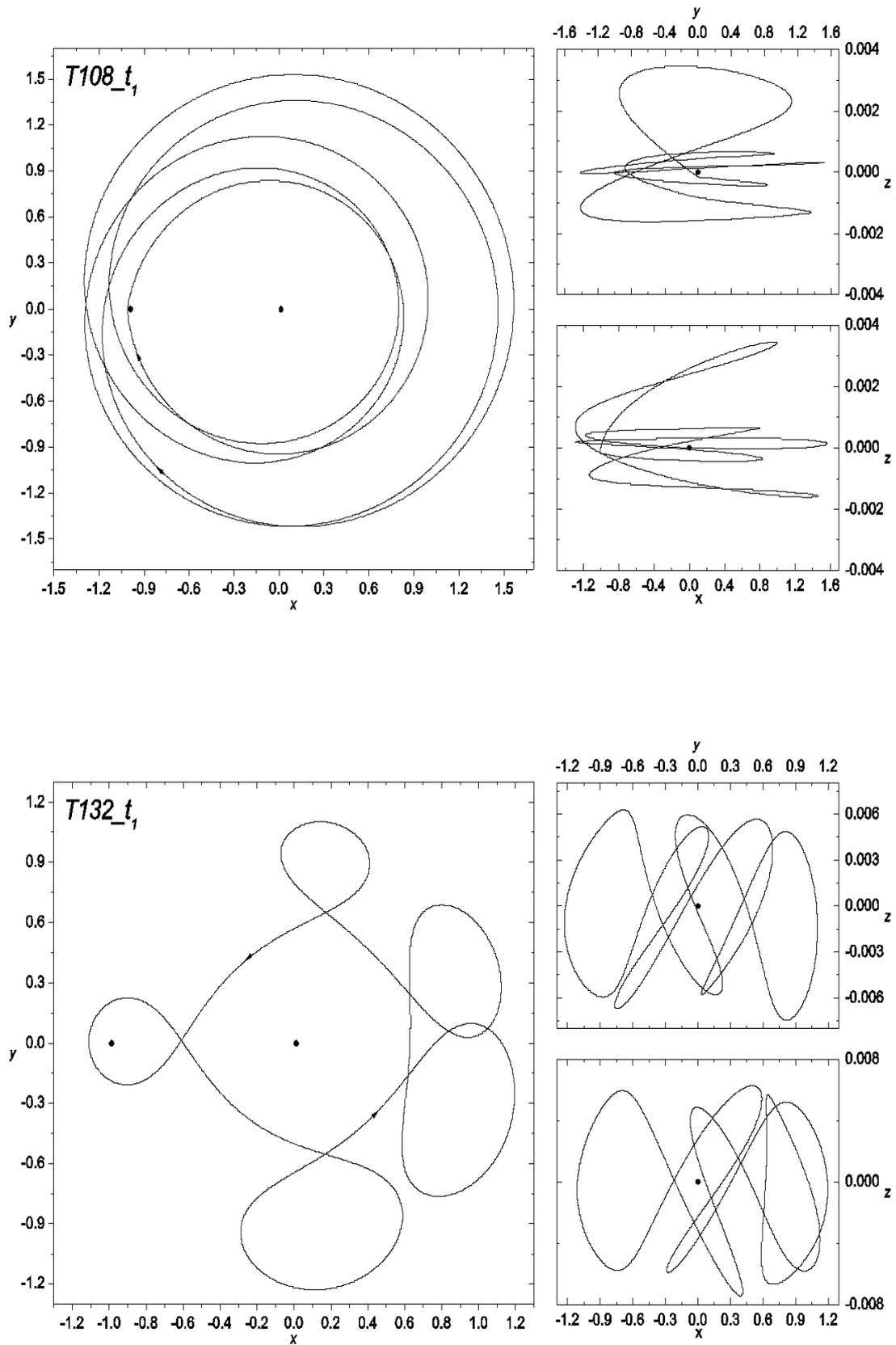


Figura 5.12: Arcos en el SSR. Sup.: $T108_{t_1}$ ; Inf.: $T132_{t_1}$  .

## 5.5. Discusión.

### Métodos y procedimientos utilizados.

La extensión de trayectorias se suspendió cuando los incrementos de los parámetros involucrados para lograr la convergencia de las nuevas condiciones iniciales resultaron extremadamente pequeños (ej.  $\Delta\varepsilon \sim 10^{-5}$ )<sup>8</sup>. En estos casos, el tiempo de cómputo aumenta significativamente.

Es necesario notar que el proceso de extensión depende de la época seleccionada. Las diferencias entre el PCBC y el SSR abren la posibilidad de determinar *ventanas* temporales donde una trayectoria dada siempre pueda extenderse. Por otro lado, las experiencias numéricas indican que la extensión resulta más sencilla cuando se utilizan órbitas de alta energía, aún cuando las diferencias entre los dos sistemas sean máximas.

Debido a la periodicidad de las ecuaciones de movimiento del PCBC, se estudió el comportamiento de las curvas características de algunas trayectorias cuando se asume para el valor inicial  $t_i$  el nuevo valor  $t_0 = t_i - T^\odot$ . Los resultados obtenidos cambian significativamente, en particular, con la órbita 013\_23 se observó un comportamiento extremo de las curvas características en  $\varepsilon \simeq 0,2$ , a diferencia de la Figura 5.6 que muestra este comportamiento para  $\varepsilon \simeq 0,57$ . Este tipo de comportamiento podría corresponderse con bifurcaciones que dan origen a nuevos arcos dentro de la familia de sistemas dinámicos (5.3). El objetivo de este trabajo es mostrar que es posible determinar arcos periódicos en el SSR a partir de OPs y órbitas arco en el PCBC. Así, el análisis de bifurcaciones y otros casos especiales dentro de la familia (5.3) no se consideró en este trabajo.

La familia biparamétrica de sistemas dinámicos (5.3) permitió ahorrar gran cantidad de tiempo de cómputo. Sin embargo, en el espacio de parámetros  $(\varepsilon, \alpha)$  el camino escogido para realizar la extensión es arbitrario. A partir de una órbita en el PCBC, la elección de un nuevo camino podría derivar en una trayectoria distinta de la obtenida con los procedimientos aplicados en la Sección 5.3. Ésto no quita importancia al hecho que, la órbita origen en el PCBC constituye una *verdadera* referencia para localizar arcos similares en el SSR en una época dada. El análisis de los posibles resultados que originan distintos caminos está lejos de los objetivos planteados en este trabajo.

### Nuevos arcos a partir de los arcos determinados.

Existen dos procedimientos sencillos que permiten determinar nuevas órbitas con características similares a partir de las órbitas determinadas en el SSR. Primero, podemos considerar la continuación numérica de los arcos utilizando como parámetro el tiempo inicial  $t_i$ , manteniendo  $T$  constante. Ésto permite determinar una *ventana* temporal posible donde la órbita de referencia del PCBC puede ser extendida. En segundo lugar, podemos analizar la variación de la trayectoria asumiendo como parámetro el *período*  $T$ , dejando fijo el valor del tiempo inicial. Así, podemos explorar los cambios que sufre la trayectoria (geometría, proximidad a las masas primarias,

---

<sup>8</sup>Arcos T222\_21, 188A\_1\_23 y 053<sup>d</sup>\_2\_23.

etc.. ) y determinar algún arco que se ajuste a los requerimientos de alguna aplicación específica.

### **Arcos de baja energía.**

Estos arcos poseen los valores de energía más pequeños que logran transferencias entre la Tierra y la Luna. En particular, las órbitas presentadas en este trabajo tienen períodos comprendidos entre 29 y 150 días, y repiten su configuración espacial respecto de la Tierra y la Luna con un error  $< 10^{-9}$  (SCS). Analizando las Figuras 5.8 a 5.12 vemos que las trayectorias se desarrollan manteniéndose próximas del plano  $xy$  a distancias menores de  $\sim 1500$  km (0,004). Entre las órbitas presentadas en la Sección 5.4, existen trayectorias con distancias  $< 6200$  km de la superficie lunar <sup>9</sup>. Resulta interesante analizar el arco 020\_ $t_1$  que sufre un acercamiento de  $\sim 392$  km con una velocidad de  $\sim 2000$  m/s. En este punto, si aplicamos un impulso de frenado  $\Delta v$  de sólo  $\sim 3$  m/s, logramos la captura balística alrededor de la Luna. La Figura 5.13 muestra la evolución durante  $\sim 150$  días de la trayectoria 020\_ $t_1$  cuando se aplican impulsos de frenado  $\Delta V \sim 3, 4, 5$  y  $6$  m/s en el punto de máximo acercamiento.

---

<sup>9</sup>Radio lunar de 1740 km.

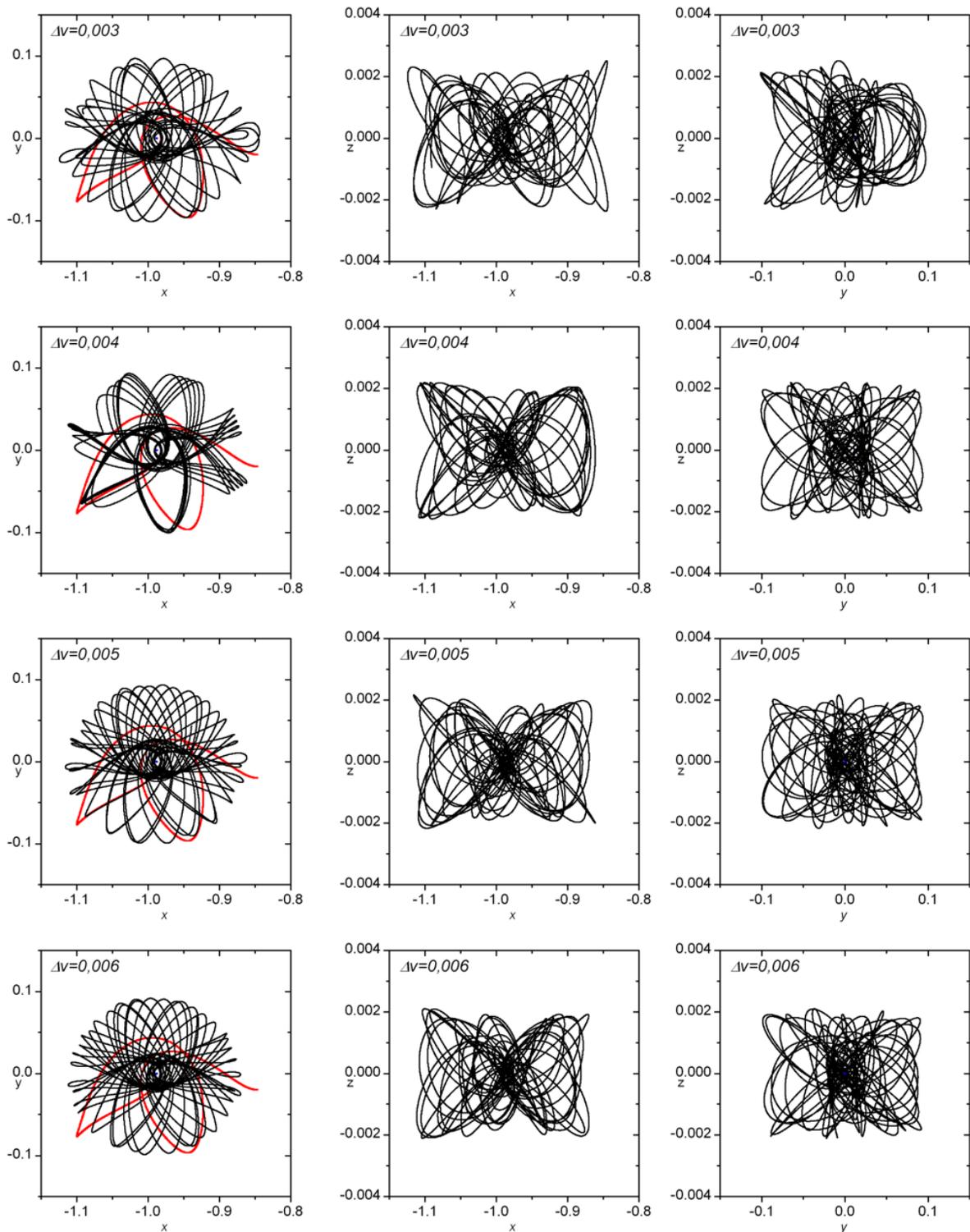


Figura 5.13: Captura alrededor de la Luna aplicando impulsos de frenado  $\Delta v$  en el instante de máxima proximidad entre el arco  $020.t_1$  y la Luna. La curva roja en los primeros diagramas representa la proyección en el plano  $xy$  de la trayectoria antes de ser perturbada.

## Comentarios finales.

A partir de la identificación y clasificación de familias de OPs en el PC3CR, se desarrolló un método sistemático que permite extender algunas trayectorias al PCBC y al SSR. La condición de fase solar inicial a  $O(\varepsilon)$  presentada en la Sección 3.3 se aplica sin restricciones a cualquier tipo de OP en el PC3CR sin necesidad de recurrir a condiciones especiales, simetrías, etc.

En la Sección 3.4.1 presentamos trayectorias de transferencia rápida de baja energía en el PCBC que presentan gran proximidad a la superficie lunar. Aplicando pequeñas perturbaciones fácilmente se pueden conseguir órbitas capturadas alrededor de la Luna (Sec. 3.5).

Analizando las diferencias entre el PCBC y el SSR, en el Capítulo 5 se lograron determinar 10 arcos de transferencia rápida Tierra-Luna en el SSR para el año 2008. Así, las órbitas determinadas en el PCBC se convierten *verdaderos* puntos de partida para determinar trayectorias *reales* en alguna época particular. Al respecto, hemos logrado quebrar la barrera que consideraba las OPs de transferencia de baja energía en el PC3CR sólo con interés académico y hemos demostrado la posibilidad de implementar estas trayectorias en el diseño misiones espaciales realistas de larga duración y bajo costo que involucran transferencias entre la Tierra y la Luna.

Por otra parte, en el Capítulo 4 desarrollamos un algoritmo de control que permite estabilizar OPs inestables en el PCBC. La estabilización requiere de la aplicación de mínimas perturbaciones y se aplica de manera general, a cualquier tipo de OP existente en el PCBC. Para los arcos de transferencia en el SSR, los resultados de la Sección 4.5 sólo sirven para estimar la magnitud de los impulsos que sería necesario aplicar. La elaboración de un algoritmo de control para arcos de transferencia rápida en el SSR extendiendo las ideas presentadas en la Sección 4.5, será abordado en trabajos futuros.

# Apéndice A

## A.1. Coeficientes de las funciones auxiliares del PCBC.

En este Apéndice se muestran los coeficientes  $\alpha_{kj}$  de las funciones auxiliares  $\alpha_k(t)$  del PCBC. Los valores fueron extraídos del trabajo original de Andreu [7].

Tabla A.1: Coeficientes  $\alpha_{1j}$  y  $\alpha_{2j}$  de las funciones auxiliares  $\alpha_1(t)$  y  $\alpha_2(t)$ .

$j$	$\alpha_{1j}$	$\alpha_{2j}$
0	$1,00184160892484E + 00$	—
1	$5,76751772619840E - 04$	$-2,64437602849994E - 04$
2	$1,43877702550763E - 02$	$-1,32868690340017E - 02$
3	$-2,63036297497202E - 06$	$9,38609320808975E - 06$
4	$1,17627835611893E - 04$	$-1,21850905751741E - 04$
5	$-8,06858139100555E - 08$	$1,52212759855701E - 07$
6	$9,84324976650129E - 07$	$-1,07210266427800E - 06$
7	$-1,17205439441820E - 09$	$1,88937126137405E - 09$
8	$8,31190597087959E - 09$	$-9,32498503892749E - 09$
9	$-1,40858423869539E - 11$	$2,11449098128026E - 11$
10	$7,05071378646684E - 11$	$-8,07111174314435E - 11$
11	$-1,49425963491046E - 13$	$2,21811805042017E - 13$
12	$5,98241897945123E - 13$	$-7,03615516188201E - 13$
13	—	—
14	—	$-3,96722989612218E - 15$

Tabla A.2: Coeficientes  $\alpha_{3j}$  y  $\alpha_{4j}$  de las funciones auxiliares  $\alpha_3(t)$  y  $\alpha_4(t)$ .

$j$	$\alpha_{3j}$	$\alpha_{4j}$
0	9,99999999999998E - 01	-9,75524232748489E - 04
1	5,63412599755369E - 04	2,15476436270711E + 00
2	1,88968744017288E - 02	3,65748446896870E - 04
3	-9,91175880256713E - 06	3,29567337616659E - 03
4	1,56870813603113E - 04	3,30103140081243E - 07
5	-1,70776257617348E - 07	1,27884068737632E - 05
6	1,31961367970744E - 06	-2,62379795212793E - 09
7	-2,13655004198565E - 09	6,53380551456151E - 08
8	1,11716891667389E - 08	-3,89172070778351E - 11
9	-2,38725363103111E - 11	3,81227583894443E - 10
10	9,49087962209590E - 11	-3,90790604983488E - 13
11	-2,46273258155843E - 13	2,40747118757644E - 12
12	8,10106770800974E - 13	-
13	-	-
14	1,35423199846983E - 15	-

Tabla A.3: Coeficientes  $\alpha_{5j}$  y  $\alpha_{6j}$  de las funciones auxiliares  $\alpha_5(t)$  y  $\alpha_6(t)$ .

$j$	$\alpha_{5j}$	$\alpha_{6j}$
0	-	1,00090745770816E + 00
1	-2,19257075104007E + 00	2,87092175005313E - 04
2	-3,33721048547287E - 04	7,18717799861288E - 03
3	-3,29500143020097E - 03	-2,35118314721325E - 06
4	-3,10063505305263E - 07	4,58575897112206E - 05
5	-1,27777733685413E - 05	-3,84868362010704E - 08
6	2,65280640549811E - 09	3,27067750493567E - 07
7	-6,52847924508507E - 08	-4,40696648104188E - 10
8	3,89172070778351E - 11	2,45260066257026E - 09
9	-3,81227583894443E - 10	-4,54293880067344E - 12
10	3,90790604983488E - 13	1,89234885511262E - 11
11	-2,40747118757644E - 12	-4,17842010148012E - 14
12	-	1,48004894696158E - 13

Tabla A.4: Coeficientes  $\alpha_{7j}$  y  $\alpha_{8j}$  de las funciones auxiliares  $\alpha_7(t)$  y  $\alpha_8(t)$ .

$j$	$\alpha_{7j}$	$\alpha_{8j}$
0	$-6,31406956800623E - 02$	—
1	$3,88563862309805E + 02$	$-3,89743725623765E + 02$
2	$1,73691020334556E - 01$	$-1,73427916632252E - 01$
3	$3,38290807166970E + 00$	$-3,38569648664212E + 00$
4	$1,57483756538049E - 04$	$-1,55588663241340E - 04$
5	$2,93636048900444E - 02$	$-2,93758267196753E - 02$
6	$-1,22443455011601E - 05$	$1,22585121310793E - 05$
7	$2,53893543426244E - 04$	$-2,53959688769264E - 04$
8	$-2,27892904000757E - 07$	$2,28002922020236E - 07$
9	$2,19043270618166E - 06$	$-2,19083462442904E - 06$
10	$-3,03331196123435E - 09$	$3,03610903512086E - 09$
11	$1,88697154529022E - 08$	$-1,88745764757932E - 08$
12	$-3,43237510689845E - 11$	$3,43237510689845E - 11$
13	$1,61151370399910E - 10$	$-1,63172364150645E - 10$

# Apéndice B

## B.1. Puntos de referencia de 80 familias de OPs.

Las Tablas B.1 a B.4 presentan valores de referencia correspondientes a OPs de cada *segmento* de las 80 familias clasificadas por Leiva y Briozzo [4]. Para cada OP se muestran las condiciones iniciales  $y$ ,  $\dot{x}$ , y  $\dot{y}$  sobre la superficie de Poincaré  $\Sigma_1$  ( $x = 0,83691530956968$ ). El valor de la energía  $h$  puede ser computado desde la Ecuación (1.1). Las familias son presentadas según  $T_{\min}$ , en orden creciente. Todos los resultados están expresados con nueve cifras significativas; ésta es la precisión con la que se determinaron los puntos fijos sobre  $\Sigma_1$  (ver Sec. 2.3.2).

Tabla B.1: Condiciones iniciales de referencia en cada segmento de las familia del Atlas.

Familia	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
357	$-0,117123569E + 00$	$0,188286199E + 00$	$-0,572196944E - 01$
	$-0,752309982E - 01$	$0,703223220E - 01$	$0,526057836E - 01$
037	$-0,952688318E - 01$	$0,193104477E + 00$	$-0,698758462E - 01$
	$-0,494342118E - 01$	$0,668530162E - 01$	$0,367519735E - 01$
043	$0,756317112E - 01$	$0,174779169E + 00$	$-0,146249287E + 00$
	$0,147537527E - 01$	$0,712038541E - 01$	$-0,892901980E - 01$
056	$0,624215776E - 02$	$0,606625612E - 01$	$-0,883146468E - 01$
	$-0,133457508E - 03$	$0,696863059E - 01$	$-0,647591299E - 01$
053	$-0,309923810E - 01$	$0,969392826E - 01$	$0,285342214E - 02$
	$-0,397298574E - 01$	$0,825366449E - 01$	$0,306453860E - 01$
084	$-0,182805129E - 01$	$0,103708279E + 00$	$-0,301924582E - 01$
	$-0,394851925E - 01$	$0,735594442E - 01$	$0,250651786E - 01$
077	$0,667551282E - 03$	$0,963511367E - 01$	$-0,606185633E - 01$
	$0,424942427E - 01$	$0,143513065E + 00$	$-0,123651231E + 00$
180A	$-0,176582175E - 02$	$0,489989035E - 01$	$-0,646863084E - 01$
	$-0,458435151E - 02$	$0,580750713E - 01$	$-0,494486724E - 01$
180B	$-0,321675020E - 02$	$0,487788129E - 01$	$-0,572572819E - 01$
	$-0,370900292E - 02$	$0,502862375E - 01$	$-0,551604311E - 01$
197A	$-0,403389651E - 02$	$0,467758694E - 01$	$-0,549259876E - 01$
	$-0,748859736E - 02$	$0,706053959E - 01$	$-0,389185716E - 01$
197B	$-0,358230667E - 01$	$0,790257617E - 01$	$0,253403548E - 01$
	$-0,262131948E - 01$	$0,944682584E - 01$	$0,426056483E - 03$
197C	$-0,436719473E - 02$	$0,903250873E - 01$	$-0,441850314E - 01$
	$-0,954936938E - 02$	$0,919610828E - 01$	$-0,368770458E - 01$
197D	$0,137835921E - 03$	$0,480084608E - 01$	$-0,677052291E - 01$
	$-0,110913878E - 02$	$0,467632548E - 01$	$-0,639686253E - 01$
146A	$-0,561843913E - 02$	$0,481515955E - 01$	$-0,458759495E - 01$
	$-0,556877550E - 02$	$0,479009088E - 01$	$-0,462198240E - 01$
146B	$-0,100003649E - 01$	$0,922579369E - 01$	$-0,314461380E - 01$
	$-0,301232540E - 01$	$0,800340127E - 01$	$0,107465070E - 01$
146C	$-0,209659040E - 01$	$0,935046532E - 01$	$-0,872774576E - 02$
	$-0,328808216E - 01$	$0,790540795E - 01$	$0,195210072E - 01$
146D	$-0,109746945E - 01$	$0,704205701E - 01$	$-0,330988288E - 01$
	$0,890700324E - 04$	$0,470157223E - 01$	$-0,665351506E - 01$
178	$-0,678420318E - 02$	$0,517956571E - 01$	$-0,388659851E - 01$
	$-0,602597134E - 02$	$0,468679741E - 01$	$-0,437975845E - 01$
136A	$0,149001365E - 01$	$0,516635819E - 01$	$0,515152516E - 01$
	$0,232273264E - 01$	$0,452997355E - 01$	$0,392609631E - 01$
136B	$-0,142117007E - 01$	$0,615903974E - 01$	$0,679657727E - 01$
	$-0,209291435E - 01$	$0,636185265E - 01$	$0,587120945E - 01$

Tabla B.2: Condiciones iniciales de referencia en cada segmento de las familia del Atlas.

Familia	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
144A	$0,344748710E - 01$	$0,512487779E - 01$	$-0,194922878E - 01$
	$0,459672540E - 01$	$0,497319089E - 01$	$0,130053768E - 01$
144B	$0,427781214E - 01$	$0,456560421E - 01$	$0,110742063E - 01$
	$0,411137788E - 01$	$0,558490367E - 01$	$-0,109980055E - 01$
187A	$-0,100732729E - 01$	$0,493708906E - 01$	$0,241426211E - 01$
	$0,105794916E - 02$	$0,345218320E - 01$	$0,203470155E - 01$
187B	$-0,999805450E - 02$	$0,532862676E - 01$	$0,109156194E - 01$
	$-0,208796488E - 01$	$0,758292663E - 01$	$0,183309876E - 01$
147	$-0,683547934E - 02$	$0,494568707E - 01$	$-0,385549469E - 01$
	$-0,645420939E - 02$	$0,469348790E - 01$	$-0,411434997E - 01$
194	$-0,197340018E - 02$	$0,386245233E - 01$	$0,327837209E - 01$
	$0,101313762E - 01$	$0,358315739E - 01$	$0,318303599E - 01$
244	$-0,454121750E - 02$	$0,247254293E - 01$	$-0,420250716E - 01$
	$-0,481581493E - 02$	$0,241632422E - 01$	$-0,425409052E - 01$
305	$0,368927603E - 01$	$0,419634101E - 01$	$-0,148772528E - 01$
	$0,350748259E - 01$	$0,441052120E - 01$	$-0,236792524E - 01$
018A	$0,389320671E - 01$	$0,499875102E - 01$	$0,211191621E - 02$
	$0,339409851E - 01$	$0,626653066E - 01$	$-0,241961881E - 01$
018B	$0,566711586E - 01$	$0,825345962E - 01$	$-0,100049174E - 01$
	$0,408856867E - 01$	$0,482223816E - 01$	$0,100049149E - 01$
188A	$-0,845472486E - 02$	$0,235930765E - 01$	$-0,200396293E - 01$
	$-0,151476704E - 01$	$0,627210755E - 01$	$0,745548825E - 03$
188B	$-0,548310351E - 02$	$0,306324940E - 01$	$-0,422618249E - 01$
	$-0,100107551E - 01$	$0,382727756E - 01$	$-0,356702634E - 02$
157A	$-0,643084838E - 02$	$0,455667687E - 01$	$-0,413423347E - 01$
157B	$-0,500052307E - 02$	$0,427482430E - 01$	$-0,478465726E - 01$
	$-0,803315898E - 02$	$0,519832536E - 01$	$-0,354249185E - 01$
250	$-0,500351849E - 02$	$0,281085735E - 01$	$-0,308928985E - 01$
	$-0,600372690E - 02$	$0,386112707E - 01$	$-0,113464205E - 01$
251	$0,127684107E - 01$	$0,249882052E - 01$	$0,153484968E - 01$
	$0,109252230E - 01$	$0,233280344E - 01$	$0,132354886E - 01$
302	$0,340242160E - 01$	$0,517955949E - 01$	$-0,186208190E - 01$
301	$0,355165889E - 01$	$0,440110566E - 01$	$-0,234297425E - 01$
192	$-0,647904667E - 02$	$0,355685814E - 01$	$-0,460863968E - 01$
	$-0,112809185E - 01$	$0,571845149E - 01$	$-0,142833721E - 01$
286A	$0,260041170E - 02$	$0,911656732E - 02$	$-0,155967130E - 03$
	$0,303528269E - 02$	$0,778221552E - 02$	$-0,117769305E - 02$

Tabla B.3: Condiciones iniciales de referencia en cada segmento de las familia del Atlas.

Familia	$y$	$x$	$\dot{y}$
286B	$0,189185730E - 02$	$0,119401221E - 01$	$0,118441250E - 02$
	$0,668308410E - 02$	$0,886102573E - 02$	$-0,234507098E - 02$
171	$-0,895678772E - 02$	$0,491532912E - 01$	$-0,237902209E - 01$
	$-0,251579817E - 01$	$0,805498294E - 01$	$0,921065584E - 02$
020	$0,275431699E - 01$	$0,107960479E + 00$	$0,276437305E - 01$
	$0,402182925E - 01$	$0,906880037E - 01$	$0,316005833E - 02$
021	$0,425866457E - 01$	$0,727269013E - 01$	$0,611805937E - 01$
	$0,473335702E - 01$	$0,618587336E - 01$	$0,460922161E - 01$
013	$0,389855276E - 01$	$0,744436788E - 01$	$0,472104287E - 01$
	$0,464815935E - 01$	$0,656015071E - 01$	$0,387799216E - 01$
222A	$-0,714386490E - 02$	$0,400193203E - 01$	$-0,378144053E - 01$
	$-0,884451718E - 02$	$0,520219205E - 01$	$-0,262296100E - 01$
222B	$-0,109839000E - 01$	$0,552063137E - 01$	$-0,235708060E - 01$
	$-0,512495932E - 02$	$0,391537036E - 01$	$-0,462183019E - 01$
081A	$0,360865840E - 01$	$0,964135185E - 01$	$-0,334431795E - 01$
	$0,302435844E - 01$	$0,849337239E - 01$	$-0,121718372E - 01$
081B	$0,362243627E - 01$	$0,924799328E - 01$	$-0,322958669E - 01$
	$0,335431010E - 01$	$0,954805237E - 01$	$-0,271341136E - 01$
081C	$0,396802655E - 01$	$0,576535212E - 01$	$0,253425584E - 01$
	$0,414115157E - 01$	$0,768665649E - 01$	$-0,378931498E - 02$
200	$0,846649331E - 03$	$0,485864259E - 01$	$0,436850801E - 01$
172	$-0,842636899E - 02$	$0,514704003E - 01$	$-0,287873135E - 01$
	$-0,209888159E - 01$	$0,827241600E - 01$	$-0,348104235E - 02$
209	$-0,845336530E - 02$	$0,495050245E - 01$	$0,409564303E - 01$
	$0,122299927E - 01$	$0,398609019E - 01$	$0,349169856E - 01$
232	$-0,100246267E - 01$	$0,542034879E - 01$	$0,532585784E - 02$
	$-0,189647218E - 01$	$0,705129874E - 01$	$0,127005191E - 01$
058A	$0,353284257E - 01$	$0,575242229E - 01$	$0,302533704E - 02$
	$0,338572209E - 01$	$0,798948524E - 01$	$-0,260636380E - 01$
058B	$0,364670646E - 01$	$0,896774601E - 01$	$-0,351991604E - 01$
	$0,366182210E - 01$	$0,864751926E - 01$	$-0,349712546E - 01$
263A	$-0,167026163E - 01$	$0,632756708E - 01$	$0,822789677E - 02$
	$0,477994600E - 02$	$0,249428148E - 01$	$0,120438297E - 01$
263B	$0,675973010E - 02$	$0,250492832E - 01$	$0,140445217E - 01$
	$-0,478909034E - 02$	$0,343906571E - 01$	$0,362365586E - 02$
287	$-0,491497146E - 02$	$0,102152900E - 01$	$-0,273833558E - 02$
	$-0,328309721E - 02$	$0,295429616E - 02$	$0,449750088E - 02$
032A	$0,162689361E - 01$	$0,114267478E + 00$	$0,171276102E - 01$
	$0,238723513E - 01$	$0,108474086E + 00$	$-0,120297503E - 02$

Tabla B.4: Condiciones iniciales de referencia en cada segmento de las familia del Atlas.

Familia	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
032B	$0,300205460E - 01$	$0,103693032E + 00$	$-0,995415756E - 02$
	$0,200265427E - 01$	$0,112085605E + 00$	$0,381067440E - 02$
254	$-0,854292629E - 02$	$0,320528578E - 01$	$-0,281378054E - 01$
	$-0,105016528E - 01$	$0,431010284E - 01$	$-0,152078476E - 01$
255	$-0,802186937E - 02$	$0,246015807E - 01$	$-0,334557628E - 01$
	$-0,819191113E - 02$	$0,250373083E - 01$	$-0,342922593E - 01$
026	$-0,116717951E - 01$	$0,756726904E - 01$	$-0,876236898E - 01$
	$-0,715159709E - 02$	$0,736039262E - 01$	$-0,100141850E + 00$
027	$-0,496418980E - 01$	$0,680592064E - 01$	$0,270246511E - 01$
	$-0,420742472E - 01$	$0,834013676E - 01$	$0,441748394E - 02$
044	$0,406679461E - 02$	$0,701530361E - 01$	$-0,927072876E - 01$
	$0,223892450E - 02$	$0,779626330E - 01$	$-0,866431753E - 01$
045	$-0,374674566E - 01$	$0,848134269E - 01$	$-0,769053352E - 02$
	$-0,472953614E - 01$	$0,676435166E - 01$	$0,191808294E - 01$
132	$-0,313816769E - 02$	$0,556147277E - 01$	$-0,719232307E - 01$
	$-0,345218502E - 02$	$0,591934088E - 01$	$-0,701193827E - 01$
133	$-0,224139131E - 01$	$0,569763339E - 01$	$-0,543670051E - 01$
	$-0,218527157E - 01$	$0,560012977E - 01$	$-0,561390265E - 01$
256A	$-0,830913666E - 02$	$0,338462498E - 01$	$-0,235128964E - 01$
	$-0,100111992E - 01$	$0,488541246E - 01$	$-0,136106878E - 01$
256B	$-0,779684021E - 02$	$0,322330309E - 01$	$-0,280371647E - 01$
	$-0,930391439E - 02$	$0,388842760E - 01$	$-0,183062431E - 01$
300A	$-0,289341947E - 01$	$0,891247930E - 01$	$0,707858426E - 02$
	$-0,116505031E - 01$	$0,905617930E - 01$	$-0,332418223E - 01$
300B	$-0,336658561E - 01$	$0,786639013E - 01$	$0,153723465E - 01$
	$-0,346904106E - 01$	$0,777901266E - 01$	$0,173533759E - 01$
300C	$-0,264773550E - 01$	$0,870643902E - 01$	$-0,300082303E - 02$
	$-0,224187568E - 01$	$0,905603940E - 01$	$-0,123018536E - 01$
300D	$-0,215731410E - 01$	$0,962673219E - 01$	$-0,133242161E - 01$
	$-0,303498317E - 01$	$0,869883827E - 01$	$0,118881705E - 01$
238	$-0,489887137E - 03$	$0,392650619E - 01$	$0,196280295E - 01$
	$0,113294822E - 01$	$0,325345131E - 01$	$0,201233351E - 01$
262A	$0,335729921E - 02$	$0,298007089E - 01$	$0,164676445E - 01$
	$-0,207704871E - 02$	$0,325429178E - 01$	$0,137501795E - 01$
262B	$0,282152795E - 02$	$0,297816457E - 01$	$0,162409651E - 01$
	$0,937887981E - 04$	$0,317265973E - 01$	$0,150140631E - 01$
262C	$-0,618809682E - 02$	$0,383843752E - 01$	$0,129611212E - 01$
	$-0,573980231E - 02$	$0,370439309E - 01$	$0,102582307E - 01$
008	$-0,267035714E - 01$	$0,104024852E + 00$	$0,214755812E - 01$
	$-0,318179272E - 01$	$0,941532561E - 01$	$0,377264395E - 01$

# Apéndice C

## C.1. Bifurcación de soluciones periódicas

En esta sección se analizan las condiciones que se deben cumplir para que una órbita periódica de un sistema autónomo bifurque a una órbita periódica de un sistema no-autónomo [7].

Consideremos un sistema dinámico no-autónomo descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad (\text{C.1})$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y la función  $g$  es  $T$ -periódica en  $t$ .

Sea  $x_0(t)$  una solución  $T$ -periódica del sistema autónomo  $\dot{x} = f(x)$ . Para extender esta solución a través de la Ec. (C.1) para  $\varepsilon > 0$ , deberemos determinar los valores de las condiciones iniciales  $x_0(0)$  y los correspondientes valores de los tiempos iniciales  $t_0$  que permitan la continuación [7].

Introducimos un corrimiento temporal  $s$  y expandimos una solución de la Ec. (C.1) en una serie de potencias de  $\varepsilon$ :

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (\text{C.2})$$

Sustituyendo (C.2) en (C.1) y desarrollando las funciones  $f$  y  $g$  alrededor de la órbita periódica obtenemos, a primer orden en  $\varepsilon$ , la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}_1 = Df(x_0)x_1 + g(x_0, t + s), \quad x_1(0) = a, \quad (\text{C.3})$$

donde  $Df = \frac{\partial f}{\partial x}$ . El corrimiento temporal  $s$  y la condición inicial  $a$  son las incógnitas que se desean determinar.

La ecuación diferencial para  $x_2(t)$  es obtenida a partir de los términos de segundo orden según:

$$\dot{x}_2 = Df(x_0)x_2 + \frac{1}{2}D^2f(x_0)(x_1)^2 + D_xg(x_0, t + s)x_1, \quad (\text{C.4})$$

donde la condición inicial puede elegirse como  $x_2(0) = 0$  [11].

Sea la matriz  $A(t)$ , la solución de las ecuaciones variacionales a lo largo de la órbita periódica del sistema autónomo

$$\dot{A}(t) = Df(x_0)A(t), \quad A(0) = I. \quad (\text{C.5})$$

Entonces,  $x_1$  y  $x_2$  pueden expresarse como

$$x_1(t) = A(t)(a + y_1(t, s)), \quad (\text{C.6})$$

$$x_2(t) = A(t)(y_2(t, s)), \quad (\text{C.7})$$

donde

$$\dot{y}_1 = A^{-1}g(x_0(t), t + s), \quad (\text{C.8})$$

$$\dot{y}_2 = A^{-1} \left( \frac{1}{2} D^2 f(x_0(t))(x_1(t))^2 + D_x g(x_0(t), t + s)x_1(t) \right), \quad (\text{C.9})$$

con  $y_1(0) = y_2(0) = 0$ .

La condición de periodicidad para la solución  $x(t)$  es:

$$x_0(0) + \varepsilon a = x_0(T) + \varepsilon x_1(T) + \varepsilon^2 x_2(T) + \dots, \quad (\text{C.10})$$

que debe ser tenida en cuenta para determinar  $a$  y  $s$ . Entonces, para  $x_1$  se tiene

$$(A(T) - I)a = -A(T)y_1(T, s). \quad (\text{C.11})$$

Teniendo en cuenta que, en el caso de una bifurcación, al menos dos de los autovalores de la matriz de monodromía  $A(T)$  resultan unitarios, la solución de las ecuaciones expuestas anteriormente permite determinar los valores de  $a$  y  $s$ .

La aplicación directa a los modelos PC3CR y PCBC puede encontrarse en el trabajo de Andreu [7].

## C.2. Otras Órbitas arco y OPs de Transferencia Rápida en el PCBC.

Órbitas de transferencia rápida que resultaron de realizar pequeñas búsquedas numéricas en el PCBC.

Tabla C.1: Condiciones iniciales correspondientes a órbitas arco y OPs de transferencia rápida en el PCBC.

órbita	$t_i$	$x$	$\dot{x}$
	$T$	$y$	$\dot{y}$
$T045_{t_1}$	0,0000000000000	-1,3336294751289	0,0000000000000
	$T^\odot$	0,0000000000000	2,1542621520242
$T045_{t_2}$	3,3955969359540	-0,8615552203135	0,0000000000000
	$T^\odot$	0,0000000000000	2,1116121304583
$T225_{t_1}$	1,2999999523169	0,8556295635769	1,1556399608635
	$T^\odot$	0,6292832001316	-1,2631528076754
$T001_{t_1}$	0,0000000000000	-1,0171758502528	0,0000000000000
	$2T^\odot$	0,0000000000000	2,1187470502677
$T001_{t_2}$	3,3955969359540	0,6940941998237	1,5832902664807
	$2T^\odot$	0,8197334638255	-1,0850556837109
$T108_{t_1}$	0,2900000000000	-0,5185708750978	1,8104006466019
	$5/2 T^\odot$	0,7965504709991	1,0510567510282
$T132_{t_1}$	0,6950000000000	-0,8266383701024	0,5139162893196
	$7/2 T^\odot$	0,1895591841050	-1,7432271494704

Tabla C.2: Distancias mínimas a la Tierra y a la Luna y parámetros de estabilidad.

órbita	$d_{min}(\text{km})$	$d_{min}(\text{km})$	$ s_1 $	$ s_2 $
	Tierra	Luna		
$T045_{t_1}$	335853	48549	2,1	1,3
$T045_{t_2}$	335852	48548	2,1	1,3
$T225_{t_1}$	129252	15079	3,5	1,9
$T001_{t_1}$	221718	11277	12,2	2,2
$T001_{t_2}$	221718	11274	12,2	2,2
$T108_{t_1}$	335846	11549	6,3	1,7
$T132_{t_1}$	174618	41509	99,2	0,6

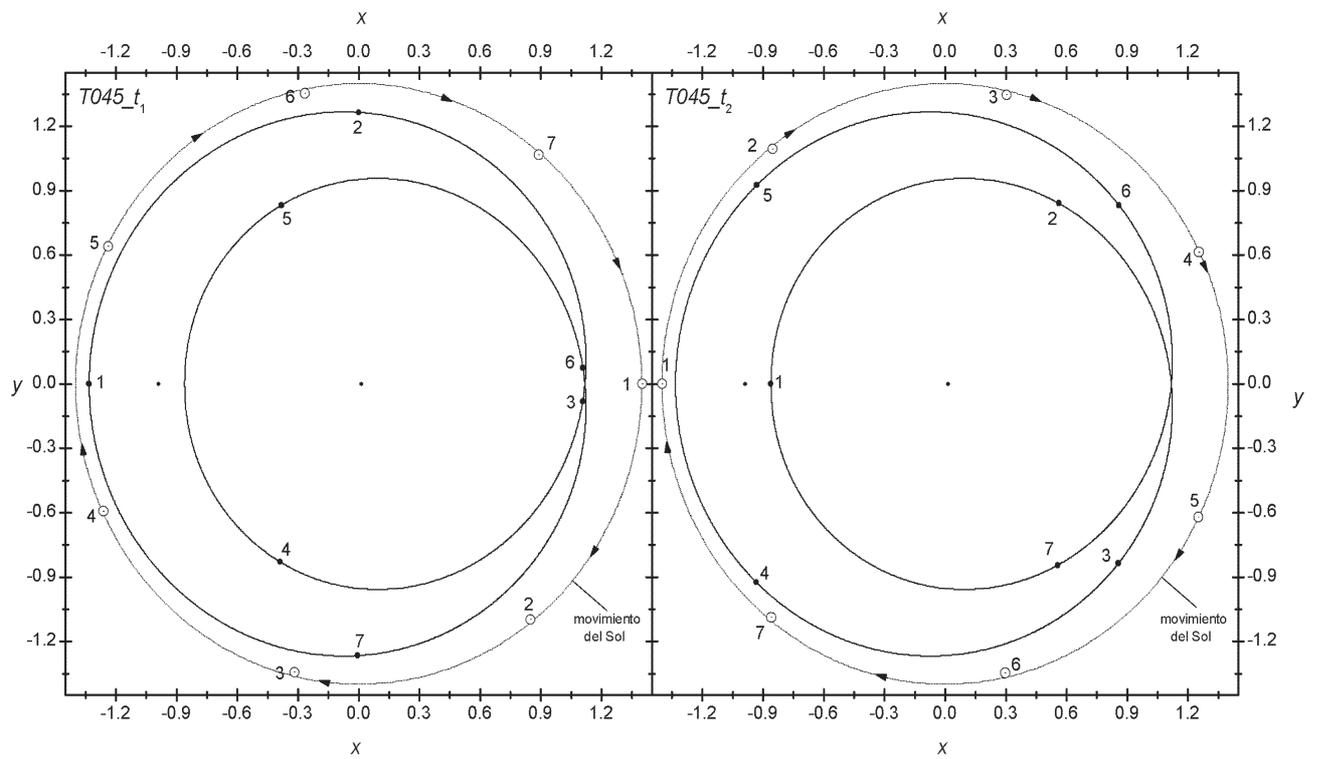


Figura C.1: Órbitas  $T^\odot$ -periódicas  $T045_{t_1}$  y  $T045_{t_2}$ . Los puntos a la derecha y a la izquierda representan la Tierra y la Luna respectivamente. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

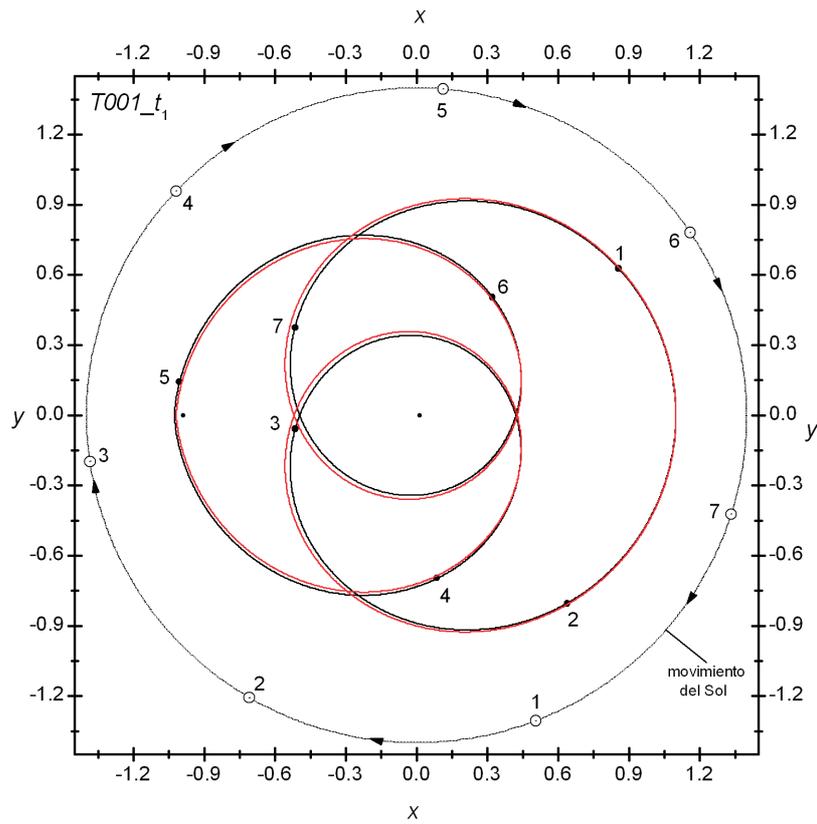


Figura C.2: Órbita  $T^\ominus$ -periódica  $T225-t_1$ . En rojo se muestra la OP  $T222-t_1$  (Sec. 3.2). Los puntos a la derecha y a la izquierda representan la Tierra y la Luna respectivamente. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

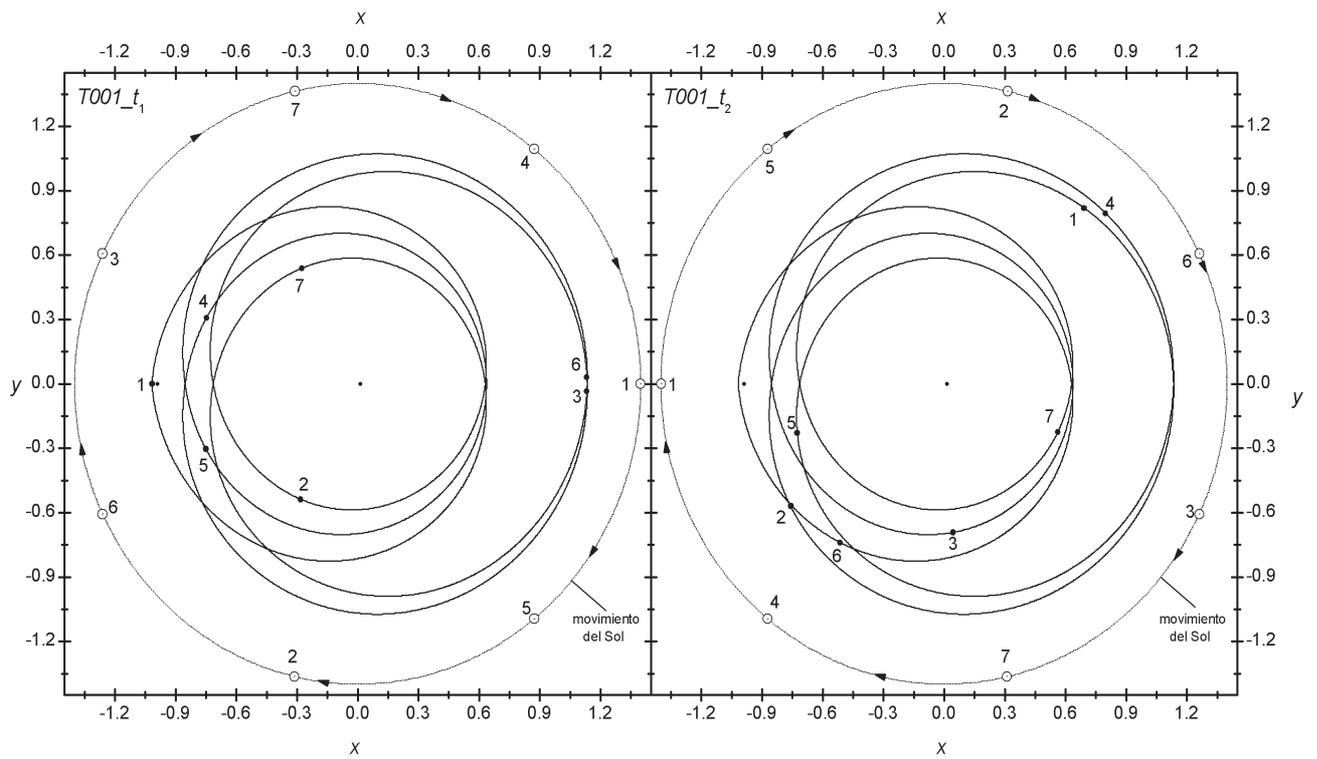


Figura C.3: Órbitas  $2T^\odot$ -periódicas  $T001_{t_1}$  y  $T001_{t_2}$ . Los puntos a la derecha y a la izquierda representan la Tierra y la Luna respectivamente. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

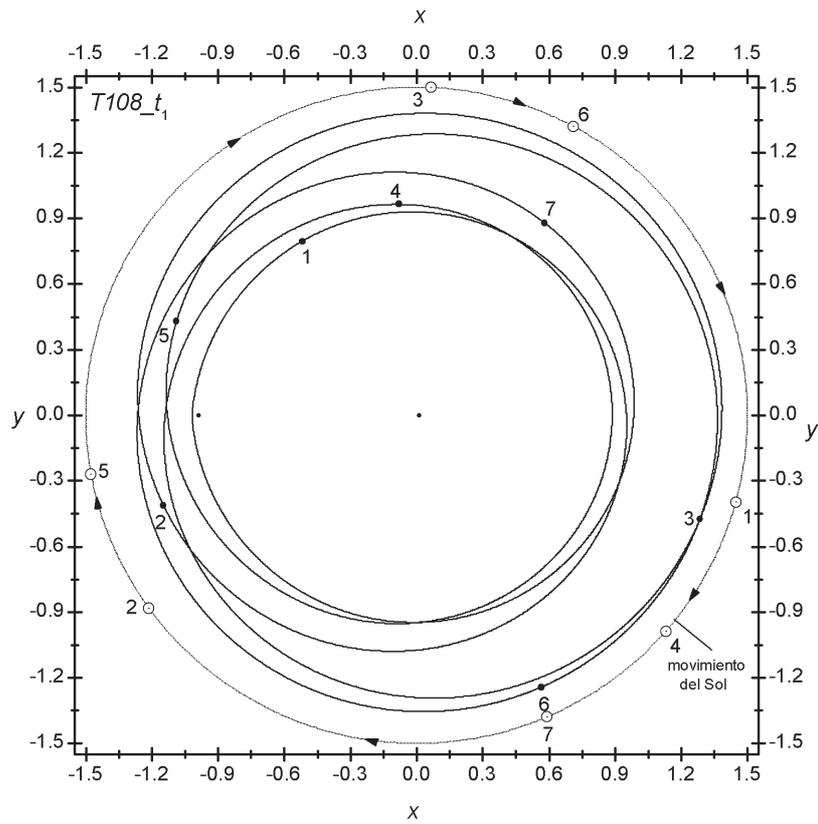


Figura C.4: Órbita arco  $T108_t1$ . Los puntos a la derecha y a la izquierda representan la Tierra y la Luna respectivamente. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

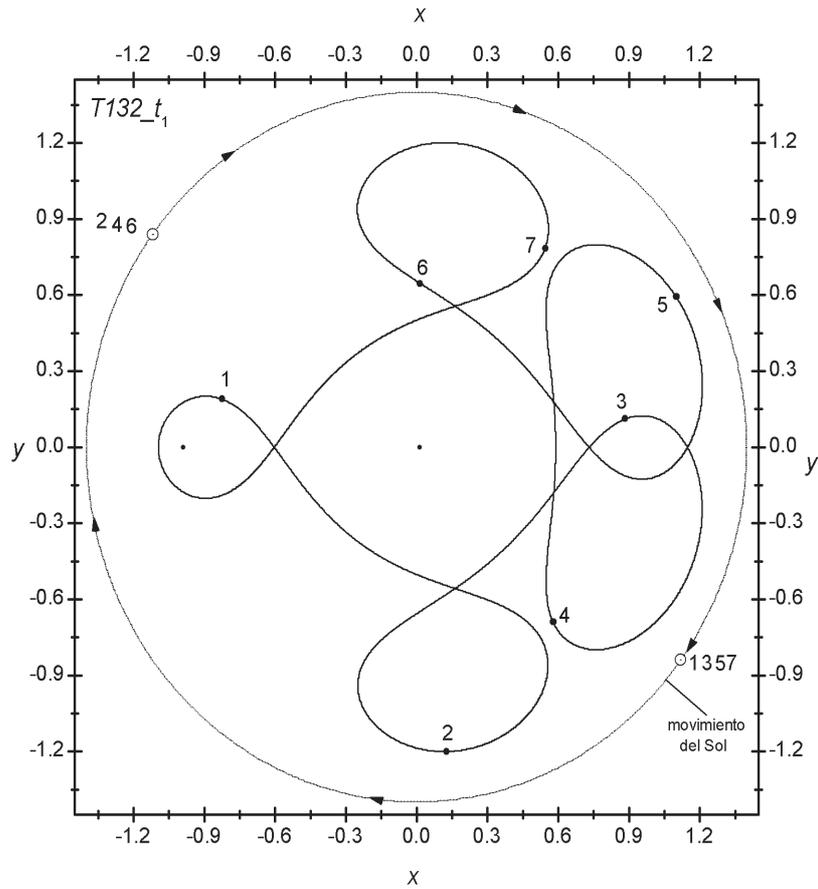


Figura C.5: Órbita arco  $T132_{t_1}$ . Los puntos a la derecha y a la izquierda representan la Tierra y la Luna respectivamente. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

# Apéndice D

## D.1. Método OGY.

En 1989 Edward Ott, Celso Grebogi y James A. Yorke (OGY) introducen un método general para controlar sistemas caóticos [13]. Éste fue aplicado por primera vez para estabilizar un sistema caótico disipativo utilizando una variación del mapa de Hénon [11, 12, 27]. Sus trabajos tuvieron gran repercusión en la comunidad científica y originaron gran variedad de aplicaciones en todas las ramas de la ciencia [14].

El método OGY se puede dividir en dos etapas:

1. Una primera etapa contempla la reconstrucción de la dinámica caótica. El comportamiento del sistema debe depender de un parámetro de control  $p$ . Utilizando una sección de Poincaré  $\Sigma$ , se deben localizar los puntos periódicos inestables que representen los comportamientos deseados dentro del atractor para un valor nominal del parámetro de control  $p_0$  y mediante un *análisis sensitivo* de la dinámica alrededor de un PPI se determinarán los efectos que producen pequeñas perturbaciones aplicadas en el parámetro de control  $p$ .
2. En la segunda etapa o fase control, una perturbación es calculada y aplicada en una región de control, provocando así, que el sistema permanezca contenido en una vecindad de una órbita periódica inestable de interés. El parámetro  $p$  es cambiado desde un valor nominal  $p_0$  en una pequeña cantidad  $\delta p$  provocando que varíe la posición del punto control  $\xi_F$  y de su variedad estable. Esta perturbación obliga a que, en la próxima iteración del mapa de Poincaré  $\xi_n$  permanezca sobre la variedad estable del punto de control original con  $p = p_0$ .

Mediante la reconstrucción local de la dinámica, el sistema es forzado a permanecer en una región próxima de un punto periódico inestable (punto control).

En una superficie de Poincaré, el control confina las iteraciones a un entorno pequeño alrededor de  $\xi_F$ . Sin estas perturbaciones las iteraciones sucesivas del mapa divergen.

### Ley Original OGY de Control

Sea  $p$  el parámetro de control con valor nominal  $p_0$ . Para todo  $i \geq 1$  se define

$$\delta p_i = p_i - p_0 \quad ; \quad \delta \xi_{i+1}(p_i) = \xi_{i+1}(p_i) - \xi_F(p_0).$$

Supongamos que la iteración es descripta por el mapa  $\xi_{i+1} = P(\xi_i, p_i)$ . El desarrollo lineal local de  $P$  en la vecindad de un punto control  $\xi_F$  está representado por la matriz

Jacobiana  $J$ ,  $d \times d$ :

$$J = [D_\xi P(\xi, p)]_{\xi=\xi_0, p=p_0}, \quad (\text{D.1})$$

donde se asume  $\det J \neq 0$ . Así, obtenemos como aproximación de primer orden

$$\delta \xi_{i+1}(p_i) \simeq J \xi_i(p_{i-1}) + \mathbf{u} \delta p_i, \quad (\text{D.2})$$

donde  $\mathbf{u}$  es un vector que refleja la dirección del gradiente local respecto a  $p$ .

Asumamos que un autovector  $\mathbf{e}_i$  de  $J$ , posee un autovalor real cuyo valor absoluto es mayor que 1. Los puntos  $\xi_i$  con  $\delta \xi_i$  en la dirección de  $\mathbf{e}_i$ , se alejarán rápidamente de  $\xi_F$  en las sucesivas iteraciones para  $p = p_0$ . Identificamos esta dirección como la dirección inestable de  $\xi_F$ . Las direcciones estables son caracterizadas por los autovectores de  $J$  cuyos autovalores poseen valores absolutos menores que 1.

**Lema 1** *Supongamos que la matriz  $J$ , posee  $d$  autovectores linealmente independientes  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  con autovalores reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ . Sea  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$  la base dual definida por*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

entonces, para cualquier  $x \in R^d$  se cumple

$$\mathbf{f}_i J x = \lambda_i \mathbf{f}_i x.$$

**Teorema 1** *La condición  $\mathbf{f}_i \cdot \delta \xi_{i+1} = 0$ , origina la ley de control a primer orden*

$$\delta p_i = -\lambda_i \frac{\mathbf{f}_i \delta \xi_i(p_{i-1})}{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}}$$

entonces, para cualquier  $x \in R^d$

$$\mathbf{f}_i J x = \lambda_u \mathbf{f}_i x.$$

donde para  $\xi_i$  cerca de  $\xi_F$  el vector  $\mathbf{u}$  está definido por

$$\mathbf{u} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\xi_{i+1}(p_i) - J \xi_i(p_{i-1})}{p - p_0}.$$

El método OGY requiere las siguientes condiciones [19]:

- Necesitamos que el sistema permita extraer series temporales de vectores  $\xi_i$  y que se puedan aplicar las técnicas de identificación de OPIs.
- Que la dinámica se pueda representar mediante una superficie de Poincaré de baja dimensión y que el sistema tenga en  $\xi_F$  al menos dos autovectores reales linealmente independientes.
- Debemos localizar una órbita inestable que represente el comportamiento que se desea estabilizar.

- Debe existir un parámetro externo al sistema que pueda perturbarse para modificar su comportamiento. Este parámetro debe estar acotado entre dos valores  $p_{min} < p < p_{max}$ .
- La posición de la OPI debe ser una función de  $p$ , pero la dinámica local no debe variar mucho con pequeños cambios en  $p$ .

Para más detalle consultar el trabajo original [13].

Las técnicas que permiten extraer OPIs en un atractor caótico y algunas variaciones de la Ley de OGY pueden consultarse en [19, 25].

## D.2. PCBC sin restricciones.

En esta Sección se muestran las expresiones del Hamiltoniano y de las ecuaciones de movimiento de la masa infinitesimal  $m$  en el sistema sinódico para el caso general [7](problema tridimensional).

$$\begin{aligned}
 H_{PCBC} = & \frac{1}{2}\alpha_1(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \alpha_2(xp_x + yp_y + p_z z) + \alpha_3(yp_x - xp_y) \\
 & + \alpha_4 x + \alpha_5 y - \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{m_s}{r_s} \right), \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

donde  $p_x = (\dot{x} - \alpha_2 x - \alpha_3 y)/\alpha_1$ ,  $p_y = (\dot{y} - \alpha_2 y + \alpha_3 x)/\alpha_1$ ,  $p_z = (\dot{z} - \alpha_2 z)/\alpha_1$ ,  $r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2$ ,  $r_2^2 = (x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2$ , y  $r_s^2 = (x - \alpha_7)^2 + (y - \alpha_8)^2 + z^2$ .

Las ecuaciones de movimiento para  $m$  son:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} = & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \dot{x} + 2\alpha_3 \dot{y} + xp(t) + yq(t) - \alpha_1 \alpha_4 - \\
 & - \alpha_1 \alpha_6 \left[ (1-\mu) \frac{x-\mu}{r_1^3} + \mu \frac{x+1-\mu}{r_2^3} + m_s \frac{x-\alpha_7}{r_s^3} \right], \tag{D.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} = & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \dot{y} - 2\alpha_3 \dot{x} + yp(t) - xq(t) - \alpha_1 \alpha_5 - \\
 & - \alpha_1 \alpha_6 \left[ (1-\mu) \frac{y}{r_1^3} + \mu \frac{y}{r_2^3} + m_s \frac{y-\alpha_8}{r_s^3} \right], \tag{D.5}
 \end{aligned}$$

$$\ddot{z} = \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \dot{z} + z(p(t) - \alpha_3^2) - \alpha_1 \alpha_6 \left[ (1-\mu) \frac{z}{r_1^3} + \mu \frac{z}{r_2^3} + m_s \frac{z}{r_s^3} \right], \tag{D.6}$$

con  $p(t) = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dot{\alpha}_2 - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \alpha_2$  y  $q(t) = \dot{\alpha}_3 - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \alpha_3$ .

## D.3. Matriz de Monodromía en el PCBC.

Las ecuaciones de movimiento del PCBC pueden expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, t) \tag{D.7}$$

con  $\vec{r} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ . La matriz gradiente de fuerzas  $A(t)$  es:

$$A(t) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p + b_1 & q + b_2 & b_4 & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} & 2\alpha_3 & 0 \\ -q + b_2 & p + b_3 & b_5 & -2\alpha_3 & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} & 0 \\ b_4 & b_5 & p + b_6 & 0 & 0 & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

$$\text{con } p(t) = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dot{\alpha}_2 - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \alpha_2, \quad q(t) = \dot{\alpha}_3 - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \alpha_3,$$

$$b_1 = -\alpha_1 \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} - 3(1-\mu) \frac{(x-\mu)^2}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^3} - 3\mu \frac{(x+1-\mu)^2}{r_2^5} + \frac{m_s}{r_s^3} - 3m_s \frac{(x-\alpha_7)^2}{r_s^5} \right),$$

$$b_2 = 3\alpha_1 \alpha_6 \left( (1-\mu) \frac{(x-\mu)y}{r_1^5} + \mu \frac{(x+1-\mu)y}{r_2^5} + m_s \frac{(x-\alpha_7)(y-\alpha_8)}{r_s^5} \right),$$

$$b_3 = -\alpha_1 \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} - 3(1-\mu) \frac{y^2}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^3} - 3\mu \frac{y^2}{r_2^5} + \frac{m_s}{r_s^3} - 3m_s \frac{(y-\alpha_8)^2}{r_s^5} \right),$$

$$b_4 = 3\alpha_1 \alpha_6 \left( (1-\mu) \frac{(x-\mu)z}{r_1^5} + \mu \frac{(x+1-\mu)z}{r_2^5} + m_s \frac{(x-\alpha_7)z}{r_s^5} \right),$$

$$b_5 = 3\alpha_1 \alpha_6 \left( (1-\mu) \frac{yz}{r_1^5} + \mu \frac{yz}{r_2^5} + m_s \frac{(y-\alpha_8)z}{r_s^5} \right),$$

$$b_6 = -\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} - 3(1-\mu) \frac{z^2}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^3} - 3\mu \frac{z^2}{r_2^5} + \frac{m_s}{r_s^3} - 3m_s \frac{z^2}{r_s^5} \right).$$

La matriz fundamental de soluciones está dada por

$$\mathbf{m}(t; t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^{t_0+t} A(t') dt' \right). \quad (\text{D.9})$$

Las funciones  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\dot{\alpha}_1(t)/\alpha_1(t)$  y  $\alpha_3(t)$  son independientes de la OP particular a lo largo de la cuál  $A(t)$  es computada. Además, para una órbita  $T$ -periódica tenemos que:

- $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha_3(t) dt = \alpha_{30} = 9,999999999999998E-01$ . Esta integral puede considerarse igual a la unidad según la precisión de los resultados numéricos utilizados en este trabajo.
- $\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} dt = 0$  y  $\int_{t_0}^{t_0+T} q(t) dt = 0$  debido a la paridad de las funciones.

. Utilizando las siguientes cantidades

$$b = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} b_2 dt, \quad d = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} b_4 dt, \quad e = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} b_5 dt,$$

$$p_0 + a = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p + b_1 dt,$$

$$p_0 + c = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p + b_3 dt,$$

$$p_0 + f = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p + b_6 dt,$$

el promedio de  $A(t)$  sobre un período completo de una órbita  $T$ -periódica puede expresarse en la forma

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & C \end{pmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

donde  $0$  es la matriz nula  $3 \times 3$ ,  $I$  es la matriz identidad  $3 \times 3$ ,

$$B = \begin{pmatrix} p_0 + a & b & d \\ b & p_0 + c & e \\ d & e & p_0 + f \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.11})$$

La matriz de monodromía de una órbita  $T$ -periódica está dada por

$$M = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} A(t') dt'\right) = \exp(T\bar{A}). \quad (\text{D.12})$$

## D.4. Autovalores y autovectores de $M$ .

Cada autovalor  $\mu$  de  $\bar{A}$  se corresponde con un autovalor  $\lambda = e^{T\mu}$  de  $M$ . El vector  $\vec{v}$  será autovector de  $M$  con autovalor  $\lambda = e^{T\mu}$  sí y solo sí, también es autovector de  $\bar{A}$  con autovalor  $\mu$ . De la Ecuación (D.10) se deduce que la estructura de los autovectores es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \mu\vec{u} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.13})$$

con  $\vec{u} \in \mathbf{C}^3$ . Las componentes de la velocidad de cada autovector de  $\bar{A}$  son iguales a las componentes de las coordenadas con un factor de escala dado por el autovalor  $\mu$ . Ésto implica que, para un autovalor no nulo, no se pueden obtener sólo autovectores en coordenadas o velocidades. Además, dos autovectores correspondientes a distintos autovalores serán linealmente independientes; entre sí, tendrán separadamente las componentes en coordenadas y velocidades linealmente independientes.

El polinomio característico de  $\bar{A}$  es

$$p_{\bar{A}} = \mu^6 + a_1\mu^4 + a_2\mu^2 + a_3, \quad (\text{D.14})$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - \text{Tr}B \\ a_2 &= (p+a)(p+c) - b \\ &\quad + (p+a)(p+f) - d \\ &\quad + (p+c)(p+f) - e \\ a_3 &= \det B. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Resulta evidente que si  $\mu$  es un autovalor de  $\bar{A}$ ,  $-\mu$  también lo es. Así, si  $\lambda = e^{T\mu}$  es autovalor de  $M$ ,  $1/\lambda$  también lo es, y el polinomio característico de  $M$  tiene la siguiente forma:

$$p_M(\lambda) = (\lambda^2 - s_1\lambda + 1)(\lambda^2 - s_2\lambda + 1)(\lambda^2 - s_3\lambda + 1), \quad (\text{D.16})$$

donde  $s_k = \lambda_k + 1/\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  son los parámetros de estabilidad.

Para el análisis que sigue, resulta conveniente realizar un cambio de base donde la matriz  $B$  es diagonal. Ésta es una matriz real simétrica con autovalores reales  $\nu_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  y con los correspondientes autovectores  $\vec{w}_i$  reales y mutuamente ortogonales. Los autovectores normalizados forman una base real ortonormal de  $\mathbf{R}^3$  y la transformación de semejanza  $R$  que diagonaliza  $B$  es simplemente la rotación

$$R = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

en  $\mathbf{R}^3$ . Así, obtenemos

$$B' = R^{-1}BR = R^T BR = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \quad (\text{D.18})$$

Para preservar la estructura (D.13) de los autovectores se debe aplicar la transformación de manera simultánea pero actuando separadamente sobre las componentes de las coordenadas y velocidades. Así, definimos

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B' & C' \end{pmatrix}. \quad (\text{D.19})$$

donde

$$C' = R^{-1}CR = \begin{pmatrix} 0 & 2w_{3,3} & -2w_{2,3} \\ -2w_{3,3} & 0 & 2w_{1,3} \\ 2w_{2,3} & -2w_{1,3} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.20})$$

y  $w_{i,3}$  son las terceras componentes de los autovectores  $\vec{w}_i$ . Esta transformación de semejanza no mezcla coordenadas con velocidades y aplica la misma rotación en el espacio de coordenadas y en el espacio de velocidades.

Las matrices  $\bar{A}'$  y  $\bar{A}$  tienen el mismo polinomio característico y éste puede ser reescrito como

$$p_{\bar{A}'} = (\mu^2 - \nu_1)(\mu^2 - \nu_2)(\mu^2 - \nu_3) + 4\mu^2[w_{1,3}^2(\mu^2 - \nu_1) + w_{2,3}^2(\mu^2 - \nu_2) + w_{3,3}^2(\mu^2 - \nu_3)]. \quad (\text{D.21})$$

Los autovectores de  $\bar{A}'$  tienen la estructura (D.13) y son obtenidos como solución de la ecuación de autovectores

$$\begin{pmatrix} \mu^2 - \nu_1 & -2\mu w_{3,3} & 2\mu w_{2,3} \\ 2\mu w_{3,3} & \mu^2 - \nu_2 & -2\mu w_{1,3} \\ -2\mu w_{2,3} & 2\mu w_{1,3} & \mu^2 - \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.22})$$

para  $\mu$  igual a cada una de las raíces de  $p_{\bar{A}'}(\mu)$ . Los autovectores de  $\bar{A}$  son obtenidos de la misma manera, pero utilizando  $\vec{u} = R\vec{u}'$  en vez de  $\vec{u}'$ .

Analicemos lo expuesto cuando el movimiento de la masa infinitesimal se desarrolla en el plano  $(x, y)$  (caso planar). En este caso  $z = \dot{z} = 0$  a lo largo de la OP,  $b_4$  y  $b_5$  desaparecen idénticamente y obtenemos  $d = e = 0$  (ver Sec. D.3),  $\nu_3 = p_0 + f$ ,  $\vec{w}_3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $w_{1,3} = w_{2,3} = 0$ ,  $R$  es una rotación en el plano  $(x, y)$  o  $(\dot{x}, \dot{y})$  y  $C = C'$ .

Reordenando la base original  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  según  $\{\hat{x}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{z}\}$ , la matriz  $\bar{A}'$  queda diagonalizada por bloques en la forma

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{A}'_{xy} & 0 \\ 0 & \bar{A}'_z \end{pmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

con

$$\bar{A}'_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}'_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.24})$$

En este caso también resulta  $\bar{A}'_z = \bar{A}_z$ .

Primero, analicemos la dinámica en el plano  $(z, \dot{z})$ . Puede verificarse numéricamente que  $\nu_3 < 0$ , lo cuál resulta trivial cuando se considera el carácter restaurador de la fuerza en la dirección de  $\hat{z}$  cerca de  $z = 0$  debido a que todas las masas primarias yacen en el plano  $xy$ . De la Ec. (D.22) resulta inmediato que  $\mu^2 = \nu_3$ . Así, para  $\bar{A}'$  obtenemos dos autovalores imaginarios puros  $\mu_{\pm} = \pm i\theta$ , ( $\theta^2 = -\nu_3$ ) asociados a los autovectores

$$\vec{u}'_{z\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.25})$$

respectivamente. El correspondiente bloque de  $M'$  es

$$M'_z = \exp(T\bar{A}'_z) = \begin{pmatrix} \cos(T\theta) & \frac{1}{\theta} \sin(T\theta) \\ -\theta \sin(T\theta) & \cos(T\theta) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.26})$$

que tiene los mismos autovectores con autovalores  $\lambda_{\pm} = e^{\pm T\theta}$ , y  $M'_z = M_z$ . Los conjuntos invariantes de este mapa son elipses en el plano  $(z, \dot{z})$  con semiejes de longitud  $a$  y  $a\theta$  en las direcciones  $\hat{z}$  y  $\hat{\dot{z}}$  respectivamente.

Ahora, analicemos la dinámica en la variedad  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . De la Ec. (D.21) los autovalores de  $\bar{A}'_{xy}$  satisfacen

$$(\mu^2 - \nu_1)(\mu^2 - \nu_2) + 4\mu^2 = 0, \quad (\text{D.27})$$

por lo tanto, ellos forman dos pares  $(\mu, -\mu)$  dados por

$$\pm\mu_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\nu_1 + \nu_2 - 4 + \pm \sqrt{(\nu_1 + \nu_2 - 4)^2 - 4\nu_1\nu_2}}, \quad (\text{D.28})$$

donde el subíndice  $\pm$  se corresponde con el doble signo dentro de la raíz cuadrada y clasifica cada par de autovalores. Puede verificarse numéricamente que  $(\nu_1 + \nu_2 - 4)^2 \geq 4\nu_1\nu_2$ , tal que cada par de autovalores  $\pm\mu$  es cualquier real, nulo o puramente imaginario. La Ecuación (D.27) muestra claramente que sólo se obtiene un par de autovalores nulo  $\pm\mu = 0$  solamente si  $\nu_1\nu_2 = 0$ , y que el producto  $(\mu^2 - \nu_1)(\mu^2 - \nu_2)$  es negativo para un par de autovalores reales, y positivo para uno puramente imaginario. A partir de la Ec. (D.22), para cada par de autovalores  $\pm\mu$  los correspondientes autovectores expresados en la base reordenada son

$$\vec{u}'_{\pm} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mu \end{pmatrix} \cos \chi \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mu \end{pmatrix} (\pm\sigma \sin \chi) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.29})$$

donde  $\sigma = \mu/|\mu|$  es igual a 1 para autovalores reales y  $i$  para imaginarios puros, y el ángulo  $\chi$  definido como

$$\tan \chi = \sqrt{-\sigma^2 \frac{\mu^2 - \nu_1}{\mu^2 - \nu_2}} \quad (\text{D.30})$$

puede ser asumido en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$  sin perder generalidad.<sup>1</sup> Notar que, para un par de autovalores nulo existe un solo autovector y  $\chi$  es igual a 0 o  $-\pi/2$ , lo cuál implica que el autovalor  $\nu_i$  de  $B$  desaparece. A menos que  $\mu_+ = \mu_-$ , los autovectores asociados a cada par de autovalores generan una variedad bidimensional distinta en el espacio  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . La acción de  $\bar{A}'_{xy}$ , y entonces de  $M'_{xy}$ , sobre cada una de estas variedades es independiente. En particular, una base real ortogonal de cada una de estas variedades está siempre dada por los vectores  $\frac{1}{2}(\bar{u}'_+ + \bar{u}'_-)$  y  $\frac{1}{2\sigma}(\bar{u}'_+ - \bar{u}'_-)$ , los cuales yacen a lo largo de las direcciones simétricas de los correspondientes conjuntos invariantes, y para conjuntos invariantes elípticos, la razón de los semiejes es  $|\mu|$ .

## D.5. Algoritmo de control: un ejemplo.

A continuación, se muestra un ejemplo explícito del algoritmo de control descrito en la Sección 4.4.

Consideremos una OP planar, tal que la dinámica en el plano  $(z, \dot{z})$  está completamente desacoplada de la dinámica en la variedad  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . En este ejemplo, sólo trataremos el caso de una estructura  $H \times E$ .

Asumamos que los autovalores de  $\bar{A}'$  son un par real  $\pm\mu_+ = \pm\mu$  ( $\mu > 0$ ) y un par imaginario puro  $\pm\mu_- = \pm i\theta$  ( $\theta > 0$ ) [ver Ec. (D.28)]. En la base ordenada  $\{\hat{x}, \hat{y}, \dot{\hat{x}}, \dot{\hat{y}}\}$  los correspondientes autovalores son, respectivamente

$$\vec{e}_u = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \\ \mu \cos \chi \\ \mu \sin \chi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_s = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -\sin \chi \\ -\mu \cos \chi \\ \mu \sin \chi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_e = \begin{pmatrix} \cos \zeta \\ i \sin \zeta \\ i\theta \cos \zeta \\ -\theta \sin \zeta \end{pmatrix}, \quad (\text{D.31})$$

donde por la Ec. (D.30)

$$\tan \chi = \sqrt{-\frac{\mu^2 - \nu_1}{\mu^2 - \nu_2}}, \quad \tan \zeta = \sqrt{\frac{\theta^2 + \nu_1}{\theta^2 + \nu_2}}. \quad (\text{D.32})$$

Tomamos (Sec. 4.4)  $\vec{a} = \vec{e}_s$  y  $\vec{b} = \xi \text{Re}(\vec{e}_e) + \eta \text{Im}(\vec{e}_e)$ , con  $\xi$  y  $\eta$  números reales arbitrarios. Entonces

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi & \xi \cos \zeta \\ -\sin \chi & \eta \sin \zeta \end{pmatrix}, \quad (\text{D.33})$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\xi \sin \chi \cos \zeta + \eta \cos \chi \sin \zeta} \begin{pmatrix} \eta \sin \zeta & \delta x - \xi \cos \zeta & \delta y \\ \sin \chi & \delta x + \cos \chi & \delta y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

<sup>1</sup>Sumar  $\pi$ , sólo multiplica el autovector por  $-1$ .

El desplazamiento  $\delta\vec{r}$  desde el punto fijo antes de aplicar el impulso de control puede ser escrito como

$$\delta\vec{r} = \omega\vec{e}_u + \tau\vec{e}_s + a \cos \phi \text{Re}(\vec{e}_e) + \theta a \sin \phi \text{Im}(\vec{e}_e) \quad (\text{D.35})$$

donde  $\omega$  es la componente a lo largo de la dirección inestable  $\vec{e}_u$  de la variedad hiperbólica ( $H$ ),  $\tau$  es la componente a lo largo de la variedad estable  $\vec{e}_s$ , y los coeficientes  $a \cos \phi$  y  $\theta a \sin \phi$  parametrizan un punto en fase  $\phi$  sobre un conjunto invariante elíptico con semiejes  $a$  y  $\theta a$  en la variedad elíptica ( $E$ ). Teniendo en cuenta que el impulso a aplicar es  $\Delta\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , el desplazamiento  $\delta\vec{r}' = \delta\vec{r} + \Delta\vec{r}$  desde el punto fijo después de aplicar el impulso de control es

$$\delta\vec{r}' = \alpha\vec{e}_s + \beta[\xi \text{Re}(\vec{e}_e) + \eta \text{Im}(\vec{e}_e)] = \alpha\vec{e}_s + a' \cos \phi' \text{Re}(\vec{e}_e) + \theta a' \sin \phi' \text{Im}(\vec{e}_e), \quad (\text{D.36})$$

donde por construcción, no tenemos componentes a lo largo de la dirección inestable  $\vec{e}_u$ ,  $a' \cos \phi'$  y  $\theta a' \sin \phi'$  parametrizan la componente elíptica del nuevo desplazamiento, el cuál yace sobre un diferente conjunto invariante elíptico con semiejes  $a'$  y  $\theta a'$ .

Ahora reparametrizemos la dirección  $\vec{b}$  mediante  $\xi = c \cos \psi$  y  $\eta = \theta c \sin \psi$ , y definamos

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= (\sin \chi \cos \zeta, \theta \cos \chi \sin \zeta), \\ \hat{\rho}_e &= (\cos \phi, \sin \phi), \\ \hat{\rho}_b &= (\cos \psi, \sin \psi). \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Podemos determinar  $\beta$  mediante la Ec. (D.34) sustituyendo los valores de  $\delta x$  y  $\delta y$  definidos en la Ec. (D.35). Igualando las componentes elípticas en la Ec. (D.36), y resolviendo para  $a'$  finalmente obtenemos

$$(\vec{\rho} \cdot \hat{\rho}_b)^2 a'^2 = (\sin(2\chi)\omega + \vec{\rho} \cdot \hat{\rho}_e a)^2, \quad (\text{D.38})$$

que relaciona el *valor*  $a'$  del nuevo conjunto elíptico en la variedad  $E$  con el *valor* anterior  $a$ . En esta expresión también aparece  $\omega$ , la componente inestable sobre la variedad  $H$  antes de aplicar el impulso de control, y muestra la imposibilidad de ejercer control de manera independiente en cada variedad.

En la Ec. (D.38) resulta evidente que si no fijamos  $\psi$  podremos garantizar que  $a' < a$  para todas las combinaciones posibles de  $\omega$ ,  $a$  y  $\phi$ . Ésto significa que, en general, en cada impulso de control no podremos estabilizar la órbita en la variedad  $H$  y al mismo tiempo, decrecer su distancia al punto fijo en la variedad  $E$ . sin embargo, cuando aplicamos sucesivos impulsos de control a lo largo de la órbita, los valores de  $\omega$ ,  $a$  y  $\phi$  antes de cada impulso estarán cerca de la OP debido a la interacción de la dinámica con los errores numéricos y las perturbaciones externas, y estos últimos variarán ampliamente desde un impulso de control a otro.

Asumiendo que estas variables están débilmente correlacionadas entre sí y entre sucesivos impulsos, y promediando sobre un gran número de impulsos aplicados, obtenemos

$$(\vec{\rho} \cdot \hat{\rho}_b)^2 \langle a'^2 \rangle = \sin^2(2\chi) \langle \omega \rangle + \frac{1}{2} \rho^2 \langle a^2 \rangle. \quad (\text{D.39})$$

Así, cuando

$$\frac{1}{(\vec{\rho} \cdot \hat{\rho}_b)^2} \left( \frac{1}{2} \rho^2 + \sin^2(2\chi) \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\langle a^2 \rangle} \right) < 1 \quad (\text{D.40})$$

los impulsos de control decrecerán el *valor* de la componente elíptica, y lo incrementarán cuando se cumpla la desigualdad opuesta ( $> 1$ ). Así, después de muchos impulsos, nos aproximaremos a una situación de *Equilibrio Estable* donde  $\langle a'^2 \rangle = \langle a^2 \rangle$ , lo cuál por la Ec. (D.39) implica

$$\langle a^2 \rangle_{EQ} = \frac{\sin^2(2\chi)}{(\vec{\rho} \cdot \hat{\rho}_b)^2 - \frac{1}{2}\rho^2} \langle \omega^2 \rangle. \quad (\text{D.41})$$

Resulta inmediato que existe un rango de valores de  $\psi$  para los cuales esta situación es posible, concretamente

$$(\vec{\rho} \cdot \hat{\rho}_b)^2 > \frac{1}{2}\rho^2. \quad (\text{D.42})$$

Si elegimos un vector  $\vec{b}$  que satisfaga esta condición entonces la condición de equilibrio será alcanzada. De otra manera, el valor de  $\langle a^2 \rangle$  se incrementará indefinidamente. La elección óptima para  $\psi$  es la que minimiza  $\langle a^2 \rangle_{EQ}$ , la cuál evidentemente es  $\hat{\rho}_b \parallel \hat{\rho}$ . En este caso obtenemos

$$\langle a^2 \rangle_{EQ} = 2 \frac{\sin^2(2\chi)}{\rho^2} \langle \omega^2 \rangle. \quad (\text{D.43})$$

Debe notarse que siempre podemos elegir  $\hat{\rho}_b$  igual a cualquiera de los vectores  $Re(\vec{e}_e)$  o  $Im(\vec{e}_e)$ , debido a que son mutuamente ortogonales [Ec. D.31], uno de ellos siempre satisface la condición (D.42). En general, sin embargo, ninguno de ellos constituye la elección óptima.

De manera similar a la expuesta en esta sección, se pueden analizar las distintas combinaciones de estructuras (ej.  $H \times H$ ).

## D.6. Puntos de control utilizados.

Puntos de control  $\vec{r}_i$  y direcciones estables  $\vec{a}_i$  y  $\vec{b}_i$  utilizados en la estabilización de OPIs en el PCBC planar ( $z = \dot{z} = 0$ ). Con este número de puntos se obtuvo, para cada caso, un consumo total acumulado mínimo  $\Delta_T$  durante  $1000T^\odot$  (Sec. 4.5).

Tabla D.1: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI  $T045_{t_1}$ .

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	0,410000000	-1,041013688	0,810330606	1,356985005	1,639775462
$\vec{a}_1$		-0,322218509	-0,416881683	-0,655223905	0,541356195
$\vec{b}_1$		-0,755519360	0,244647897	-0,207377853	0,571255048
$\vec{r}_2$	1,258899234	0,558688386	1,093259755	1,745680941	-1,056339192
$\vec{a}_2$		-0,456213477	0,233398200	0,443655014	0,735231101
$\vec{b}_2$		-0,272772011	0,539236953	0,501950658	0,618760435
$\vec{r}_3$	2,107798468	1,002549089	-0,396106066	-0,921166884	-1,781766900
$\vec{a}_3$		0,180804774	0,433620308	0,785835901	-0,402175335
$\vec{b}_3$		0,346746479	0,402210750	0,742919501	-0,407509518
$\vec{r}_4$	2,956697702	-0,465064989	-0,780839153	-1,674366680	1,189352751
$\vec{a}_4$		0,352601499	-0,216047806	-0,520074038	-0,747340969
$\vec{b}_4$		0,387997187	-0,267021123	-0,507659435	-0,721415138
$\vec{r}_5$	3,805596936	-0,512370834	0,744957741	1,598332023	1,293150245
$\vec{a}_5$		-0,311178472	-0,270617101	-0,570693411	0,710100961
$\vec{b}_5$		-0,259233145	-0,422114270	-0,517489439	0,697726595
$\vec{r}_6$	4,654496170	0,974542534	0,446858539	1,016671951	-1,729717130
$\vec{a}_6$		-0,231077156	0,397704344	0,759563142	0,459889591
$\vec{b}_6$		-0,646267847	0,003217304	0,641213376	0,413730498
$\vec{r}_7$	5,503395404	0,608334346	-1,061526006	-1,689442559	-1,139379011
$\vec{a}_7$		0,426815262	0,268444400	0,496473099	-0,706598046
$\vec{b}_7$		-0,940148114	0,190010758	-0,042490392	0,279664088
$\vec{r}_8$	6,352294638	-1,000693952	-0,856726826	-1,432798078	1,570518665
$\vec{a}_8$		0,347587662	-0,392207724	-0,618861272	-0,585121052
$\vec{b}_8$		-0,666575367	0,520138325	0,321776337	0,426137761

Tabla D.2: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI  $T222_{t_1}$ .

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	0,000000000	-1,019507511	0,000000000	0,000000000	1,977825733
$\vec{a}_1$		-0,000685355	-0,120585616	-0,992680185	-0,006685078
$\vec{b}_1$		0,059906184	-0,078296883	-0,923386756	0,370995614
$\vec{r}_2$	0,617381261	-0,319141238	0,749732615	1,774029632	0,230818241
$\vec{a}_2$		-0,389130408	-0,056434442	-0,164591326	0,904600671
$\vec{b}_2$		0,424387416	-0,616335189	0,328912826	-0,576057817
$\vec{r}_3$	1,234762522	0,438391825	0,059020949	-0,325857600	-2,158891804
$\vec{a}_3$		0,028251604	0,233248740	0,971971813	-0,008226048
$\vec{b}_3$		-0,071104019	-0,275862158	-0,953684716	-0,096590630
$\vec{r}_4$	1,852143783	-0,535523015	0,047219405	-0,529003122	1,893873230
$\vec{a}_4$		0,083851790	-0,277797123	-0,949341253	-0,120618497
$\vec{b}_4$		-0,292428719	0,233702902	0,908025108	-0,188039362
$\vec{r}_5$	2,469525044	-0,003610347	0,899819104	1,691459272	0,444777924
$\vec{a}_5$		-0,401099704	-0,103495723	-0,229228246	0,880830332
$\vec{b}_5$		-0,811814668	0,562734614	-0,146781456	-0,052363187
$\vec{r}_6$	3,086906305	0,943622875	0,521340121	0,984492605	-1,486194651
$\vec{a}_6$		-0,258911374	0,391343550	0,725194957	0,503892251
$\vec{b}_6$		-0,721184333	0,653178575	0,139438207	0,183869227
$\vec{r}_7$	3,704287566	0,943622875	-0,521340121	-0,984492605	-1,486194651
$\vec{a}_7$		0,250796360	0,401843706	0,737206821	-0,481818353
$\vec{b}_7$		-0,568676833	0,529289800	-0,457030929	0,433107027
$\vec{r}_8$	4,321668828	-0,003610347	-0,899819104	-1,691459272	0,444777924
$\vec{a}_8$		0,415710923	-0,083597286	-0,211219391	-0,880671500
$\vec{b}_8$		-0,255419322	0,453346997	0,140152277	0,842374507
$\vec{r}_9$	4,939050089	-0,535523015	-0,047219405	0,529003122	1,893873230
$\vec{a}_9$		-0,061980545	-0,284655504	-0,946757396	0,137040469
$\vec{b}_9$		0,159044131	0,303549336	0,939438508	-0,004249150
$\vec{r}_{10}$	5,556431350	0,438391825	-0,059020949	0,325857601	-2,158891804
$\vec{a}_{10}$		-0,033481341	0,226360264	0,973444445	0,006778077
$\vec{b}_{10}$		0,084772701	-0,246530759	-0,957927536	0,120045869
$\vec{r}_{11}$	6,173812611	-0,319141238	-0,749732615	-1,774029632	0,230818241
$\vec{a}_{11}$		0,383657336	-0,065315486	-0,142145278	-0,910129472
$\vec{b}_{11}$		-0,317451347	-0,216552978	0,237568483	0,892127046

Tabla D.3: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI  $T225_{t_1}$ .

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	1, 299999952	0, 855629564	0, 629283200	1, 155639961	-1, 263152808
$\vec{a}_1$		0, 296459461	-0, 607583484	0, 513898512	0, 528074254
$\vec{b}_1$		-0, 324988009	0, 304759114	0, 609955354	0, 655331323
$\vec{r}_2$	2, 054577049	0, 913727922	-0, 559746457	-1, 023591706	-1, 370835102
$\vec{a}_2$		0, 466826308	-0, 321056092	0, 628934426	-0, 532388647
$\vec{b}_2$		0, 273174984	0, 393644263	0, 740402544	-0, 471406084
$\vec{r}_3$	2, 809154146	-0, 245555687	-0, 771863465	-1, 439530042	1, 040281871
$\vec{a}_3$		0, 152959806	-0, 428537265	-0, 401043547	-0, 795061748
$\vec{b}_3$		0, 366139105	-0, 199253311	-0, 457740183	-0, 785311530
$\vec{r}_4$	3, 563731243	0, 023548076	0, 339588399	2, 459771514	-0, 263012303
$\vec{a}_4$		-0, 199016344	0, 020402139	0, 057851162	0, 978074379
$\vec{b}_4$		-0, 176342408	-0, 031402473	0, 203564276	0, 962537701
$\vec{r}_5$	4, 318308340	-0, 094928178	-0, 757573719	-1, 749968747	-0, 325365468
$\vec{a}_5$		0, 281499862	0, 282650737	-0, 001089750	-0, 916987024
$\vec{b}_5$		0, 257124767	0, 043801327	0, 337185593	-0, 904585084
$\vec{r}_6$	5, 072885437	-1, 023547190	-0, 049687398	-0, 227450288	1, 784359561
$\vec{a}_6$		0, 132742815	-0, 078592034	-0, 982628971	-0, 103164639
$\vec{b}_6$		0, 004971937	-0, 287808524	-0, 735390877	-0, 613467026
$\vec{r}_7$	5, 827462534	-0, 190710943	0, 769879263	1, 761481318	-0, 088313495
$\vec{a}_7$		0, 371080331	-0, 339890927	0, 152702274	-0, 850561909
$\vec{b}_7$		-0, 419583818	0, 046802881	-0, 130800480	0, 897022934
$\vec{r}_8$	6, 582039630	0, 155844607	-0, 305132185	-2, 279967286	-0, 985883209
$\vec{a}_8$		-0, 181862441	-0, 088162091	-0, 382116762	0, 901742911
$\vec{b}_8$		0, 151024758	0, 137537087	0, 227863113	-0, 952025984
$\vec{r}_9$	7, 336616727	-0, 319218238	0, 709829684	1, 303812865	1, 231161690
$\vec{a}_9$		-0, 095858192	0, 459337675	0, 441363975	-0, 764864660
$\vec{b}_9$		0, 580662686	0, 085646502	0, 379731114	-0, 715052308

Tabla D.4: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI  $T001_{t_1}$ .

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	0,000000000	-1,017175850	0,000000000	0,000000000	2,118747050
$\vec{a}_1$		0,000564909	0,112828762	0,993602767	0,004784729
$\vec{b}_1$		-0,022599446	0,093588762	0,983535550	-0,152932112
$\vec{r}_2$	1,509154194	0,506702953	-0,314648898	-1,202432815	-1,650257132
$\vec{a}_2$		-0,181248413	-0,254288590	-0,779973965	0,542334712
$\vec{b}_2$		-0,225592163	-0,211262476	-0,816361314	0,487883743
$\vec{r}_3$	3,018308388	0,008251988	0,979619235	1,880868165	0,288108829
$\vec{a}_3$		0,429461205	0,078087997	0,143368472	-0,888206519
$\vec{b}_3$		0,460811489	0,140964495	0,135646395	-0,865668434
$\vec{r}_4$	4,527462581	0,545891482	-0,969555162	-1,692348161	-0,823554037
$\vec{a}_4$		-0,425556424	-0,229837530	-0,385710252	0,785686987
$\vec{b}_4$		-0,235146492	-0,516188509	-0,415033024	0,711338977
$\vec{r}_5$	6,036616775	-0,463728342	0,597017768	1,668134283	0,981846947
$\vec{a}_5$		0,313366714	0,197680662	0,490297247	-0,788880389
$\vec{b}_5$		-0,503516931	-0,122794254	-0,517247927	0,681063031
$\vec{r}_6$	7,545770969	-0,463728342	-0,597017768	-1,668134283	0,981846947
$\vec{a}_6$		-0,317628159	0,188964816	0,487423270	0,791089885
$\vec{b}_6$		-0,070072456	0,757376732	0,043064130	0,647777599
$\vec{r}_7$	9,054925163	0,545891482	0,969555162	1,692348161	-0,823554037
$\vec{a}_7$		0,441385132	-0,211648632	-0,371206605	-0,789043522
$\vec{b}_7$		0,751876031	0,055945063	-0,206586154	-0,623598223
$\vec{r}_8$	10,564079356	0,008251988	-0,979619235	-1,880868165	0,288108829
$\vec{a}_8$		-0,436672339	0,038053389	0,135156149	0,888595534
$\vec{b}_8$		0,392432067	-0,380245254	-0,121669617	-0,828617598
$\vec{r}_9$	12,073233550	0,506702953	0,314648898	1,202432815	-1,650257132
$\vec{a}_9$		0,177296312	-0,246483280	-0,779584709	-0,547777046
$\vec{b}_9$		-0,249038703	0,241211224	0,807321737	0,477523280

Tabla D.5: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI 146A<sub>t<sub>3</sub></sub>.

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	3, 326579572	-0, 833881068	-0, 001762772	-0, 065801657	0, 036676000
$\vec{a}_1$		0, 311964265	-0, 143540928	-0, 613312527	-0, 711281972
$\vec{b}_1$		0, 208398755	-0, 685517059	-0, 330320156	-0, 614430562
$\vec{r}_2$	5, 873277274	-0, 962899712	0, 058949167	-0, 377993042	-0, 076210619
$\vec{a}_2$		0, 149569328	0, 038340953	0, 537888374	0, 828755141
$\vec{b}_2$		0, 129370888	0, 052883020	0, 594672109	0, 791727000
$\vec{r}_3$	8, 419974976	-0, 874776103	0, 021640555	-0, 012328877	0, 136940943
$\vec{a}_3$		-0, 071384288	-0, 311291339	0, 547235041	0, 773650952
$\vec{b}_3$		-0, 108511619	-0, 244419792	0, 582434702	0, 767628824
$\vec{r}_4$	10, 966672678	-0, 730266869	-0, 031497113	0, 274626682	-0, 169307429
$\vec{a}_4$		0, 309370874	-0, 279552063	0, 780912382	-0, 465098008
$\vec{b}_4$		0, 257847170	-0, 805991821	0, 429263817	-0, 315633644
$\vec{r}_5$	13, 513370380	0, 601051001	0, 454075051	-0, 249863250	0, 003380941
$\vec{a}_5$		-0, 298824585	0, 068275181	-0, 911440086	-0, 274443685
$\vec{b}_5$		-0, 590279757	0, 528474449	-0, 565098615	-0, 230104586
$\vec{r}_6$	16, 060068082	-0, 167550531	-0, 699503158	0, 246336982	0, 165902443
$\vec{a}_6$		0, 288201056	0, 152887917	0, 607255337	0, 724435223
$\vec{b}_6$		0, 785308402	-0, 051337424	0, 309338951	0, 533820752
$\vec{r}_7$	18, 606765784	-0, 261981151	0, 645836763	-0, 116307247	-0, 351148029
$\vec{a}_7$		-0, 129214858	-0, 329785693	-0, 125961174	-0, 926649178
$\vec{b}_7$		-0, 675079116	-0, 452969451	0, 063476979	-0, 578841548
$\vec{r}_8$	21, 153463486	0, 622604916	-0, 355804530	-0, 131254188	0, 361865885
$\vec{a}_8$		-0, 105789045	0, 355008311	-0, 390495875	0, 842787487
$\vec{b}_8$		0, 412399539	0, 870844310	-0, 149554676	0, 221788655

Tabla D.6: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI 013\_ $t_3$ .

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	1, 927086735	-0, 841058432	-0, 041564866	-0, 071060180	-0, 023193495
$\vec{a}_1$		-0, 164433074	-0, 027953445	-0, 227539893	0, 959377906
$\vec{b}_1$		0, 266064298	0, 145516088	-0, 123082998	-0, 944926152
$\vec{r}_2$	5, 322683671	-1, 078322687	0, 041692565	-0, 202474096	0, 048575729
$\vec{a}_2$		-0, 216423091	0, 039040705	0, 962830767	-0, 156824052
$\vec{b}_2$		0, 175475931	-0, 102455948	-0, 969910539	0, 134106389
$\vec{r}_3$	8, 718280607	-0, 811917601	0, 005234233	0, 059738647	-0, 123564840
$\vec{a}_3$		0, 203008415	-0, 377652099	-0, 369824924	-0, 824254816
$\vec{b}_3$		-0, 253343787	-0, 782736695	0, 160117769	-0, 545437890
$\vec{r}_4$	12, 113877543	0, 669470918	0, 359116517	-0, 136558348	0, 163817814
$\vec{a}_4$		-0, 359785960	0, 799087183	-0, 191308316	-0, 442057536
$\vec{b}_4$		-0, 058620123	0, 553654378	0, 765565586	-0, 322397029
$\vec{r}_5$	15, 509474479	-0, 179660021	-0, 539374130	0, 753417781	0, 191097413
$\vec{a}_5$		0, 591517956	-0, 091491986	0, 172246854	0, 782346947
$\vec{b}_5$		-0, 058205672	-0, 283447072	-0, 934790440	0, 206001678
$\vec{r}_6$	18, 905071415	-0, 255558517	-0, 318452257	0, 657993891	-1, 141509553
$\vec{a}_6$		0, 227311743	-0, 287227325	0, 622063497	0, 692002052
$\vec{b}_6$		-0, 078442948	0, 361850040	0, 287144790	-0, 883435975
$\vec{r}_7$	22, 300668351	-0, 415625165	0, 573889359	-0, 325594769	-0, 003900286
$\vec{a}_7$		-0, 727679708	-0, 470547118	0, 172681067	-0, 468240218
$\vec{b}_7$		-0, 343037333	-0, 494116892	-0, 797838160	0, 040350410
$\vec{r}_8$	25, 696265287	0, 682205267	-0, 250210506	-0, 077473135	0, 335365896
$\vec{a}_8$		0, 420282501	0, 871151481	0, 041034890	-0, 250547109
$\vec{b}_8$		0, 264717253	-0, 068520058	0, 524510762	-0, 806299100

Tabla D.7: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI 020. $t_1$ .

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	1, 379293648	-0, 840861762	-0, 035968731	-0, 089088459	0, 010190804
$\vec{a}_1$		-0, 278253197	-0, 076416595	0, 223939084	0, 930906520
$\vec{b}_1$		-0, 232261698	0, 035427007	-0, 003183468	0, 972002724
$\vec{r}_2$	4, 774890584	-1, 068036408	0, 035982299	-0, 264128179	0, 033480872
$\vec{a}_2$		-0, 175893718	0, 077447144	0, 981299849	-0, 010674533
$\vec{b}_2$		-0, 205018889	0, 026864826	0, 972188890	-0, 109974083
$\vec{r}_3$	8, 170487520	-0, 831913634	0, 040894202	0, 059281041	-0, 069245528
$\vec{a}_3$		0, 306786220	0, 134448126	-0, 697732562	-0, 633226017
$\vec{b}_3$		0, 197756407	0, 171003506	-0, 225335636	-0, 938548910
$\vec{r}_4$	11, 566084456	0, 661555628	0, 303837369	0, 074368094	0, 331311122
$\vec{a}_4$		-0, 010139613	0, 492231476	-0, 602808343	-0, 627875357
$\vec{b}_4$		-0, 282571904	0, 064089764	0, 480383498	0, 827814783
$\vec{r}_5$	14, 961681392	-0, 334147148	-0, 619258101	0, 345153096	0, 064121021
$\vec{a}_5$		0, 504651337	-0, 012442759	0, 746297851	0, 433833751
$\vec{b}_5$		-0, 099381661	-0, 271294104	-0, 925258923	-0, 245802196
$\vec{r}_6$	18, 357278328	-0, 323783736	0, 177639053	-0, 338411010	-1, 429078157
$\vec{a}_6$		-0, 099058556	-0, 362141996	0, 752079403	-0, 541679932
$\vec{b}_6$		0, 079299607	0, 377807974	-0, 672301205	0, 631651642
$\vec{r}_7$	21, 752875264	-0, 333812832	0, 500258977	-0, 668380826	0, 024452299
$\vec{a}_7$		-0, 456947973	0, 022036518	0, 840503295	-0, 290288053
$\vec{b}_7$		0, 441228561	-0, 043844157	-0, 874372038	0, 197151175
$\vec{r}_8$	25, 148472200	0, 712124999	-0, 262986024	0, 100559732	0, 198092860
$\vec{a}_8$		0, 132838931	0, 314844886	-0, 868338844	0, 359463724
$\vec{b}_8$		-0, 195769143	-0, 360649339	0, 896979468	-0, 164421199

Tabla D.8: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI 171\_2\_3.

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	1, 731585853	-0, 837975852	0, 010719258	-0, 033090380	0, 036644335
$\vec{a}_1$		-0, 185372752	-0, 283562498	0, 588082681	0, 734430400
$\vec{b}_1$		0, 282495657	-0, 027841289	-0, 720110691	-0, 633136367
$\vec{r}_2$	6, 259048435	-0, 964429069	-0, 068675114	0, 244781757	0, 212371007
$\vec{a}_2$		-0, 130368207	-0, 120430984	0, 119518546	-0, 976839713
$\vec{b}_2$		-0, 104452519	0, 109904900	0, 643330263	0, 750424385
$\vec{r}_3$	10, 786511016	-0, 981217522	0, 079220961	-0, 249558927	0, 106658747
$\vec{a}_3$		0, 161263207	-0, 075739324	-0, 063053157	0, 981978631
$\vec{b}_3$		0, 290612080	0, 061761219	0, 226393163	-0, 927618621
$\vec{r}_4$	15, 313973597	-0, 835953206	-0, 008640466	0, 037167066	0, 035489249
$\vec{a}_4$		0, 130471236	-0, 021760469	0, 297355865	-0, 945559743
$\vec{b}_4$		-0, 271248931	-0, 112801275	0, 048362693	0, 954652261
$\vec{r}_5$	19, 841436178	-0, 350061208	-0, 139282051	-0, 074555303	-1, 454924179
$\vec{a}_5$		-0, 008172560	-0, 347181580	0, 772753843	0, 531271736
$\vec{b}_5$		0, 015148217	0, 350267436	-0, 746061986	-0, 566104909
$\vec{r}_6$	24, 368898760	-0, 340010771	0, 050450355	0, 283668373	-1, 573415774
$\vec{a}_6$		0, 036146372	-0, 327484074	0, 916836025	-0, 225520121
$\vec{b}_6$		-0, 045227030	0, 328180025	-0, 903772446	0, 271012460

Tabla D.9: Puntos de control y direcciones estables en el PCBC para la OPI 053<sup>d</sup>\_2\_3.

	$t_i$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
$\vec{r}_1$	3, 287997986	-0, 833040875	0, 036577018	-0, 103358636	-0, 024038364
$\vec{a}_1$		0, 313119975	-0, 175233559	-0, 614977129	0, 702176767
$\vec{b}_1$		0, 464822058	0, 181341739	-0, 089713699	-0, 861978585
$\vec{r}_2$	8, 947326212	0, 526583944	0, 145342483	0, 333770466	0, 846337852
$\vec{a}_2$		-0, 140629387	-0, 458334717	0, 601703539	0, 638831366
$\vec{b}_2$		0, 098208018	-0, 388713594	0, 871043262	-0, 283796693
$\vec{r}_3$	14, 606654439	-0, 181127944	0, 720836659	-0, 181682829	0, 109321340
$\vec{a}_3$		0, 293293750	-0, 131798166	-0, 590696996	0, 740057484
$\vec{b}_3$		0, 473311352	0, 315792139	0, 786530444	-0, 240044890
$\vec{r}_4$	20, 265982666	-0, 832339057	0, 037296262	-0, 102739753	-0, 026539360
$\vec{a}_4$		0, 334131945	-0, 171156092	-0, 665512738	0, 645100171
$\vec{b}_4$		-0, 441516925	-0, 194459737	0, 092699597	0, 871008037
$\vec{r}_5$	25, 925310892	0, 526088254	0, 145134998	0, 335946611	0, 848224732
$\vec{a}_5$		-0, 136892819	-0, 461654975	0, 615186550	0, 624243982
$\vec{b}_5$		-0, 172848103	0, 240990591	-0, 738102889	0, 606012535
$\vec{r}_6$	31, 584639119	-0, 182766043	0, 720650768	-0, 180741216	0, 109463729
$\vec{a}_6$		0, 313496856	-0, 124390679	-0, 577848072	0, 743194649
$\vec{b}_6$		-0, 334144835	-0, 301042888	-0, 813377812	0, 368967401

# Apéndice E

## E.1. Sistemas de coordenadas baricéntrico y sinódico.

En esta Sección, se detallan las relaciones que existen entre las posiciones, velocidades y aceleraciones de los sistemas de coordenadas baricéntrico y sinódico Tierra-Luna. Estas transformaciones se utilizan en el Capítulo 5 para extender trayectorias al sistema solar real.

El sistema de coordenadas baricéntrico (SCB) tiene origen en el baricentro Tierra-Luna, que se mueve en caída libre bajo la acción gravitatoria del resto de los cuerpos del sistema solar <sup>1</sup>. Es un sistema de coordenadas fijo con el eje de las abscisas orientado hacia el punto vernal  $\gamma$ , el plano  $XY$  coincidente con el plano de la eclíptica y el eje  $\hat{Z} = \hat{X} \times \hat{Y}$  completa una terna derecha según el sentido de movimiento directo. En el SCB, el sistema Tierra-Luna rota con velocidad angular variable  $\vec{\Omega}$ . Las cantidades referidas en este sistema serán distinguidas con letras mayúsculas ( $A, \vec{A}, \dots$ ). En las efemérides provistas por el JPL [42], la rutina JPLEPH.FOR permite obtener directamente las posiciones y velocidades de los cuerpos del sistema solar en el SCB referidos a una época estándar (1950, 2000, ...) en las unidades del sistema internacional.

El sistema de coordenadas sinódico (SCS) tiene su origen en el baricentro Tierra-Luna pero el eje de las abscisas está orientado según la dirección Tierra-Luna, el eje de las ordenadas es paralelo a la proyección perpendicular del vector velocidad relativa Luna-Tierra respecto del eje  $\hat{x}$  y la dirección  $\hat{z}$  completa una terna orientada positivamente. En este sistema de coordenadas, el factor de escala espacial  $s$  se elige de manera tal que la distancia entre la Tierra y la Luna resulte unitaria. El factor de escala para el tiempo  $t$  impone que el SCS rote con velocidad angular constante  $|\vec{\omega}| = 1$ . Las cantidades referidas en el SCS serán denotadas con letras minúsculas ( $a, \vec{a}, \dots$ ).

### E.1.1. Factores de conversión.

Sean  $T$  y  $t$  las expresiones del tiempo en los sistemas SCB y SCS respectivamente. En el SCS,  $t$  no es uniforme y debe satisfacer la siguiente relación:

---

<sup>1</sup>El SCB resulta no-inercial bajo las leyes de Newton, pero es inercial según el enfoque relativista.

$$\omega dt = \Omega dT,$$

y teniendo en cuenta que  $\omega = 1$  resulta

$$\frac{dt}{dT} = \Omega.$$

Si denotamos con  $\dot{\phantom{x}}$  las derivadas absolutas respecto a  $T$  y con  $\prime$  las derivadas absolutas respecto a  $t$ , para una cantidad arbitraria  $\beta$  obtenemos la siguiente regla de derivación:

$$\dot{\beta} = \Omega \beta \prime. \quad (\text{E.1})$$

Convencionalmente los versores cartesianos del SCB son:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

En un tiempo  $T$ , los vectores baricéntricos posición, velocidad y aceleración Tierra-Luna son:

$$\vec{R}_{TL} = \vec{R}_L - \vec{R}_T \quad ; \quad \vec{V}_{TL} = \vec{V}_L - \vec{V}_T \quad ; \quad \vec{A}_{TL} = \vec{A}_L - \vec{A}_T \quad (\text{E.3})$$

La rutina JPLEPH.FOR [42], no permite obtener directamente las aceleraciones  $\vec{A}_L$  y  $\vec{A}_T$ , que deben ser determinadas según:

$$\vec{A}_T = G \sum_{i \neq T} m_i \frac{\vec{R}_i - \vec{R}_E}{|\vec{R}_i - \vec{R}_T|^3} \quad (\text{E.4})$$

$$\vec{A}_L = G \sum_{i \neq L} m_i \frac{\vec{R}_i - \vec{R}_L}{|\vec{R}_i - \vec{R}_L|^3}. \quad (\text{E.5})$$

Así, el factor de escala resulta

$$s = |\vec{R}_{TL}|, \quad (\text{E.6})$$

la velocidad angular instantánea del sistema Tierra-Luna es

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{R}_{TL} \times \vec{V}_{TL}}{s^2}. \quad (\text{E.7})$$

Las derivadas absolutas respecto a  $T$  de las Ecs. (E.6) y (E.7) son:

$$\dot{s} = \frac{d|\vec{R}_{TL}|}{dT} = \hat{R}_{TL} \cdot \vec{V}_{TL}, \quad (\text{E.8})$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \left( \vec{\Omega} \times \hat{R}_{TL} \right) \cdot \vec{V}_{TL} + \hat{R}_{TL} \cdot \vec{A}_{TL}, \quad (\text{E.9})$$

$$\ddot{\vec{\Omega}} = \frac{\vec{R}_{TL} \times \vec{A}_{TL}}{s^2} - 2\dot{s} \frac{\vec{R}_{TL} \times \vec{V}_{TL}}{s^3}. \quad (\text{E.10})$$

### E.1.2. Posiciones

Los versores sinódicos resultan

$$\hat{x} = \hat{R}_{TL}, \quad (\text{E.11})$$

$$\hat{y} = \frac{\vec{V}_{TL} - (\hat{R}_{TL} \cdot \vec{V}_{TL}) \hat{R}_{TL}}{|\vec{V}_{TL} - (\hat{R}_{TL} \cdot \vec{V}_{TL}) \hat{R}_{TL}|}, \quad (\text{E.12})$$

$$\hat{z} = \frac{\vec{R}_{TL} \times \vec{V}_{TL}}{|\vec{R}_{TL} \times \vec{V}_{TL}|} = \hat{x} \times \hat{y}. \quad (\text{E.13})$$

El vector posición  $\vec{R}$  en el SCB y el vector posición  $\vec{r}$  en el SCS se relacionan según

$$\vec{R} = X\hat{X} + Y\hat{Y} + Z\hat{Z} = s(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = s\vec{r}. \quad (\text{E.14})$$

### E.1.3. Velocidades

Teniendo en cuenta la (E.1), derivando (E.14) respecto a  $T$  obtenemos las expresiones que relacionan las velocidades de los dos sistemas

$$\dot{\vec{R}} = s\Omega\vec{r}' + \dot{s}\vec{r} + s\vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (\text{E.15})$$

$$\vec{r}' = \frac{1}{s\Omega} \left( \dot{\vec{R}} - \vec{\Omega} \times \vec{R} - \frac{\dot{s}}{s}\vec{R} \right). \quad (\text{E.16})$$

### E.1.4. Aceleraciones

De manera similar, obtenemos para las aceleraciones las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} = s\Omega^2\vec{r}'' + 2s\Omega\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + s\dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + s\dot{\Omega} \times \vec{r}' + \\ + s\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + 2\dot{s}\Omega\vec{r}' + 2\dot{s}\vec{\Omega} \times \vec{r} + \ddot{s}\vec{r}, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'' = \frac{1}{s\Omega^2} \left[ \ddot{\vec{R}} + 2\frac{\dot{s}}{s}\dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{R} + \vec{\Omega} \times \vec{R}) - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + 2\frac{\dot{s}}{s} \right) \left( \dot{\vec{R}} - \vec{\Omega} \times \vec{R} - \frac{\dot{s}}{s}\vec{R} \right) - \frac{\ddot{s}}{s}\vec{R} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

# Bibliografía

- [1] Leiva, A. M. and Briozzo, C. B.: 2006, *Control of Chaos and Fast Periodic Transfer Orbits in the Earth-Moon CR3BP*, Acta Astronautica **58**, 379-386.
- [2] Szebehely, V.: 1967, *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three bodies*, Academic Press, Nueva York.
- [3] Hénon, M.: 1997, *Generating Families in the Restricted Three Body Problem*, Springer-Verlag LNP M52, Berlín.
- [4] Leiva, A. M. and Briozzo, C. B.: 2006, *The Earth-Moon CR3BP: a full Atlas of low-energy fast periodic transfer orbits*, arXiv.org astro-ph/0612386.
- [5] Leiva, A. M. and Briozzo, C. B.: 2008, *Extension of fast periodic transfer orbits from the Earth-Moon RTBP to the Sun-Earth-Moon Quasi-Bicircular problem*, Celest. Mech. Dynam. Astron. (accepted 1 April 2008)
- [6] Leiva A. M. y Briozzo, C. B. : 2005, *Método General para Controlar Órbitas Periódicas Inestables en el Problema CuasiBicircular Sol-Tierra-Luna*, BAAA **48**, 47-52.
- [7] Andreu, M. A.: 1998, *The Quasi-bicircular Problem*, Ph. D. Thesis, Dept. Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona (available on-line at [http://www.maia.ub.es/dsg/1998/9801mangel\\_e.ps.gz](http://www.maia.ub.es/dsg/1998/9801mangel_e.ps.gz)).
- [8] Egorov, V. A.: 1958, *Certain Problems of Moon flight Dynamics*, in *The Russian Literature of Satellites*, Pt. 1, Intern. Phys. Index, Nueva York. Szevehely, V., Pierce, D. A. and Standish, E. M.: 1964, *A Group of Earth-to-Moon Trajectories with consecutive Collisions*, in *Celestial Mechanics and Astrodynamics*, Academic Press, Nueva York.
- [9] Barrar, R. B.: 1965, *Existence of Periodic Orbits of the Second Kind in the Restricted Problem of Three Bodies*, The Astronomical Journal, **70** (1), 3-4. Szevehely, V. and Nacozy, P.: 1967, *A Class E, Strömgren's Direct Orbits in the Restricted Problem*, The Astronomical Journal, **72** (2), 184-190. Szevehely, V. and Van Flandern, T.: 1967, *A Family Retrograde Orbits Around the Triangular Equilibrium Points*, The Astronomical Journal, **72** (3), 373-379. Deprit, A. and Henrard, J.: 1969, *On the Periodical Orbits Emanating from  $L_4$  in the Resonance Case  $1/4$* , Astron. & Astrophys., **3**, 89-93.
- [10] Davidson, M. C.: 1964, *Numerical Examples of Transition Orbits in the Restricted Three Body Problem*, Astronaut. Acta **10**, 308.

- [11] Verhulst, F.: 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlín.
- [12] Parker, T. S. and Chua, L. O.: 1989, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, Nueva York.
- [13] Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J. A.: 1990, *Controlling Chaos*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196-1199.
- [14] Garfinkel, A., Spano, M. , Ditto, W. and Weiss, J.: 1992, *Controlling cardiac chaos*, Science 257, 1230. Shu-Mei Guo and Leang San Shieh.: 2000, *Effective Chaotic Orbit Tracker: A Prediction-Based Digital Redesign Approach*, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS. FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, **47** (11), 1557-1570. Pourbohloul, B. and Dubé, L. J.: 2000, *Control and Tracking of Unstable Orbits in Hamiltonian Flows: The Diamagnetic Kepler Problem*, arXiv:nlin.CD/0008001 v1. Wagner, C. and Stoop, R.: 2002, *Renormalization Approach to Optimal Limiter Control in 1-D Chaotic Systems* , Journal of Statistical Physics, **106** (1/2), 97-107.
- [15] Bollt, E. and Meiss, J. D.: 1995, *Targeting Chaotic Orbits to the Moon Through Recurrence*, Phys. Lett. A **204**, 373-378.
- [16] Yagasaki, K.: 2004, *Computation of Low Energy Earth-to-Moon Transfers with Moderate Flight Time*, Physica D **197**, 313-331.
- [17] Yagasaki, K.: 2004, *Sun-perturbed Earth-to-Moon Transfers with Low Energy and Moderate Flight Time*, Celest. Mech. Dynam. Astron. **90**(3-4), 197-212.
- [18] Serban, R., Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., Petzold, L. R., Ross, S. D. and Wilson, R. S.: 2001, *Halo Orbit Mission Correction Maneuvers Using Optimal Control* , Automatica, **38**, 4.
- [19] Otani, M. and Jones, A. J.: 1997, *Guiding Chaotic Orbits*, Research Report, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Londres.
- [20] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: 1992, *Numerical Recipes 2nd Edition*, Cambridge University Press, Nueva York.
- [21] Briozzo, C. B. y Leiva, A. M.: 2006, *Análisis Biparamétrico de Cuatro Familias de Órbitas Periódicas de Transferencia Rápida y de Baja Energía en el Problema Circular de Tres Cuerpos Restringido*, BAAA **49**, 22-25.
- [22] Leiva, A. M. and Briozzo, C. B.: 2005, *Fast Periodic Transfer Orbits in the Sun-Earth-Moon Quasi-Bicircular Problem*, Celest. Mech. Dynam. Astron. **91**(3-4), 357-372.
- [23] Leiva, A. M. y Briozzo, C. B.: 2006, *Mapas Dinámicos de Trayectorias No Capturadas para un Valor Fijo de la constante de Jacobi en el Problema Circular de Tres Cuerpos Restringido Tierra-Luna*, BAAA **49**, 66-69.

- [24] Bruno, A. D. and Varin, V.P.: 2006, *On Families of Periodic Solutions of the Restricted Three-Body Problem*, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **95**(1-4), 27-54.
- [25] Schroer, C. G. and Ott, E.: 1997, *Targeting in Hamiltonian Systems that have mixed Regular/Chaotic Phase Spaces*, *Chaos* **7**(4), 512-519.
- [26] Ross, S., Koon, W. S., Lo, M. W. and Marsden, J. E.: 2003, *Design of a Multi-Moon Orbiter*, AAS 03-143.
- [27] Lichtenberg, A. J. and Lieberman, M. A.: 1983, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, Nueva York.
- [28] Arnold, V. I., Kozlov, V. V., and Neishtadt, A. I.: 1993, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, in: V.I. Arnold (ed.), *Dynamical Systems III 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlín, pp. 1-286.
- [29] Macau, E. E. N.: 2000, *Using Control of Chaos Orbital Motion in a Hill Problem*, LIT - INPE.
- [30] Howell, K. C., Barden, B. T., Wilson, R. S. and Lo, M. W.: 1997, *Advances in the Astronautical Sciences* 97, 1665-1684.
- [31] Gómez, G., Howell, K. C., Masdemont, J. and Simó, C.: 1998, *Advances in the Astronautical Sciences* 99, 949-968.
- [32] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E. and Ross, S. E.: 2000, *Advances in the Astronautical Sciences* 105, 1017-1030.
- [33] Gómez, G., Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., Masdemont, J. and Ross, S. E.: 2001, *Advances in the Astronautical Sciences* 019, 3-22.
- [34] Howell, K. C., Beckman, M., Patterson, C. and Folta, D.: 2004, *Advances in the Astronautical Sciences* 119, 2951-2970.
- [35] Wilson, R. S., Howell, K. C. and Lo, M. W.: 1999 *Optimization of Insertion Cost for Transfer Trajectories to Libration Point Orbits* , *Advances in the Astronautical Sciences* 99-401.
- [36] Marcuzzi, J. P., Leiva, A. M. y Briozzo, C. B.: 2006, *Maniobras y Control de Órbitas Periódicas de Transferencia Tierra-Luna utilizando Variedades Estables e Inestables*, BAAA **49**, 81-84.
- [37] Marcuzzi, J. P., Leiva, A. M. y Briozzo C. B.: 2006, *Curvas de Consumo para la Navegación entre Familias de Órbitas Periódicas de Transferencia Rápida en el Problema Circular de Tres Cuerpos Restringido Tierra-Luna*, BAAA **49**, 77-80.
- [38] Andreu, M. A.: 2002, *Dynamics in the Center Manifold Around L2 in the Quasi-Bicircular Problem*, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **84**(2), 105-133.
- [39] Andreu, M. A.: 2003, *Preliminary Study on the Translunar Halo Orbits of the Real Earth-Moon System*, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **86**(2), 107-130.

- [40] Simó, C., Gómez, G., Llibre, J., Martínez, R. and Rodríguez, R.: 1987, *On the optimal station keeping control of halo orbits*, Acta Astronautica, 15(6), 391-397.  
Howell, K.C., Gordon, S.C.: 1994, *Orbit determination error analysis and a station keeping strategy for sun-earth L1 libration point orbits*, Journal of the Astronautical Sciences, **42** (2), 207-228.
- [41] Scheeres, D. J.: 1998, *The Restricted Hill Four-Body Problem with Applications to the Earth-Moon System*, Celest. Mech. Dynam. Astron. **70**, 75-98.
- [42] *Jet Propulsion Laboratory (JPL) Solar System Ephemeris*, available on-line at NASA JPL site: <http://www.ssd.jpl.nasa.gov/?ephemerides#planets>.