

# Cosmología Observacional

por Ariel Guillermo Sánchez

Presentado ante la Facultad de Matemática Astronomía y Física  
como parte de los requerimientos para obtener el título de  
Doctor en Astronomía de la

Universidad Nacional de Córdoba

Octubre, 2006

©FaMAF - 2006

Director: Dr. Diego García Lambas

A Ximena.

*Heaven knows no frontiers  
And I've seen heaven in your eyes.*

## Resumen

En la presente tesis se realiza un análisis de las diversas herramientas con las que cuenta la cosmología observacional para fijar cotas en los valores de los parámetros cosmológicos, obteniendo así restricciones en las teorías que son compatibles con el Universo Observado.

Se obtuvieron restricciones en los valores de parámetros cosmológicos utilizando el espectro de potencia de la distribución de galaxias determinado a partir de la versión final del two-degree field galaxy redshift survey (2dFGRS), combinado con una compilación de mediciones del espectro de potencia de las fluctuaciones en temperatura y polarización del fondo cósmico de microondas. Se analizó un amplio rango de parámetros e hipótesis, incluyendo neutrinos masivos, curvatura, modos tensoriales y modelos generales de energía oscura. En todos los casos la combinación de los diferentes conjuntos de datos mejora las restricciones obtenidas, especialmente en el caso de la densidad de materia oscura. Asumiendo un universo plano, encontramos un parámetro de densidad de materia  $\Omega_m = 0,237 \pm 0,020$ , una densidad de bariones dada por  $\Omega_b = 0,041 \pm 0,002$ , una constante de Hubble de  $H_0 = 74 \pm 2 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , una amplitud lineal de las fluctuaciones de  $\sigma_8 = 0,77 \pm 0,05$  y un índice espectral de  $n_s = 0,954 \pm 0,023$  (todos los errores muestran intervalos de 68 % de confiabilidad). Nuestra estima de  $n_s$  es sólo marginalmente consistente con el valor invariante en escala  $n_s = 1$ ; este espectro es formalmente excluido al 95 % de confiabilidad. Si se permiten variaciones en la ecuación de estado de la energía oscura se obtiene una restricción dada por  $w_{\text{DE}} = -0,85^{+0,18}_{-0,17}$ , consistente con una constante cosmológica. Se obtienen además nuevos límites en la fracción de masa de neutrinos masivos:  $f_\nu < 0,105$  al 95 %, lo que corresponde a  $\sum m_\nu < 1,2 \text{ eV}$ . Se encontraron además diferencias entre los resultados obtenidos utilizando el espectro de potencias del catálogo 2dFGRS y los correspondientes al del SDSS, el cual prefiere valores más altos de  $\Omega_m$ .

Se analizaron además diversas formas en las que las observaciones de cúmulos de galaxias pueden ser utilizadas para determinar parámetros cosmológicos. Se calculó la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia en el espacio real utilizando la muestra de cúmulos en rayos X ROSAT-ESO Flux Limited X-ray (REFLEX), un catálogo de grupos de galaxias construido en base a la versión final del catálogo 2dFGRS, y galaxias extraídas de los catálogos 2MASS y APM. Nuestros resultados son consistentes con trabajos anteriores y muestran que  $\xi_{cg}(r)$  no puede ser descripta por una única ley de potencia. Se analizó además la dependencia de esta estadística con las cotas

---

en luminosidad en rayos X  $L_X$  y la masa virial  $M_{vir}$  así como de la magnitud límite de las galaxias. Una comparación de nuestros resultados con los correspondientes a la función de correlación cruzada halo-masa en una simulación numérica de N-cuerpos para inferir la dependencia con la escala de la función de bias de las galaxias alrededor de los cúmulos. Nuestros resultados indican que la distribución de galaxias presenta un anti-bias significativo en escalas chicas. En escalas mayores crece hasta un valor constante.

Se realizó además una descripción teórica de las funciones de correlación cruzada halo-masa y cúmulo-galaxia en el marco del modelo de halos, las cuales muestran un buen acuerdo con los resultados de simulaciones numéricas. En particular, el modelo es capaz de dar una explicación teórica al anti bias observado en escalas chicas entre la distribución de galaxias y de materia alrededor de los centros de los halos, la cual se debe a la Distribución de Ocupación de Halos.

Además se desarrolló un nuevo método para medir el espectro de potencia lineal de la masa a partir de la función de masa de los cúmulos de galaxias. Primero obtenemos la fluctuación en masa  $\sigma(M)$  utilizando un formalismo teórico para la función de masa. Luego aplicamos diversas técnicas para recuperar el espectro de potencia adimensional  $\Delta^2(k)$  a partir de  $\sigma(M)$ . La aplicación de esta técnica a simulaciones numéricas muestra una alta eficiencia para recuperar el espectro de potencia teórico en un amplio rango de escalas. Una comparación de nuestros resultados con los derivados a partir del método clásico FKP muestra que el método basado en la función de masa presentado aquí brinda una estima más precisa del espectro de potencia lineal, particularmente para valores bajos de  $k$ .

Estos resultados muestran que la cosmología observacional ha alcanzado niveles de precisión en sus resultados muy superiores a los obtenidos en años anteriores. La incorporación de información proveniente de los cúmulos de galaxias en futuros análisis multiparamétricos puede ayudar a mejorar aún más las restricciones en los parámetros cosmológicos, y por ende, nuestra comprensión del Universo.

---

## Abstract

In this thesis we analyze several tools of observational cosmology that can be used to put constraints on the values of cosmological parameters, obtaining in this way constraints on the theories that are compatible with our observable Universe.

We derive constraints on cosmological parameters using the power spectrum of galaxy clustering measured from the final two-degree field galaxy redshift survey (2dFGRS) and a compilation of measurements of the temperature power spectrum and temperature-polarization cross-correlation of the cosmic microwave background radiation. We analyse a range of parameter sets and priors, allowing for massive neutrinos, curvature, tensors and general dark energy models. In all cases, the combination of datasets tightens the constraints, with the most dramatic improvements found for the density of dark matter and the energy-density of dark energy. If we assume a flat universe, we find a matter density parameter of  $\Omega_m = 0,237 \pm 0,020$ , a baryon density parameter of  $\Omega_b = 0,041 \pm 0,002$ , a Hubble constant of  $H_0 = 74 \pm 2 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , a linear theory matter fluctuation amplitude of  $\sigma_8 = 0,77 \pm 0,05$  and a scalar spectral index of  $n_s = 0,954 \pm 0,023$  (all errors show the 68 % interval). Our estimate of  $n_s$  is only marginally consistent with the scale invariant value  $n_s = 1$ ; this spectrum is formally excluded at the 95 % confidence level. However, the detection of a tilt in the spectrum is sensitive to the choice of parameter space. If we allow the equation of state of the dark energy to float, we find  $w_{\text{DE}} = -0,85^{+0,18}_{-0,17}$ , consistent with a cosmological constant. We also place new limits on the mass fraction of massive neutrinos:  $f_\nu < 0,105$  at the 95 % level, corresponding to  $\sum m_\nu < 1,2 \text{ eV}$ . We also found differences with the results obtained using the power spectrum of the galaxy distribution from SDSS, which prefers higher values of  $\Omega_m$ .

We have also analyse several ways in which clusters of galaxies can be used to obtain constraints on cosmological parameters. We computed the real-space cluster-galaxy cross-correlation  $\xi_{cg}(r)$  using the ROSAT-ESO Flux Limited X-ray (REFLEX) cluster survey, a group catalogue constructed from the final version of the 2dFGRS, and galaxies extracted from 2MASS and APM surveys. This first detailed calculation of the cross-correlation for X-ray clusters and groups, is consistent with previous works and shows that  $\xi_{cg}(r)$  can not be described by a single power law. We analyse the clustering dependence on the cluster X-ray luminosity  $L_X$  and virial mass  $M_{vir}$  thresholds as well as on the galaxy limiting magnitude. We also make a comparison of our results with those obtained for the halo-mass cross-correlation function in a  $\Lambda$ CDM N-body simulation to infer the scale dependence of galaxy bias around clusters. Our results indicate that the distribution of galaxies shows a significant

anti-bias at small cluster-centric distances. On larger scales  $b_{cg}(r)$  rises to a nearly constant value.

We have also developed a theoretical description of the halo-mass and cluster-galaxy cross-correlation functions in terms of the halo model of large scale structure. The obtained expressions show good agreements with the results of N-body simulations. In particular, the model gives a theoretical explanation of the observed anti-bias in small scales between the galaxy and mass distributions around halo centers, which can be explained in terms of the Halo Occupation Distribution.

We also developed a new method to determine the linear mass power spectrum using the mass function of galaxy clusters. First we obtain the rms mass fluctuation  $\sigma(M)$  using a theoretical formalism for the mass function. Then we apply different techniques to recover the adimensional power spectrum  $\Delta^2(k)$  from  $\sigma(M)$ . The application of these techniques to the  $\tau$ CDM and  $\Lambda$ CDM GIF simulations shows a high efficiency in recovering the theoretical power spectrum over a wide range of scales. We compare our results with those derived from the power spectrum of the spatial distribution of the same sample of clusters in the simulations obtained by application of the classical FKP, method. We find that the mass function based method presented here can provide a very accurate estimate of the linear power spectrum, particularly for low values of  $k$ . This estimate is comparable, or even better behaved, than the FKP solution.

These results show that observational cosmology has reached much higher accuracy levels than a few years ago. The incorporation of information from clusters of galaxies in future multiparametric analyses can help to improve even more the obtained constraints on cosmological parameters and our understanding of the Universe.

# Índice general

<b>I Preliminares</b>	<b>9</b>
<b>1. El universo homogéneo</b>	<b>10</b>
1.1. Dinámica de los universos de Friedman- Robertson-Walker . . . . .	12
1.2. El inventario del universo . . . . .	15
1.2.1. Materia . . . . .	15
1.2.2. Radiación . . . . .	16
1.2.3. La energía oscura . . . . .	16
1.3. Un catálogo de universos . . . . .	21
1.4. Mediciones de distancias . . . . .	23
1.4.1. La distancia propia . . . . .	23
1.4.2. El redshift cosmológico . . . . .	24
1.4.3. Distancias observacionales . . . . .	25
<b>2. Teoría relativista de perturbaciones cosmológicas</b>	<b>26</b>
2.1. Introducción . . . . .	26
2.2. Clasificación de las perturbaciones métricas . . . . .	28
2.3. El tensor de energía impulso . . . . .	31
2.4. Modos de gauge . . . . .	34
2.4.1. Transformaciones de gauge . . . . .	34
2.4.2. Invariantes de gauge . . . . .	36
2.4.3. Diferentes gauges . . . . .	37
2.4.4. El gauge sincrónico . . . . .	40
2.4.5. El gauge de poisson . . . . .	44
<b>3. El origen de las fluctuaciones</b>	<b>47</b>
3.1. Motivaciones de la inflación . . . . .	47
3.1.1. El problema de la planitud . . . . .	47

---

3.1.2. El problema del Horizonte . . . . .	48
3.1.3. Homogeneidad e isotropía . . . . .	48
3.2. ¿Que es la inflación? . . . . .	49
3.3. El inflatón . . . . .	50
3.4. La aproximación de <i>slow-roll</i> . . . . .	50
3.5. El origen de la estructura . . . . .	52
<b>4. El fondo cósmico de microondas</b>	<b>53</b>
4.1. la ecuación de Boltzman . . . . .	53
4.2. Redshift gravitacional y dilatación temporal . . . . .	55
4.3. Ecuación de brillo a-colisional . . . . .	56
4.4. El término de colisiones . . . . .	57
4.5. El espectro de potencia angular . . . . .	59
<b>5. La evolución no lineal de las fluctuaciones</b>	<b>61</b>
5.1. Introducción . . . . .	61
5.2. Propiedades de los halos de materia oscura . . . . .	62
5.2.1. La función de masa . . . . .	62
5.2.2. El sesgo en la distribución de halos . . . . .	65
5.2.3. Perfiles de densidad . . . . .	67
5.3. El modelo de halos en el espacio real . . . . .	69
5.4. El modelo de halos en el espacio de Fourier . . . . .	72
5.5. El modelo de halos y la distribución de galaxias . . . . .	75
<b>II Cosmología de precisión</b>	<b>78</b>
<b>6. Cosmología de precisión</b>	<b>79</b>
6.1. Introducción . . . . .	79
6.2. El método . . . . .	81
6.2.1. Los datos . . . . .	81
6.2.2. El espacio de parámetros . . . . .	83
6.2.3. Cadenas de Markov . . . . .	87
<b>7. Restricciones en parámetros cosmológicos</b>	<b>89</b>
7.1. El caso más simple – cinco parámetros . . . . .	95
7.2. Seis parámetros – la inclusión del índice espectral escalar . . . . .	96
7.3. Seis parámetros más la fracción de masa de neutrinos masivos . . . . .	97

---

7.4. Seis parámetros más la curvatura del Universo: modelos no-planos . . .	101
7.5. Seis parámetros más la ecuación de estado de la energía oscura . . . .	105
7.6. Modos tensoriales . . . . .	107
7.7. Resumen . . . . .	111
<b>8. El rol de los priors</b>	<b>113</b>
8.1. La densidad de bariones . . . . .	113
8.2. La densidad de materia oscura . . . . .	114
8.3. La amplitud de las fluctuaciones . . . . .	115
8.4. La profundidad óptica . . . . .	115
8.5. El prior de la planitud . . . . .	118
8.6. Modos tensoriales . . . . .	120
<b>9. Selección de Modelos</b>	<b>121</b>
9.1. ¿Cuántos parámetros deben variar? . . . . .	121
9.2. Detalles de la evidencia de $n_s < 1$ . . . . .	125
<b>10. Análisis de la consistencia entre 2dFGRS y SDSS</b>	<b>127</b>
<b>III Cosmología con cúmulos de galaxias</b>	<b>132</b>
<b>11. La función de correlación cruzada cúmulo-galaxia: resultados obser-</b>	<b>133</b>
<b>vacionales</b>	
11.1. Introducción . . . . .	133
11.2. Los datos . . . . .	138
11.2.1. Catálogos de Galaxias . . . . .	138
11.2.2. Los catálogos de grupos y cúmulos . . . . .	139
11.3. Correlaciones Cúmulo-Galaxia . . . . .	140
11.4. Resultados . . . . .	141
11.4.1. Las funciones de correlación cruzada proyectada y 3D . . . . .	141
11.4.2. Dependencia de $L_X$ y $M_{vir}$ . . . . .	145
11.5. Comparación con los resultados de simulaciones numéricas del modelo	
$\Lambda$ CDM . . . . .	148
11.6. Discusión y conclusiones . . . . .	150

<b>12. La función de correlación cruzada cúmulo-galaxia y el modelo de halos</b>	<b>152</b>
12.1. Introducción . . . . .	152
12.2. La función de correlación cruzada halo-masa . . . . .	153
12.3. Extensión a la distribución de galaxias . . . . .	158
12.4. Importancia cosmológica . . . . .	160
12.4.1. Información en pequeña escala: la distribución de galaxias . . . . .	161
12.4.2. Información en gran escala: el pico acústico . . . . .	161
<b>13. La determinación del espectro de potencia a partir de la función de masa</b>	<b>165</b>
13.1. Introducción . . . . .	165
13.2. El Método . . . . .	167
13.2.1. Obteniendo $\sigma(M)$ a partir de $n(M)$ los formalismos de PS, SMT y J01 . . . . .	167
13.2.2. Invertiendo $P(k)$ a partir de $\sigma(M)$ . . . . .	170
13.3. Probando el método . . . . .	175
13.3.1. Las simulaciones GIF . . . . .	175
13.3.2. La determinación de $\sigma(R)$ : . . . . .	176
13.3.3. La determinación de $\Delta^2(k)$ . . . . .	179
13.3.4. Dependencia de $\Omega_m$ y $\sigma_8$ . . . . .	182
13.4. Comparación con el método FKP . . . . .	184
13.5. Conclusiones . . . . .	187
<b>14. Conclusiones</b>	<b>190</b>
<b>Referencias</b>	<b>195</b>

**Parte I**  
**Preliminares**

# Capítulo 1

## El universo homogéneo

*Como todo poseedor de una biblioteca, Aureliano se sabía culpable de no conocerla hasta el fin*

Jorge Luis Borges

La cosmología estándar está basada en dos hipótesis fundamentales. La primera es que la evolución del universo y su estructura en gran escala son determinadas por interacciones gravitacionales y que por lo tanto están descritas por las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales rigen la evolución de la métrica  $g_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo. Estas ecuaciones toman la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde  $T_{\nu\mu}$  es el tensor de energía-impulso y  $G_{\nu\mu}$  es el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde

$$R \equiv R^\mu{}_\mu \quad \text{y} \quad R_{\mu\nu} \equiv R^\kappa{}_{\mu\kappa\nu},$$

y hemos introducido un término con la constante cosmológica  $\Lambda$ .

El tensor de Riemman se define de acuerdo a la convención

$$R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} \equiv \partial_\kappa \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\kappa} \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} \Gamma^\alpha{}_{\nu\kappa},$$

donde los coeficientes de la conexión afín son

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\kappa} (\partial_\nu g_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}). \quad (1.3)$$

Como el tensor de Einstein involucra derivadas segundas de las componentes del tensor métrico, las ecuaciones de Einstein (1.2) brindan ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para  $g_{\mu\nu}$ .

La segunda hipótesis fundamental se refiere a las simetrías impuestas sobre  $g_{\mu\nu}$ . A este respecto la cosmología estándar se basa en el llamado principio cosmológico, que plantea que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo en gran escala. Bajo estas hipótesis la forma más general que puede adoptar  $g_{\mu\nu}$  es la métrica de Friedman-Robertson-Walker

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) [\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j],$$

expresada en términos de las coordenadas comóviles  $x^i$  y donde hemos utilizado unidades en las que la velocidad de la luz  $c = 1$ . La parte espacial de la métrica  $\gamma_{ij}$  puede ser expresada en coordenadas esféricas de acuerdo a

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.4)$$

o, utilizando otra convención para la coordenada radial

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}},$$

se obtiene la expresión

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + S_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (1.5)$$

donde

$$S_K(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ \sinh(\chi) & (K < 0) \end{cases},$$

o en coordenadas cuasi-cartesianas  $(x^1, x^2, x^3)$  de acuerdo a:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[ 1 + \frac{K}{4} ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \right]^{-2}.$$

Esta métrica está determinada completamente a través de dos cantidades  $a(t)$ , que determina la cinemática del universo, y  $K$ , que caracteriza su curvatura espacial dada por el escalar de curvatura

$${}^{(3)}R = \frac{6K}{a^2(t)}.$$

De acuerdo al valor de  $K$  los universos de Friedman se clasifican en abiertos ( $K < 0$ ), planos ( $K = 0$ ) y cerrados ( $K > 1$ ). Estos términos se refieren a las propiedades topológicas de las hipersuperficies espaciales del universo. Cabe aclarar, sin embargo, que las ecuaciones de Einstein y las hipótesis de simetrías impuestas por el principio cosmológico no determinan la topología global del universo, sino sólo su geometría. La elección particular que hemos realizado corresponde simplemente a la más natural para estos modelos. Existen otras alternativas, para la topología del Universo (Lachièze-Rey & Luminet, 1996), sin embargo hasta el momento no se ha encontrado ninguna observación que indique una desviación de las simples hipótesis asumidas aquí.

## 1.1. Dinámica de los universos de Friedman-Robertson-Walker

Al introducir la métrica (1.4) en las ecuaciones de campo de Einstein se obtienen ecuaciones para  $a(t)$  y  $K$ . Para esto es necesario introducir el tensor de energía impulso  $T_{\mu\nu}$ . La forma más general que puede tomar  $T_{\mu\nu}$  que sea compatible con nuestras hipótesis de homogeneidad e isotropía es la de un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu},$$

donde  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido y  $\rho$  y  $p$  su densidad de energía y presión respectivamente.

El tensor de Einstein puede ser calculado a partir de la métrica de FRW. Las componentes  $G_0^i$  se anulan y las componentes  $G_i^j$  son proporcionales a la matriz identidad

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + K) - \Lambda, \\ G_j^i &= \frac{1}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K)\delta_j^i. \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de campo (1.1) se reducen a dos ecuaciones independientes

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de Einstein contienen a las ecuaciones de conservación de la energía  $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$  en forma implícita (ya que  $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ ). Derivando la primera ecuación y combinándola con la segunda se obtiene la ecuación de conservación de la energía

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0. \quad (1.8)$$

Esta ecuación puede ser interpretada fácilmente como la primera ley de la termodinámica

$$dQ = dU - pdV = d(\rho a^3) - pd(a^3) = 0.$$

Para obtener soluciones explícitas para  $a(t)$  y  $K$  suele utilizarse la primera de las ecuaciones de (1.6), conocida como ecuación de Friedman, combinada con la ecuación de conservación (1.8). Además es necesario complementar estas ecuaciones con una ecuación de estado  $p = p(\rho)$  que relaciona la presión y la densidad del fluido. Con ella es posible integrar la ecuación (1.8) para obtener  $\rho = \rho(a)$ . Los fluidos más importantes en cosmología son barotrópicos, es decir, que su presión es proporcional a la densidad  $p = w\rho$  y por lo tanto poseen una velocidad del sonido  $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$  constante. En este caso, la ecuación (1.8) implica que

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.9)$$

Si el universo contiene  $N$  fluidos de diferentes especies con ecuaciones de estado  $w_i$ , este resultado se cumple para cada especie por separado mientras que éstas no interactúen. Si denotamos por  $\rho_{i,0}$  a la densidad actual de cada especie, entonces la densidad total de energía del universo correspondiente a la época  $a(t)$ , será

$$\rho = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{i,0}}{a^{3(1+w_i)}},$$

donde hemos fijado  $a_0 = 1$  por simplicidad. De esta manera, la ecuación de Friedman (1.6) para  $a(t)$  puede escribirse como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{i,0}}{a^{3(1+w_i)}} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}.$$

Evaluando esta ecuación en el presente, y definiendo el parámetro de Hubble, como  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , se obtiene:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i,0} - K + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.10)$$

El parámetro de Hubble suele escribirse en unidades de  $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  de acuerdo a

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

La ecuación (1.10) puede reescribirse como

$$K = H_0^2 \left( \frac{8\pi G}{3H_0^2} \sum_{i=1}^N \rho_{i,0} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - 1 \right). \quad (1.11)$$

De esta forma es fácil notar que la curvatura del espacio estará dada por el contenido de energía del universo y el valor de la constante cosmológica. En ausencia de dicha constante el universo será plano ( $K = 0$ ) cuando la densidad total de energía  $\sum_{i=1}^N \rho_{i,0}$  sea igual a una densidad crítica  $\rho_c$  dada por

$$\begin{aligned} \rho_c &\equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2,773 \cdot 10^{11} M_\odot h^{-1} (\text{Mpc } h^{-1})^{-3} \\ &= 11,26 h^2 \text{ protones/m}^3. \end{aligned}$$

En la actualidad las observaciones indican que  $h \simeq 0,7$  por lo que la densidad crítica corresponde a un fluido con aproximadamente 6 protones por metro cúbico.

En términos de la densidad crítica es posible definir el parámetro de densidad correspondiente a cada especie del universo

$$\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i,0},$$

y definiendo además

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2},$$

y

$$\Omega_K = \frac{K}{H_0^2},$$

es posible reescribir (1.11) de una forma más compacta como

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (1.12)$$

Así, la ecuación para la evolución del factor de escala puede reescribirse como

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[ \sum_{i=0}^N \Omega_{i,0} (a^{-(1+3w_i)} - 1) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + 1 \right]. \quad (1.13)$$

De esta manera, conociendo el contenido de energía del universo, es posible obtener su evolución temporal. Asumiendo un universo plano, sin constante cosmológica, que contiene una única especie de ecuación de estado  $w_i \neq -1$ , la evolución temporal del factor de escala está dada por

$$a(t) \propto t^{\left(\frac{2}{3+3w_i}\right)}. \quad (1.14)$$

También es posible utilizar (1.13) para obtener otra relación útil. Separando variables, integrando y asumiendo que  $a = 0$  para  $t = 0$ , se obtiene una expresión para la edad del universo dada por

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{a da}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} a^{1-3w_i} + \Omega_\Lambda a^4 + (1 - \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} - \Omega_\Lambda) a^2}}. \quad (1.15)$$

## 1.2. El inventario del universo

Como mencionamos en la sección anterior para describir completamente el universo bajo las hipótesis planteadas en la sección 1 es necesario conocer el contenido de energía del mismo. De esta forma, las incógnitas que definen la métrica de Robertson-Walker  $a(t)$  y  $K$  pueden ser determinadas a partir de las ecuaciones (1.12) y (1.13). A continuación realizaremos un pequeño inventario del Universo, revisando las consecuencias que cada una de ellas conlleva en la evolución del factor de escala  $a(t)$ .

### 1.2.1. Materia

Como sabemos el Universo contiene energía en forma de materia. Las mediciones más recientes de la densidad de materia en el universo muestran que  $0,2 < \Omega_m < 0,4$ . Sin embargo las predicciones de la teoría de nucleosíntesis en base a las observaciones de abundancias de elementos livianos muestran que  $\Omega_b \simeq 0,04$  (Cuoco et al. 2004), valor que es respaldado por las mediciones de las anisotropías en el fondo de microondas (ver capítulo 8). Esta diferencia, sumada a numerosas observaciones complementarias, indican que la mayor parte de la materia presente en el universo no es materia ordinaria, o bariónica, sino una especie todavía no detectada en los laboratorios que se conoce como *materia oscura*, que sólo interacciona gravitacionalmente con el resto de la energía del universo. En la actualidad el modelo de materia oscura que mejor describe las observaciones es el de materia oscura fría o CDM según sus siglas en inglés. La física de partículas posee numerosos candidatos para solucionar este problema pero una descripción más profunda de ese tema está fuera del alcance de esta tesis.

Aún cuando la materia oscura fría no ha sido detectada en laboratorios, su naturaleza y propiedades son bien comprendidas. Su comportamiento debe obedecer a una ecuación de estado  $w_{\text{cdm}} = 0$ , es decir que se comporta como un fluido de presión nula. De esta manera, su densidad varía con el factor de escala de acuerdo a

$$\rho_m \propto a^{-3},$$

que corresponde a una simple disminución en la densidad debida al cambio en el volumen producido por la expansión del universo. Así, de acuerdo a (1.14), la evolución del factor de escala en un universo plano, sin constante cosmológica y dominado por materia es

$$a(t) \propto t^{2/3}.$$

### 1.2.2. Radiación

Podemos estimar la densidad de energía en forma de radiación o partículas relativistas en general, en base a la temperatura del fondo de microondas  $T_{CMB}$ . La densidad de fotones del fondo de microondas está dada por  $\rho_{CMB} = \pi^2 k^4 T_{CMB}^4 / (15 \hbar^3 c^3) = 4,5 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3$ , lo cual implica que  $\Omega_{CMB} = 2,4 \times 10^{-5} h^{-2}$ . Tres especies de neutrinos aproximadamente no-masivos contribuirían en una cantidad semejante. Por este motivo es posible despreciar la densidad de radiación al considerar el inventario de energía en la época actual del universo.

La radiación se comporta como un fluido de ecuación de estado  $w_\gamma = \frac{1}{3}$  lo cual implica que, de acuerdo a (1.9),

$$\rho_\gamma \propto a^{-4}. \quad (1.16)$$

De esta forma, aún cuando su contribución al valor de  $\Omega_{\text{total}}$  en la actualidad es despreciable, su presencia es dominante en etapas tempranas del universo frente a la contribución de la materia que escala como  $\rho_m \propto a^{-3}$ . Esta etapa es denominada *era dominada por radiación*.

Podemos estudiar el comportamiento de un universo dominado por radiación introduciendo (1.16) en la ecuación de Friedman. Asumiendo  $\Omega_K = \Omega_\Lambda = 0$ , de acuerdo a (1.14) se obtiene

$$a \propto t^{1/2}.$$

### 1.2.3. La energía oscura

En la actualidad, las observaciones de supernovas distantes (Perlmutter et al 1999), del fondo de microondas (Sánchez et al., 2006, Spergel et al. 2006) y de la

estructura en gran escala (Cole et al. 2005, Tegmark et al. 2004) dan evidencia sustancial de que el universo está atravesando una fase de expansión acelerada. Esto requiere de la presencia de una componente de energía en el universo, llamada energía oscura, cuya ecuación de estado cumpla  $w_{\text{DE}} < -\frac{1}{3}$ . Los fluidos que cumplen

$$\rho + 3p \leq 0, \quad (1.17)$$

satisfacen la denominada *condición de energía fuerte*. Esto implica que, para producir una expansión acelerada del universo, la energía oscura debe violar la condición de energía fuerte.

Esta situación ha renovado el interés en la constante cosmológica ya que para valores de  $\Lambda > 0$ , su presencia es capaz de producir dicho comportamiento, pero existen además otros modelos para la energía oscura, los cuales pueden ser clasificados de acuerdo al valor de su ecuación de estado. A continuación repasaremos los más importantes.

### Energía de vacío y la constante cosmológica

En su versión original las ecuaciones de campo de Einstein (1.1) no contenían la constante cosmológica. Friedman fue el primero en notar que cuando estas ecuaciones eran aplicadas a la cosmología se obtenían soluciones de universos dinámicos. Esto llevó a Einstein a introducir el término con la constante cosmológica  $\Lambda$  ya que en esas circunstancias es posible obtener soluciones de universos cerrados, finitos y estáticos. Es fácil encontrar las condiciones para que esto ocurra. Imponiendo la restricción  $\ddot{a} = 0$  en (1.7) se encuentra que la constante cosmológica debe estar dada por

$$\Lambda = 4\pi G(\rho + 3p).$$

Planteando de igual manera que  $\dot{a} = 0$  en (1.6), e introduciendo este valor para  $\Lambda$ , se encuentra que

$$K = 4\pi G(\rho + p)a^2.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{3K}{a^2} - \Lambda \right), \\ p &= \frac{1}{8\pi G} \left( \Lambda - \frac{K}{a^2} \right), \end{aligned}$$

con lo cual  $\rho$  y  $p$  pueden ser ambos positivos cuando

$$\frac{K}{a^2} \leq \Lambda \leq \frac{3K}{a^2}.$$

En particular, cuando  $p = 0$ , se obtiene el universo estático de Einstein

$$\begin{aligned}\Lambda &= 4\pi G\rho, \\ K &= \Lambda a^2.\end{aligned}$$

Posteriormente las observaciones de corrimientos al rojo de las galaxias dieron evidencia observacional de la expansión del universo y por lo tanto el término de la constante cosmológica fue dejado de lado. Desde entonces ha sido invocado y rechazado en numerosas ocasiones para explicar diversas observaciones, muchas de las cuales fueron contradichas posteriormente.

En la literatura es común encontrar una asociación entre la constante cosmológica y la energía de vacío. Las fluctuaciones del punto cero del vacío deben respetar la invariancia de Lorentz (Zel'dovich 1968) y por lo tanto deben cumplir que  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}$ , lo cual corresponde a un fluido barotrópico de ecuación de estado  $w = -1$ . De esta manera, el vacío debe ser introducido en el lado derecho de las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + 8\pi G\rho_{\text{vac}}g_{\mu\nu}.$$

Puede verse claramente que el efecto de la energía de vacío no puede distinguirse de la presencia de una constante cosmológica, y las ecuaciones se comportan como en presencia de una constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_{\text{ef}} = \Lambda + 8\pi G\rho_{\text{vac}},$$

o de igual manera

$$\rho_{\text{ef}} = \rho_{\text{vac}} + \rho_{\Lambda},$$

con

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

Aún cuando ambos fenómenos producen un efecto similar, son de muy distintas naturalezas. La presencia de una constante cosmológica simplemente implica que para describir la gravedad no alcanza con la constante de gravitación  $G$ , sino que  $\Lambda$  debe ser tenida en cuenta como una constante más de la naturaleza. Por otro lado, la energía de vacío está relacionada con el contenido de energía del universo, asociado con las fluctuaciones del punto cero y que, aún en la ausencia de materia, esta energía curva el espacio.

Es fácil ver, a partir de (1.9), que una ecuación de estado  $w = -1$  implica  $\rho_{\text{ef}} = \text{cte}$ . Introduciendo este comportamiento en la ecuación de Friedman (1.6) se obtiene que la evolución temporal del factor de escala está dada por

$$a(t) \propto \exp(H_0 t),$$

con  $H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ . Debe notarse también que los términos con  $\Omega_\Lambda$  en las ecuaciones (1.13) y (1.15) se reducen a casos particulares para una especie de ecuación de estado  $w_i = -1$ . A continuación eliminaremos el término de  $\Omega_\Lambda$  y lo consideraremos como el caso particular de  $\Omega_{\text{DE}}$  cuando  $w_{\text{DE}} = -1$ .

### Quintescencia

La energía de vacío es sólo un posible modelo para la energía oscura. Cualquier componente con una ecuación de estado

$$w_{\text{DE}} \leq -1/3, \quad (1.18)$$

la cual viola la condición de energía fuerte (1.17) producirá una fase de expansión acelerada en el universo. Otra alternativa para la energía oscura son los modelos denominados de *quintescencia*. En estos modelos la energía oscura esta formada por un campo escalar  $\phi$ . Para estos campos el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (1.19)$$

y el tensor de energía impulso tiene componentes dadas por

$$\rho \equiv T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.20)$$

$$p \equiv T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (1.21)$$

por lo que su ecuación de estado será

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (1.22)$$

De esta manera, un campo escalar cuya energía este dominada por el término de potencial generará una ecuación de estado  $w_{\text{DE}} \leq -1/3$ . En particular, si se cumple que

$$V(\phi) \geq \dot{\phi}^2, \quad (1.23)$$

se verifica la relación (1.18) y se producirá una expansión acelerada del Universo.

Es fácil ver que para estos modelos se verifica la condición de energía débil

$$\rho + p \geq 0, \quad (1.24)$$

lo cual implica que  $w_{DE} \geq -1$ . Con este rango de valores para  $w_{DE}$  puede verse a partir de (1.9) que la densidad  $\rho_{DE}$  disminuye con la expansión del Universo. Como veremos en el capítulo 3 esta situación es análoga a la planteada en modelos inflacionarios para el período de la inflación.

### Energía fantasma

En estos modelos la ecuación de estado de la energía oscura satisface  $w_{DE} < -1$ . Es decir que no sólo se viola la condición de energía fuerte (1.17), sino también la condición de energía débil (1.24) que exige que  $\rho + p \geq 0$ . Algunas observaciones de supernovas muestran un buen ajuste con modelos de este tipo, lo que ha motivado su estudio. De acuerdo a (1.9), para estos modelos la densidad  $\rho_{DE}$  aumenta a medida que el universo se expande.

Un universo dominado por energía Fantasma tiene otras propiedades extrañas e inquietantes. Para estudiarlas supongamos que el universo posee dos especies, materia oscura fría y energía fantasma.

Si  $t_{eq}$  marca el tiempo de igualdad en las densidades de materia y energía fantasma, entonces el factor de escala del universo dominado por esta última componente crece como

$$a(t) \simeq a(t_{eq}) \left[ (1 + w_{DE}) \frac{t}{t_{eq}} - w_{DE} \right], \quad (1.25)$$

y por lo tanto diverge en un tiempo finito

$$a(t) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow t_{BR} = \left( \frac{w_{DE}}{1 + w_{DE}} \right) t_{eq}.$$

El instante  $t_{BR}$  se conoce como *Big Rip*. La ecuación de Friedman demuestra que el parámetro de Hubble también diverge cuando  $t \rightarrow t_{BR}$ , lo cual implica que en un tiempo finito el universo alcanza una tasa de expansión infinita. Esto está asociado con la divergencia de la densidad de Energía energy que evoluciona de acuerdo a

$$\rho_{ph} = \left[ (1 + w_{DE}) \frac{t}{t_{eq}} - w_{DE} \right]^{-2}.$$

Así, un universo dominado por Energía energy culmina en una singularidad de curvatura futura (Big Rip) en la cual la noción clásica del espacio tiempo deja de ser aplicable.

### 1.3. Un catálogo de universos

En esta sección estudiaremos el comportamiento de los modelos de Friedman-Robertson-Walker para comprender el efecto que producen sus distintas componentes. Como hemos visto la densidad de radiación domina la evolución del universo en sus etapas tempranas pero su contribución es despreciable frente a la de la materia o la energía oscura, quienes dominan sus etapas posteriores. Por este motivo consideraremos sólo universos con estas dos componentes (asumiendo que  $w_{\text{DE}} = -1$ ). De esta forma, las ecuaciones (1.13) y (1.15) pueden escribirse como

$$\dot{a}^2 = H_0^2 [\Omega_m(a^{-1} - 1) + \Omega_\Lambda(a^2 - 1) + 1], \quad (1.26)$$

y

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_m(a^{-1} - 1) + \Omega_{\text{DE}}(a^2 - 1) + 1}}. \quad (1.27)$$

De esta manera es posible estudiar algunos casos particulares importantes para diversas combinaciones de los parámetros  $(\Omega_m, \Omega_{\text{DE}})$ .

- El modelo de Einstein-de Sitter: este es un universo plano con  $\Omega_m = 1$  y  $\Omega_{\text{DE}} = 0$ . En este modelo

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3},$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

- Modelo abierto sin energía oscura: en este universo  $\Omega_m < 1$  y  $\Omega_{\text{DE}} = 0$ . En este modelo la evolución del factor de escala esta dada en forma paramétrica por

$$a = \frac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)}(\cosh \theta - 1),$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)^{3/2}}(\sinh \theta - \theta),$$

$$H_0 t_0 = \frac{1}{(1 - \Omega_m)} - \frac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)^{3/2}} \ln \left( \frac{2 - \Omega_m + 2\sqrt{1 - \Omega_m}}{\Omega_m} \right).$$

- Modelo cerrado sin energía oscura: en este universo  $\Omega_m > 1$  y  $\Omega_{\text{DE}} = 0$ . En este modelo la evolución del factor de escala también puede obtenerse en forma

paramétrica a través de

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)}(\cos \theta - 1), \\ H_0 t &= \frac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)^{3/2}}(\sin \theta - \theta), \\ H_0 t_0 &= \frac{1}{(1 - \Omega_m)} - \frac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)^{3/2}} \ln \left( \frac{2 - \Omega_m + 2\sqrt{1 - \Omega_m}}{\Omega_m} \right). \end{aligned}$$

- Modelo plano con energía oscura: En este modelo las contribuciones de la materia y la energía oscura (con  $w_{\text{DE}} = -1$ ) se combinan para producir un universo plano. En este caso se obtiene

$$\begin{aligned} a(t) &= \left( \frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m} \right)^{1/3} \left[ \sinh \left( \frac{3\sqrt{1 - \Omega_m}}{2} H_0 t \right) \right]^{2/3}, \\ H_0 t_0 &= \frac{1}{3\sqrt{1 - \Omega_m}} \ln \left( \frac{2 - \Omega_m + 2\sqrt{1 - \Omega_m}}{\Omega_m} \right). \end{aligned}$$

Podemos obtener una idea más profunda del comportamiento de los diversos modelos cosmológicos estudiando el plano  $(\Omega_m, \Omega_{\text{DE}})$ , el cual puede ser dividido en regiones que presentan muy variados comportamientos, las cuales se muestran en la figura 1.

La línea  $\Omega_{\text{DE}} = 1 - \Omega_m$  corresponde a los universos planos y separa las regiones correspondientes a los universos abiertos y cerrados. A su vez, la línea  $\Omega_{\text{DE}} = \Omega_m/2$ , en la que el parámetro de desaceleración es igual a cero, marca la posición de los universos con expansión uniforme. Los puntos debajo de esta línea corresponden a universos de expansión desacelerada mientras que los que están situados sobre ella, a universos con expansión acelerada.

Dentro de los modelos que desaceleran su expansión podemos distinguir entre los que alcanzan una fase de contracción (recolapso) y los que se expanden por siempre. La curva que separa dichos modelos corresponde a los universos críticos, en los cuales  $H = \dot{H} = 0$ . Para  $\Omega_m \leq 1$  esta curva corresponde simplemente a  $\Omega_{\text{DE}} = 0$ , pero para  $\Omega_m > 1$  está dada por

$$\Omega_{\text{DE}} = 4\Omega_m \sin^3 \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m} \right) \right].$$

Podemos además graficar en este plano las curvas de edad  $t_0$  constante obtenidas a partir de la ecuación (1.27). En ellas es evidente que existe una curva límite, en la

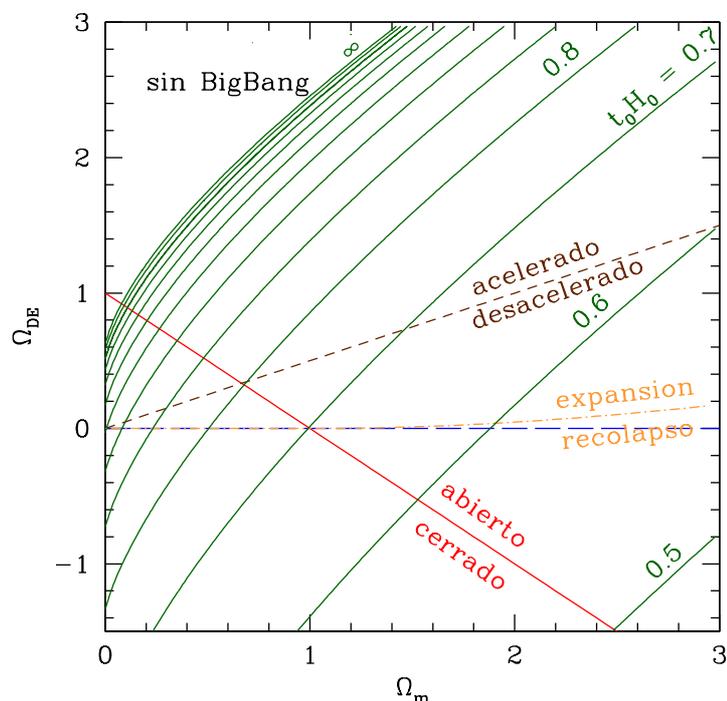


Figura 1.1: Características del comportamiento de los diversos modelos cosmológicos según su ubicación en el plano  $(\Omega_m, \Omega_{DE})$ .

cual la integral diverge. En este caso la edad del universo es infinita y corresponde a universos que comienzan a expandirse luego de una etapa inicial de contracción. En estos modelos no existe el denominado big bang.

## 1.4. Mediciones de distancias

### 1.4.1. La distancia propia

Las coordenadas en las que está expresada la métrica (1.4) se denominan coordenadas comóviles. El efecto de la expansión del universo está contenido en el factor de escala  $a(t)$ . Las distancias entre objetos de distancias comóviles constantes cambian de acuerdo a  $a(t)$ . Estas distancias son denominadas *distancias físicas o propias*.

La determinación de distancias es de crucial importancia para el análisis de la estructura en gran escala del Universo, ya que ésta constituye la base de los análisis estadísticos espaciales más utilizados en este campo. Los primeros estudios de este ti-

po realizados sobre catálogos de galaxias contaban con muestras de galaxias cercanas representativas de un volumen pequeño del Universo. De esta manera una aproximación euclídea al análisis de las distancias y volúmenes era correcta. En la actualidad los catálogos de galaxias cubren grandes volúmenes y poseen una gran profundidad. De esta manera para un análisis estadístico adecuado es necesario considerar el hecho de que los objetos observados a distintas distancias son vistos en momentos diferentes.

Podemos encontrar una expresión para la distancia propia a un objeto de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ . La misma estará dada simplemente por

$$r_{prop}(t) = a(t)r_{com} = a(t) \int_0^r \frac{d\mu}{\sqrt{1 - K\mu^2}} = a(t)S_K(r) = a(t)\chi,$$

donde puede apreciarse el significado físico de la variable  $\chi$  que simplemente indica la distancia comóvil al objeto.

Esta distancia no es accesible observacionalmente, sin embargo, como veremos en un momento, existen diferentes definiciones de “distancia” observacionales, como la *distancia de luminosidad* o la *distancia angular*, las cuales están relacionadas con  $r_{prop}$ .

### 1.4.2. El redshift cosmológico

Un parámetro empleado usualmente en vez de  $t$  es el *redshift cosmológico*, que representa el cambio en la longitud de onda de un fotón debido a la expansión del universo

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1 - a}{a}, \quad (1.28)$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda observada en el tiempo  $t_0$ , y  $\lambda_e$  es la longitud de onda emitida en un tiempo  $t < t_0$  cuando el factor de escala del universo era  $a$ . El redshift es muy importante ya que es accesible observacionalmente. Mediante observaciones espectroscópicas de objetos distantes es posible comparar las longitudes de onda observadas para líneas conocidas y compararlas con las longitudes de onda de laboratorio, obteniendo así su redshift. Para distancias pequeñas el redshift está relacionado con  $r_{prop}$  a través de

$$z \approx \frac{r_{prop}}{D_H}, \quad (1.29)$$

donde  $D_H$  es la *distancia de Hubble*

$$D_H \equiv \frac{c}{H_0} = 3000 h^{-1} \text{Mpc}. \quad (1.30)$$

Introduzcamos el parámetro de Hubble normalizado  $E(z)$  a través de

$$H(z) = H_0 E(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}. \quad (1.31)$$

Mediante (1.6) y (1.28)  $E(z)$  puede expresarse por

$$E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{DE} + \Omega_K(1+z)^2}. \quad (1.32)$$

De esta forma, la relación entre la edad del Universo y el redshift puede expresarse como

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_z^{\text{inf}} \frac{dz'}{(1+z')E(z')}, \quad (1.33)$$

y la distancia propia (1.4.1) estará dada por

$$r_{prop} = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (1.34)$$

### 1.4.3. Distancias observacionales

Existen muchas definiciones de distancia en cosmología. Estas no son realmente distancias, sino recetas para calcular diferentes aspectos físicos de la fuente de luz. Consideremos un objeto extendido en un redshift  $z$ . Utilizando (1.5) y fijando  $d\chi = 0$  se puede encontrar el tamaño físico  $\delta l$  de un objeto de diámetro angular  $\delta\phi$  a una distancia comóvil  $\chi$ , el cual estará dado por

$$\delta l = a(t) S_K(\chi) \delta\phi. \quad (1.35)$$

En un universo Euclídeo la relación correspondiente es

$$\delta l = D \delta\phi, \quad (1.36)$$

donde  $D$  es la distancia al objeto. La comparación de estas dos expresiones lleva a la definición de la distancia angular como

$$D_a \equiv \frac{\delta l}{\delta\phi} = \frac{1}{(1+z)} S_K(\chi(z)). \quad (1.37)$$

La distancia de luminosidad  $D_L$  se define mediante la relación entre el flujo bolométrico  $S$  y la luminosidad bolométrica  $L$  de un objeto

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}. \quad (1.38)$$

Esta Distancia está relacionada con la distancia angular a través de

$$D_L = (1+z)^2 D_a. \quad (1.39)$$

# Capítulo 2

## Teoría relativista de perturbaciones cosmológicas

*El decorado de la obra era precioso,  
pero los actores se pusieron delante de él*

Albendera Woollcott

En esta sección estudiaremos las ideas básicas de lo que se denomina teoría cosmológica de perturbaciones. Analizaremos la clasificación de las perturbaciones en la métrica del espacio-tiempo, las ecuaciones de Einstein linealizadas y los modos de gauge.

### 2.1. Introducción

En esta sección resumiremos los conocimientos esenciales sobre relatividad general y algunas convenciones que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Elegimos las unidades de forma que  $c = 1$ . La métrica de Minkowsky es de la forma  $(-, +, +, +)$ . La métrica del universo no perturbado es la métrica de Robertson-Walker con un factor de expansión  $a(\tau)$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) [-d\tau^2 + \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j],$$

expresada en términos de las coordenadas comóviles  $x^i$  y del tiempo conforme  $\tau$ , definido de forma tal que su relación con el tiempo propio es  $dt = a(\tau)d\tau$ . Los índices

latinos indican componentes espaciales mientras que los índices griegos indican las cuatro componentes espacio-temporales.

En estas coordenadas la ecuación de Friedman puede expresarse como

$$\eta^2 = \frac{8\pi}{3}Ga^2\bar{\rho} - K,$$

donde  $K$  es la constante de curvatura y  $\eta \equiv \frac{\dot{a}}{a} = aH$  es la tasa de expansión del universo, (en este capítulo un punto, o  $\partial_\tau$ , implica derivada respecto del tiempo conforme).

La inversa  $g^{\mu\nu}$  del tensor métrico (que satisface  $g^{\mu\nu}g_{\nu\kappa} = \delta_\kappa^\mu$ ) es utilizada para subir índices espacio-temporales, mientras que la inversa de la tri-métrica  $\gamma^{ij}$  (que satisface  $\gamma^{ij}\gamma_{jk} = \delta_k^i$ ) es usada para subir índices de tri-vectores y tensores. Los tri-tensores son definidos en las hipersuperficies a tiempo conforme constante, que poseen una métrica  $\gamma_{ij}$  que puede ser expresada en términos de coordenadas cuasi-cartesianas  $(x^1, x^2, x^3)$  de acuerdo a

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[ 1 + \frac{K}{4}((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \right]^{-2}.$$

Podemos expresar a un tri-vector como  $\mathbf{A} = A^i e_i$ , donde  $e_i$  es una base de tri-vectores que satisfacen la relación  $e^i \cdot e_j = \delta_j^i$ . Los “vectores”  $e^i$  son una base del espacio dual, pero pueden ser tratados como tri-vectores  $e^i = \gamma^{ij}e_j$  debido al isomorfismo que existe entre los dos espacios.

Definimos el operador derivada covariante (tri-gradiente)  $\nabla_i$  con  $\nabla_i \gamma_{jk} = 0$ . Para el caso más general en que la constante de curvatura  $K$  no es nula, el laplaciano de un escalar y la divergencia y el rotor de un tri-vector involucran al determinante  $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \gamma^{-\frac{1}{2}} \partial_i (\gamma^{\frac{1}{2}} \gamma^{ij} \partial_j \phi), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \gamma^{-\frac{1}{2}} \partial_i (\gamma^{\frac{1}{2}} v^i \phi), \\ \nabla \times \mathbf{v} &= \epsilon^{ijk} (\partial_i v_j) e_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\epsilon^{ijk} = \gamma^{-\frac{1}{2}} [ijk]$  es el tensor tridimensional de Levi-Civita, donde  $[ijk] = 1$  si  $\{ijk\}$  es una permutación par de  $\{123\}$ ,  $[ijk] = -1$  si  $\{ijk\}$  es una permutación impar de  $\{123\}$ , y 0 si dos índices son iguales. La presencia del factor  $\gamma^{-\frac{1}{2}}$  asegura que  $\epsilon^{ijk}$  transforme como un tensor ante un cambio de coordenadas.

Otra consecuencia de una constante de curvatura no-nula es que los gradientes no conmutan cuando son aplicados a tri-vectores y tri-tensores (aunque sí lo hacen

cuando son aplicados a escalares). Los resultados para los conmutadores  $[\nabla_j, \nabla_k] = (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j)$  son

$$\begin{aligned} [\nabla_j, \nabla_k] A^i &= {}^{(3)}R_{njk}^i A^n \\ [\nabla_k, \nabla_l] h^{ij} &= {}^{(3)}R_{nkl}^i h^{nj} + R_{nkl}^j h^{in} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Los conmutadores involucran al tensor de Riemman espacial, que para un espacio de curvatura uniforme de métrica  $\gamma_{ij}$  puede determinarse simplemente a través de

$${}^{(3)}R_{njk}^i = K(\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (2.3)$$

## 2.2. Clasificación de las perturbaciones métricas

Consideremos ahora pequeñas perturbaciones a la métrica espacio-temporal apartándola de la forma de Robertson-Walker

$$\begin{aligned} ds^2 &= [g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(1)}] dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\tau) [-d\tau^2 + \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j + \vartheta_{\mu\nu}(x^k, t) dx^\mu dx^\nu]. \end{aligned}$$

Para introducir la clasificación de las perturbaciones a la métrica del espacio-tiempo las expresaremos en una notación algo diferente

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ -(1 + 2\psi) d\tau^2 + 2\omega_i d\tau dx^i + [(1 - 2\phi)\gamma_{ij} + 2h_{ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad \gamma^{ij} h^{ij} = 0 \quad (2.4)$$

donde hemos introducido dos campos tri-escalares  $\psi(x^i, \tau)$  y  $\phi(x^i, \tau)$ , un campo tri-vectorial  $\omega(x^i, \tau) = \omega_i e^i$ , y un campo tri-tensorial de segundo rango, simétrico y de traza nula  $\mathbf{h}(x^i, \tau) = h_{ij} e^i \otimes e^j$ . No se pierde generalidad exigiendo que  $h_{ij}$  sea un tensor de traza nula ya que su traza puede ser absorbida dentro de  $\phi$ . Así hemos expresado las componentes de las perturbaciones a la métrica  $\vartheta_{\mu\nu}$  como

$$\vartheta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\psi & \omega_i \\ \omega_i & -2\phi\gamma_{ij} + 2h_{ij} \end{pmatrix}.$$

La ecuación (2.4) es completamente general:  $g_{\mu\nu}$  tiene 10 componentes independientes y hemos introducido 10 campos independientes (1+1+3+5 para  $\varphi + \phi + \omega + \mathbf{h}$ ). En realidad sólo seis de esos elementos representan verdaderos grados de libertad físicos, debido a que es posible transformar las cuatro coordenadas  $(\tau, \mathbf{x}^i)$  sin cambiar ninguna cantidad física. Los cambios infinitesimales de coordenadas (transformaciones de gauge) llevan a cambios en los campos  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\omega$  y  $\mathbf{h}$  debido a que  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

debe ser un invariante. Más adelante exploraremos los efectos de las transformaciones de gauge.

En adelante vamos a tratar a las variables perturbativas  $\varphi$ ,  $\phi$ ,  $\omega$  y  $\mathbf{h}$  como tri-tensores de rango 0, 1 y 2, con índices elevados y bajados utilizando la parte espacial de la métrica  $\gamma^{ij}$  y  $\gamma_{ij}$ . Al hacer esto estamos tomando  $\gamma_{ij}$  como la métrica de las hipersuperficies a  $\tau$  constante a pesar de que la parte espacial de la métrica general es  $(1 - 2\phi)\gamma_{ij} + 2h_{ij}$ . Esta aproximación puede hacerse porque asumiremos que las perturbaciones de la métrica son pequeñas y que podemos despreciar términos cuadráticos en ellas. De todas formas usaremos la métrica  $g^{\mu\nu}$  para subir índices de cuatri-vectores.

La descomposición escalar-vectorial-tensorial (EVT) de las perturbaciones a la métrica está basada en la descomposición de un vector en sus partes longitudinal y transversal. Para cualquier campo tri-vectorial  $\omega_i(x^i)$  podemos escribir

$$\omega_i = \omega_i^{\parallel} + \omega_i^{\perp},$$

donde

$$\nabla \times \omega^{\parallel} = \nabla \cdot \omega^{\perp} = 0,$$

con el rotor y la divergencia definidos como en (2.1).

La parte longitudinal de  $\omega$  puede ser determinada a partir de un escalar ya que  $\nabla \times \omega^{\parallel} = 0$  implica que existe un campo escalar  $\omega$  tal que  $\omega^{\parallel} = \nabla\omega$ , la parte transversal en cambio no puede ser determinada en base a un campo escalar.

Existe un teorema de descomposición similar para los tri-tensores de segundo rango, pero cada índice puede ser longitudinal o transversal. Para un tensor simétrico hay tres posibilidades, ambos índices son longitudinales, uno de ellos es transversal, o ambos transversales

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^{\parallel} + \mathbf{h}^{\perp} + \mathbf{h}^{\text{T}},$$

donde la parte  $\mathbf{h}^{\text{T}}$  tiene divergencia nula

$$\gamma^{ik} \nabla_k h_{ij}^{\text{T}} = 0. \quad (2.5)$$

Como la divergencia del tensor  $\mathbf{h}^{\text{T}}$  es nula, la divergencia de  $\mathbf{h}$  es

$$\gamma^{ik} \nabla_k h_{ij} = \gamma^{ik} \nabla_k h_{ij}^{\parallel} + \gamma^{ik} \nabla_k h_{ij}^{\perp},$$

puede verse que el primer término es un vector longitudinal y el segundo un vector transversal. Entonces las diferentes partes de esta descomposición pueden ser obtenidas a partir de un campo escalar  $h(\mathbf{x})$  y un campo vectorial transversal  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  tales que

$$h_{ij}^{\parallel} = D_{ij}h \quad , \quad h_{ij}^{\perp} = \nabla_{(i}h_{j)},$$

donde hemos introducido los operadores

$$\begin{aligned}\nabla_{(i}h_{j)} &= \frac{1}{2}(\nabla_i h_j + \nabla_j h_i), \\ D_{ij} &= \nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2.\end{aligned}$$

Una vez realizadas estas descomposiciones estamos en condiciones de definir la descomposición SVT de las perturbaciones de la métrica. Llamamos perturbaciones escalares a los campos  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\omega^\parallel$  y  $h^\parallel$  que pueden ser determinados completamente a partir de campos escalares, perturbaciones vectoriales serán los campos  $\omega^\perp$  y  $h^\perp$  que pueden ser completamente determinados a partir de campos vectoriales y por último, las perturbaciones tensoriales están contenidas en el campo  $h^T$ , que no puede ser determinado a partir de campos escalares o vectoriales. Esta clasificación de las perturbaciones métricas fue introducida por Lifshitz (1946).

Esta descomposición no es única. Es claro que  $h$  y  $h_i$  están determinadas a menos de una constante. Pero hay libertad adicional, el vector  $h$  esta determinado a menos de una solución de la ecuación de Killing  $\nabla_i h_j + \nabla_j h_i = 0$  (un campo de Killing). Los campos de Killing corresponden a rotaciones globales de las coordenadas espaciales y no a perturbaciones físicas.

Además existe una libertad adicional asociada con las componentes escalar y tensorial. El campo  $h^T$  es indeterminado ante la suma de un campo vectorial  $\varsigma_{ij}$  tal que

$$\varsigma_{ij} \equiv [\nabla_i \nabla_j - \gamma_{ij}(\nabla^2 + 2K)]\varsigma, \quad (2.6)$$

donde  $\varsigma$  es algún campo escalar. Mediante las ecuaciones (2.2) y (2.3) puede demostrarse que

$$\nabla^2(\nabla_i \varsigma) = \nabla_i(\nabla^2 + 2K)\varsigma,$$

de forma tal que  $\nabla_i \varsigma_j^i = 0$ , como es requerido para la componente tensorial. De todas formas también requerimos que  $h_{ij}^T$  sea un tensor de traza nula, por lo que  $\varsigma_{ij}$  debe serlo, lo que indica que debemos exigir además que  $(\nabla^2 + 3K)\varsigma = 0$ . Así, el modo tensorial está definido sólo a menos de la suma de campos tensoriales  $\varsigma_{ij}$  que satisfacen (2.6) para un campo escalar  $\varsigma$  que es una solución acotada de la ecuación  $(\nabla^2 + 3K)\varsigma = 0$ . De hecho esta condición también implica que  $\varsigma_{ij} = D_{ij}\varsigma$ , por lo que es posible añadir cualquier múltiplo de  $\varsigma$  al modo escalar  $h_{ij}^\parallel$ , siempre que restemos la cantidad  $D_{ij}\varsigma$  al modo tensorial  $h_{ij}^T$ .

En un espacio abierto ( $K \leq 0$ ) no existen soluciones no triviales a la ecuación  $(\nabla^2 + 3K)\varsigma = 0$ , pero en un espacio cerrado ( $K > 0$ ) existen cuatro soluciones

linealmente independientes, las cuales corresponden siempre a redefiniciones de las coordenadas sin significado físico.

Podemos concluir que la perturbación más general de la métrica de RW puede ser descompuesta en cada punto del espacio, en cuatro partes escalares (cada una con un grado de libertad  $(\phi, \psi, \omega^{\parallel}$  y  $\mathbf{h}^{\parallel})$ ), dos partes vectoriales ( $\omega^{\perp}$  y  $\mathbf{h}^{\perp}$ ) cada una con dos grados de libertad, y una parte tensorial  $\mathbf{h}^T$ , de dos grados de libertad (cinco grados de libertad por ser simétrico y de traza nula, y pierde dos por la condición (2.5)).

Los diferentes tipos de perturbaciones representan diferentes fenómenos físicos. Por ejemplo la gravedad Newtoniana es claramente un fenómeno escalar, mientras que el gravitomagnetismo y la radiación gravitacional (que analizaremos más adelante) son fenómenos vectoriales y tensoriales respectivamente. En la teoría de perturbaciones lineales los modos escalar, vectorial y tensorial evolucionan independientemente. Los modos vectorial y tensorial no producen perturbaciones en la densidad y por lo tanto no son importantes para la formación de estructuras en el universo, pero producirán perturbaciones en el Fondo de Radiación de Microondas (CMB). Como veremos en un momento, esta descomposición puede ser aplicada también a los tensores de Einstein  $G_{\mu\nu}$  y de Energía-impulso  $T_{\mu\nu}$ , permitiéndonos analizar las fuentes de cada tipo de fenómeno gravitatorio. Finalmente, esta clasificación nos permitirá eliminar grados de libertad no físicos.

### 2.3. El tensor de energía impulso

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de las perturbaciones en la métrica y de su representación. De todas formas en cualquier espacio-tiempo no vacío también debemos considerar los campos de materia. Como la métrica, la representación coordenada de estos campos también será dependiente de la elección particular del gauge. Las ecuaciones de Einstein 1.2 dan la evolución de las componentes de la métrica en términos del tensor de energía-impulso. Para un fluido perfecto, éste toma la forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu},$$

donde  $\rho$  y  $p$  son las densidades propias de energía e impulso en el sistema en reposo del fluido y  $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$  (donde  $d\lambda^2 = -ds^2$ ) es la quadri-velocidad del fluido. En cualquier sistema inercial local  $T^{00}$  representa la densidad de energía,  $T^{0i}$  representa el flujo de energía (que es igual a la densidad de momento  $T^{i0}$ ), y  $T^{ij}$  representa el tensor de tensiones espacial. En un sistema localmente plano en el sistema de reposo del fluido  $T^{00} = \rho$ ,  $T^{0i} = 0$ , y  $T^{ij} = p\delta^{ij}$ .

La suma de distintas componentes desacopladas como materia oscura fría (CDM), bariones, neutrinos, fotones, etc, constituye un fluido imperfecto y el tensor de energía-impulso debe contener otros términos, los cuales corresponden, en un gas débilmente colisional, a la viscosidad, la conducción térmica, y otros procesos físicos. Podemos escribir la forma general del tensor  $T^{\mu\nu}$  como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos requerir que  $\Sigma^{\mu\nu}$  sea un tensor de traza nula y que satisfaga la condición

$$\Sigma^\mu{}_\nu u^\nu = 0,$$

(que se denomina flow-orthogonal). En un sistema localmente plano en el sistema en reposo del fluido sólo las componentes espaciales  $\Sigma^{ij}$  son no nulas (aunque su traza se anula) y el tensor de tensiones espacial es  $T^{ij} = p\delta^{ij} + \Sigma^{ij}$ . Con estas restricciones en  $\Sigma^{\mu\nu}$  ( en particular la ausencia de un término  $\Sigma^{0i}$  en el sistema de referencia en reposo del fluido) estamos definiendo implícitamente a  $u^\mu$  de forma tal que  $\rho u^\mu$  sea el cuadri-vector corriente de energía. Como resultado de estas restricciones,  $\rho u^\mu$  contiene cualquier transferencia de calor,  $p$  contiene toda la viscosidad de bulk (relacionado con las tensiones que provocan deformaciones isotrópicas producidas cuando un fluido es comprimido o expandido rápidamente), y  $\Sigma^{\mu\nu}$  (llamado shear stress tensor) incluye la viscosidad de shear (relacionada con las deformaciones de los elementos de volumen del fluido sin afectar su volumen).

Necesitamos evaluar al tensor  $T^{\mu\nu}$  en el sistema de coordenadas comóviles en el que hemos expresado nuestra métrica (2.4). Esto requiere especificar las componentes de la cuadri-velocidad en un espacio-tiempo perturbado.

Consideremos primero el caso en el que el fluido está en reposo en el sistema de coordenadas comóviles, i.e.,  $u^i = 0$ , (en realidad esta condición define al sistema comóvil). La normalización  $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$  requiere entonces que  $u^0 = a^{-1}(1 - \psi)$  a primer orden en  $\psi$ . Bajar las componentes utilizando la cuadri-métrica completa lleva a  $u_0 = -a(1 + \psi)$  y  $u_i = a\omega_i$ .

Podemos definir la tri-velocidad como

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dx^i}{dx^0} e_i = \frac{u^i}{u^0} e_i,$$

cuyas componentes serán subidas o bajadas usando la métrica espacial  $\gamma^{ij}$  o  $\gamma_{ij}$ . A partir de la condición de normalización puede obtenerse una expresión para  $u^0$  dada por

$$u^0 = \frac{1}{a\sqrt{1-v^2}} \left[ 1 - \frac{\psi - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} + \phi v^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}}{1-v^2} \right].$$

En ausencia de perturbaciones métricas este resultado es como el estándar de la relatividad especial a diferencia del factor  $a^{-1}$  que aparece porque estamos usando coordenadas comóviles. Con perturbaciones métricas no es posible interpretar a  $\mathbf{v}$  como la tri-velocidad propia debido a que  $adx^i$  ya no es más un intervalo propio de distancia y  $ad\tau$  no es un intervalo de tiempo propio. De todas formas las correcciones son de primer orden en las perturbaciones métricas. Asumiremos que el campo de velocidad media del fluido es no-relativista de forma tal que podemos despreciar términos cuadráticos en  $\mathbf{v}$ . Esto no excluye a la era dominada por radiación ya que sólo pedimos que la velocidad de *bulk* sea no-relativista, pero permitimos que las velocidades de las partículas individuales lo sean. Además despreciamos los términos que involucran productos de  $\mathbf{v}$  y perturbaciones métricas. Con estas aproximaciones, las componentes de la cuadri-velocidad son

$$\begin{aligned} u^0 &= a^{-1}(1 - \psi) \quad , \quad u^i = a^{-1}v^i, \\ u_0 &= -a(1 + \psi) \quad , \quad u_i = a(v_i + \omega_i). \end{aligned}$$

Ahora que tenemos todos los ingredientes podemos escribir finalmente las componentes del tensor de energía-impulso en nuestro sistema de coordenadas comóviles perturbadas en términos de cantidades físicas

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\rho \quad , \quad T_0^i = -(\rho + p)v^i, \\ T_i^0 &= (\rho + p)(v_i + \omega_i) \quad , \quad T^{ij} = p\delta_j^i + \Sigma_j^i. \end{aligned}$$

Usamos componentes mixtas porque de esta forma evitamos factores de la forma  $a(1 + \psi)$  y  $a(1 - \psi)$ . Debe notarse que el shear stress tensor  $\Sigma_j^i$  puede ser descompuesto en partes escalar, vectorial y tensorial. Similarmente la densidad de flujo de energía  $(\rho + p)v^i$  puede ser descompuesta en partes escalar y vectorial. Podemos anticipar que, mediante las ecuaciones de Einstein, estas fuentes son responsables de las perturbaciones métricas escalares, vectoriales y tensoriales.

Antes de estudiar las ecuaciones de Einstein debemos escribir las ecuaciones para la conservación de la energía-impulso,  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ , en términos de las perturbaciones métricas y las variables del fluido. Despreciando términos proporcionales a  $v^2$ , términos involucrando productos de  $\mathbf{v}$  y  $\Sigma_j^i$ , y por supuesto términos cuadráticos en la perturbaciones métricas, se obtiene

$$\partial_\tau \rho + 3(\eta - \dot{\phi})(\rho + p) + \nabla \cdot [(\rho + p) \mathbf{v}] = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial_\tau [(\rho + p)(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega})] + 4\eta(\rho + p)(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}) + \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\rho + p)\nabla\psi = 0 \quad (2.8)$$

Los términos proporcionales a la tasa de expansión  $\eta$  surgen del hecho de que estamos usando coordenadas comóviles y tiempo conforme. La presión  $p$  está presente con  $\rho$  porque  $\rho$  es la densidad de energía y no la densidad de masa en reposo, y está afectada por el trabajo que se realiza al comprimir el fluido. Excluyendo estos términos la ecuación para la conservación de la energía (2.7) luce como la expresión Newtoniana, a diferencia del cambio del factor de expansión  $\eta$  por  $\eta - \dot{\phi}$ . Esta modificación es debida a que el factor de expansión isotrópico efectivo es modificado por la presencia de perturbaciones métricas y se convierte en  $a(1 - \phi)$ . La ecuación para la conservación del impulso es similar a la versión Newtoniana con un potencial gravitacional  $\psi$  y la adición de  $\omega$  a todas las velocidades para colocarlas en el sistema normal (inercial).

## 2.4. Modos de gauge

### 2.4.1. Transformaciones de gauge

Ya hemos mencionado que las perturbaciones métricas tienen diez grados de libertad, mientras que para especificar completamente las componentes de la métrica se necesitan sólo seis cantidades. Esta libertad adicional es debida a la existencia de diferentes soluciones que corresponden tan sólo a una redefinición de las coordenadas espacio-temporales y no a soluciones con verdadero significado físico. Para identificar estos modos de gauge estudiemos el cambio de las perturbaciones métricas frente a cambios de coordenadas infinitesimales o transformaciones de gauge de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \tau + \alpha(\mathbf{x}, \tau) \ , \\ \hat{x}^i &= x^i + \gamma^{ij} \nabla_j \beta(\mathbf{x}, \tau) + \epsilon^i(\mathbf{x}, t) \ , \quad \nabla \cdot \epsilon = 0 \ .\end{aligned}\tag{2.9}$$

Por conveniencia hemos separado la transformación espacial en una parte longitudinal y una parte transversal. En general las nuevas coordenadas espacio-temporales dependen de todas las coordenadas viejas. La función  $\alpha(\mathbf{x}, \tau)$  determina las nuevas hiper-superficies a  $\tau$  constante mientras que  $\beta(\mathbf{x}, t)$  y  $\epsilon(\mathbf{x}, t)$  fijan las coordenadas espaciales dentro de esas hiper-superficies.

Puede verse que el resultado de una transformación como (2.9) sobre un tensor arbitrario es simplemente su derivada de Lie respecto del campo vectorial  $\xi(\mathbf{x}, \tau)$  que define la transformación de coordenadas, esto es (Weinberg, 1972)

$$\hat{A} = A + \mathcal{L}_\xi A.$$

Aquí tomaremos un enfoque ligeramente diferente, escribiendo los diferenciales totales de los campos que definen la transformación (2.9)

$$\begin{aligned} d\alpha &= \partial_\tau \alpha d\hat{\tau} + \nabla_i \alpha d\hat{x}^i, \\ d\beta &= \partial_\tau \beta d\hat{\tau} + \nabla_i \beta d\hat{x}^i, \\ d\epsilon^i &= \partial_\tau \epsilon^i d\hat{\tau} + \nabla_j \epsilon^i d\hat{x}^j. \end{aligned}$$

Así obtenemos la expresión de los diferenciales totales de las antiguas coordenadas en términos de las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} d\tau &= d\hat{\tau} - \partial_\tau \alpha d\hat{\tau} - \nabla_i \alpha d\hat{x}^i, \\ dx^i &= d\hat{x}^i - (\gamma^{ij} \nabla_j \partial_\tau \beta(\mathbf{x}, \tau) + \partial_\tau \epsilon^i) d\hat{\tau} - (\gamma^{ik} \nabla_k \nabla_j \beta + \nabla_j \epsilon^i) d\hat{x}^j. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Además en cambio en el factor de expansión esta dado por

$$a(\tau) = a(\hat{\tau}) - \alpha \partial_\tau a(\hat{\tau}). \quad (2.11)$$

En las nuevas coordenadas el elemento de línea  $ds$  debe permanecer invariable. Utilizando las expresiones (2.10) y (2.11) para reemplazar los diferenciales de las antiguas coordenadas en función de las nuevas, y exigiendo que se cumpla

$$ds^2 = a^2(\hat{\tau}) \left\{ - \left( 1 + 2\hat{\psi} \right) d\hat{\tau}^2 + 2\hat{\omega}_i d\hat{\tau} d\hat{x}^i + \left[ (1 - 2\hat{\phi}) \gamma_{ij} + 2\hat{h}_{ij} \right] d\hat{x}^i d\hat{x}^j \right\},$$

podemos obtener la expresión para el cambio en las perturbaciones de la métrica debido a la transformación de coordenadas definida en (2.9). El resultado es

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \psi \partial_\tau \alpha - \eta \alpha, \quad \hat{\phi} = \phi + \eta \alpha, \\ \hat{\omega}_i &= \omega_i + \nabla_i (\alpha - \partial_\tau \beta) - \partial_\tau \epsilon^i, \quad \hat{h}_{ij} = h_{ij} - D_{ij} \beta - \nabla_{(i} \epsilon_{j)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

De esta forma vemos que existen diferentes soluciones para las perturbaciones métricas que corresponden a una misma situación física. Esto ha ocasionado gran confusión en el pasado.

Teniendo en cuenta la descomposición de las perturbaciones métricas en los modos escalar, vectorial y tensorial podemos encontrar fácilmente que la transformación para los modos escalares  $\omega$  y  $h$  está dada por

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega + \alpha - \dot{\beta}, \\ \hat{h} &= h - \beta, \end{aligned}$$

mientras que para los modos vectoriales la transformación está dada por

$$\begin{aligned}\hat{h}_i &= h_i - \epsilon_i, \\ \omega_i^\perp &= \omega_i^\perp - \partial_\tau \epsilon_i,\end{aligned}$$

mientras que la parte tensorial  $h_{ij}^T$  es invariante ante transformaciones de gauge, es decir, un invariante de gauge.

Esta libertad lleva a una ambigüedad en la definición de las perturbaciones en la densidad. Consideremos por ejemplo un espacio-tiempo de Robertson-Walker no perturbado, en el cual la densidad es una función exclusiva de  $\tau$ . Si realizamos una transformación de gauge como la descrita en (2.9) en el nuevo sistema ésta será en general dependiente también de las otras coordenadas  $x^i$ :  $\rho(\hat{\tau}) = \rho(\tau) + \dot{\rho}\alpha(\mathbf{x}, \tau)$ . En otras palabras, aún en un universo no-perturbado podemos encontrar soluciones que nos lleven a pensar en la existencia de perturbaciones en la densidad que varíen espacialmente. Más aún, cuando el espacio tiempo mismo esta perturbado, no está claro cuál es la mejor elección para el sistema de coordenadas.

### 2.4.2. Invariantes de gauge

En el electromagnetismo también existe una cierta libertad con respecto a las transformaciones de gauge. Los campos eléctrico y magnético pueden determinarse a partir de los potenciales escalar  $\phi$  y vectorial  $\mathbf{A}$  mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \partial_\tau \mathbf{A}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Con estas ecuaciones se satisfacen las ecuaciones de Maxwell homogéneas, es decir, sin términos fuentes. Las otras dos son

$$\begin{aligned}\nabla\phi + \partial_\tau (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho, \\ (\partial_\tau^2 - \nabla^2) \mathbf{A} + \nabla\phi &= 4\pi\mathbf{J},\end{aligned}$$

donde  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  son las densidades de carga y de corriente.

Es una cuestión de gusto si deseamos expresar las leyes del electromagnetismo en términos de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  o en términos de los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{A}$ . De todas formas existe una diferencia muy importante en los dos enfoques: en electrodinámica clásica los únicos observables directos son los campos eléctrico y magnético (y las cantidades derivadas de ellos) y no los potenciales.

Puede verse fácilmente que estas ecuaciones son invariantes ante las transformaciones de gauge de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \phi - \partial_\tau \alpha, \\ \hat{A}_i &= A_i + \nabla_i \alpha.\end{aligned}$$

Si no supiéramos acerca de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  puede que nos preocupara esta dependencia de gauge los potenciales y podríamos encontrar dos formas diferentes de proceder. La primera, que estudiaremos en las próximas secciones, es fijar un gauge, aplicando alguna restricción para los potenciales para eliminar los grados de libertad de gauge. Por ejemplo podemos fijar el *gauge de Coulomb* exigiendo que se cumpla que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , por lo que  $\mathbf{A}$  es transversal. De esta condición se obtiene que  $\alpha$  no puede depender de  $\mathbf{x}$  (aunque sí de  $\tau$ ), por lo que la mayor parte de la libertad es eliminada.

Una segunda posibilidad, menos directa, es buscar cantidades que sean combinaciones de los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  que sí sean invariantes de gauge. Un ejemplo de estas cantidades sería

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{A} + \int \nabla^2 \phi d\tau.$$

Basada en este enfoque Bardeen (1980) propuso que sólo debían considerarse cantidades que fueran explícitamente invariantes de gauge. Utilizando las transformaciones (2.12) para las perturbaciones métricas construyó dos de estas cantidades

$$\begin{aligned}\Psi &= \psi + \eta(\omega - \dot{h}) + \partial_\tau (\omega - \dot{h}), \\ \Phi &= \phi - \eta(\omega - \dot{h}).\end{aligned}$$

Estas variables coinciden con las perturbaciones métricas escalares  $\psi$  y  $\phi$  en un gauge particular, denominado *gauge longitudinal*, que analizaremos a continuación. Podría así parecer que este gauge posee alguna preferencia sobre las otras opciones, pero, como veremos a continuación, cualquier especificación no ambigua de un gauge permite definir cantidades invariantes de gauge.

### 2.4.3. Diferentes gauges

En esta sección estudiaremos diferentes opciones de gauges y sus consecuencias. Más adelante analizaremos en más detalle los gauges sincrónico y de Poisson.

### Gauge longitudinal

Este gauge es fijado mediante las condiciones  $\omega = h = 0$ . Si estamos en un sistema de coordenadas arbitrario, la transformación de gauge que debe realizarse para expresar las perturbaciones métricas en este gauge esta dada por

$$\alpha = -\omega + \dot{h}.$$

Esto es suficiente para determinar completamente cualquier cantidad escalar. Las otras perturbaciones escalares en el nuevo sistema toman la forma

$$\begin{aligned}\phi_l &= \phi - \eta(\omega - \dot{h}), \\ \psi_l &= \psi + \eta(\omega - \dot{h}) + \partial_\tau(\omega - \dot{h}).\end{aligned}$$

Vemos entonces que en este gauge las perturbaciones métricas  $\phi$  y  $\psi$  coinciden con las definiciones de las variables invariantes de gauge  $\Phi$  y  $\Psi$ . Otros gauges específicos pueden ser utilizados para construir cantidades que son invariantes de gauge.

Con esta elección de gauge, el campo de densidad puede determinarse a través de:

$$\hat{\rho}_l = \rho + (\partial_\tau \rho)(\omega - \dot{h}).$$

Debe notarse que este gauge es particularmente simple para trabajar con el modo escalar de las perturbaciones métricas, las cuales están caracterizadas por los campos  $\phi$  y  $\psi$ , y la expresión para  $ds^2$  está dado por

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ - (1 + 2\psi) d\tau^2 + (1 - 2\phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right],$$

pero debe enfatizarse que con esta elección el gauge está restringido, ya que sólo es aplicable a las perturbaciones escalares; los modos vectoriales y tensoriales son eliminados. De todas formas, como veremos más adelante, puede ser generalizado para introducir los modos vectorial y tensorial en el gauge de Poisson (Bertschinger, 1995).

### Gauge de curvatura uniforme

Una alternativa interesante, definida enteramente por las propiedades locales de la métrica, es el gauge de curvatura uniforme (Kodama & Sasaki 1984, Hwang 1994, Hwang & Noh 1996). En este gauge se seleccionan las hipersuperficies espaciales de forma tal que (el modo escalar) de la tri-métrica espacio temporal sea no-perturbado, es decir  $\phi = h = 0$ . Esto corresponde a una transformación de gauge de la forma

$$\alpha = -\frac{\phi}{\eta}, \quad \beta = \eta.$$

Las demás perturbaciones escalares toman la forma

$$\begin{aligned}\psi_\kappa &= \psi + \phi + \partial_\tau \left( \frac{\phi}{\eta} \right), \\ \omega_\kappa &= \omega - \dot{h} - \frac{\phi}{\eta}.\end{aligned}$$

Estas cantidades son los invariantes de gauge  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  definidos por Kodama & Sasaki (1984). Es claro que  $\omega_\kappa = -\eta\phi_l$ . En este gauge el campo de densidad está dado por

$$\rho_\kappa = \rho + (\partial_\tau \rho) \frac{\phi}{\eta}.$$

### Gauge comóvil ortogonal

El gauge comóvil ortogonal se define eligiendo coordenadas espaciales de forma tal que la tri-velocidad del fluido se anula, es decir  $\hat{v} = 0$ . La ortogonalidad entre las hipersuperficies a  $\tau$  constante y la cuadrivelocidad  $u^\mu$  requiere entonces que  $\hat{v} + \hat{\omega} = 0$ . Las transformaciones (2.12) implican entonces que

$$\begin{aligned}\alpha_m &= -(v + \omega), \\ \beta_m &= -\int v d\tau + \hat{\beta}(x^i),\end{aligned}$$

donde  $\hat{\beta}(x^i)$  representa una libertad de gauge adicional, que corresponde a un desplazamiento constante de las coordenadas espaciales. Todos los tri-escalares como la curvatura, la aceleración, y expansión son independientes de  $\hat{\beta}$ . Aplicando la transformación de gauge expresada arriba se obtienen las siguientes expresiones para las perturbaciones métricas en el gauge ortogonal

$$\begin{aligned}\phi_m &= \phi - \eta(v + \omega), \\ \psi_m &= \psi + \frac{1}{a} \partial_\tau [(v + \omega) a], \\ h_m &= h + \int v d\tau - \hat{\beta}.\end{aligned}$$

Definidas de esta forma, estas combinaciones son invariantes de gauge al igual que  $\Phi$  y  $\Psi$ , descontando la dependencia residual de  $h_m$  de la elección particular de  $\hat{\beta}$ .

En este gauge el campo de densidad estará determinado por

$$\rho_m = \rho + (\partial_\tau \rho) (v + \omega).$$

Para una perturbación en la densidad se obtiene

$$\delta\rho_m = \delta\rho + (\partial_\tau\bar{\rho})(v + \omega).$$

Esta cantidad es la perturbación en densidad invariante de gauge definida por Bardeen.

**Comoving total matter gauge** Este gauge extiende el gauge comóvil ortogonal al caso de un fluido multicomponente. Mientras que en éste se anulan la tri-velocidad y el momento del fluido, en el *Comoving Total Matter Gauge* se anula el impulso total

$$(\rho + p)(\hat{v} + \hat{\omega}) \equiv \sum_i (\rho_i + p_i)(\hat{v}_i + \hat{\omega}_i),$$

donde  $\rho_i$ ,  $p_i$  y  $\hat{v}_i$ , son la densidad, presión y velocidad de la componente  $i$  del fluido. La ortogonalidad de las hipersuperficies a  $\tau$  constante con el cuadri-momento, requieren que  $\hat{\omega} = 0$  independientemente.

### Gauge de densidad uniforme

Podemos utilizar el contenido de materia para elegir hipersuperficies de densidad uniforme. Utilizando la expresión

$$\delta\hat{\rho} = \delta\rho - (\partial_\tau\bar{\rho})\alpha,$$

para determinar la transformación de gauge necesaria, que esta dada por

$$\alpha_{\delta\rho} = \frac{\delta\rho}{\partial_\tau\bar{\rho}}.$$

En estas hipersuperficies la perturbación  $\phi$  es invariante de gauge y esta dada por

$$\phi_{\delta\rho} = \phi + \eta \left( \frac{\delta\rho}{\partial_\tau\bar{\rho}} \right).$$

Todavía existe otro grado de libertad en las hipersuperficies espaciales así que podemos fijar como cero el valor de  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{h}$  o  $\hat{v}$ .

#### 2.4.4. El gauge sincrónico

Estudiaremos con más detalle este gauge. El gauge Sincrónico fue introducido por Lifshitz (1946) y es definido por las condiciones  $\phi = \omega_i = 0$ , que elimina dos modos escalares ( $\phi$  y  $\omega$ ) y un modo vectorial ( $\omega^\perp$ ). No es difícil demostrar que para cualquier

observador en un espacio-tiempo perturbado débilmente pueden encontrarse coordenadas sincrónicas. De todas formas, como veremos más adelante, las condiciones impuestas en este gauge no eliminan completamente la libertad de gauge.

El gauge sincrónico tiene la propiedad de que existe un conjunto de observadores comóviles que están en caída libre sin cambiar sus coordenadas espaciales, los cuales son llamados *observadores fundamentales*. La existencia de estos observadores se sigue de la ecuación de la geodésica

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0,$$

para la trayectoria  $x^\mu(\lambda)$ , donde  $d\lambda = (-ds^2)^{\frac{1}{2}}$  para una geodésica temporal y  $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ . Con la restricción  $\phi = \omega_i = 0$  la ecuación (1.3) da  $\Gamma_{00}^i = 0$ , implicando que la trayectoria  $u^i = 0$  es una geodésica.

Cada observador fundamental lleva un reloj que marca el tiempo conforme  $\tau$  y una etiqueta con un coordenada espacial fija  $x^i$ . Los relojes y etiquetas de los observadores fundamentales *definen* el sistema de coordenadas en cada punto del espacio-tiempo. La libertad residual de gauge proviene de la libertad de elegir los valores de tiempo y coordenadas iniciales para cada observador.

Debido a que las coordenadas de los observadores fundamentales son Lagrangianas, las líneas coordenadas se vuelven altamente deformadas cuando las perturbaciones en densidad de vuelven grandes. Cuando las trayectorias de dos observadores fundamentales se intersectan las coordenadas de ese punto se vuelven singulares: dos conjuntos de coordenadas  $x^\mu$  señalan al mismo evento. Si las fluctuaciones en la densidad  $|\delta\rho/\bar{\rho}| \ll 1$  y las coordenadas iniciales están casi no-perturbadas, esta dificultad no aparece y por lo tanto puede ser utilizado sin problemas, con cuidado de que la libertad residual de gauge no contamine las variables físicas, en la teoría de perturbaciones lineales.

Para ser consistentes con la notación histórica (Lifshitz 1946, Weinberg 1972, Peebles 1980), en esta sección absorberemos  $\phi$  en  $h_{ij}$  y doblaremos  $h_{ij}$ , esto es

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j] \quad , \quad h \equiv h_i^i = 0.$$

Usando esta expresión para el elemento de línea, y las definiciones del tensor de Ricci y de Einstein es posible derivar las expresiones para las componentes del tensor

de Einstein perturbado

$$\begin{aligned}
-a^2 G^0_0 &= 3(\eta^2 + K) + \eta \dot{h} - \frac{1}{2} (\nabla^2 + 2K) h + \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j h^{ij}, \\
a^2 G^0_i &= \frac{1}{2} (\nabla_i \dot{h} - \nabla_j h^i_j) \quad , \quad G^0_i = -\gamma^{ij} G^0_j, \\
-a^2 G^i_j &= (2\dot{\eta} + \eta^2 + K) \delta^i_j + \left( \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \eta \partial_\tau - \frac{1}{2} \nabla^2 \right) (h \delta^i_j - h^i_j) \\
&\quad - K h^i_j + \frac{1}{2} \gamma^{ik} (\nabla_k \nabla_j h - \nabla_k \nabla_l h^l_j - \nabla_j \nabla_l h^l_k) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\nabla_k \nabla_l h^{kl}) \delta^i_j.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a intentar separar las ecuaciones de Einstein perturbadas en sus partes escalar, vectorial y tensorial. Primero debemos descomponer la perturbación métrica  $h_{ij}$ , que escribiremos como

$$h_{ij} = \frac{1}{3} h \gamma_{ij} + D_{ij} (\nabla^{-2} \xi) + \nabla_{(i} h_{j)} + h_{ij}^T.$$

Exigimos que  $\nabla_i h^i = \nabla_i h^T{}^i{}_j = 0$  para asegurarnos que las dos últimas partes de  $h_{ij}$  sean puramente solenoidal (modo vectorial) y transversal (modo tensorial). Las variables del modo escalar son  $h$  y  $\nabla^{-2} \xi$ , cuyo laplaciano es  $\xi$ . Con estas definiciones las ecuaciones de Einstein se separan en siete partes diferentes de acuerdo a su simetría espacial

$$G^0_0 : \frac{1}{3} (\nabla^2 + 3K) (\xi - h) + \eta \dot{h} = 8\pi G p G a^2 (\rho - \bar{\rho}), \quad (2.13)$$

$$G^{\parallel 0}{}_i : \frac{1}{3} \nabla_i (\dot{h} - \dot{\xi}) - K \nabla_i (\nabla^{-2} \dot{\xi}) = 8\pi G a^2 [(\rho + p) v_i]^\parallel, \quad (2.14)$$

$$G^\perp{}_i : -\frac{1}{4} (\nabla^2 + 2K) \dot{h}_i = 8\pi G a^2 [(\rho + p) v_i]^\perp, \quad (2.15)$$

$$G^i{}_i : -(\partial_\tau^2 + 2\eta \partial_\tau) h + \frac{1}{3} (\nabla^2 + 3K) h - \xi = 24\pi G a^2 (p - \bar{p}), \quad (2.16)$$

$$G^{\parallel i}{}_j : \left( \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \eta \partial_\tau \right) D_{ij} (\nabla^{-2} \dot{\xi}) + \frac{1}{6} D_{ij} (\xi - h) = 8\pi G a^2 \Sigma^{\parallel i}{}_j, \quad (2.17)$$

$$G^\perp{}^i{}_j : \left( \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \eta \partial_\tau \right) \nabla_{(i} h_{j)} = 8\pi G a^2 \Sigma^\perp{}^i{}_j, \quad (2.18)$$

$$G^T{}^i{}_j : \left( \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \eta \partial_\tau - \frac{1}{2} \nabla^2 + K \right) h_{ij}^T = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij}^T. \quad (2.19)$$

Así, las ecuaciones de Einstein se descomponen en ecuaciones separadas para los modos escalar, vectorial y tensorial de las perturbaciones métricas, con las fuentes para cada una dada por la parte apropiada del tensor de energía impulso. De todas formas hay más ecuaciones que incógnitas. Hay cuatro ecuaciones escalares para  $h$  y  $\xi$ , dos ecuaciones vectoriales para  $h_i$  y una ecuación tensorial para  $h_{ij}^T$ .

Debemos notar que existe una característica importante acerca de las ecuaciones (2.15-2.21). Las ecuaciones que se obtienen a partir de  $G^0_\mu$  involucran sólo derivadas simples respecto del tiempo de las variables de los modos escalar y vectorial, mientras que las que se obtienen a partir de  $G^i_\mu$  tienen derivadas segundas respecto del tiempo, como cabría esperar de las ecuaciones de movimiento para el campo gravitatorio. Así, podemos eliminar las ecuaciones (4.8-2.15) y tener exactamente tantas ecuaciones de segundo orden en el tiempo como incógnitas. De igual manera podríamos eliminar las ecuaciones (2.16-2.18) y obtener las ecuaciones de primer orden en el tiempo para los modos escalar y vectorial. Sólo la evolución del modo tensorial está unívocamente determinada por una ecuación de onda de segundo orden.

La razón para esta redundancia es que la identidad de Bianchi  $\nabla_\mu G^\mu_\nu$  fuerza a las ecuaciones de Einstein a implicar que  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ . Combinando la derivada temporal de la ecuación (4.8) con las divergencias de las ecuaciones (2.14) y (2.15) se obtiene la parte perturbada de la ecuación (2.7) (con  $\phi \rightarrow -h/6$ ). Similarmente, las derivadas temporales de las ecuaciones (2.14) y (2.15) combinadas con los gradientes de las ecuaciones (2.16-2.18). *Debido a que requerimos que las ecuaciones de movimiento de la materia y la radiación conserven localmente la energía-momento neto, tres de las ecuaciones (4.8-2.18) son redundantes.*

La descomposición de las ecuaciones de Einstein en ecuaciones de restricción y evolutivas fue estudiado en detalle por Arnowitt, Deser & Misner (1962, ADM) y aplicado a la cosmología posteriormente por Bardeen (1988) y Durrer (1989). La igualdad  $G^0_0 = 8\pi GT^0_0$  es denominada generalmente la “restricción de energía ADM” y  $G^0_i = 8\pi GT^0_i$  es llamado “restricción de momento ADM”. Las ecuaciones de restricciones ADM pueden ser entendidas como limitaciones en los valores iniciales de los campos ( $h, \xi, \dot{h}, \dot{\xi}, \dot{h}_i$ ) y las variables de la materia. Si estas restricciones son satisfechas inicialmente y si utilizamos las ecuaciones (2.16-2.18) para evolucionar ( $h, \xi, \dot{h}, \dot{\xi}, \dot{h}_i$ ) mientras las variables de la materia son evolucionadas de forma tal que satisfagan la conservación de la energía-momento netos, entonces las restricciones ADM serán satisfechas para todos los tiempos posteriores. De hecho, las ecuaciones de Einstein contienen en si mismas el requerimiento de la conservación de la energía-momento para la materia. Si quisiéramos integrar las ecuaciones (2.16-2.18) correctamente, pero violar la conservación de la energía-impulso, entonces violaríamos las ecuaciones

(4.8-2.15).

En la práctica, puede encontrarse mejor utilizar solamente las ecuaciones de las restricciones ADM y no a las ecuaciones (2.16-2.18) como las ecuaciones de campos reales para las perturbaciones escalares y vectoriales. Estas tienen menos derivadas temporales y por lo tanto son más sencillas de integrar. Las ecuaciones (2.16-2.18) no son necesarias ya que éstas siempre pueden ser obtenidas a partir de las derivadas de las ecuaciones (4.8-2.15) y usando la conservación de la energía-impulso. Visto de este modo uno podría pensar que las derivadas temporales extra de las ecuaciones (2.16-2.18) no tienen nada que ver con la gravedad en sí. Las ecuaciones de campo reales para los modos escalar y vectorial son las ecuaciones de restricciones ADM.

El modo tensorial satisface la ecuación de onda (2.19). Las soluciones a esta ecuación son las ondas gravitacionales, cuya fuente es la parte transversal de  $\Sigma_{ij}$ . El término  $\eta\partial_\tau$  aparece debido a que utilizamos coordenadas comóviles, y el término  $K$  aparece como una corrección al laplaciano debido a la curvatura del espacio. Aparte de eso, las soluciones homogéneas son ondas propagándose a la velocidad de la luz.

### 2.4.5. El gauge de poisson

Este gauge se obtiene por la imposición de las condiciones

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot \mathbf{h} = 0,$$

que eliminan dos modos escalares y uno vectorial. En este gauge (llamado así por la analogía con el gauge de Coulomb en electromagnetismo, en el cual  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) hay dos modos escalares  $\phi$  y  $\psi$ , un modo vectorial  $\omega$  y un modo tensorial de traza nula  $\mathbf{h}$ .

La versión restringida con  $\omega_i = h_{ij} = 0$  corresponde al gauge longitudinal que analizamos anteriormente. Este gauge puede ser aplicado sólo si no hay perturbaciones vectoriales o tensoriales presentes. Esto es aplicable en el régimen lineal, pero fluctuaciones no lineales en la densidad generalmente inducen modos tensoriales y vectoriales aún cuando estos no estaban presentes inicialmente. El gauge de Poisson en cambio, permite que todos los grados de libertad estén presentes en la métrica.

Para encontrar cuanta libertad de gauge residual es permitida busquemos una transformación de coordenadas de un sistema de coordenadas arbitrario al gauge de Poisson. Utilizando las ecuaciones (2.12) es fácil ver que esta transformación está dada por

$$\alpha = \omega + h \quad , \quad \beta = h \quad , \quad \epsilon_i = h_i,$$

donde  $\nabla\omega = \omega^\parallel$ , mientras que  $h$  y  $h_i$  vienen de las partes longitudinal y solenoidal de

h. Esta transformación no es única debido a que es posible añadir funciones arbitrarias a  $\alpha$  y  $\epsilon_i$  siempre que éstas tengan una dependencia exclusiva del tiempo.

Los cambios espacialmente homogéneos en  $\alpha$  representan cambios en las unidades de tiempo y longitud, mientras que los cambios espacialmente homogéneos en  $\epsilon_i$  representan un corrimiento del origen de coordenadas espaciales. Esta libertad residual trivial es físicamente transparente y no representa ninguna dificultad conceptual o práctica.

Ahora que hemos visto que el gauge de Poisson resuelve el problema de la fijación de un gauge, veamos las componentes de las ecuaciones de Einstein perturbadas. Estas son

$$G^0_0 : (\nabla^2 + 3K) \phi - 3\eta (\dot{\phi} + \eta\psi) = 4\pi Ga^2 (\rho - \bar{\rho}), \quad (2.20)$$

$$G^{\parallel 0}_i : -\nabla_i (\dot{\phi} + \eta\psi) = 4\pi Ga^2 [(\rho + p) (v_i + \omega_i)^{\parallel}], \quad (2.21)$$

$$G^{\perp 0}_i : (\nabla^2 + 2K) \omega_i = 16\pi Ga^2 [(\rho + p) (v_i + \omega_i)^{\perp}], \quad (2.22)$$

$$G^i_i : \ddot{\phi} - K\phi + \eta (\dot{\psi} + s\dot{\phi}) + (2\dot{\eta} + \eta^2) \psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\phi - \psi) \quad (2.23)$$

$$= 4\pi a^2(\rho - \bar{\rho}), \quad (2.24)$$

$$G^{\parallel i}_{j \neq i} : D_{ij}(\phi - \psi) = 8\pi Ga^2 \Sigma^{\parallel}_{ij}, \quad (2.25)$$

$$G^{\perp i}_j : -(\partial_\tau + 2\eta) \nabla_{(i} \omega_{j)} = 8\pi Ga^2 \Sigma^{\perp}_{ij}, \quad (2.26)$$

$$G^T i_j : (\partial_\tau^2 + 2\eta\partial_\tau - \nabla^2 + 2K) h_{ij} = 8\pi Ga^2 \Sigma^T_{ij}.$$

Al igual que en el gauge sincrónico, los modos escalar y vectorial satisfacen las ecuaciones de restricción ADM para los valores iniciales (2.20-2.26), y las ecuaciones de evolución. De todas formas es notable que en el gauge de Poisson podemos obtener los potenciales escalares y vectoriales directamente de la distribución de energía-impulso instantánea sin involucrar ninguna integración temporal. Esto es claro para  $\phi - \psi$  y  $\omega$ , que obedecen ecuaciones sin derivadas temporales, (2.24) y (2.25) respectivamente. Combinando las restricciones ADM de la energía y del momento longitudinal podemos obtener también una ecuación instantánea para  $\phi$

$$(\nabla^2 + 3K) \phi = 4\pi Ga^2 [\delta\rho + 3\eta\Phi_f],$$

donde  $-\nabla\Phi_f = [(\rho + p) (\mathbf{v} + \omega)]^{\parallel} m$ .

Sólo el modo tensorial se obtiene en forma no ambigua de una ecuación de evolución. De hecho obedece la misma ecuación que en el gauge sincrónico, debido a que las perturbaciones tensoriales son invariantes de gauge.

---

Puede mostrarse que para materia no-relativista las ecuaciones de campo (2.20-2.27) se reducen a las formas Newtonianas. Es claro que en el límite no-cosmológico ( $\eta = K = 0$ ) la ecuación (2.20) se reduce a la ecuación de Poisson. *El gauge de Poisson da la generalización cosmológica relativista de la gravedad Newtoniana.*

# Capítulo 3

## El origen de las fluctuaciones

*Imaginé la primera mañana del tiempo, imaginé a mi dios confiando el mensaje a la piel viva de los jaguares (...) Imaginé esa red de tigres, ese caliente laberinto de tigres, dando horror a los prados y a los rebaños para conservar un dibujo.*

Jorge Luis Borges, La escritura de Dios

En este capítulo revisamos la teoría de la inflación, el mecanismo que actualmente es considerado como el responsable de la generación de fluctuaciones en la densidad en el Universo temprano que llevaron a la formación de la estructura observada en la actualidad. Para ello comenzaremos listando una serie de problemas presentes en la imagen básica del Big Bang y como pueden ser solucionados mediante la inflación. Posteriormente revisaremos algunos de los modelos y aproximaciones más sencillos de esta teoría.

### 3.1. Motivaciones de la inflación

#### 3.1.1. El problema de la planitud

Si el Universo no es plano, el valor de  $\Omega_K = \frac{K}{a^2 H^2}$  evoluciona con el tiempo. Según las restricciones actuales  $\Omega_k = 1,003 \pm 0,010$  (Tegmark et al. 2006, ver también el capítulo 7. El problema de la planitud es que para explicar la similitud entre el valor observado y el correspondiente al Universo plano  $\Omega_k = 1$ , su valor en tiempos tempranos debe ser extremadamente cercano a 1. Por ejemplo, para obtener el Universo

presente, en la época de la nucleosíntesis, cuando el Universo tenía 1s de edad, se requiere que

$$|\Omega_{tot} - 1| \lesssim 10^{-16}. \quad (3.1)$$

En épocas mas tempranas  $\Omega_{tot}$  debe ser aún más cercano a 1.

El problema de la planitud puede plantearse entonces como que unas condiciones iniciales tan finamente ajustadas parecen extremadamente poco probables. La mayoría de las condiciones iniciales llevan a universos cerrados que recolapsan casi inmediatamente, o a universos abiertos que entran en el régimen dominado por curvatura rápidamente y se expanden y enfrían por debajo de los  $3K$  en el primer segundo de su existencia.

### 3.1.2. El problema del Horizonte

El mapa de las observaciones de anisotropías en la temperatura del fondo cósmico de microondas presenta una sorprendente isotropía. Sin embargo, los fotones provenientes de regiones separadas por más de un grado (que corresponde aproximadamente a la escala del horizonte en la superficie de último scattering, no pueden haber interactuado con anterioridad al desacople. De esta manera, el modelo del Big Bang no ofrece ninguna explicación acerca del porqué la temperatura observada en diferentes regiones del cielo es la misma con tal alta precisión. La homogeneidad debe ser parte de las condiciones iniciales, lo cual también parece extremadamente poco probable.

### 3.1.3. Homogeneidad e isotropía

El problema del horizonte implica que la homogeneidad e isotropía del Universo en gran escala deben ser parte de las condiciones iniciales. En la práctica sabemos que el Universo no es exactamente homogéneo, aunque se aproxima a ese estado en escalas grandes. De esta manera es muy importante contar con una teoría que sea capaz de explicar el origen de las inhomogeneidades, o si esto también debe adjudicarse simplemente a las condiciones iniciales.

El problema es aún más complejo. Las anisotropías observadas en la temperatura del fondo de microondas por los satélites COBE y WMAP, corresponden a fluctuaciones en la superficie de último scattering (ver capítulo 4). Algunas de estas fluctuaciones poseen escalas mayores al horizonte en ese momento, por lo que no pueden haber sido generadas de forma causal y por lo tanto también deben ser parte de las condiciones iniciales.

Para resolver estos problemas parece necesario ir más allá de la sencilla imagen del modelo de Big Bang caliente.

### 3.2. ¿Que es la inflación?

La teoría de la inflación es un agregado al modelo del big bang que no altera todos sus resultados, y que da una solución a los problemas planteados en la sección anterior. La definición precisa de inflación es simplemente toda época en la historia del Universo en la que el factor de escala se está acelerando, es decir

$$\ddot{a} > 0. \quad (3.2)$$

Una expresión alternativa de la inflación que le da un significado físico más claro es que

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0. \quad (3.3)$$

Como  $H^{-1}/a$  es la longitud de Hubble comóvil, la condición para la inflación es que esta distancia, que es la escala característica más importante del Universo en expansión, disminuya con el tiempo. En coordenadas comóviles, durante una época inflacionaria, el Universo observable se vuelve más pequeño.

Si se produce una etapa inflacionaria con estas características, es posible solucionar todos los problemas planteados en la sección anterior. Por ejemplo, cuando se cumple la condición (3.2), el valor de  $\Omega_K = \frac{K}{a^2 H^2}$  tiende a cero. Una etapa inflacionaria suficientemente larga puede llevar a  $\Omega_K$  tan cerca de cero que toda la evolución posterior no alcance a desviarlo considerablemente de este valor, lo cual soluciona el problema de la planitud. El problema del horizonte se soluciona debido a la reducción de la longitud de Hubble durante la inflación, que permite que nuestro Universo observable se halla originado en una pequeña región que se encontrara dentro del radio de Hubble antes de la inflación.

A partir de (1.7) puede verse que la condición (3.2) implica que la componente responsable de dicha expansión debe cumplir que

$$\rho + 3p < 0, \quad (3.4)$$

que es la condición que encontramos en la sección 1.2.3 para la energía oscura.

### 3.3. El inflatón

De acuerdo a lo expresado en la sección anterior, para producir una etapa inflacionaria en el Universo necesitamos una componente que viole la condición de energía fuerte (1.17). De esta manera, se necesita un campo escalar que cumpla las condiciones descritas en la sección 1.2.3, el cual se denomina *inflatón*. La densidad de energía y la presión de dicho campo están dadas por las ecuaciones (1.20) y (1.21). El potencial del campo inflatón es lo que determina un dado modelo inflacionario.

Las ecuaciones de movimiento pueden derivarse ahora reemplazando estas expresiones para  $\rho$  y  $p$  en las ecuaciones de Friedman (1.6) y de continuidad (1.8). Asumiendo un universo plano se obtiene

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left[ V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right], \quad (3.5)$$

y

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3.6)$$

donde  $M_{Pl} = (8\pi G)^{-1/2}$  es la *masa de Planck reducida* y  $V' = \frac{dV}{d\phi}$ . La condición para que se produzca la inflación corresponde a  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ . Con un potencial suficientemente plano, aún en el caso de que esta condición no sea satisfecha inicialmente, se satisfará rápidamente, siempre que el campo escalar este desplazado fuera del mínimo de su potencial.

Una vez que la etapa inflacionaria comienza, el término de curvatura se vuelve menos importante. Normalmente se lo asume nulo desde el comienzo, si no es así, las primeras etapas de la inflación lo llevarán a ese estado.

### 3.4. La aproximación de *slow-roll*

La aproximación estándar para trabajar en inflación es la *aproximación de slow-roll*. En ésta aproximación el campo cambia muy lentamente por lo que  $\dot{\phi} \ll 1$  y los primeros términos de las ecuaciones (1.20) y (1.21) pueden despreciarse. En esta situación la ecuación de estado del campo (1.22) se aproxima al valor correspondiente a una constante cosmológica  $w_\phi \simeq -1$ , lo cual implicará una expansión cercana a exponencial del factor de escala del Universo.

En forma más precisa, en la aproximación de *slow-roll* se desprecia el último término de la ecuación (3.5) y el primero de la ecuación (3.6), con lo que las mismas

se reducen a

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad (3.7)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'. \quad (3.8)$$

Podemos definir los parámetros de slow-roll  $\epsilon$  y  $\eta$  como

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (3.9)$$

$$\eta(\phi) = M_{\text{Pl}}^2 \frac{V''}{V}. \quad (3.10)$$

Mediante estos parámetros puede plantearse una condición necesaria para que sea válida la aproximación de slow-roll

$$\epsilon(\phi) \ll 1, \quad (3.11)$$

$$|\eta(\phi)| \ll 1. \quad (3.12)$$

Puede demostrarse fácilmente por substitución que las condiciones (3.11) y (3.12) son necesarias para la validez de la aproximación de slow-roll, pero no son suficientes, ya que sólo restringen la forma del potencial mientras que el valor de  $\dot{\phi}$  puede ser elegido arbitrariamente. Por lo tanto debe realizarse la hipótesis adicional de que la solución para un dado potencial satisface la ecuación (3.8).

Para ver que la aproximación de slow-roll es una condición suficiente para que ocurra inflación reescribamos las condiciones para que esta ocurra como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0, \quad (3.13)$$

la cual se satisface obviamente si  $\dot{H} > 0$ . De lo contrario requerimos que

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (3.14)$$

Bajo la aproximación de slow-roll esto es

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \epsilon. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, si se verifica la condición (3.11) se garantiza la inflación.

Un modelo inflacionario consta de un potencial, y de una manera de frenar la inflación. Una forma de lograr esto último es mediante una violación de la condición

de slow-roll a medida que el campo se acerca a un mínimo con energía potencial nula o despreciable. De esta manera puede pensarse que la inflación se detiene cuando  $\epsilon(\phi)$  llega a la unidad. Esto nos dice directamente el valor de  $\phi$  para el cual la inflación termina, lo cual no corresponderá exactamente con el mínimo de  $V$  ya que en ese punto  $\epsilon$  diverge.

La duración de la inflación se cuantifica mediante el cociente del factor de escala en los tiempos final e inicial de la etapa inflacionaria. Como esto es generalmente una cantidad muy grande se utiliza el número de *e-foldings*  $N$ , definido como

$$N(t) \equiv \ln \left( \frac{a(t_{fin})}{a(t)} \right), \quad (3.16)$$

donde  $t_{fin}$  es el tiempo en el final de la inflación. Para resolver los problemas del horizonte y la inflación se necesitan alrededor de 60 e-foldings.

### 3.5. El origen de la estructura

Hasta el momento hemos visto como la inflación puede generar un Universo plano y homogéneo a partir de un amplio rango de condiciones iniciales, a través de la evolución del Universo dominada por el campo inflatón. Pero la gran importancia de la inflación radica en que también brinda un método para el origen de inhomogeneidades, que pueden dar lugar a la estructura en gran escala observada en el Universo. No desarrollaremos aquí la teoría general del origen de las fluctuaciones en la etapa inflacionaria. Simplemente mencionaremos que éstas inhomogeneidades se generan por las fluctuaciones cuánticas del campo inflatón alrededor de su estado de vacío. Las fluctuaciones del vacío generan perturbaciones primordiales gaussianas, adiabáticas y con un índice espectral cercano a 1.

Como veremos en el capítulo 7, los modelos inflacionarios predicen la presencia de modos escalares y tensoriales en las fluctuaciones de la métrica. Las amplitudes e índices espectrales de dichos modos están relacionados entre sí y a los parámetros de la aproximación de slow-roll, por lo que la obtención de restricciones en dichos parámetros mediante observaciones cosmológicas es de gran importancia para determinar que modelos inflacionarios son compatibles con el Universo observado.

## Capítulo 4

# El fondo cósmico de microondas

*Sólo un desequilibrio de las cosas,  
un fugaz desnivel inexplicable  
permite todavía  
este naufragio sin barco, sin mar y sin playa,  
sin espectador, sin fondo y sin náufrago,  
esta historia que nadie cuente y nadie escucha,  
esta falla sin importancia del abismo.  
Sólo queda la señal como un detalle.*

Roberto Juarroz, Quinta Poesía Vertical

### 4.1. la ecuación de Boltzman

En este capítulo se presenta un tratamiento simplificado de las anisotropías en el fondo de microondas. La misma puede ser descripta completamente por la función distribución en el espacio de fases de los fotones. Ignorando la polarización del fondo de microondas (un efecto inferior al 5%), toda la información está incluida en la función distribución  $f(x^\mu, p^\mu)$ . El momento conjugado está relacionado con el momento propio medido por un observador comóvil,  $p^\mu/a$ , de forma tal que  $\mathbf{p} = cte$  a lo largo de las trayectorias de los fotones, en ausencia de perturbaciones métricas.

A pesar de las perturbaciones métricas y el scattering producido por electrones libres, la función distribución en el espacio de fases de los fotones del fondo de micro-

ondas permanece como la de un cuerpo negro a una alta precisión:

$$f(x^\mu, p^\mu) = f_{Planck} \left( \frac{E}{kT} \right) = f_{Planck} \left( \frac{p}{kT_0(1 + \delta T)} \right), \quad (4.1)$$

donde  $T_0 = 2,728$  K es la temperatura actual del fondo de microondas y  $\delta T(x^\mu, \mathbf{n})$  es la variación en la temperatura en la posición  $x^\mu$  de los fotones que viajan en la dirección  $\mathbf{n}$ . La densidad en el espacio de fase corresponde a la de un cuerpo negro, pero la temperatura depende de la dirección de los fotones, como resultado del scattering y procesos gravitacionales que ocurren a lo largo de la línea de la visual.

La densidad en el espacio de fases puede ser calculada a partir de las condiciones iniciales en el Universo temprano a través de la ecuación de Boltzman

$$L(f) = C(f), \quad (4.2)$$

donde

$$L(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{\partial p^\mu}{\partial t} \quad (4.3)$$

es el operador de Liouville y  $C(f)$  es el término colisional que contiene los efectos del scattering elástico no-relativista entre fotones y electrones. Bajo la acción exclusiva de la gravedad el término colisional se anula, es decir que la densidad de fotones en el espacio de fases se conserva.

Como los fotones obedecen la ecuación de las geodésicas se cumple que

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\nu\eta}^\mu p^\nu p^\eta. \quad (4.4)$$

En este caso se puede elegir el parámetro afín  $\lambda$  de manera que

$$p^0 = \frac{dx^0}{d\lambda}, \quad (4.5)$$

por lo que el impulso estará dado por

$$\frac{p^i}{p^0} = \frac{dx^i}{dt}, \quad (4.6)$$

y la ecuación de las geodésicas puede expresarse como

$$\frac{dp^i}{dt} = g^{i\nu} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}. \quad (4.7)$$

Para resolver esta ecuación debemos conocer las perturbaciones que afectan a la métrica. Introduciremos perturbaciones escalares en la métrica y utilizaremos el gauge conforme de Newton (ver capítulo 2), donde la métrica toma la forma

$$g_{00} = - [1 + 2\Psi(x^i, t)], \quad (4.8)$$

$$g_{ij} = a^2 [1 + 2\Phi(x^i, t)] \gamma_{ij}, \quad (4.9)$$

donde  $\gamma_{ij}$  es la parte espacial sin perturbar de la métrica de Robertson-Walker (1.4).  $\Psi$  puede ser interpretado como el potencial Newtoniano.  $\Phi$  es la perturbación fraccional en la curvatura espacial. Si  $p$  puede ser despreciado se cumple que

$$\Phi = -\Psi. \quad (4.10)$$

## 4.2. Redshift gravitacional y dilatación temporal

Por el momento analizaremos la ecuación de Boltzman a-colisional, es decir, planteando  $C(f) = 0$ . Es posible reescribir esta ecuación en términos de la energía  $p$  y la dirección de propagación de los fotones  $\zeta^i$  en un sistema de referencia que es localmente ortogonal en las superficies de  $t = cte$ . Ésta será simplemente

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \zeta^i} \frac{d\zeta^i}{dt} = 0. \quad (4.11)$$

Debe notarse que  $d\zeta^i/dt \neq 0$  sólo en presencia de curvatura  $K$  o de perturbaciones  $\Phi$ , ya que de otra manera las ecuaciones de las geodésicas son líneas rectas. Por lo tanto, como el factor  $\partial f/\partial \zeta^i$  ya es de primer orden en las fluctuaciones, éste término puede despreciarse si la curvatura global es  $K = 0$ , lo cual asumimos de ahora en adelante. El término del redshift  $dp/dt$  siempre es importante. A continuación desarrollaremos una expresión para este factor.

La energía y la dirección de propagación de los fotones pueden expresarse explícitamente por

$$p^2 = p^i p_i, \quad (4.12)$$

$$\zeta^i = a \frac{p^i}{p} (1 + \Phi), \quad (4.13)$$

de donde se obtiene

$$p^0 = (1 + \Psi)p. \quad (4.14)$$

Utilizando estas ecuaciones, y las componentes de la métrica dadas por (4.8) y (4.9), la ecuación de las geodésicas (4.7) implica que, a primer orden en las fluctuaciones

$$\frac{1}{p} \frac{dp^0}{dt} = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} (1 - \Psi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\zeta^i}{a} \right). \quad (4.15)$$

De esta relación se obtiene una expresión para el redshift de los fotones

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{p} \frac{dp^0}{dt} (1 + \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (4.16)$$

$$= - \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\zeta^i}{a} \right). \quad (4.17)$$

La interpretación física de esta ecuación es sencilla. La variación en  $p$  estará dada por

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}. \quad (4.18)$$

Por su parte

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4.19)$$

El primer término de esa ecuación corresponde al redshift cosmológico. Pero la presencia de una perturbación en la curvatura espacial  $\Phi$  también estira el espacio. El factor de redshift real corresponde al coeficiente de la parte espacial de la métrica, es decir  $a(1 + \Phi)$ . Así, el segundo término se debe al redshift causado por las perturbaciones en curvatura.

En cuanto al último término de (4.18), se puede asociar con

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\zeta^i}{a}, \quad (4.20)$$

el cual corresponde al redshift gravitacional de los fotones al caer y trepar de los pozos de potencial. El redshift depende del gradiente del potencial a lo largo de la dirección de propagación.

### 4.3. Ecuación de brillo a-colisional

Definamos la *función de brillo*  $\Theta$  mediante

$$4\Theta \equiv \frac{1}{\pi^2 \rho_\gamma} \int dp p^3 f - 1 = \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma}, \quad (4.21)$$

donde  $\rho_\gamma$  es la densidad de energía de los fotones promediada en el espacio y las direcciones. Como  $\rho_\gamma \propto T^4$ ,  $\delta\rho_\gamma \propto 4T^3$ , por lo que

$$\Theta(t, \mathbf{x}, \varsigma) = \frac{\delta T}{T} \quad (4.22)$$

es la variación fraccional de la temperatura del cuerpo negro.

Si se utiliza la ecuación (4.17) en la ecuación de Boltzman acolisional (4.11) y se multiplica por  $p^3/\pi^2\rho_\gamma$  e integra sobre  $p$  se obtiene la ecuación de brillo acolisional

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} + \varsigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\Theta + \Psi) + \frac{\partial\varsigma^i}{\partial\eta} \frac{\partial\Theta}{\partial\varsigma^i} + \frac{\partial\varsigma^i}{\partial\Phi} = 0. \quad (4.23)$$

Como el potencial  $\Psi(\eta, \mathbf{x})$  no es una función explícita del ángulo  $\varsigma$  y  $\dot{x}^i = \varsigma^i$ , esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{d}{d\eta} [\Theta + \Psi](\eta, \mathbf{x}, \varsigma) = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \quad (4.24)$$

lo que demuestra que en un potencial estático, la cantidad  $[\Theta + \Psi]$  se conserva. De esta manera, las fluctuaciones en la temperatura están dadas simplemente por las diferencias en el potencial

$$\Theta(\eta_0, \mathbf{x}_0, \varsigma_0) = \Theta(\eta_1, \mathbf{x}_1, \varsigma_1) + [\Psi(\eta_1, \mathbf{x}_1) - \Psi(\eta_0, \mathbf{x}_0)]. \quad (4.25)$$

Esta es la expresión más sencilla del efecto Sachs-Wolfe.

## 4.4. El término de colisiones

La propagación de los fotones no obedece a la ecuación de Boltzman acolisional, ya que la misma no está afectada únicamente por la gravedad. Debe considerarse el término de colisiones  $C(f)$ , el cual estará dado por el scattering de Compton de los fotones por los electrones libres. Este mecanismo es el principal responsable de la termalización del CMB y gobierna la evolución mutua de estos fluidos hasta el momento del desacople.

No derivaremos aquí la expresión para la integral de colisiones, sólo veremos el resultado y analizaremos sus implicancias. En su derivación se asumen las siguientes hipótesis:

- Se aplica el límite del scattering de Thomson  $\delta p/p \ll 1$  en el sistema en reposo de la radiación.

- La radiación no está polarizada y permanece de esa manera.
- La densidad de  $e^-$  es lo suficientemente baja como para que los términos de supresión de Pauli sean ignorados.
- La distribución de velocidades de los electrones es termal alrededor de una dada velocidad de conjunto  $\mathbf{v}_b$  determinada por los bariones.

Estas aproximaciones son generalmente válidas en cosmología, con excepción de la hipótesis de radiación no-polarizada. El scattering de radiación anisotrópica induce polarización en la radiación. Como las anisotropías son pequeñas, las fluctuaciones inducidas en la polarización son del orden del 10 % de las de la temperatura. La polarización produce un efecto del 5 % en  $\delta T/T$  por lo que puede despreciarse en una primera aproximación.

Con éstas hipótesis se obtiene la ecuación de brillo colisional dada por

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \varsigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\Theta + \Psi) + \frac{\partial \varsigma^i}{\partial \eta} \frac{\partial \Theta}{\partial \varsigma^i} + \frac{\partial \varsigma^i}{\partial \Phi} = \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \left( \Theta_0 - \Theta - \varsigma_i v_b^i + \frac{1}{16} \varsigma_i \varsigma_j \Pi_\varsigma^{ij} \right), \quad (4.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi_\varsigma^{ij} &= \frac{4}{\pi^2 \rho_\gamma} \int dp p^3 f^{ij}(\eta, \mathbf{x}, \varsigma) \\ &= \frac{1}{\pi^2 \rho_\gamma} \int dp p^3 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (3\varsigma^i \varsigma^j - \delta^{ij}) f(\eta, \mathbf{x}, \varsigma) \\ &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} (3\varsigma^i \varsigma^j - \delta^{ij}) 4\Theta(\eta, \mathbf{x}, \varsigma), \end{aligned} \quad (4.27)$$

son los momentos cuadrupolares de la distribución de energía, y  $\tau$  es la profundidad óptica de scattering de Thomson definida a través de la tasa de scattering

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = a \chi_e n_e \sigma_T, \quad (4.28)$$

donde

$$\sigma_T = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}, \quad (4.29)$$

es la sección eficaz de Thomson.

De esta manera, podemos resumir los principales efectos que tienden a producir anisotropías en el CMB, los cuales son:

1. Efectos gravitatorios puros debidos a cambios en  $\Psi$  y  $\Phi$ , los cuales están presentes en la ecuación de Boltzman acolisional (por ejemplo, el efecto Sachs-Wolfe).

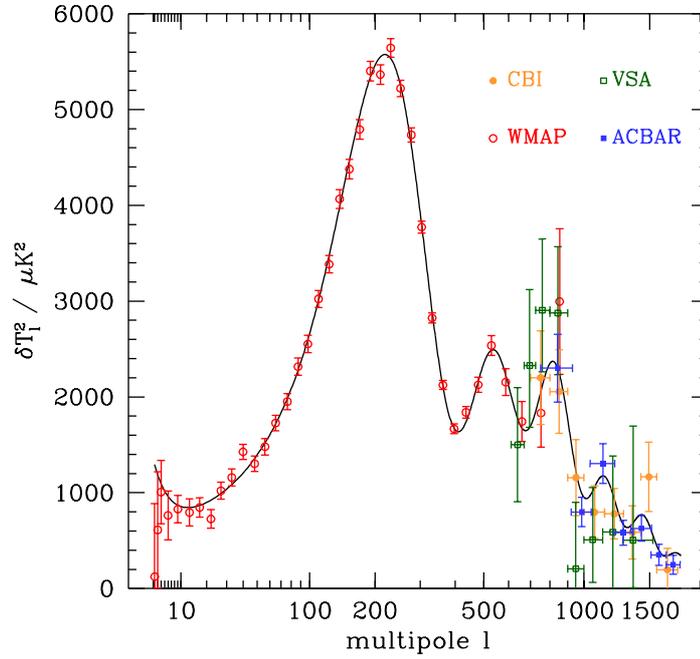


Figura 4.1: Compilación de mediciones del espectro de potencia de la temperatura del fondo de microondas realizadas mediante diversos experimentos (ver capítulo 6).

2. El scattering de Thomson induce un efecto de Doppler en el sistema general, representado por el término dependiente de  $\mathbf{v}_b$  en la ecuación (4.27).
3. El scattering de Thomson isotropiza la distribución en el sistema en reposo de los electrones, lo cual induce anisotropías en el sistema de la radiación, las cuales están dadas por el término dependiente de  $\Pi_\zeta^{ij}$  en la ecuación (4.27).

## 4.5. El espectro de potencia angular

Un mapa de las fluctuaciones en la temperatura del fondo de microondas permite numerosos análisis estadísticos, el más importante de los cuales es el espectro de potencia angular. Si las fluctuaciones en temperatura son gaussianas con fases aleatorias, el espectro de potencias angular brinda una descripción completa de las propiedades estadísticas del CMB. Hasta el momento, las observaciones han mostrado claramente que las fluctuaciones en el CMB no se desvían fuertemente de estas

hipótesis (Spergel et al. 2006). Entonces, el espectro de potencia observado provee el punto de contacto primario entre las observaciones y los parámetros cosmológicos.

Un mapa de las fluctuaciones en temperatura  $\Delta T(\mathbf{n})/T$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario, definido sobre todo el cielo puede ser descompuesto en armónicos esféricos de la forma

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \quad (4.30)$$

con

$$a_{\ell m} = \int d\Omega \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}). \quad (4.31)$$

Si las anisotropías en el CMB son Gaussianas y con fases aleatorias, entonces los  $a_{\ell m}$  tienen una distribución Gaussiana con  $\langle a_{\ell m} \rangle = 0$  y

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell}, \quad (4.32)$$

donde  $\delta$  es la función delta de Kronecker y  $C_{\ell}$  es el espectro de potencia.  $C_{\ell}$  es la varianza media por  $\ell$  que se encontraría sobre un hipotético ensemble de observadores distribuidos en el Universo. El espectro de potencia real calculado en base a nuestro cielo, por un supuesto observador típico es

$$C_{\ell}^{\text{cielo}} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} |a_{\ell m}|^2. \quad (4.33)$$

Si tenemos datos del CMB sin ruido, y sobre todo el cielo, entonces la ecuación (4.31) puede evaluarse exactamente y (4.33) es un estimador no-sesgado del espectro de potencia verdadero, en el sentido de que  $\langle C_{\ell}^{\text{cielo}} \rangle = C_{\ell}$  cuando promediamos sobre el ensemble. Como sólo medimos  $2\ell + 1$  modos por cada  $\ell$ , el estimador (4.33) tiene una incerteza intrínseca (o varianza cósmica) dada por

$$\sigma_{\ell} = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}} C_{\ell}. \quad (4.34)$$

Los datos reales en cambio, poseen ruido y otras fuentes de error, además los datos cercanos al plano galáctico deben excluirse del análisis por lo que no se cuenta con un mapa del cielo completo. Por estos motivos debe encontrarse otro método para determinar el espectro de potencia (ver por ejemplo, Hinshaw et al. 2003, Eriksen et al. 2004, Efstathiou 2004 y Polenta et al. 2005).

A modo de ejemplo, la figura 4.1 muestra una compilación de mediciones del espectro de potencia de la temperatura del fondo de microondas (ver capítulo 6), incluyendo los resultados del primer año de vuelo del satélite WMAP.

# Capítulo 5

## La evolución no lineal de las fluctuaciones

*El universo es cambio.*

Marco Aurelio

### 5.1. Introducción

Hasta el momento hemos analizado la evolución de las fluctuaciones en el campo de densidad en el régimen lineal, esto es, cuando  $\delta \ll 1$ . Sin embargo la mayoría de los fenómenos observables en el universo actual se generan en casos en los que  $\delta > 1$ . En este capítulo analizaremos la evolución no lineal de las fluctuaciones. Este problema ha sido atacado utilizando principalmente simulaciones numéricas de N-cuerpos del proceso de formación de estructura en gran escala. Estas simulaciones muestran como una distribución de materia inicialmente suave evoluciona en una compleja red de paredes, filamentos y nodos, denominados halos. Las simulaciones numéricas han sido utilizadas para obtener información detallada de la distribución de masa alrededor de dichos halos, esto es, su perfil de densidad (e.g. Navarro, Frenk & White 1996, Moore *et al.* 1999), así como de la abundancia espacial de dichos halos como función de su masa (Press & Schechter 1974, Sheth & Tormen 2001, Jenkins *et al.* 2001). Estos resultados muestran que la abundancia de halos, su distribución espacial y sus perfiles de densidad están fuertemente relacionados con el campo de densidad inicial.

Las simulaciones numéricas han sido utilizadas además para intentar describir el cambio producido en el espectro de potencia de las fluctuaciones en densidad debido a la evolución no-lineal de las estructuras. Este enfoque ha llevado a un gran progreso en este sentido (Hamilton *et al.* 1991 , Peacock & Dods 1994, Smith *et al.* 2001). En particular en la actualidad se cuenta con expresiones teóricas que han sido calibradas con simulaciones numéricas que permiten obtener el espectro de potencia en redshift 0, a partir de la evolución no lineal de las fluctuaciones en un dado modelo cosmológico. Sin embargo, a pesar de la gran utilidad de estas expresiones, este tipo de análisis solo brinda recetas para estimar la evolución no lineal, pero carece de una descripción o entendimiento de los diferentes procesos que participan en ella.

No es posible aplicar un esquema puramente analítico para el análisis de la evolución no-lineal del campo de densidad, sin embargo, existen numerosos enfoques que combinan resultados analíticos con resultados de simulaciones numéricas. Las predicciones de estos enfoques son muy valiosas ya que brindan información acerca de los procesos físicos mas importantes involucrados la evolución de las estructuras en las diversas escalas, desde el universo temprano hasta el presente.

Uno de estos esquemas es el denominado *modelo de halos* (HM). Este modelo tiene su origen en el trabajo de Neyman & Scott (1952), quienes intentaron describir la distribución espacial de las galaxias. Su enfoque se basaba en que la distribución de galaxias podía pensarse como la distribución de cúmulos de galaxias de diversos tamaños. Su descripción requería el conocimiento de la distribución de tamaños de los cúmulos, el patrón de aglomeramiento de los mismos, así como de la distribución de galaxias alrededor de sus centros. Desde este trabajo mucho se ha avanzado en el conocimiento de estos ingredientes. En las siguientes secciones repasaremos estos resultados, así como su implementación en el modelo de halos para brindar una descripción de la distribución no lineal en gran escala de la materia y las galaxias.

## 5.2. Propiedades de los halos de materia oscura

### 5.2.1. La función de masa

Una herramienta importante para caracterizar el campo de densidad es su fluctuación cuadrática media, suavizada en una escala comóvil  $R$ . Para el caso de una función ventana de tipo top-hat, esta escala esta relacionada a la masa  $M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R^3$ , donde  $\bar{\rho}$  es la densidad media del universo ( $\bar{\rho} = \rho_c \Omega_m$ ). Esta cantidad y el espectro

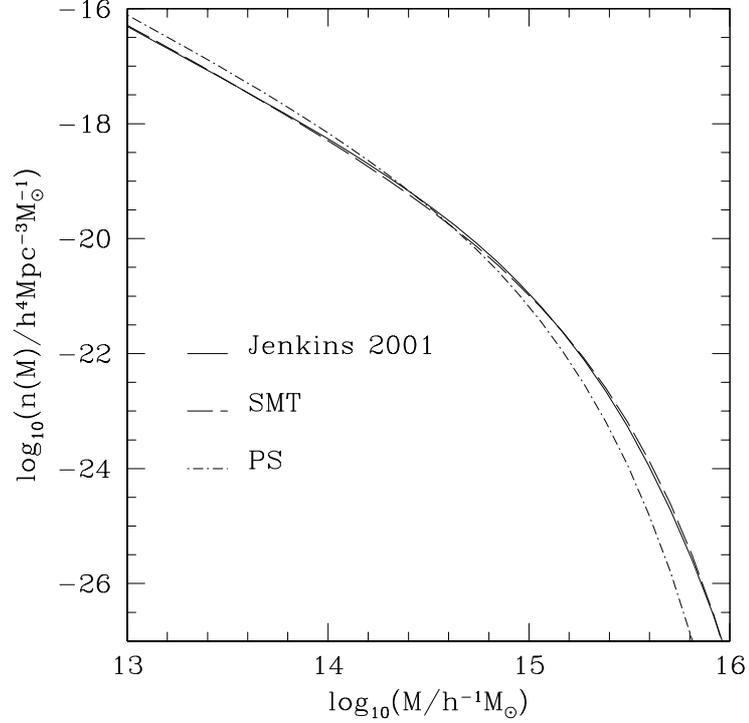


Figura 5.1: La función de masa predicha por diferentes formalismos para un modelo  $\tau$ CDM. La curva obtenida con el formalismo SMT da una mucho mejor descripción de los resultados de las simulaciones numéricas (mostrados por el ajuste general de J01) que la receta de PS.

de potencia  $P(k) = |\delta_k|^2$  están relacionados a través de

$$\sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2(k) W^2(kR) d \ln k, \quad (5.1)$$

donde  $\Delta^2(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P(k)$  es el espectro de potencia adimensional y  $W(kR)$  es la transformada de Fourier de la función ventana top-hat

$$W(kR) = \frac{3}{kR} j_1(kR) = 3 \frac{(\sin(kR) - kR \cos(kR))}{(kR)^3}, \quad (5.2)$$

donde  $j_1(x)$  es la función de Bessel esférica de orden 1.

Press & Schechter (1974) desarrollaron un simple formalismo para obtener una expresión analítica de la función diferencial de masa  $n(m, z)$  de los halos de materia oscura basado en el modelo de colapso esférico. En este modelo, la abundancia de

halos con masas  $M \rightarrow M + dM$  esta dada por:

$$n(M)dM = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \left| \frac{d \ln(\sigma(M))}{d \ln(M)} \right| \times \exp \left[ -\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2} \right] dM, \quad (5.3)$$

donde  $\delta_c$  es la cota de densidad correspondiente al colapso en el modelo de colapso esférico. Para un universo con  $\Omega_m = 1$   $\delta_c = 1,686$  y su valor depende débilmente de la cosmología (Eke *et al.*, 1996). Esta función se muestra en la figura 5.1 para un modelo  $\tau$ CDM.

La vaga justificación analítica en la derivación de la expresión (5.3) ha llevado a diversas críticas del formalismo de PS ( e.g. Peacock & Heavens, 1989), pero posteriormente una derivación más formal debida a Bond *et al.* (1991) basada en un tipo particular de función ventana y la teoría de conjuntos de excursión, encontró la misma expresión para la función de masa de acuerdo al modelo de colapso esférico, colocando al formalismo de PS en una base teórica mas firme. Además de los test originales de PS, la ecuación (5.3) ha sido chequeada contra los resultados de simulaciones numéricas. Los primeros análisis encontraron un buen acuerdo entre entre ellos (Efstathiou *et al.*, 1988, Colberg & Couchman, 1989) pero posteriormente se encontraron diferencias entre las predicciones de PS y los resultados de la abundancia de halos en simulaciones numéricas (Tormen 1998; Sheth & Tormen 1999, Governato *et al.* 1999, Jenkins *et al.* 2001, de ahora en adelante J01). La fórmula de PS subestima la abundancia de halos masivos y sobrestima el extremo de bajas masas de la función de masa. Una mejor descripción de los resultados de las simulaciones numéricas está dada por una modificación de la función de masa de PS propuesta originalmente por Sheth & Tormen (1999)

$$n(M)dM = \sqrt{\frac{2aA^2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma(M)}{\sqrt{a}\delta_c} \right)^{2p} \right] \times \left| \frac{d \ln(\sigma)}{d \ln(M)} \right| e^{-\left( \frac{a\delta_c^2}{2\sigma^2(M)} \right)} dM \quad (5.4)$$

donde  $A = 0,322$ ,  $a = 0,707$  y  $p = 0,3$ . Esta función también se muestra en la figura 5.1. Sheth, Mo & Tormen (2001) demostraron que esta corrección podía interpretarse como la incorporación del modelo de colapso elipsoidal en vez del modelo de colapso esférico en un formalismo similar al utilizado por Bond *et al.* (1991).

Es posible definir una función

$$f(\sigma, z) = \frac{M}{\bar{\rho}} \frac{dn_{cum}(M, z)}{d \ln \sigma^{-1}}, \quad (5.5)$$

donde  $n_{cum}(M, z)$  es la función de masa acumulativa. A partir de (5.3) y (5.4) es posible calcular  $f(\sigma, z)$  para los formalismos de PS y SMT

$$f(\sigma; PS) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.6)$$

$$f(\sigma; SMT) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{a\delta_c^2}\right)^p\right] \frac{\delta_c}{\sigma} \exp\left(-\frac{a\delta_c^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.7)$$

Es decir que los formalismos de PS y SMT predicen que la función  $f(\sigma, z)$  es independiente del redshift y del modelo cosmológico cuando es expresada en términos de  $\sigma$ .

A partir del análisis de un conjunto de simulaciones numéricas J01 encontraron que la función  $f(\sigma)$  pueden ser descritas con una precisión mayor al 20% para diferentes redshifts y condiciones iniciales por el ajuste general

$$f(\sigma) = A \exp\left(-|\ln \sigma^{-1} + B|^\varepsilon\right), \quad (5.8)$$

donde  $A = 0,315$ ,  $B = 0,61$  y  $\varepsilon = 3,8$ , para halos identificados con el algoritmo Friends of Friends (FOF) utilizando la misma longitud de linqueo  $b = 0,2$  para cualquier valor de  $\Omega$ .

La expresión de  $n(M)$  inferida a a partir de (5.5) y (5.8) es

$$n(M, z)dM = \frac{A\bar{\rho}(z)}{M^2} \frac{d \ln(\sigma^{-1})}{d \ln(M)} e^{-\left(|\ln(\sigma^{-1}+B)|^\varepsilon\right)} dM \quad (5.9)$$

Esta función de masa diferencial también se muestra en la figura 5.1, donde puede verse que el formalismo de SMT muestra un muy buen acuerdo con el ajuste general de J01 (es decir, con los resultados de las simulaciones numéricas) que el formalismo de PS.

### 5.2.2. El sesgo en la distribución de halos

Las simulaciones numéricas muestran que en escalas grandes las fluctuaciones en las distribuciones de halos y de materias están relacionadas por una simple relación lineal

$$\delta(k)_h = b \delta(k) \quad (5.10)$$

Sin embargo esta fórmula lineal sólo es precisa en escalas grandes. En un planteo más general puede pensarse que la distribución de halos será alguna función de la densidad de materia  $\delta$ , la cual puede ser desarrollada en serie de potencia

$$\delta(k)_h = \sum_i b_i \delta(k)^i \quad (5.11)$$

A partir de las expresiones para la función de masa en los formalismos de PS y SMT es posible obtener los coeficientes de sesgo o *bias*  $b_i$ . Los primeros coeficientes están dados por:

$$b1(m, z1) = 1 + \epsilon_1 + E_1, \quad (5.12)$$

$$b2(m, z1) = 2(1 + a_2)(\epsilon_1 + E_1) + \epsilon_2 + E_2, \quad (5.13)$$

$$b3(m, z1) = 6(a_2 + a_3)(\epsilon_1 + E_1) + 3(1 + 2a_2)(\epsilon_2 + E_2) + \epsilon_3 + E_3. \quad (5.14)$$

Aquí

$$\epsilon_1 = \frac{q\nu - 1}{d_{sc}(z1)}, \quad (5.15)$$

$$\epsilon_2 = \frac{q\nu}{d_{sc}(z1)} \left( \frac{q\nu - 3}{d_{sc}(z1)} \right), \quad (5.16)$$

$$\epsilon_3 = \frac{q\nu}{d_{sc}(z1)} \left( \frac{q\nu - 3}{d_{sc}(z1)} \right)^2, \quad (5.17)$$

y,

$$E_1 = \frac{2p/d_{sc}(z1)}{1 + (q\nu)^p}, \quad (5.18)$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + 2p}{d_{sc}(z1)} + 2\epsilon_1, \quad (5.19)$$

$$\frac{E_3}{E_1} = \frac{4(p^2 - 1) + 6pq\nu}{d_{sc}^2(z1)} + e\epsilon_1. \quad (5.20)$$

Si  $p = 0$  todos los  $\epsilon$  se anulan y se obtiene la expresión para estos coeficientes correspondiente al modelo de colapso esférico (Mo, Jing & White 1997). Por construcción los parámetros de bias satisfacen las relaciones de consistencia:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \int dm n(m, z) b_k(m, z) = \delta_{k,0} \quad (5.21)$$

donde  $\delta_{k,0}$  es la delta de Kronecker.

De acuerdo a los coeficientes (5.14) los halos más masivos tienen un mayor sesgo respecto de la distribución de materia, y este sesgo era mayor a alto redshift.

### 5.2.3. Perfiles de densidad

Las simulaciones numéricas han sido utilizadas extensivamente para analizar el perfil de densidad de los halos de materia oscura. Estos perfiles han sido ajustados con funciones de la forma general

$$\rho(r|m) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\alpha (1 + r/r_s)^\beta} \quad (5.22)$$

o

$$\rho(r|m) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\alpha [1 + (r/r_s)^\beta]} \quad (5.23)$$

Fijando  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$  en (5.22) se obtiene el perfil de Navarro, Frenk and White (1996, NFW) y fijando  $(\alpha, \beta) = (3/2, 3/2)$  en (5.23) se obtiene el perfil de Moore *et al.* (1999, M99). Estos ajustes brindan una muy buena descripción de los perfiles de densidad de los halos virializados en simulaciones numéricas. Las dos funciones difieren en pequeñas escalas,  $r \ll r_s$ , y aún es motivo de intenso debate cual de los dos perfiles brinda una mejor descripción de las simulaciones. Estos perfiles están parametrizados en términos de  $r_s$  y  $\rho_s$  los cuales definen un radio de escala y la densidad a ese radio respectivamente. De acuerdo a esto, un objeto de radio  $r_{vir}$  posee una masa  $m$  dada por

$$m = \int_0^{r_{vir}} 4\pi r^2 \rho(r|m) dr, \quad (5.24)$$

lo que implica

$$m = 4\pi \rho_s r_s^3 \left[ \ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right], \quad (5.25)$$

para el perfil NFW, y

$$m = 4\pi \rho_s r_s^3 \frac{2 \ln(1+c^{3/2})}{3}, \quad (5.26)$$

para el perfil M99, donde  $c = r_{vir}/r_s$  es el parámetro de concentración del halo. En realidad, la integral (5.24) diverge y es necesario truncar el perfil en el radio  $r_{vir}$ .

Las simulaciones indican que el parámetro de concentración  $c$  posee una distribución log-normal de la forma

$$p(c|m, z)dc = \frac{d \ln c}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp \left[ -\frac{\ln^2 [c/\bar{c}(m, z)]}{2\sigma_{\ln c}^2} \right]. \quad (5.27)$$

El ancho de esta distribución  $\sigma_{\ln c}$  no depende de  $m$ , pero si lo hace el valor medio  $\bar{c}$ . Esta dependencia puede ser descripta por una ley de potencia de la forma

$$\bar{c}(m, z) = \frac{9}{1+z} \left[ \frac{m}{m_*(z)} \right]^{0.13}, \quad (5.28)$$

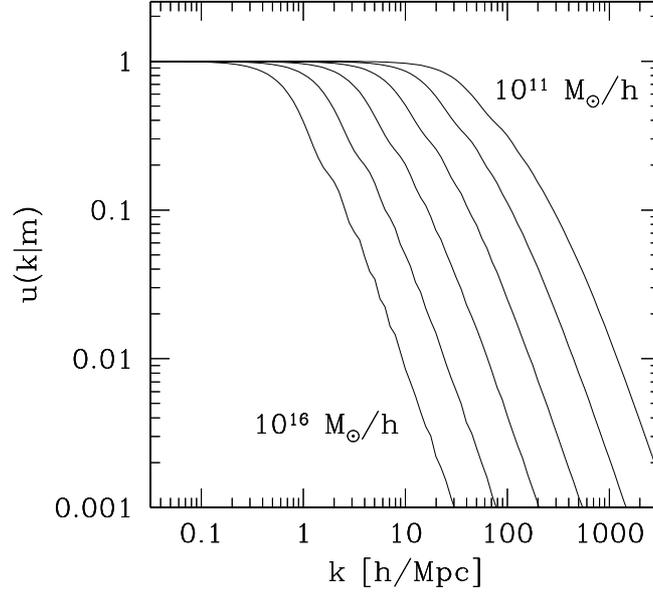


Figura 5.2:  $u(k|m)$  como función de  $k$  para distintos valores de  $m$  para el perfil NFW

con  $\sigma_{\ln c} \sim 0,25$ , donde  $m_*(z)$  es la masa para la cual  $\sigma(m, z) = \delta_c$  (Huffenberger & Seljak 2003). De acuerdo a Peacock & Smith (2000) para el perfil de M99 se obtiene

$$\bar{c}_{M99} \sim \left( \frac{\bar{c}_{NFW}}{1,7} \right)^{0,9}. \quad (5.29)$$

De acuerdo a estas relaciones, los halos menos masivos son, en promedio, más concentrados que los más masivos. Como veremos más adelante, es importante contar con una expresión para la transformada de Fourier de la distribución de materia alrededor de los halos. Para ello, primero definimos el perfil de densidad normalizado  $u(r|m) = \rho(r|m)/m$ . Su transformada de Fourier será

$$u(k|m) = \int_0^{r_{vir}} dr 4\pi r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} u(r|m) \quad (5.30)$$

Para el perfil NFW  $u(k|m)$  esta dado por

$$u(k|m) = \frac{4\pi\rho_s r_s^3}{m} \left[ \sin(kr_s) [\text{Si}([1+c]kr_s) - \text{Si}(kr_s)] - \frac{\sin(ckr_s)}{(1+c)kr_s} + \cos(kr_s) [\text{Ci}([1+c]kr_s) - \text{Ci}(kr_s)] \right], \quad (5.31)$$

donde las funciones integrales del seno y el coseno están definidas por

$$\text{Ci}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt, \quad (5.32)$$

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (5.33)$$

La Figura 5.2 muestra  $u(k|m)$  como función de  $k$  para distintos valores de  $m$  para el perfil NFW.

Estos perfiles permiten modelar la distribución de materia alrededor de un halo como función de su masa, ya que, aunque el perfil de densidad depende de  $c$ , el valor de este parámetro también es especificado por la masa a través de (5.28).

### 5.3. El modelo de halos en el espacio real

En esta sección y la siguiente describiremos el modelo de halos, que nos permitirá describir las correlaciones de n-puntos de la estructura en gran escala, tanto de la materia oscura, como de las galaxias. La hipótesis fundamental del enfoque es asumir que todo el contenido de materia del Universo se encuentra particionado en halos. Si estos halos pueden ser identificados es de esperar que sus tamaños sean menores que las distancias que los separan. Esto implica que las propiedades estadísticas de la distribución de materia en pequeña escala estarán determinadas por la distribución espacial de materia dentro de los halos (su perfil de densidad), mientras que la forma en la que los halos están distribuidos no es de importancia. Para escalas grandes en cambio la situación es la inversa. Las propiedades del campo de densidad global serán independientes de la estructura interna de los halos y estarán gobernadas por las propiedades de su distribución espacial. La idea de que la distribución global de masa puede estudiarse en dos pasos, la distribución de masa dentro de los halos, y la distribución espacial de los halos mismos es la clave del modelo de halos.

En las secciones anteriores hemos estudiado los conocimientos acerca de la abundancia, la distribución espacial y los perfiles de densidad de las unidades básicas de

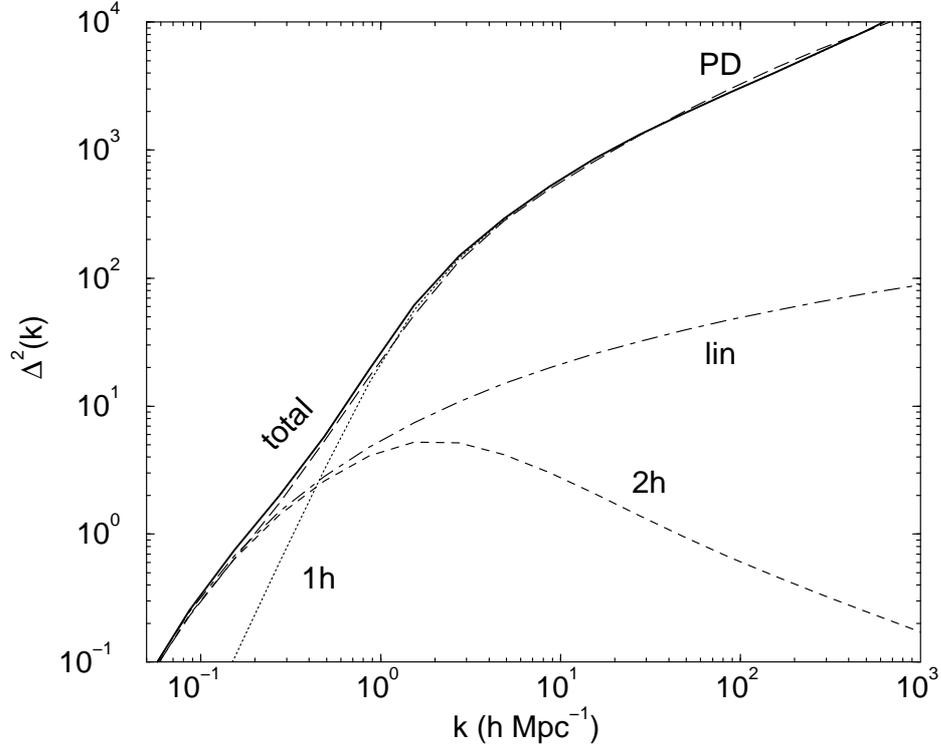


Figura 5.3: Espectro de potencia de la distribución de materia oscura. La curva rotulada ‘PD’ muestra el resultado del ajuste de Peacock & Dodds (1994). La curva rotulada como ‘lin’ muestra el espectro de potencia lineal  $P_{lin}(k)$ . Las líneas a puntos y trazos muestran los dos términos que se suman para dar el espectro de potencia total (línea sólida) en el modelo de halos.

este modelo. A continuación combinaremos estos ingredientes para formar el modelo de halos de la estructura en gran escala del Universo.

La hipótesis de que toda la masa está contenida en halos implica que la densidad en un punto dado del espacio está dada por la suma de las contribuciones de los perfiles de densidad de los distintos halos

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) \equiv \sum_i m_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) \quad (5.34)$$

$$= \sum_i \int dm d^3x' \delta(m - m_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) m u(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.35)$$

donde  $\mathbf{x}_i$  y  $m_i$  indican la posición y la masa del  $i$ -ésimo halo respectivamente y hemos asumido que el perfil de densidad de los halos está determinado exclusivamente por su masa.

La densidad numérica de halos de masa  $m$  está dada por

$$n(m) = \left\langle \sum_i \delta(m - m_i) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right\rangle, \quad (5.36)$$

donde  $\langle \dots \rangle$  denota promedio sobre un *ensemble* de universos.

La densidad media puede obtenerse a través de

$$\bar{\rho} = \left\langle \sum_i m_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) \right\rangle \quad (5.37)$$

$$= \int dm n(m) m \int d^3 x' u(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | m) \quad (5.38)$$

$$= \int dm n(m) m, \quad (5.39)$$

donde el promedio sobre el ensemble ha sido reemplazado por un promedio sobre la función de masa  $n(m)$  y sobre el espacio.

La función de correlación estará dada por

$$\xi(\mathbf{r}) = \left\langle \left( \frac{\rho(\mathbf{x})}{\bar{\rho}} - 1 \right) \left( \frac{\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\bar{\rho}} - 1 \right) \right\rangle \quad (5.40)$$

$$= -1 + \left\langle \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\bar{\rho}} \right\rangle. \quad (5.41)$$

Utilizando (5.35) se puede expresar a la función de correlación como la suma de dos términos

$$\xi(r) = \xi^{1h}(r) + \xi^{2h}(r), \quad (5.42)$$

donde

$$\xi^{1h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int dm \frac{m^2 n(m)}{\bar{\rho}^2} \int d^3 y u(\mathbf{y} | m) u(\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}' | m) \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \xi^{2h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int dm_1 \frac{m_1 n(m_1)}{\bar{\rho}} \int dm_2 \frac{m_2 n(m_2)}{\bar{\rho}} \int d^3 x_1 u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 | m_1) \\ &\quad \times \int d^3 x_2 u(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2 | m_2) \xi_{hh}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 | m_1, m_2). \end{aligned} \quad (5.44)$$

El primer término describe las contribuciones a la densidad provenientes del mismo halo y el segundo término representa el caso en el que las dos contribuciones provienen de distintos halos.

Debe notarse que el término  $1h$  es simplemente la convolución del perfil de densidad  $u(k|m)$  con si mismo, pesado por la densidad numérica de halos de masa  $m$ .

Para comprender más fácilmente el significado del segundo término pensemos que los perfiles  $u_1$  y  $u_2$  son muy angostos, por lo que se los puede reemplazar por funciones delta de Dirac y la integración sobre  $x_1$  and  $x_2$  dará como resultado  $\xi(r|m_1, m_2)$ . En escalas grandes, donde el bias es determinista, es de esperar que

$$\xi_{hh}(r|m_1, m_2) \simeq b(m_1)b(m_2)\xi(r). \quad (5.45)$$

De esta manera  $\xi(r)$  puede sacarse fuera de las integrales sobre  $m_1$  y  $m_2$ , separando las dos integrales. Las relaciones de consistencia (5.21) garantizan que estas integrales son iguales a la unidad, lo cual implica que en escalas mucho más grandes que los halos  $\xi^{2h}(r) \simeq \xi(x)$ . Si además hacemos la aproximación de que en escalas grandes  $\xi(r) \simeq \xi^{lin}(x)$ , se obtiene que en escalas grandes el término de dos halos es muy sencillo,  $\xi^{2h}(r) \simeq \xi^{lin}(x)$ .

## 5.4. El modelo de halos en el espacio de Fourier

Debido a que las expresiones (5.45) involucran convoluciones de los perfiles de densidad en espacio real, es más conveniente trabajar en el espacio de Fourier, donde éstas se convierten en productos de las transformadas de Fourier  $u(k|m)$ . Siguiendo un razonamiento análogo al de la sección anterior para la función de correlación en el halo model se encuentra que

$$P(k) = P^{1h}(k) + P^{2h}(k), \quad (5.46)$$

$$P^{1h}(k) = \int dm n(m) \left(\frac{m}{\bar{\rho}}\right)^2 |u(k|m)|^2 \quad (5.47)$$

$$P^{2h}(k) = \int dm_1 n(m_1) \left(\frac{m_1}{\bar{\rho}}\right) u(k|m_1) \times \int dm_2 n(m_2) \left(\frac{m_2}{\bar{\rho}}\right) u(k|m_2) P_{hh}(k, m_1, m_2), \quad (5.48)$$

donde  $P_{hh}(k, m_1, m_2)$  es el espectro de potencia de los halos de masas  $m_1$  y  $m_2$ . Siguiendo el análisis de la sección anterior podemos plantear que

$$P_{hh}(k, m_1, m_2) \simeq b(m_1)b(m_2)P^{lin}(k). \quad (5.49)$$

La Figura 5.3 muestra el espectro de potencia de la distribución de materia el redshift  $z = 0$ . Las líneas de puntos y a trazos representan los términos de un halo y dos halos. Su suma (la línea sólida) puede compararse con las simulaciones numéricas,

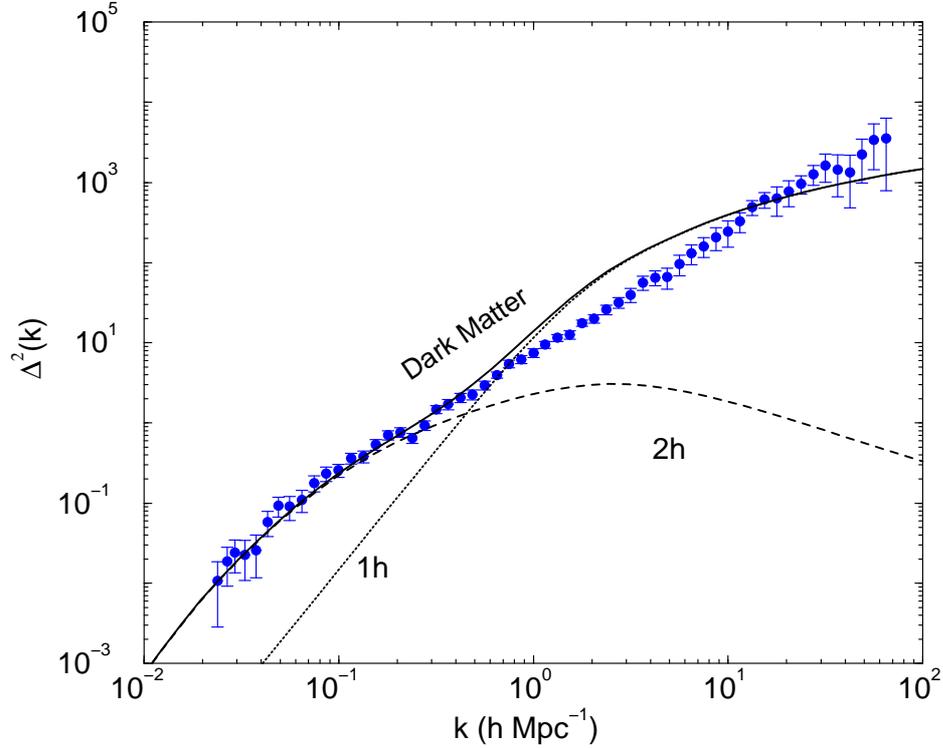


Figura 5.4: El espectro de potencias de las galaxias determinado a partir del catálogo PSCz comparado con el espectro de potencia de la materia oscura en un modelo  $\Lambda$ CDM (línea sólida). La amplitud del espectro de la materia oscura ha sido ajustada para igualar los datos en escalas grandes. Las diferencias en las escalas no-lineales sugieren que el sesgo entre las distribuciones de galaxias materia debe ser dependiente de la escala.

representada por el ajuste de Peacock & Dodds (1994). En general la parte lineal del espectro (para  $k < 0,1 h \text{ Mpc}^{-1}$ ) es el resultado de las correlaciones entre los distintos halos y refleja la dependencia del bias con la masa. Para  $k \sim (0,1 - 1) h \text{ Mpc}^{-1}$ , los términos de uno y dos halos son comparables; en estas escalas la potencia proviene principalmente de halos más masivos que  $M_*$ . Para mayores valores de  $k$ , la potencia proviene principalmente de halos individuales con masas menores a  $M_*$ .

De esta forma puede verse como el modelo de halos puede ser utilizado como una herramienta para entender la evolución no-lineal de las fluctuaciones en densidad. Este enfoque permite describir los resultados encontrados en base a simulaciones numéricas, brindando además un claro entendimiento de los procesos físicos involucrados en moldear la forma del espectro de potencias no-lineal y su dependencia de los parámetros que caracterizan la distribución inicial de masa.

En las secciones anteriores hemos descrito el modelo de halos para la distribución

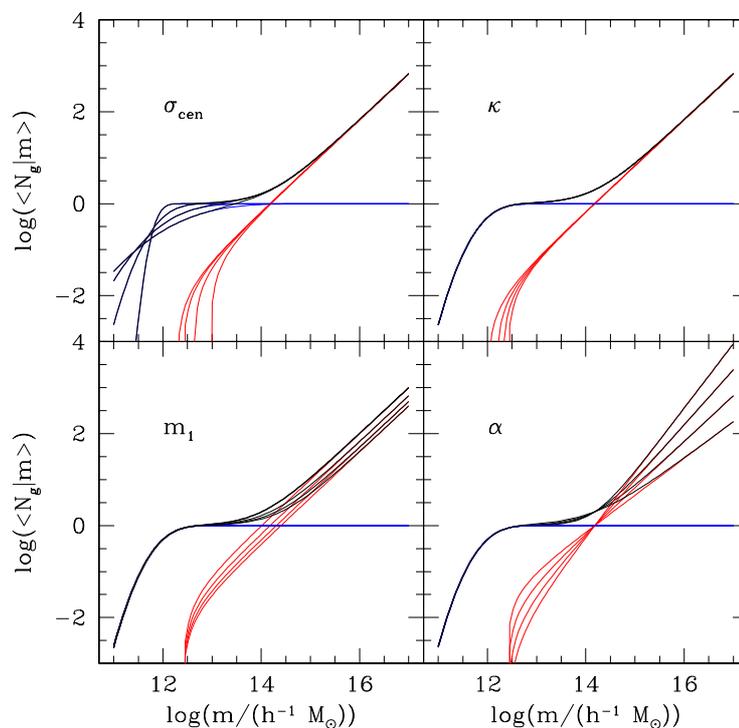


Figura 5.5: Variación en  $\langle N_g | m \rangle$  debido a variaciones en sus diferentes parámetros para una densidad de galaxias fija  $\bar{n}_g$ .

de materia. Lamentablemente esta distribución no es directamente observable. En su lugar observamos la distribución de galaxias, que puede no corresponder con la distribución de materia subyacente.

El análisis del espectro de potencia y la función de correlación de muestras de galaxias indican que estos se comportan como leyes de potencia sobre un amplio rango de escalas. Sin embargo, como hemos visto en la sección anterior, la distribución de materia en los modelos favorecidos en la actualidad por una gran variedad de observaciones no poseen este tipo de comportamientos indicando que el sesgo (o *bias*) de la distribución de galaxias respecto de la materia depende de la escala.

## 5.5. El modelo de halos y la distribución de galaxias

Es posible extender el modelo de halos para describir el patrón de estructura en la distribución de galaxias. De esta manera puede ser utilizado como una valiosa herramienta para comprender esta diferencia. Siguiendo los pasos del desarrollo del modelo de halos para la materia, el primer ingrediente necesario para obtener una descripción equivalente de la distribución de galaxias es conocer la distribución de probabilidad  $P(N_g|m)$  de que un halo de masa  $m$  contenga  $N_g$  galaxias. Esta función se conoce como Distribución de Ocupación de Halos (HOD, por sus siglas en inglés). Mediante el conocimiento de los primeros momentos de esta distribución puede obtenerse una expresión equivalente a (5.48), dada por

$$P_g(k) = P_g^{1h}(k) + P_g^{2h}(k), \quad \text{donde} \quad (5.50)$$

$$P_g^{1h}(k) = \int dm n(m) \frac{\langle N_g(N_g - 1)|m \rangle}{\bar{n}_g^2} |u_g(k|m)|^p, \quad (5.51)$$

$$P_g^{2h}(k) = P^{lin}(k) \left[ \int dm n(m) b_1(m) \frac{\langle N_g|m \rangle}{\bar{n}_g} u_g(k|m) \right]^2, \quad (5.52)$$

donde,

$$\bar{n}_g = \int dm n(m) \langle N_g|m \rangle, \quad (5.53)$$

es la densidad media de galaxias, y  $u_g(k|m)$  es la transformada de Fourier normalizada del perfil de densidad de las galaxias dentro de un halo de masa  $m$ , el cual asumiremos el mismo que el de la masa  $u(k|m)$ .

El ingrediente más importante del modelo de halos para las galaxias es la HOD, que da la probabilidad  $P(N_g|m)$  de que un halo de masa  $m$  contenga  $N_g$  galaxias, describiendo de esta manera la relación entre las galaxias y la materia oscura al nivel de halos individuales. Para el espectro de potencia de las galaxias se necesita la información de los primeros dos momentos de esta distribución  $\langle N_g|m \rangle$  y  $\langle N_g(N_g - 1)|m \rangle$ . La HOD puede ser parametrizada en forma separada para las galaxias centrales y las satélites (Zheng et al., 2005). De acuerdo a esta descripción, el número medio de galaxias puede expresarse como

$$\langle N_{cen}|m \rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\log(m/m_{min})}{\sigma_{cen}} \right) \right], \quad (5.54)$$

donde  $m_{min}$  es la masa mínima característica de los halos que pueden contener una galaxia y  $\sigma_{cen}$  es el ancho de transición característico, mientras que para las galaxias

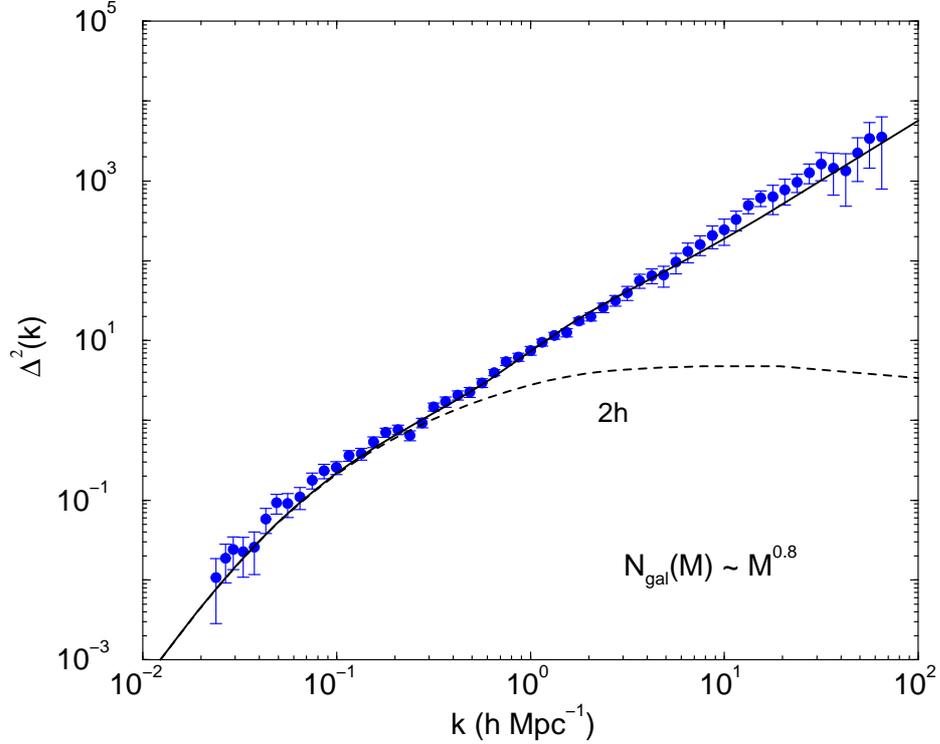


Figura 5.6: El espectro de potencias del catálogo PSCz (puntos) comparado con el resultado de ajustar los primeros dos momentos de la distribución de ocupación de halos  $P(N_{gal}|m)$  para reproducir el comportamiento de ley de potencia de los datos observacionales (línea sólida).

satélites éste puede ser descrito por una ley de potencia truncada de la forma

$$\langle N_{sat}|m \rangle = \left[ \left( \frac{m - \kappa m_{min}}{m_1} \right) \right]^\alpha, \quad (5.55)$$

donde  $\kappa$  es el factor de proporcionalidad entre la masa de truncado de los satélites y  $m_{min}$ . Asumiendo una distribución de Poisson para  $N_{sat}$  esto implica que

$$\langle N_g(N_g - 1)|m \rangle = 2 \langle N_{sat}|m \rangle + \langle N_{sat}|m \rangle^2. \quad (5.56)$$

Estos parámetros no son independientes entre si, ya que deben reproducir el valor de la densidad de galaxias  $\bar{n}_g$  que esta dada por la ecuación (5.53). Un procedimiento a seguir al estudiar estos parámetros es variar sólo cuatro de ellos, por ejemplo  $m_1$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma_{cen}$  y  $\alpha$ , y fijar el valor de  $m_{min}$  de forma de reproducir la densidad de galaxias de luminosidad  $L_*$  de cada muestra, ya que son éstas las que se espera dominen las

estadísticas de muestras limitadas por flujo. La figura 5.5 muestra el efecto de las variaciones de éstos parámetros en  $\langle N_g | m \rangle$ .

La Figura 5.4 muestra las diferencias entre el espectro de potencia de la masa en el modelo  $\Lambda$ CDM con el espectro de potencia de las galaxias determinado a partir del catálogo PSCz. Las diferencias claramente sugieren que el sesgo entre masa y galaxias debe ser una función de la escala. La Figura 5.6 es un claro ejemplo del poder del modelo de halos para describir las diferencias entre la distribución de galaxias y materia. En ella puede verse el espectro de potencia de las galaxias obtenido mediante la ecuación (5.50) con los parámetros de la HOD ajustados para describir el espectro de potencia del catálogo PSCz. Este simple formalismo puede dar cuenta del comportamiento de ley de potencia observado en el espectro de potencia y la función de correlación de las galaxias.

**Parte II**

**Cosmología de precisión**

# Capítulo 6

## Cosmología de precisión

*Él había traído un mapa grande que representaba el mar, sin el menor vestigio de tierra: y la tripulación estuvo muy complacida al encontrar un mapa que podían comprender.*

Lewis Carroll

### 6.1. Introducción

Desde la última década del siglo XX y el comienzo del siglo XXI hemos sido testigos de una mejora dramática en la resolución y precisión de las mediciones de las fluctuaciones de temperatura en la radiación del fondo de microondas (o CMB por sus siglas en inglés). El descubrimiento de la estructura presente en el espectro de potencia de las fluctuaciones en temperatura del CMB, conocidos como picos acústicos, marcó el comienzo de una nueva era rica en observaciones en la cosmología (de Bernardis et al. 2000; Hanany et al. 2000). Las posiciones y alturas relativas de los picos acústicos contienen información acerca del valor de los parámetros cosmológicos fundamentales, tales como la curvatura del Universo o la densidad física de materia oscura fría o bariones. Quizás el ejemplo más impactante del progreso logrado en este campo sean las observaciones del satélite WMAP (Bennett et al. 2003; Hinshaw et al. 2003, Hinshaw et al. 2006).

Sin embargo, la información proveniente del CMB no puede restringir los valores de todos los parámetros fundamentales con alta precisión. Existen degeneraciones entre combinaciones de ciertos parámetros que llevan a espectros de fluctuaciones

en temperatura indistinguibles (Efstathiou & Bond 1999). Algunas de estas degeneraciones pueden romperse comparando modelos teóricos con una combinación de información del CMB y de otros conjuntos de datos, tales como el espectro de potencia de la distribución de galaxias. En el mismo momento en que las nuevas mediciones del CMB fueron obtenidas, se llevaron a cabo dos nuevos catálogos de galaxias. El *two-degree field galaxy redshift survey* (2dFGRS; Colless et al. 2001; 2003) y el *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS; York et al. 2000; Abazajian et al. 2005) son substancialmente mayores que sus predecesores y permiten una caracterización precisa de la distribución de galaxias en un amplio rango de escalas. En escalas grandes, la conexión con modelos teóricos es muy directa.

Percival et al. (2001) utilizaron el espectro de potencia de la distribución de galaxias determinado a partir de una versión preliminar del 2dFGRS para restringir la razón entre la densidad de bariones y materia,  $\Omega_b/\Omega_m$ , y la densidad de materia,  $\Omega_m h$ . Efstathiou et al. (2002) utilizaron una recopilación de datos previos al WMAP y la medición del espectro de potencia realizada por Percival et al. para encontrar evidencia concluyente de una constante cosmológica distinta de cero, independiente del diagrama de Hubble de supernovas tipo 1a distantes. Percival et al. (2002) utilizaron nuevamente datos previos al WMAP y la medición del espectro de potencia de la versión preliminar del 2dFGRS para imponer restricciones en parámetros cosmológicos en modelos planos. Spergel et al. (2003) utilizaron también el espectro de potencia de galaxias determinado por Percival et al. para estimar los valores de los parámetros cosmológicos. Otros trabajos también han analizado la información codificada en el espectro de potencia del 2dFGRS y el SDSS (Tegmark, Zaldarriaga & Hamilton 2001; Pope et al. 2004; Tegmark et al. 2004b; Seljak et al. 2005). Recientemente, Cole et al. (2005) determinaron el espectro de potencia del conjunto final de datos del 2dFGRS. Los resultados de Cole et al. tienen casi el doble de precisión que aquellos obtenidos por Percival et al. en el 2001. En éste y los siguientes capítulos detallamos los resultados de un análisis conjunto de esta información y de datos provenientes del CMB para obtener nuevas restricciones en los valores de los parámetros cosmológicos.

En vista de los rápidos avances en nuestro conocimiento de los parámetros cosmológicos, también es importante conocer exactamente cuáles son las partes del modelo que están siendo testeadas realmente. Muy a menudo, se han aplicado hipótesis muy restrictivas para la cosmología de fondo cuando se realizan afirmaciones sobre las restricciones en un parámetro en particular. Es importante establecer que tan robustas son las restricciones cuando los datos son comparados con modelos cosmológicos más generales.

Por lo tanto nuestra meta en éste y los siguientes capítulos es establecer firme-

mente el nivel de precisión con que los últimos datos del CMB y de la estructura en gran escala (LSS) determinan un conjunto amplio de parámetros cosmológicos, prestando especial atención a cómo la elección de las hipótesis y la combinación de diferentes parámetros pueden influenciar los resultados.

## 6.2. El método

A continuación describimos el método que utilizamos para restringir los valores de los parámetros cosmológicos básicos. En la sección 6.2.1 se listan los conjuntos de datos del CMB y LSS que comparamos con los modelos teóricos y explicamos como estos datos son modelados. Los conjuntos de parámetros que consideraremos están definidos en la sección 6.2.2. La metodología para explorar el espacio de parámetros e imponer restricciones en los conjuntos de parámetros está descrita en la sección 6.2.3.

### 6.2.1. Los datos

Con el fin de restringir los parámetros en nuestro modelo cosmológico, utilizamos una compilación de mediciones recientes del CMB y el espectro de potencia de galaxias en el Universo local:

- (i) El espectro de potencia de las fluctuaciones de temperatura para armónicos esféricos  $2 \leq \ell \leq 900$  del primer año de vuelo del satélite WMAP (Hinshaw et al. 2003). Cabe aclarar que los datos del tercer año de vuelo (Hinshaw et al. 2006) no estaban disponibles al momento de realizar este trabajo.
- (ii) El espectro de potencia de las fluctuaciones de temperatura en el rango de armónicos esféricos  $900 < \ell < 1800$  realizado hasta julio del 2002 por el *Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver* (ACBAR; Kuo et al. 2004).
- (iii) El espectro de temperaturas para  $600 < \ell < 1500$  medido por el *Very Small Array* (VSA; Dickinson et al. 2004).
- (iv) La información para  $600 < \ell < 1600$  del espectro de potencia de temperatura determinado a partir de dos años de información del *Cosmic Background Imager* (CBI; Readhead et al. 2004).
- (v) El espectro de potencia de la correlación entre las fluctuaciones en la temperatura y la polarización del CMB entre los armónicos  $2 \leq \ell \leq 450$  determinado por el primer año de vuelo del satélite WMAP (Kogut et al. 2003).

- (vi) El espectro de potencia de la estructura en gran escala trazada por las galaxias de la versión final del 2dFGRS (Cole et al. 2005).

Las cuatro mediciones (i-iv) del espectro de potencia de las fluctuaciones en la temperatura en el CMB se extienden en el rango de armónicos esféricos  $2 < \ell < 1800$ . Algunos de los conjuntos de datos disponibles se extienden hasta multipolos mayores. Sin embargo, no incluimos estas escalas en nuestro análisis, ya que en éstas las fluctuaciones de temperatura pueden estar afectadas fuertemente por fuentes secundarias. Spergel et al. (2003) adoptaron un enfoque similar, ampliando la información del CMB combinando los datos del primer año de vuelo de WMAP con otros experimentos con mejor resolución angular. Sin embargo, los datos de VSA no estaban disponibles para Spergel et al. en el momento en que el trabajo fue realizado. Los espectros teóricos de temperatura-temperatura y temperatura-polarización son calculados para cada modelo utilizando CAMB (Lewis, Challinor & Lasenby 2000).

Cole et al. (2005) midieron el espectro de potencia de la distribución de galaxias a partir de la versión final del catálogo 2dFGRS. El espectro de potencia de las galaxias difiere del espectro de potencia de la masa predicho por la teoría lineal en varias formas:

- (i) La evolución no lineal de las perturbaciones en densidad conduce a un acoplamiento entre los modos de Fourier, cambiando la forma del espectro de potencia. (ii) Cuando el redshift es utilizado para inferir la distancia a cada galaxia, el espectro de potencia resultante es distorsionado por los movimientos peculiares inducidos gravitacionalmente de las galaxias. (iii) El espectro de potencia de la distribución de galaxias podría ser una versión modificada del espectro de potencia de la distribución de masa. El factor de *bias* (o sesgo) se define como la raíz de la razón entre el espectro de potencia de las galaxias y el de la materia, y puede ser una función de la escala. (Sin embargo, asumimos un bias constante en todas las escalas consideradas en este trabajo). (iv) El espectro de potencia medido por Cole et al. a partir del 2dFGRS es la transformada directa de los datos del catálogo, y por lo tanto es lo que los investigadores del CMB llamarían un pseudo-espectro. Como tal, representa la convolución del verdadero espectro de potencia de las galaxias, con el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de la función ventana del catálogo.

A fin de restringir los parámetros cosmológicos, estos efectos necesitan ser modelados. Para modelar los datos con la precisión necesaria restringimos el rango de escalas en el cual llevamos a cabo la comparación entre teoría y observaciones. Utilizamos los datos del espectro de potencia para  $k < 0,15 h\text{Mpc}^{-1}$  y descartamos mediciones con  $k < 0,02 h\text{Mpc}^{-1}$  las cuales pueden estar afectadas por incertezas en la densidad

media de galaxias dentro del catálogo. En estas escalas, seguimos el esquema utilizado por Cole et al. quienes aplicaron una corrección por no linealidad, bias dependiente de la escala, y distorsiones en el espacio de redshift a la forma de  $P(k)$  dada por

$$P_{\text{gal}}(k) = b^2 \frac{1 + Qk^2}{1 + Ak} P_{\text{lin}}(k), \quad (6.1)$$

donde  $A = 1,4$  y  $Q = 4,6$  y  $b$  es un factor bias constante. Esta fórmula es deducida por comparación con modelos numéricos detallados de formación de galaxias: éstos muestran que el valor de  $A$  es robusto, pero el valor exacto de  $Q$  depende del tipo de galaxia y también de la forma precisa en la que el modelado se lleva a cabo. Estos resultados fueron utilizados para determinar el rango de valores permitidos de  $Q$ , de los cuales se determinó  $Q = 4,6$  como mejor valor. Con esta elección, pueden obtenerse restricciones robustas en los parámetros cosmológicos si uno considera valores de  $k$  máximo más allá de nuestro límite de  $0,15 h \text{ Mpc}^{-1}$ . Para este límite, despreciando enteramente la corrección y simplemente ajustando teoría lineal se llega a resultados casi iguales que los presentados en este trabajo. En particular, no tiene impacto en nuestra detección marginal de una desviación del valor  $n_s = 1$  (ver sección 7.2).

### 6.2.2. El espacio de parámetros

En este trabajo realizamos la hipótesis básica de que las fluctuaciones de densidad primordiales son adiabáticas, Gaussianas y que están caracterizadas por un espectro de potencia en forma de ley de potencia. Como fue señalado por Leach & Liddle (2003a), la información del CMB previa al WMAP era de calidad insuficiente como para rechazar esta simple hipótesis. Después de la publicación de los datos del primer año de WMAP, que si poseen la precisión necesaria para testear este modelo, nuestras hipótesis continúan siendo bien motivadas. Komatsu et al. (2003) encontraron que los mapas obtenidos por WMAP son consistentes con fluctuaciones primordiales Gaussianas con una precisión mucho mayor a la obtenida por COBE. Peiris et al. (2003) encontraron que modelos con un índice espectral que varía lentamente con la longitud de onda dan ajustes marginalmente mejores a los datos de WMAP, particularmente cuando esta información es combinada con el espectro de potencia del bosque de Lyman- $\alpha$ . De todas formas, la evidencia de un índice espectral dependiente de la escala es débil y ha sido criticada por otros grupos (e.g. Bridle et al. 2003b; Slosar, Seljak & Makarov 2003; Seljak et al. 2005).

Bennett et al. (2003) y Spergel et al. (2003) señalan que, en escalas grandes algunos modos del espectro de temperatura del CMB yacen por debajo de las predicciones

del modelo estándar  $\Lambda$ CDM. Una interpretación de esta aparente discrepancia es que puede ser el indicio de la necesidad de nueva física (e.g. Bridle et al. 2003a; Efstathiou 2003). Sin embargo, varios estudios han argumentado que el desacuerdo es en realidad menos significativo de lo que fue planteado en un principio (Gaztañaga et al. 2003; de Oliveira-Costa et al. 2003; Efstathiou 2004).

A partir del punto de partida mencionado anteriormente, el modelo cosmológico que consideramos es definido por once parámetros

$$\mathbf{P} \equiv (\Omega_k, \omega_{\text{dm}}, \omega_b, f_\nu, w_{\text{DE}}, \tau, n_s, A_s, r, b, \Theta). \quad (6.2)$$

Además hay ocho cantidades básicas cuyos valores pueden ser derivados dado el conjunto anterior

$$\mathbf{P}_{\text{derived}} \equiv (\Omega_{\text{DE}}, h, \Omega_m, \sigma_8, z_{\text{re}}, t_0, \sum m_\nu, n_t). \quad (6.3)$$

A continuación repasamos estas listas de parámetros, definiendo cada uno y explicando como son obtenidos los valores de los parámetros derivados.

Hay cinco cantidades que describen la cosmología homogénea de fondo a través de varias contribuciones a la densidad de masa-energía. Estas son, en unidades de la densidad crítica:  $\Omega_k$ , la cual describe la curvatura del universo;  $\Omega_{\text{DE}}$ , la densidad de energía oscura;  $\omega_{\text{dm}} \equiv \Omega_{\text{dm}} h^2$ , la densidad de la materia oscura (donde  $\Omega_{\text{dm}} = \Omega_{\text{cdm}} + \Omega_\nu$  es la suma de las componentes de materia oscura fría y caliente y  $h$  es la constante de Hubble en unidades de  $100 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ );  $\omega_b \equiv \Omega_b h^2$ , la densidad de bariones; y  $f_\nu = \Omega_\nu / \Omega_{\text{dm}}$ , la fracción de materia oscura en forma de neutrinos masivos. La suma de las masas de los neutrinos está dada por  $\sum m_\nu$ . El parámetro de densidad de materia está dado por  $\Omega_m = \Omega_{\text{dm}} + \Omega_b$ . El valor de la constante de Hubble es derivado a partir de  $h = \sqrt{(\omega_{\text{dm}} + \omega_b) / \Omega_m}$ . La densidad de energía oscura puede determinarse a través de  $\Omega_{\text{DE}} = 1 - \Omega_m - \Omega_k$ . Asumimos además que la componente de energía oscura tiene una ecuación de estado que es independiente del redshift, con la razón entre la presión y la densidad dada por  $w_{\text{DE}}$ .

Hay además cuatro cantidades que describen la forma de las fluctuaciones iniciales; los índices espectrales,  $n_s$  y  $n_t$ , y las amplitudes primordiales,  $A_s$  y  $rA_s$ , de las fluctuaciones escalares y tensoriales respectivamente. Los valores de estos parámetros están dados para la longitud de onda ‘pivot’ de  $k = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ . Es posible transcribir los resultados para  $A_s$  en restricciones en el parámetro más familiar  $\sigma_8$ , las desviación cuadrática media en las fluctuaciones lineales de masa en esferas de radio  $8 h^{-1} \text{ Mpc}$ , a través de la función de transferencia de la materia. Cuando consideramos modos tensoriales hacemos la hipótesis correspondiente a la aproximación de *slow-roll* de que  $n_t = -r/8$ .

El factor de bias,  $b \equiv \sqrt{P_{\text{gal}}(k)/P_{\text{DM}}(k)}$ , describe la diferencia en amplitud entre el espectro de potencia de las galaxias y el de la materia oscura subyacente. En nuestro análisis marginalizamos sobre el valor de  $b$ , utilizando la expresión analítica dada en el Apéndice F de Lewis & Bridle (2002). Asumimos además que la reionización del medio intergaláctico neutro ocurre instantáneamente, con una profundidad óptica dada por  $\tau$ ; el redshift de la reionización,  $z_{\text{re}}$ , depende de una combinación de parámetros (ver la tabla 1 de Tegmark et al. 2004b). La edad del universo es  $t_0$ .

Finalmente,  $\Theta$  es la razón entre el horizonte de sonido en la época del desacople y la distancia angular al redshift correspondiente y reemplaza a la constante de Hubble como un parámetro base (Kosowsky, Milosavljevic & Jimenez 2002). Hemos elegido utilizar este parámetro ya que, a diferencia de, por ejemplo, la densidad de energía oscura, posee una distribución posterior que es cercana a una Gaussiana. Esto reduce las degeneraciones entre los parámetros e implica una convergencia más rápida de nuestra exploración del espacio de parámetros (ver la sección 6.2.3). Esto es una práctica estándar, aún cuando los resultados finales son generalmente expresados en términos de los parámetros más comunes como  $\Omega_{\text{DE}}$  o  $h$ . De todas formas, se debe tener cuidado cuando se comparan nuestros resultados con los de trabajos que hallan utilizado priors planos en otros parámetros en sus análisis Bayesianos. Estas elecciones pueden afectar los resultados finales de una forma que es difícil de cuantificar.

No intentamos variar todos los once parámetros al mismo tiempo ya que esto produciría una mezcla de pobres estimas de los valores de parámetros individuales y de combinaciones de parámetros. Como estamos interesados principalmente en derivar las mejores restricciones posibles en los valores de parámetros individuales, consideramos subconjuntos de parámetros como nuestro espacio de parámetros, variando cinco, seis o siete parámetros a la vez. De los parámetros restantes, algunos son mantenidos fijos y otros son calculados como parámetros derivados. A continuación describimos cada uno de los espacios de parámetros que analizamos en este trabajo, explicitando cuales son variados y cuales son mantenidos fijos. En todos los casos, marginalizamos sobre el parámetro de bias,  $b$ , por lo que no lo incluimos en la lista de parámetros analizados.

En el caso más sencillo, variamos cinco parámetros, a los que nos referimos como el conjunto de los cinco parámetros básicos (b5). En este caso los siguientes parámetros pueden variar

$$\mathbf{P}_{\text{varied}}^5 \equiv (\omega_{\text{dm}}, \omega_{\text{b}}, \tau, A_{\text{s}}, \Theta). \quad (6.4)$$

Los valores de los parámetros fijos en el caso b5 son

$$\mathbf{P}_{\text{fixed}}^5 \equiv (\Omega_{\text{k}} = 0, f_{\nu} = 0, w_{\text{DE}} = -1, n_{\text{s}} = 1, r = 0). \quad (6.5)$$

Cuadro 6.1: El espacio de parámetros explorado en nuestro análisis. Asumimos un prior plano en cada caso. No variamos los valores de todos los parámetros a la vez, los espacios de parámetros que consideramos son descritos en la sección 6.2.2.

Parámetro	Rango permitido
$\Omega_k$	$-0.3 - 0.3$
$\omega_{\text{dm}}$	$0.01 - 0.99$
$\omega_{\text{b}}$	$0.005 - 0.1$
$f_\nu$	$0 - 0.5$
$w_{\text{DE}}$	$-2.0 - 0$
$\tau$	$0 - 0.8$
$n_{\text{s}}$	$0.5 - 1.5$
$\log_{10}(10^{10} A_{\text{s}})$	$2.7 - 4.0$
$r$	$0 - 1$
$\Theta$	$0.5 - 10$

El conjunto b5 es expandido para permitir variaciones en el índice espectral, dando como resultado los modelos de seis parámetros básicos (b6)

$$\mathbf{P}_{\text{varied}}^6 \equiv (\omega_{\text{dm}}, \omega_{\text{b}}, \tau, n_{\text{s}}, A_{\text{s}}, \Theta). \quad (6.6)$$

Los parámetros fijos en los modelos b6 son

$$\mathbf{P}_{\text{fixed}}^6 \equiv (\Omega_k = 0, f_\nu = 0, w_{\text{DE}} = -1, r = 0). \quad (6.7)$$

También consideramos cuatro espacios de parámetros en los cuales un parámetro adicional es restringido conjuntamente con los del conjunto b6. Primero, el parámetro adicional es la fracción de masa en forma de neutrinos masivos,  $f_\nu$

$$\mathbf{P}_{\text{varied}}^{6+f_\nu} \equiv (\omega_{\text{dm}}, \omega_{\text{b}}, f_\nu, \tau, n_{\text{s}}, A_{\text{s}}, \Theta). \quad (6.8)$$

Los parámetros fijos en este caso son

$$\mathbf{P}_{\text{fixed}}^{6+f_\nu} \equiv (\Omega_k = 0, w_{\text{DE}} = -1, r = 0). \quad (6.9)$$

También analizamos la curvatura del universo,  $\Omega_k$ . Para ello la fracción de neutrinos masivos es mantenida fija nuevamente

$$\mathbf{P}_{\text{varied}}^{6+\Omega_k} \equiv (\Omega_k, \omega_{\text{dm}}, \omega_{\text{b}}, \tau, n_{\text{s}}, A_{\text{s}}, \Theta). \quad (6.10)$$

$$\mathbf{P}_{\text{fixed}}^{6+\Omega_k} \equiv (f_\nu = 0, w_{\text{DE}} = -1, r = 0). \quad (6.11)$$

Posteriormente variamos la ecuación de estado de la energía oscura

$$\mathbf{P}_{\text{varied}}^{6+w_{\text{DE}}} \equiv (\omega_{\text{dm}}, \omega_{\text{b}}, w_{\text{DE}}, \tau, n_{\text{s}}, A_{\text{s}}, \Theta). \quad (6.12)$$

En este caso, los parámetros mantenidos fijos son

$$\mathbf{P}_{\text{fixed}}^{6+w_{\text{DE}}} \equiv (\Omega_k = 0, f_\nu = 0, r = 0). \quad (6.13)$$

Finalmente, investigamos también las restricciones en los modos tensoriales

$$\mathbf{P}_{\text{varied}}^{6+r} \equiv (\omega_{\text{dm}}, \omega_{\text{b}}, \tau, n_{\text{s}}, A_{\text{s}}, r, \Theta), \quad (6.14)$$

con los parámetros fijos dado por

$$\mathbf{P}_{\text{fixed}}^{6+r} \equiv (\Omega_k = 0, f_\nu = 0, w_{\text{DE}} = -1). \quad (6.15)$$

La tabla 1 resume los rangos considerados para cada uno de los parámetros cosmológicos cuando sus valores son variados.

### 6.2.3. Cadenas de Markov

El prohibitivo costo computacional de generar espectros del CMB y funciones de transferencia de la materia para todos los puntos en un grid de modelos en un espacio de parámetros multidimensional ha llevado al desarrollo de algoritmos que muestreen dicho espacio en forma selectiva, guiados por la forma de la superficie de likelihood. En nuestro trabajo utilizamos la técnica de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) para explorar el espacio de parámetros de los modelos cosmológicos (por un ejemplo reciente de la aplicación de la técnica MCMC en aplicaciones cosmológicas, ver Percival 2004). Este algoritmo lleva a cabo una serie de exploraciones del espacio de parámetro denominadas cadenas. Las cadenas son iniciadas en distintos puntos del espacio de parámetros. El siguiente eslabón en la cadena se obtiene moviéndose en una dirección seleccionada al azar. Este nuevo eslabón será sumado a la cadena si cumple con un criterio diseñado por Metropolis et al. (1953); en resumen, los eslabones para los cuales el likelihood aumenta son siempre conservados, de lo contrario la aceptación del nuevo eslabón ocurre con una probabilidad igual al cociente de los likelihoods del nuevo eslabón con el último eslabón de la cadena. Si un eslabón es rechazado, se genera un nuevo eslabón aleatoriamente. Este algoritmo satisface el principio de balance detallado, de forma tal que las cadenas deben tender

asimptóticamente a una distribución de probabilidad estacionaria que siga a la superficie de likelihood. La ventaja de este método es que la marginalización (es decir, la integración de la distribución posterior con respecto a los restantes parámetros) es extremadamente sencilla: sólo se deben sumar el número de eslabones que caen en intervalos del parámetro en el cual estamos interesados (ver los apéndices de Lewis & Bridle 2002).

Los resultados presentados en esta tesis fueron generados con el código CosmoMC de Lewis & Bridle (2002). Hemos comparado los resultados obtenidos con este código con los obtenidos con un código independiente y hemos encontrado un acuerdo excelente. CosmoMC utiliza el paquete CAMB (Lewis, Challinor & Lasenby 2000) para calcular los espectros de potencia del CMB y de las fluctuaciones en la materia. Nuestro análisis se llevó a cabo en paralelo en la “Cosmology Machine” en la Universidad de Durham. Para cada espacio de parámetros analizado corrimos veinte cadenas separadas y las detuvimos cuando la estadística de Gelman and Rubin (1992)  $R < 1,02$ , el cual es un criterio significativamente más exigente que el requerido normalmente en este tipo de análisis (Verde et al. 2003; Seljak et al. 2005). La longitud que adquiere una cadena antes de alcanzar el criterio de convergencia depende de los datos utilizados. Para datos del CMB únicamente, las cadenas tienen típicamente 10.000 eslabones; en el caso de CMB combinado con el espectro de potencia del 2dfGRS, la convergencia es mucho más rápida. En total, nuestros cálculos equivalen a más de treinta años de tiempo de CPU en un procesador individual.

# Capítulo 7

## Restricciones en parámetros cosmológicos

*El orden y la simplificación son los primeros pasos hacia el dominio de un tema - El verdadero enemigo es lo desconocido.*

Thomas Mann

En este capítulo, llevamos a cabo un estudio sistemático de las restricciones en los valores de los parámetros cosmológicos descritos en la sección 6.2.1, obtenidas mediante el uso de datos del CMB y de la estructura en gran escala (LSS, por sus siglas en inglés). Variamos tres aspectos de la comparación: (i) Los datos utilizados. Comparamos los resultados obtenidos mediante el uso de información del CMB exclusivamente (Tabla 2) con los obtenidos mediante su combinación con el espectro de potencia del 2dFGRS (Tabla 3). Esto nos permite estudiar en que parámetros las restricciones son mejores si se combinan los datos del CMB con los del espectro de potencia de las galaxias. (ii) El número de parámetros variado. Consideramos modelos con 5, 6 y 7 parámetros libres mientras que los restantes son mantenidos fijos (ver sección 6.2.2 para una definición de los espacios de parámetros). (iii) La combinación de los parámetros. En nuestros modelos de 7 parámetros incorporamos un parámetro adicional a nuestro conjunto  $b_6$  (ecuación (6.6)) y exploramos como las diferentes elecciones del parámetro extra pueden afectar los resultados obtenidos.

Nuestros resultados se encuentran resumidos en las tablas 7.1 y 7.2. En la mitad superior de cada tabla, mostramos los valores de los parámetros fundamentales. Los valores de la tabla se refieren a los rangos permitidos obtenidos mediante la compara-

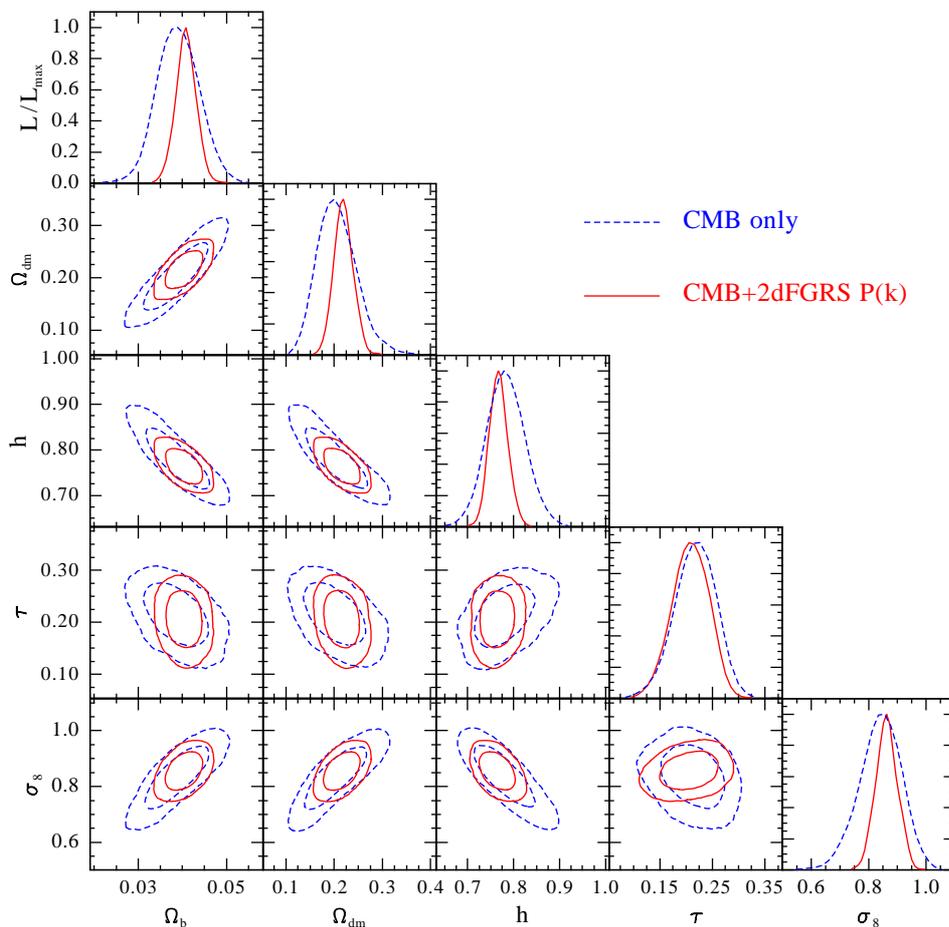


Figura 7.1: Distribución de likelihoods marginalizada de los parámetros cosmológicos en el modelo b6 determinada a través de información del CMB (líneas a trazos) y a través de su combinación con el espectro de potencias de 2dFGRS (líneas sólidas). La diagonal muestra las funciones de likelihoods para parámetros individuales; los demás paneles muestran los contornos en la función de likelihood para pares de parámetros, marginalizando sobre los parámetros restantes. Los contornos muestran  $-2\Delta \ln(L/L_{\max}) = 2, 3$  and  $6, 17$ .

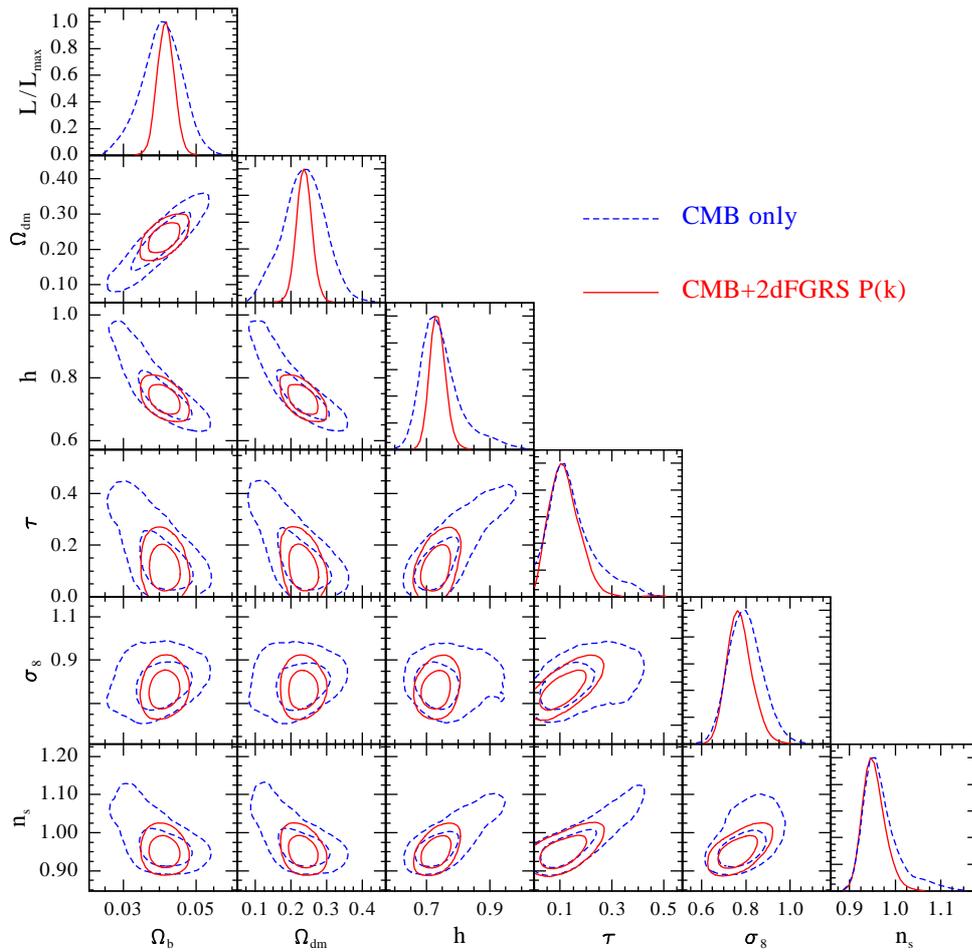


Figura 7.2: Distribución de likelihoods marginalizada de los parámetros cosmológicos en el modelo b5 determinada a través de información del CMB (líneas a trazos) y a través de su combinación con el espectro de potencias de 2dFGRS (líneas sólidas).

ción de los modelos con las observaciones, o al valor particular en el cual se mantuvo fijo durante el análisis, de acuerdo a lo expresado en la sección 6.2.2. En la parte inferior de las tablas, listamos los valores de otros parámetros útiles (como se muestra en la ecuación (6.3)). Estos parámetros no son variados directamente en nuestro análisis. De todas formas, como fue explicado en el capítulo 6, sus valores pueden ser derivados a partir de los resultados de la parte superior de la tabla.

En la Sección 7.1 presentamos los resultados para el modelo cosmológico más sencillo, el conjunto b5. En la sección 7.2 consideramos seis parámetros (el conjunto b6), permitiendo variaciones en el índice espectral de las fluctuaciones escalares. En las secciones 7.3 a 7.6 nos dedicamos a las restricciones obtenidas en modelos con siete parámetros, con diferentes elecciones del parámetro ‘final’ que expande el conjunto b6, como sigue: en la sección 7.3 analizamos la fracción de masa de los neutrinos masivos,  $f_\nu$ , en la sección 7.4 analizamos modelos no-planos, en la sección 7.5 la ecuación de estado de la energía oscura,  $w_{DE}$ , y en la sección 7.6 la incorporación de modos tensoriales.

En las tablas de resultados los errores encierran el 68 % de la probabilidad alrededor del valor medio de cada parámetro. En las figuras subsecuentes que muestran la superficie de likelihood marginalizada para conjuntos de dos parámetros, los contornos marcan las posiciones donde  $-2\Delta \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\max}) = 2,30$  y  $6,17$ , lo cual corresponde a los límites de 68 % y 95 % respectivamente, para el caso de una función de likelihood Gaussiana.

Cuadro 7.1: Intervalos de 68 % de likelihood (a excepción de que se especifique lo contrario) en los parámetros cosmológicos obtenidos utilizando información del CMB en las diferentes hipótesis y parámetros analizados. Los modelos son definidos en la sección 6.2.2.

	b5	b6	b6 + $f_\nu$	b6 + $\Omega_k$	b6 + $w_{\text{DE}}$	b6 + $r$
$\Omega_k$	0	0	0	$-0,074^{+0,049}_{-0,052}$	0	0
$\Theta$	$1,0449^{+0,0041}_{-0,0042}$	$1,0420^{+0,0052}_{-0,0052}$	$1,0428^{+0,0059}_{-0,0058}$	$1,0427^{+0,0063}_{-0,0062}$	$1,0426^{+0,0052}_{-0,0052}$	$1,0433^{+0,0051}_{-0,0051}$
$\omega_{\text{dm}}$	$0,101^{+0,011}_{-0,011}$	$0,105^{+0,013}_{-0,013}$	$0,113^{+0,014}_{-0,015}$	$0,095^{+0,019}_{-0,026}$	$0,105^{+0,013}_{-0,013}$	$0,099^{+0,010}_{-0,011}$
$\omega_b$	$0,0239^{+0,0007}_{-0,0007}$	$0,0229^{+0,0012}_{-0,0013}$	$0,0226^{+0,0015}_{-0,0016}$	$0,0238^{+0,0032}_{-0,0022}$	$0,0231^{+0,0013}_{-0,0013}$	$0,0236^{+0,0013}_{-0,0013}$
$f_\nu$	0	0	< 0,182 (95 %)	0	0	0
$\tau$	$0,217^{+0,037}_{-0,036}$	$0,150^{+0,084}_{-0,078}$	$0,161^{+0,101}_{-0,091}$	$0,24^{+0,24}_{-0,16}$	$0,142^{+0,074}_{-0,073}$	$0,126^{+0,062}_{-0,062}$
$w_{\text{DE}}$	-1	-1	-1	-1	$-0,93^{+0,49}_{-0,47}$	-1
$n_s$	1	$0,970^{+0,033}_{-0,033}$	$0,957^{+0,045}_{-0,047}$	$1,00^{+0,11}_{-0,07}$	$0,974^{+0,038}_{-0,037}$	$0,994^{+0,033}_{-0,033}$
$\log_{10}(10^{10} A_s)$	$3,270^{+0,059}_{-0,058}$	$3,14^{+0,16}_{-0,15}$	$3,14^{+0,19}_{-0,18}$	$3,29^{+0,42}_{-0,28}$	$3,12^{+0,14}_{-0,14}$	$3,07^{+0,13}_{-0,13}$
$r$	0	0	0	0	0	< 0,52 (95 %)
$\Omega_{\text{DE}}$	$0,793^{+0,039}_{-0,038}$	$0,762^{+0,056}_{-0,055}$	$0,68^{+0,10}_{-0,10}$	$0,63^{+0,18}_{-0,17}$	$0,71^{+0,12}_{-0,14}$	$0,798^{+0,041}_{-0,042}$
$t_0/\text{Gyr}$	$13,38^{+0,12}_{-0,12}$	$13,58^{+0,26}_{-0,25}$	$14,03^{+0,47}_{-0,44}$	$16,3^{+1,4}_{-1,5}$	$13,79^{+0,50}_{-0,45}$	$13,43^{+0,25}_{-0,26}$
$\Omega_m$	$0,207^{+0,038}_{-0,039}$	$0,237^{+0,055}_{-0,056}$	$0,32^{+0,10}_{-0,10}$	$0,44^{+0,21}_{-0,20}$	$0,28^{+0,14}_{-0,12}$	$0,202^{+0,041}_{-0,042}$
$\sigma_8$	$0,840^{+0,069}_{-0,069}$	$0,800^{+0,073}_{-0,072}$	$0,63^{+0,12}_{-0,12}$	$0,776^{+0,076}_{-0,072}$	$0,75^{+0,18}_{-0,18}$	$0,706^{+0,093}_{-0,097}$
$z_{\text{re}}$	$19,6^{+2,1}_{-2,1}$	$15,0^{+5,6}_{-5,1}$	$15,9^{+6,8}_{-5,9}$	$18,6^{+9,7}_{-7,7}$	$14,5^{+5,1}_{-5,0}$	$15,4^{+5,3}_{-5,3}$
$h$	$0,783^{+0,040}_{-0,040}$	$0,747^{+0,055}_{-0,056}$	$0,674^{+0,078}_{-0,082}$	$0,54^{+0,11}_{-0,11}$	$0,72^{+0,18}_{-0,17}$	$0,786^{+0,053}_{-0,052}$
$\sum m_\nu/\text{eV}$	0	0	< 2,09	0	0	0

Cuadro 7.2: Intervalos de 68% de likelihood (a excepción de que se especifique lo contrario) en los parámetros cosmológicos obtenidos utilizando información del CMB y el espectro de potencia del 2dFGRS en las diferentes hipótesis y parámetros analizados. Los modelos son definidos en la sección 6.2.2.

	b5	b6	b6 + $f_\nu$	b6 + $\Omega_k$	b6 + $w_{\text{DE}}$	b6 + $r$
$\Omega_k$	0	0	0	$-0,029^{+0,018}_{-0,018}$	0	0
$\Theta$	$1,0453^{+0,0038}_{-0,0037}$	$1,0403^{+0,0046}_{-0,0045}$	$1,0411^{+0,0050}_{-0,0046}$	$1,0458^{+0,0079}_{-0,0076}$	$1,0422^{+0,0055}_{-0,0055}$	$1,0425^{+0,0049}_{-0,0049}$
$\omega_{\text{dm}}$	$0,1046^{+0,0055}_{-0,0053}$	$0,1051^{+0,0046}_{-0,0047}$	$0,1100^{+0,0062}_{-0,0067}$	$0,083^{+0,015}_{-0,015}$	$0,097^{+0,011}_{-0,011}$	$0,1037^{+0,0050}_{-0,0050}$
$\omega_b$	$0,0240^{+0,0006}_{-0,0006}$	$0,0225^{+0,0010}_{-0,0010}$	$0,0224^{+0,0012}_{-0,0011}$	$0,0252^{+0,0033}_{-0,0030}$	$0,0233^{+0,0016}_{-0,0016}$	$0,0233^{+0,0011}_{-0,0011}$
$f_\nu$	0	0	< 0,105 (95%)	0	0	0
$\tau$	$0,208^{+0,034}_{-0,034}$	$0,118^{+0,057}_{-0,056}$	$0,143^{+0,076}_{-0,071}$	$0,33^{+0,18}_{-0,19}$	$0,174^{+0,107}_{-0,095}$	$0,109^{+0,053}_{-0,053}$
$w_{\text{DE}}$	-1	-1	-1	-1	$-0,85^{+0,18}_{-0,17}$	-1
$n_s$	1	$0,954^{+0,023}_{-0,023}$	$0,957^{+0,031}_{-0,029}$	$1,05^{+0,10}_{-0,10}$	$0,985^{+0,053}_{-0,046}$	$0,979^{+0,028}_{-0,028}$
$\log_{10}(10^{10} A_s)$	$3,268^{+0,060}_{-0,060}$	$3,06^{+0,12}_{-0,12}$	$3,11^{+0,15}_{-0,14}$	$3,44^{+0,35}_{-0,37}$	$3,16^{+0,20}_{-0,18}$	$3,05^{+0,11}_{-0,11}$
$r$	0	0	0	0	0	< 0,41 (95%)
$\Omega_{\text{DE}}$	$0,781^{+0,019}_{-0,020}$	$0,763^{+0,020}_{-0,020}$	$0,718^{+0,042}_{-0,037}$	$0,796^{+0,040}_{-0,040}$	$0,759^{+0,024}_{-0,024}$	$0,778^{+0,021}_{-0,022}$
$t_0/\text{Gyr}$	$13,39^{+0,11}_{-0,11}$	$13,69^{+0,19}_{-0,20}$	$13,94^{+0,26}_{-0,26}$	$14,97^{+0,77}_{-0,79}$	$13,70^{+0,26}_{-0,26}$	$13,54^{+0,23}_{-0,23}$
$\Omega_m$	$0,219^{+0,020}_{-0,019}$	$0,237^{+0,020}_{-0,020}$	$0,282^{+0,037}_{-0,042}$	$0,234^{+0,028}_{-0,027}$	$0,241^{+0,024}_{-0,024}$	$0,224^{+0,022}_{-0,022}$
$\sigma_8$	$0,863^{+0,037}_{-0,037}$	$0,773^{+0,054}_{-0,053}$	$0,678^{+0,073}_{-0,072}$	$0,817^{+0,077}_{-0,079}$	$0,711^{+0,098}_{-0,099}$	$0,769^{+0,053}_{-0,062}$
$z_{\text{re}}$	$19,2^{+2,1}_{-2,1}$	$13,1^{+4,3}_{-4,3}$	$15,1^{+5,2}_{-5,1}$	$22,6^{+6,2}_{-7,9}$	$16,1^{+6,2}_{-5,8}$	$12,1^{+4,1}_{-4,2}$
$h$	$0,776^{+0,020}_{-0,019}$	$0,735^{+0,022}_{-0,023}$	$0,691^{+0,038}_{-0,038}$	$0,684^{+0,035}_{-0,035}$	$0,708^{+0,062}_{-0,058}$	$0,755^{+0,028}_{-0,029}$
$\sum m_\nu/\text{eV}$	0	0	< 1,16 (95%)	0	0	0

## 7.1. El caso más simple – cinco parámetros

Primero nos concentramos en el modelo más simple que es capaz de dar una descripción precisa de los datos observacionales, el espacio de parámetros b5 definido por las ecuaciones (6.4) y (6.5). Este modelo hace un muy buen trabajo al reproducir las observaciones del CMB con fuertes restricciones en los valores de los cinco parámetros variados, como se muestra en las líneas de trazos en la figura 7.1 y en la columna 2 de la tabla 7.1. Es claro en la figura 7.1 y la tabla 7.2 que, cuando el espectro de potencia del catálogo 2dFGRS es incluido, los resultados muestran una impactante consistencia con los obtenidos mediante la información del CMB únicamente. En el caso de la densidad de materia oscura,  $w_{\text{dm}}$ , por ejemplo, los valores centrales derivados al comparar los modelos teóricos únicamente con observaciones del CMB, y cuando éstas son combinadas con el espectro del 2dFGRS muestran una gran consistencia dentro de sus incertezas. De todas formas, en algunos parámetros, hay una mejora significativa en las restricciones obtenidas cuando los datos del 2dFGRS son incluidas. Por ejemplo, el rango de valores de  $w_{\text{dm}}$  derivados es disminuido por un factor 2 cuando el  $P(k)$  del 2dFGRS es incluido. Esto se debe a que los datos de la estructura en gran escala rompen la degeneración ángulo-horizonte, que surge debido a modelos del CMB que poseen la misma posición del primer pico en su espectro de potencia angular (e.g. Percival et al. 2002). Una reducción similar en las incertezas se obtiene también para los parámetros derivados  $\sigma_8$  y  $h$ . El espectro del CMB depende principalmente del parámetro  $\omega_{\text{dm}} = \Omega_{\text{dm}}h^2$ , mientras que el espectro de potencias  $P(k)$  depende de la combinación de parámetros  $\Omega_{\text{dm}}h$ . La incorporación del espectro de potencias en el análisis ayuda a romper la degeneración entre  $\Omega_{\text{dm}}$  y  $h$  que se encuentra en las predicciones teóricas del CMB, mejorando de esta manera las restricciones en estos parámetros, al igual que en  $\omega_{\text{dm}}$ .

Cole et al. (2005) utilizaron el espectro de potencias del 2dFGRS para obtener restricciones en las combinaciones de parámetros  $\Omega_{\text{m}}h$  y  $\Omega_{\text{b}}/\Omega_{\text{m}}$ , y, en forma conjunta con el espectro de potencias del WMAP, en  $\Omega_{\text{m}}$ .

El modelo analizado por Cole et al. es una versión restringida de nuestro modelo b5 (asumiendo  $h = 0,72$ ). Es importante notar el gran acuerdo entre nuestros resultados y los obtenidos por Cole et al.; en particular, confirmamos la detección de un valor para la densidad de materia significativamente menor que el valor canónico de  $\Omega_{\text{m}} = 0,3$  del modelo  $\Lambda$ CDM. El éxito de este simple modelo debe remarcar. Este modelo ‘minimalista’ puede dar cuenta de las observaciones cosmológicas más precisas disponibles en la actualidad.

## 7.2. Seis parámetros – la inclusión del índice espectral escalar

A continuación expandimos nuestro modelo para permitir variaciones en el índice espectral escalar,  $n_s$ , que denominamos ‘b6’ (definido por las ecuaciones (6.6) y (6.7)). La figura 7.2 muestra la función de likelihood marginalizada para estos parámetros (a lo largo de su diagonal), conjuntamente con los contornos de likelihood bidimensionales para diferentes combinaciones de parámetros, obtenidos utilizando información del CMB (líneas de trazos) y su combinación con el espectro de potencia del catálogo 2dFGRS (líneas sólidas). El grado de libertad adicional da lugar a degeneraciones bien conocidas que involucran los seis parámetros en forma conjunta, y que puede ser vista más fácilmente en la profundidad óptica a la superficie de último scattering,  $\tau$ , el índice espectral escalar,  $n_s$ , y la amplitud de las fluctuaciones escalares,  $A_s$ . Esta degeneración lleva a la producción de espectros de potencia similares cuando los valores de los parámetros, con la excepción de  $\omega_{\text{dm}}$ , son aumentados (ver Tegmark et al. 2004b para una descripción completa de como funciona esta degeneración en la práctica). La tabla 7.1 muestra que utilizando información exclusiva del CMB, los resultados para los valores medios en las distribuciones de los parámetros coinciden en su mayor parte con los obtenidos en el caso b5. Las dos excepciones son  $\tau$  y  $A_s$ , para los cuales se obtiene valores ligeramente inferiores en el caso b6. Esto es también una consecuencia de la degeneración mencionada anteriormente, ya que, como los datos prefieren valores de  $n_s < 1$ , los valores medios de  $\tau$  y  $A_s$  también disminuyen. Otra consecuencia de la degeneración es que las regiones permitidas para los distintos parámetros son mayores que las obtenidas en el espacio de parámetros b5. El espectro de potencias del 2dFGRS ayuda a romper esta degeneración, particularmente al mejorar las restricciones en  $w_{\text{dm}}$ . Los resultados listados en la columna 3 de la tabla 7.2 muestran que los valores obtenidos en este caso están en completo acuerdo con los obtenidos mediante el uso de información del CMB únicamente, pero con restricciones mucho más precisas en los rangos permitidos. Esto refuerza la consistencia entre los resultados obtenidos mediante el CMB y mediante su combinación con el espectro de potencia del 2dFGRS que encontramos en el espacio de parámetros b5.

Un resultado particularmente importante es el valor obtenido para el índice espectral escalar,  $n_s$ . En el caso de información del CMB únicamente, se obtiene  $n_s = 0,970^{+0,033(0,110)}_{-0,033(0,052)}$  donde los errores corresponden a los rangos de 68% (95%), completamente consistentes con  $n_s = 1$ . Al combinar los datos del CMB con los del  $P(k)$  del 2dFGRS, los errores son mucho menores, y se obtiene  $n_s = 0,954^{+0,023(0,054)}_{-0,023(0,040)}$ . Esta

determinación del índice espectral escalar es sólo marginalmente consistente con el valor correspondiente al espectro invariante en escala  $n_s = 1$  al nivel de 95 %. Cualquier detección de una desviación de la invariancia en escala tendría importantes implicancias en el paradigma inflacionario por lo que discutiremos este resultado con mayor detalle en el capítulo 10.

### 7.3. Seis parámetros más la fracción de masa de neutrinos masivos

Los neutrinos masivos fueron descartados como el único constituyente de la materia oscura hace unos veinte años en base a los resultados de simulaciones numéricas de N-cuerpos de la formación de estructura en universos con materia oscura caliente (Frenk, White & Davis 1983). De todas formas, el interés en los neutrinos masivos a reaparecido recientemente con la resolución del problema de los neutrinos solares y el advenimiento de mediciones de precisión del espectro de potencia de las galaxias. La detección de otros gustos de neutrinos además de los neutrinos de electrones en el flujo de neutrinos proveniente del Sol sugiere que los neutrinos pueden oscilar entre diferentes gustos (Ahmad et al. 2001). Esto implica a su vez que los tres tipos conocidos de neutrinos tienen una masa no-nula. Aunque las mediciones del grado de mezcla en los gustos de los neutrinos imponen cotas en las diferencias entre los cuadrados de las masas de los diferentes tipos de neutrinos, éstas no son sensibles a sus masas absolutas. El caso más extremo (y quizás el más probable) es que el menor autovalor de masa es despreciablemente chico, caso en el que la suma de las masas de los neutrinos está dominada por el autovalor más masivo:  $\sum m_\nu \simeq m_3 \simeq 0,045$  eV (por una revisión reciente del tema ver Barger et al. 2003). La única forma en la que  $\sum m_\nu$  puede exceder con creces este valor es si la jerarquía de masas es casi degenerada; por lo tanto en nuestro análisis asumimos tres especies de neutrinos de igual masa. Mediciones absolutas de la masa de los neutrinos pueden ser obtenidas mediante experimentos de decaimiento de Tritium beta. En la actualidad, mediante estos experimentos se obtiene una cota  $\sum m_\nu < 6,6$  eV al nivel de  $2\sigma$  (Weinheimer 2002).

En la actualidad, los límites más competitivos en la masa de los neutrinos se obtienen mediante la comparación de datos del CMB y la estructura en gran escala del Universo con modelos teóricos (Hu et al. 1998; Elgaroy et al. 2002; Hannestad 2002). En el universo temprano, cuando los neutrinos eran relativistas aún, estos escapaban de los pozos de potencial de las perturbaciones en densidad, en un proceso denominado

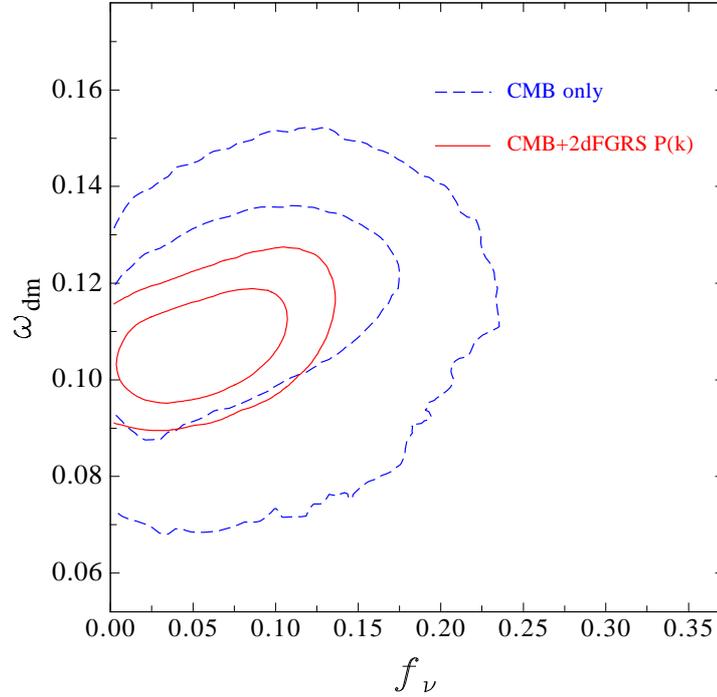


Figura 7.3: La función de likelihood marginalizada en el plano  $f_\nu - \omega_{\text{dm}}$  en el espacio de parámetros  $b_6 + f_\nu$ . Las líneas a trazos muestran los contornos de 68% and 95% de probabilidad para el caso de información del CMB únicamente. Las líneas sólidas muestran los resultados correspondientes obtenidos en el caso en que el CMB es combinado con el  $P(k)$  del 2dFGRS.

*free-streaming*, amortiguando de esta forma las fluctuaciones en los bariones y la materia oscura fría. Este efecto de ‘borroneo’ se detuvo una vez que los neutrinos se convirtieron en no relativistas. De esta forma el free-streaming sólo afecta escalas menores que el horizonte de eventos en esta época, el cual es una función de la masa de los neutrinos.

El espectro de potencia de las fluctuaciones en temperatura del CMB depende sólo débilmente de la fracción de masa de los neutrinos masivos,  $f_\nu$ , ya que en la época de último scattering los neutrinos con masas del orden del eV se comportan de manera similar a la materia oscura fría. De esta manera, el CMB sólo no puede brindar restricciones precisas en este parámetro. Más aún, la respuesta del espectro del CMB a variaciones en este parámetro está limitada a los multipolos altos ( $\ell \geq 700$ ) por lo que el primer año de vuelo del WMAP por su cuenta no es capaz de brindar

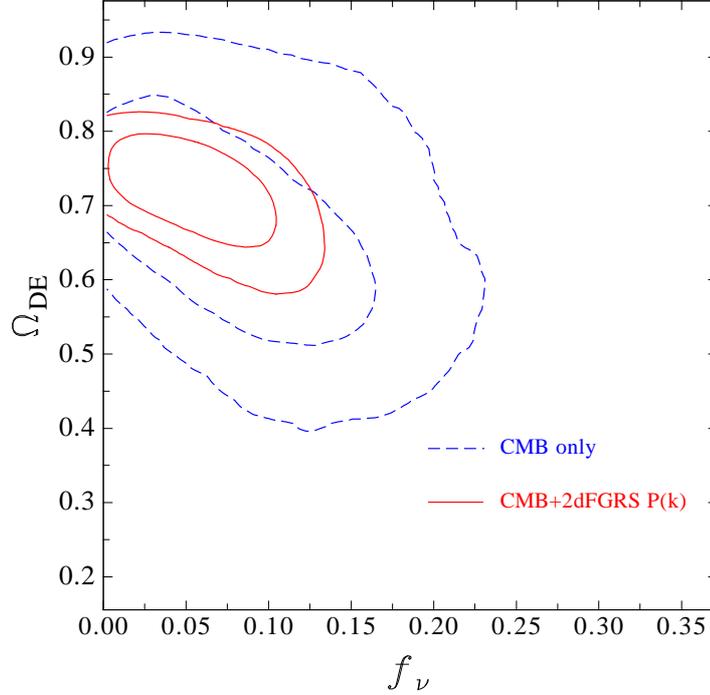


Figura 7.4: La función de likelihood marginalizada en el plano  $f_\nu - \Omega_{\text{DE}}$  en el espacio de parámetros  $b_6 + f_\nu$ . Las líneas a trazos muestran los contornos de 68% and 95% de probabilidad para el caso de información del CMB únicamente. Las líneas sólidas muestran los resultados correspondientes obtenidos en el caso en que el CMB es combinado con el  $P(k)$  del 2dFGRS.

buenas restricciones en  $f_\nu$  (Tegmark et al. 2004b). Nuestros resultados al considerar información del CMB exclusivamente se deben principalmente a los experimentos con los cuales combinamos los datos del satélite WMAP, que brindan información de escalas angulares más pequeñas y por lo tanto, multipolos mayores. Por otro lado, el impacto de los neutrinos masivos en el espectro de potencia de la masa es mucho más pronunciado. Por lo tanto, la combinación del CMB con una determinación del espectro de potencia puede llevar a la obtención de restricciones mucho más precisas en la fracción de masa de los neutrinos masivos; la forma de  $P(k)$  restringe el valor de  $f_\nu$  mientras que el CMB fija los restantes parámetros con los que  $f_\nu$  posee degeneraciones.

Utilizando datos del CMB únicamente, encontramos que  $f_\nu < 0,182$  al 95% de confiabilidad. Cuando el espectro de potencias del 2dFGRS es incluido, el resultado es

$f_\nu < 0,105$  at 95 %. Nuestros resultados pueden ser convertidos en restricciones en la suma de las masas de los tres neutrinos mediante  $\sum m_\nu = \omega_{\text{dm}} f_\nu 94,4 \text{ eV}$  (asumiendo que los neutrinos son partículas de Majorana) para obtener los siguientes límites:  $\sum m_\nu < 2,09 \text{ eV}$  al 95 % en el caso de información del CMB, y  $\sum m_\nu < 1,16 \text{ eV}$  al 95 % para CMB combinado con el  $P(k)$  del 2dFGRS.

Elgarøy et al. (2002) utilizaron la determinación del espectro de potencia del 2dFGRS realizada por Percival et al. (2001) para obtener restricciones en la masa de los neutrinos y encontró que  $\sum m_\nu < 2,2 \text{ eV}$  (95 %), asumiendo  $n_s = 1$  y un restrictivo rango de valores para  $\Omega_m$ . Nuestros resultados también representan una mejora substancial sobre los reportados por Tegmark et al. (2004b), quien combinó los datos del primer año de vuelo de WMAP con el espectro de potencia del SDSS para un espacio de parámetros similar al analizado en este trabajo y encontró un límite de 95 % dado por  $\sum m_\nu \leq 1,7 \text{ eV}$ .

Es posible obtener restricciones más fuertes en este parámetro a partir de estudios que combinan datos de CMB y LSS si se utiliza también información de la amplitud del espectro de potencia  $P(k)$ . Además de cambiar la forma del espectro de la masa, una fracción de neutrinos masivos reduce la tasa global de crecimiento de las fluctuaciones. Esta información fue utilizada en el análisis de los datos del primer año de WMAP, y fue importante para obtener el restrictivo límite de  $\sum m_\nu < 0,7 \text{ eV}$  (Spergel et al. 2003; Verde et al. 2003). Este análisis requirió el uso de información proveniente del bi-espectro del 2dFGRS además de  $P(k)$  (Verde et al. 2002; para una determinación correspondiente a la versión final del 2dFGRS ver Gaztañaga et al. 2005). Nosotros preferimos no utilizar esta información en este análisis ya que no ha sido sujeta al mismo grado de simulación detallada como  $P(k)$ . El límite en la masa de los neutrinos también puede ajustarse si se dispone de una determinación del espectro de potencias lineal en números de onda  $k$  mayores de los que pueden muestrearse con el espectro de las galaxias. Seljak et al. (2005) utilizaron el espectro de potencias del bosque de Ly- $\alpha$  y la determinación de  $P(k)$  en el SDSS, con un límite en la profundidad óptica a la superficie de último scattering de  $\tau < 0,3$  (ver sección 8.4) para obtener  $\sum m_\nu < 0,42 \text{ eV}$ . La extracción del espectro de potencias correspondiente a la teoría lineal a partir del bosque de Lyman- $\alpha$  es controversial, por lo que no hemos hecho uso de estos datos (Croft et al. 2002; Gnedin & Hamilton 2002; McDonald et al. 2005).

El único trabajo que ha reportado una determinación de una masa no nula para los neutrinos y no sólo límites superiores es Allen et al. (2003). Estos autores combinaron datos de cúmulos de galaxias con información del CMB y la versión preliminar del espectro de potencias del 2dFGRS determinada por Percival et al. (2001). La

información de los cúmulos de galaxias utilizada por estos autores fue la fracción de gas y la función de luminosidad en rayos X. Ambas cantidades son mucho más difíciles de modelar que los datos del CMB y de LSS que hemos considerado en este trabajo. Aunque sus resultados muestran una señal más fuerte cuando la información de los cúmulos es incluida, aún cuando ésta no es considerada existe un indicio de una fracción de masa de neutrinos no nula, demostrando que esta señal no se debe exclusivamente a la incorporación de los datos en rayos-X. El espacio de parámetros explorado por Allen et al. difiere del considerado en esta sección ya que incluye modos tensoriales. Estos contribuyen al espectro del CMB en la región de multipolos bajos por lo que su incorporación lleva a una disminución de la amplitud de los modos escalares en estas escalas. A su vez, esto puede llevar a un aumento en el valor obtenido para el índice espectral escalar para igualar la potencia en los multipolos altos, y a una mayor fracción de masa de neutrinos para compensar este incremento y mantener la forma del espectro de potencia de la masa en los valores altos de  $k$ . Esta degeneración en el plano  $f_\nu - r$  produce un valor medio marginalizado más alto para la fracción de masa en neutrinos masivos.

Las figuras 7.3 y 7.4 muestran el impacto de incluir el espectro de potencias del 2dFGRS en las restricciones en los planos  $f_\nu - \omega_{\text{dm}}$  y  $f_\nu - \Omega_{\text{DE}}$ . Cuando se utiliza el CMB únicamente, la incorporación de  $f_\nu$  en el espacio de parámetros causa un incremento en las incertezas de todos los parámetros. Esto es particularmente evidente para  $\Omega_{\text{DE}}$ , para el cual los errores son dos veces más grandes que conjunto de parámetros b6 en el que fijamos  $f_\nu = 0$ . Cuando incorporamos el espectro del 2dFGRS, los rangos permitidos para estos parámetros son reducidos dramáticamente, con restricciones particularmente precisas en  $\omega_{\text{dm}}$  y  $\Omega_{\text{DE}}$ . Esto demuestra claramente la importancia de incluir datos de la estructura en gran escala del Universo para obtener restricciones precisas en los valores de estos parámetros.

## 7.4. Seis parámetros más la curvatura del Universo: modelos no-planos

Existe un fuerte prejuicio teórico de que vivimos en un Universo plano con  $\Omega_k = 0$ . Las primeras detecciones de los picos acústicos en el espectro de potencia de las fluctuaciones en temperatura del CMB, cuya posición es una medida de la geometría del universo, demostraron que éste es *cercano* a un universo plano (de Bernardis et al. 2000). Estos resultados han servido para reforzar el prejuicio de que la curvatura del Universo debe ser *exactamente* cero. Hasta la fecha, ningún trabajo ha encontrado

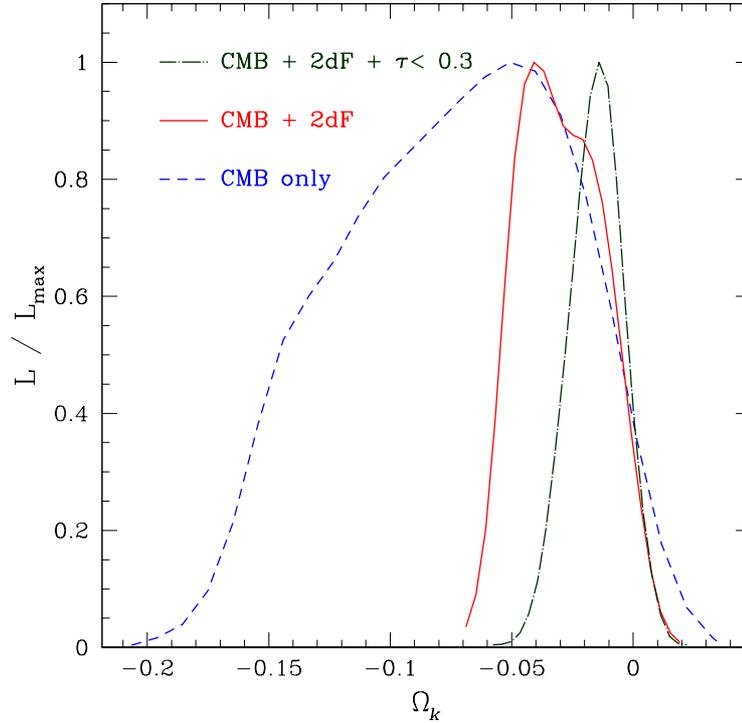


Figura 7.5: Distribución de likelihood marginalizada para  $\Omega_k$  para datos del CMB (línea a trazos), CMB combinado con 2dFGRS (línea sólida), y de CMB más 2dFGRS con un límite en la profundidad óptica a la superficie de último scattering de  $\tau < 0,3$  (línea a trazos y puntos). Los modelos cerrados cumplen que  $\Omega_k < 0$ .

fuertes indicios de una desviación significativa del valor  $\Omega_k = 0$ . De todas formas, como la planitud del Universo es una de las predicciones más importantes de los modelos inflacionarios, esta hipótesis debe ser testeada en forma adecuada mediante nuevos datos. Debe tenerse en cuenta además, al comparar valores de los parámetros cosmológicos, que muchos trabajos simplemente asumen  $\Omega_k = 0$ . Otros parámetros, como por ejemplo el índice espectral escalar, son sensibles a las hipótesis asumidas en  $\Omega_k$ .

La figura 7.5 muestra la función de likelihood marginalizada para  $\Omega_k$  obtenida mediante diferentes conjuntos de datos. La línea a trazos muestra los resultados obtenidos mediante información del CMB únicamente, recordando el hecho de que los datos del CMB no requieren un universo plano. Aún cuando los valores de  $\Omega_k > 0$  (modelos abiertos) están prácticamente descartados, existe un amplio rango de modelos cerrados permitido, con el mejor valor dado por  $\Omega_k = -0,074^{+0,049}_{-0,052}$  (0,076) al 68 %

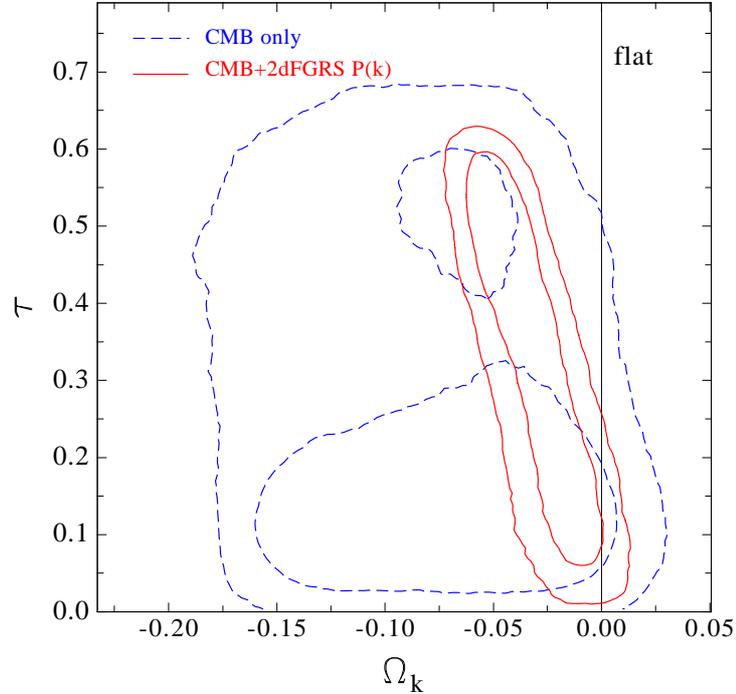


Figura 7.6: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_k - \tau$  para el caso b6 más  $\Omega_k$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68 % y 95 % de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

(95 %) de confiabilidad. La línea sólida en la figura 7.5 muestra como la combinación del CMB con el espectro de potencia del 2dFGRS ayuda a mejorar las restricciones en  $\Omega_k$ . La incorporación de información del  $P(k)$  del catálogo 2dFGRS ayuda a romper la degeneración geométrica entre  $\Omega_m$  y  $\Omega_{DE}$  (ver la figura 7.7 y el párrafo final de esta sección). Este es uno de los efectos más importantes de la incorporación de información de la estructura en gran escala en nuestro análisis. En el caso de CMB combinado con el  $P(k)$  del 2dFGRS obtenemos  $\Omega_k = -0,029^{+0,018}_{-0,018} (0,032)_{(0,028)}$ .

Es importante notar el efecto que posee el prior en la profundidad óptica a la superficie de último scattering  $\tau$ , en el valor inferido en la curvatura del Universo. La figura 7.6 muestra las restricciones obtenidas en el plano  $\Omega_k - \tau$ . La incorporación del espectro de potencia del 2dFGRS disminuye la región permitida al mejorar las restricciones en  $\Omega_k$ , pero los contornos de likelihood resultantes muestran una fuerte

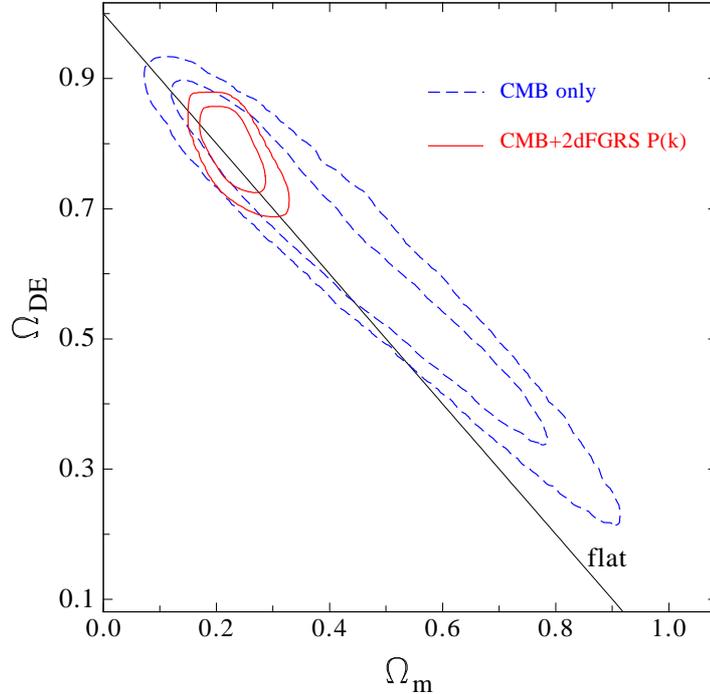


Figura 7.7: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_m - \Omega_{DE}$  para el caso b6 más  $\Omega_k$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68% y 95% de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

degeneración entre los dos parámetros, con los valores altos de  $\tau$  privilegiando valores más negativos de  $\Omega_k$ . Esta degeneración es la responsable de las anchas barras de error en estos parámetros. Si uno adopta un prior restrictivo en la profundidad óptica de  $\tau < 0,3$ , como es recomendado por el equipo del satélite WMAP basados en la falta de una gran señal en la polarización del CMB, como se muestra por la línea a puntos y trazos en la figura 7.5 los resultados para  $\Omega_k$  muestran un mayor acuerdo con los presentados en la literatura. En este caso encontramos  $\Omega_k = -0,015^{+0,011(0,023)}_{-0,011(0,020)}$  mediante la combinación de los datos del CMB y del 2dFGRS. Regresaremos al problema de la elección del prior en la profundidad óptica en la Sección 8.4.

Finalmente, analizamos las restricciones en las densidades de materia y energía oscura cuando se abandona la hipótesis de un universo plano. La figura 7.7 muestra los resultados en el plano  $\Omega_m - \Omega_{DE}$  mediante el uso de información del CMB únicamente

(línea a trazos) y CMB más el  $P(k)$  del catálogo 2dFGRS (línea sólida). Como hemos visto en los últimos ejemplos, hay una mejora dramática en las restricciones obtenidas en estos parámetros cuando la información de la distribución en gran escala de las galaxias es incorporada en el análisis. Puede verse claramente que existe una fuerte evidencia de la presencia de una componente de energía oscura en el Universo.

## 7.5. Seis parámetros más la ecuación de estado de la energía oscura

A lo largo de la última década se ha presentado fuerte evidencia de la expansión acelerada del Universo, basada en la interpretación del diagrama de Hubble de las supernovas de tipo Ia (Perlmutter et al. 1999; Riess et al. 2004). Se ha obtenido evidencia independiente de la presencia de una componente de presión negativa, dinámicamente dominante en el Universo, a partir del ajuste de modelos cosmológicos a datos del CMB y LSS (ver la Sección 7.4 y Efstathiou et al. 2002). Aunque podemos inferir la presencia de esta componente, denominada energía oscura, no conocemos prácticamente nada acerca de su naturaleza. Una inmensa variedad de modelos han sido presentados como candidatos a la energía oscura (por ejemplo, ver Sahni 2005). Una de las propiedades de la energía oscura que puede ser utilizada para disminuir la cantidad de modelos posibles es la ecuación de estado de la energía oscura,  $w_{\text{DE}}$ .

Hasta ahora hemos asumido que la componente de energía oscura corresponde a una constante cosmológica, con una ecuación de estado fija determinada por  $w_{\text{DE}} = -1$ . De todas formas, esta es sólo una dentro de muchas posibilidades que la energía oscura puede satisfacer. Cualquier componente con una ecuación de estado  $w_{\text{DE}} < -1/3$  produciría una fase de expansión acelerada en el Universo. En esta sección exploramos modelos de energía oscura, permitiendo variaciones en el valor de  $w_{\text{DE}}$ , el cual consideramos constante en el tiempo. También consideramos modelos con  $w_{\text{DE}} < -1$ , denominados de energía fantasma.

La figura 7.8 muestra las restricciones marginalizadas en el plano  $w_{\text{DE}} - \Omega_{\text{m}}$ . Cuando sólo se utiliza información del CMB, encontramos  $w_{\text{DE}} = -0,93^{+0,49}_{-0,47}$ , consistente con una constante cosmológica. Cuando el espectro del 2dFGRS es incluido en el análisis, el resultado obtenido es  $w_{\text{DE}} = -0,85^{+0,18}_{-0,17}$ . Si además incluimos datos de supernovas tipo Ia de Riess et al. (2004), nuestros resultados muestran sólo un leve cambio con  $w_{\text{DE}} = -0,87^{+0,12}_{-0,12}$ . Los modelos de energía fantasma están permitidos cuando se utiliza solo información del CMB, con el límite de 95 % en la ecuación de estado dado por  $w_{\text{DE}} > -1,66$ . Cuando el espectro de potencias del 2dFGRS y las

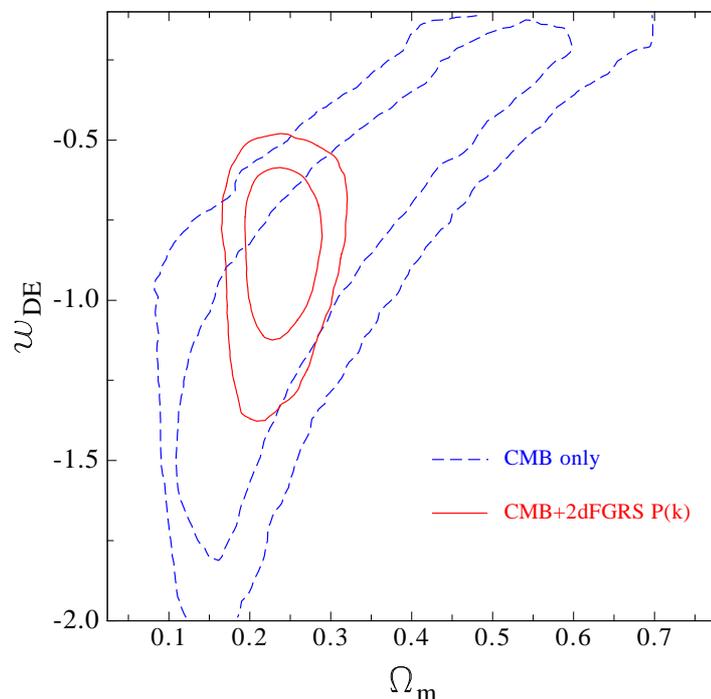


Figura 7.8: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_m - w_{\text{DE}}$  para el caso b6 más  $w_{\text{DE}}$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68 % y 95 % de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

supernovas tipo Ia son incluidas, la región permitida para este parámetro disminuye considerablemente con  $w_{\text{DE}} > -1,19$  al 95 %, demostrando que los modelos de energía fantasma son desfavorecidos por los datos disponibles en la actualidad. Estos resultados muestran que nuestros datos privilegian valores de  $w_{\text{DE}}$  más bajos que los encontrados anteriormente utilizando el espectro de potencia del SDSS (MacTavish et al. 2006). Nuestros resultados son consistentes con una constante cosmológica como responsable de la energía oscura. Continuaremos la discusión de este punto en el capítulo 10.

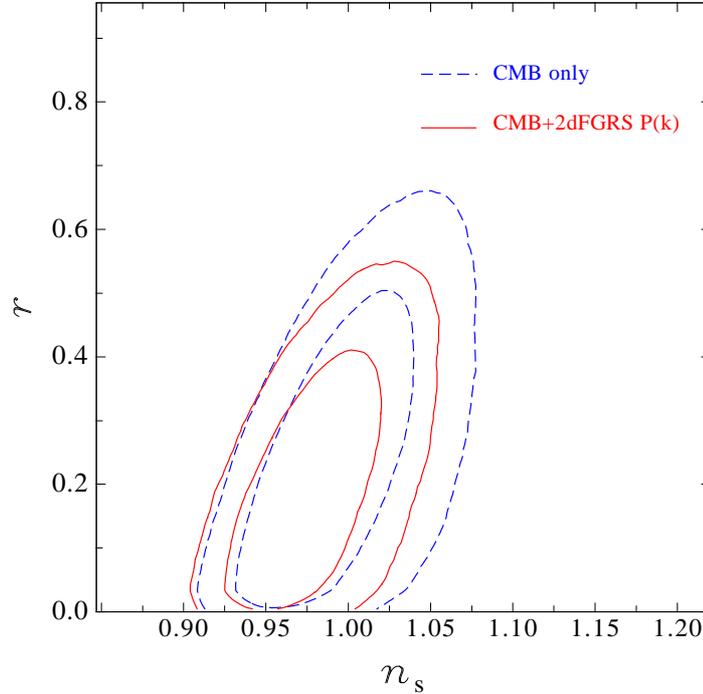


Figura 7.9: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $n_s - r$  para el caso  $b_6$  más  $r$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68 % y 95 % de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

## 7.6. Modos tensoriales

A continuación incorporamos a la razón entre las amplitudes de los modos escalares y tensoriales,  $r$ , a nuestro conjunto de parámetros. Este caso es importante ya que numerosos modelos inflacionarios predicen la presencia de modos tensoriales. Además, como veremos a continuación, otros parámetros cosmológicos presentan una degeneración con  $r$  y en la literatura los modos tensoriales son generalmente ignorados cuando se obtienen restricciones en estos parámetros.

El límite impuesto por las observaciones del CMB en este parámetro es  $r < 0,52$  al 95 %. Si el espectro de potencias del 2dFGRS es incluido en el análisis esta cota mejora levemente, con  $r < 0,41$  al 95 %. La figura 7.9 muestra los contornos de la marginalización bidimensional de la función de likelihood en el plano  $n_s - r$  para los casos de información exclusiva del CMB (línea a trazos) y del CMB combinado con

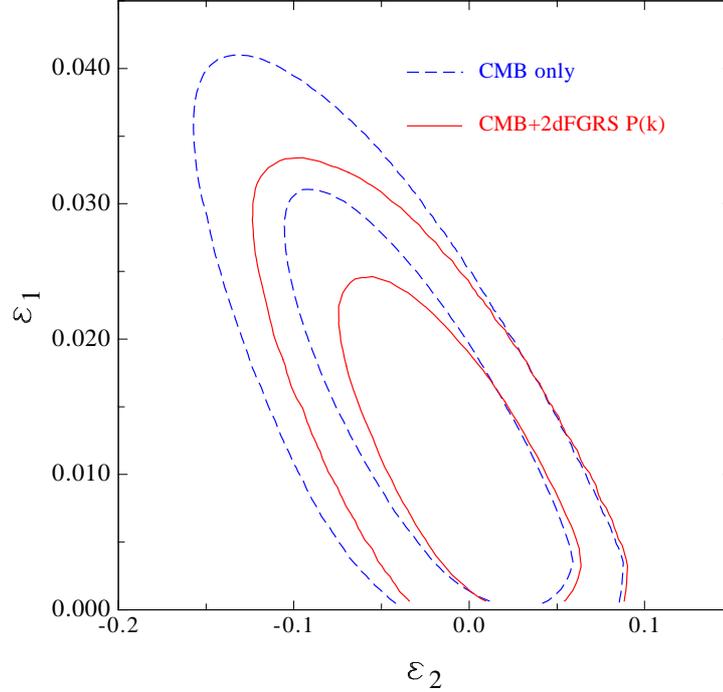


Figura 7.10: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\epsilon_1 - \epsilon_2$  para el caso  $b_6$  más  $r$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68 % y 95 % de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

2dFGRS (línea sólida). Los modos tensoriales contribuyen al espectro de potencia de las fluctuaciones en temperatura del CMB sólo en escalas angulares grandes, conduciendo a una disminución de las perturbaciones escalares en estas escalas a fin de describir las observaciones. Para mantener la amplitud de las fluctuaciones escalares en menores escalas angulares se requiere un incremento en el valor del índice espectral escalar,  $n_s$ . Esta degeneración da como resultado un rango permitido más amplio para  $n_s$  que en el caso en el que sólo se consideran modelos escalares.

Las restricciones en  $r$  y  $n_s$  pueden trasladarse a los parámetros de flujo del horizonte,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , a través de las relaciones dadas en Mukhanov et al. (1992)

$$1 - n_s = 2\epsilon_1 + \epsilon_2, \quad (7.1)$$

$$r = 16\epsilon_1. \quad (7.2)$$

Los parámetros de flujo del horizonte están relacionados con las derivadas del paráme-

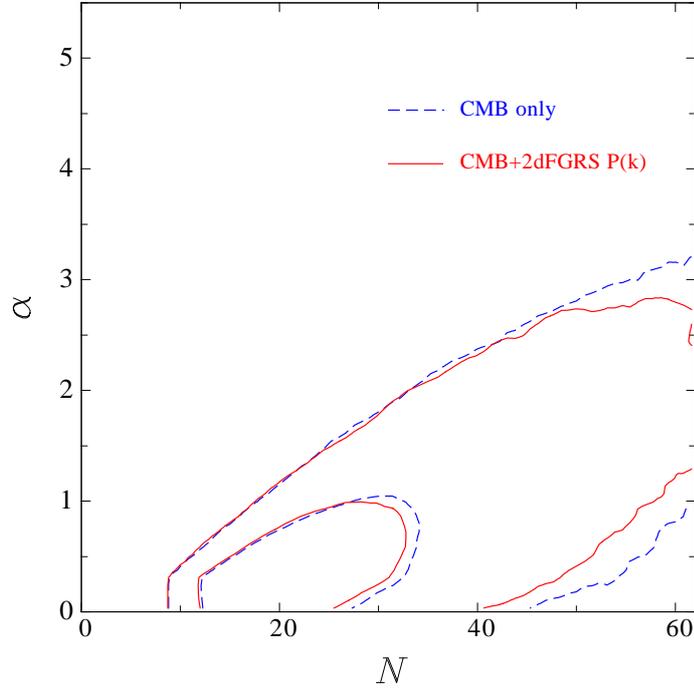


Figura 7.11: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\alpha - N$  para el caso  $b_6$  más  $r$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68% y 95% de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

tro de Hubble durante la inflación (Schwarz et al. 2001). Leach & Liddle (2003) brindan ecuaciones que relacionan los parámetros de flujo del horizonte con las derivadas del potencial inflatón y discuten la motivación de truncar la expansión de la aproximación de *slow-roll* en  $\epsilon_2$ . Las restricciones en los parámetros de flujo del horizonte se muestran en la figura 7.10. La degeneración entre  $r$  y  $n_s$  se traslada a una degeneración entre  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .

Si restringimos nuestra atención a modelos de inflación monomial, en los cuales el potencial es de la forma  $V \propto \phi^\alpha$ , entonces los parámetros de flujo del horizonte pueden ser relacionados con el índice de la ley de potencia,  $\alpha$ , y el número de e-folds de la inflación en la escala considerada,  $N$ , a través de las relaciones (Leach & Liddle

2003b)

$$\epsilon_2 = \frac{4\epsilon_1}{\alpha}, \quad (7.3)$$

$$N = \frac{\alpha}{4} \left( \frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right). \quad (7.4)$$

Para obtener restricciones en estos nuevos parámetros, hemos trasladado nuestros resultados para  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  al plano  $\alpha - N$ . Para esto, hemos restringido nuestra atención a la región donde  $\epsilon_2 > 0$ , siguiendo a Liddle & Leach (2003b), quienes argumentan que esta parte del espacio de los parámetros de flujo del horizonte contiene los modelos de mayor likelihood, en los que la inflación se detiene por una violación a la aproximación de slow-roll. Nuestros resultados se muestran en la figura 7.11. Encontramos que  $\alpha < 2,33$  al 95 % para datos del CMB exclusivamente y  $\alpha < 2,27$  (95 %) para CMB y 2dFGRS. Para obtener este resultado, hemos seguido a Seljak et al. (2005) quienes consideran un número máximo de e-folds,  $N_{\max} = 60$ , en la escala pivot  $k = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ , restringiendo de esta manera al segundo parámetro de flujo del horizonte en  $\epsilon_2 > 0,0167$ . (Debe notarse que Leach & Liddle 2003b utilizaron una escala de pivot diferente a la nuestra). Nuestras restricciones en  $\alpha$  implican que el modelo inflacionario  $\lambda\phi^4$  es descartado. Esta es la primera vez que la información del CMB ha alcanzado la calidad suficiente como para rechazar este modelo por si misma. Seljak et al. (2005) obtuvieron una conclusión semejante mediante la utilización de diferentes datos: los datos del satélite WMAP, el espectro de potencia de las galaxias determinado en base al catálogo SDSS, el espectro de potencia del bosque de Ly- $\alpha$  y la amplitud del espectro de potencia de la materia, inferida a partir del sesgo de las galaxias SDSS.

A continuación nos concentramos en modelos inflacionarios de leyes de potencia, en los cuales el factor de escala del universo crece con el tiempo como  $a \propto t^p$  con  $p > 1$ . En estos modelos, los parámetros de flujo del horizonte están dados simplemente por

$$\epsilon_1 = \frac{1}{p}, \quad (7.5)$$

$$\epsilon_i = 0 \quad i \geq 2. \quad (7.6)$$

Al substituir estas relaciones en la ecuación (7.2) se obtiene una relación entre  $n_s$  y  $r$

$$r = 8(1 - n_s). \quad (7.7)$$

Para analizar este tipo de modelos, corrimos un nuevo conjunto de cadenas fijando la razón entre las amplitudes de los modos tensoriales y escalares utilizando la ecuación

(7.7). En este caso obtenemos  $n_s = 0,978_{-0,010}^{+0,010}$  mediante datos del CMB únicamente y  $n_s = 0,9762_{-0,0092}^{+0,0094}$  cuando se los combina con información del espectro de potencias del 2dFGRS. Las restricciones en  $r$  también son más fuertes, con  $r < 0,31$  al 95 %. Debe notarse que los valores de los parámetros de flujo del Horizonte que brindan un mejor ajuste  $\epsilon_1 = 0,0123_{-0,0082}^{+0,0080}$  (correspondiente a  $p = 81_{-32}^{+163}$ ) y  $\epsilon_2 = -0,004_{-0,040}^{+0,040}$  están en completo acuerdo con el escenario de modelos inflacionarios de leyes de potencia.

## 7.7. Resumen

En este capítulo hemos obtenido nuevas restricciones en los valores de los parámetros cosmológicos básicos, utilizando una combinación de datos recientes del CMB y el espectro de potencia de la distribución de galaxias medido por Cole et al. (2005) en la versión final del catálogo 2dFGRS. Hemos llevado a cabo una exploración minuciosa de los espacios de parámetros considerando modelos con cinco, seis y siete parámetros, adoptando diferentes priors e hipótesis.

Nuestros resultados pueden resumirse como sigue:

- Un modelo en el que se permiten variaciones en cinco parámetros realiza un buen trabajo al describir los datos de CMB y LSS disponibles en la actualidad.
- Existe un impactante acuerdo entre los resultados obtenidos mediante la utilización del CMB únicamente y mediante su combinación con el espectro de potencia del catálogo 2dFGRS.
- Para algunos parámetros, como por ejemplo la densidad física de materia oscura, la constante de Hubble y la amplitud de las fluctuaciones en densidad, se obtiene una mejora significativa en las restricciones cuando el espectro de potencias del 2dFGRS es incluido en el análisis. En particular, inferimos una densidad de materia significativamente inferior al valor  $\Omega_m = 0,3$ .
- Encontramos evidencia de una desviación del espectro de potencia invariante en escala de las fluctuaciones primordiales escalares. Nuestros resultados para el índice espectral escalar son sólo marginalmente consistentes con el valor invariante en escala  $n_s = 1$ ; este espectro es formalmente excluido al nivel de 95 % de confiabilidad. De todas formas esta conclusión se debilita si se abandona la hipótesis de un Universo plano o se permite la presencia de neutrinos masivos.

- Hemos obtenido nuevos límites en la fracción de masa en forma de neutrinos masivos:  $f_\nu < 0,105$  y  $\sum m_\nu < 1,2$  eV al nivel de 95%.
- Encontramos que un amplio rango de universos cerrados es consistente con los datos del CMB. Este rango es restringido si también se consideran datos del espectro de potencia del 2dFGRS. Si se asume además un prior de  $\tau < 0,3$ , el valor medio obtenido es cercano a un Universo plano.
- Confirmamos la evidencia previamente reportada por Efstathiou et al. (2002) de una contribución no nula de energía oscura a la densidad de energía del Universo.
- Encontramos una ecuación de estado de la energía oscura de  $w_{\text{DE}} = -0,85^{+0,18}_{-0,17}$ , consistente con una constante cosmológica.
- Modelos inflacionarios con un potencial de la forma  $V(\phi) \propto \phi^4$  están descartados por nuestro análisis.

# Capítulo 8

## El rol de los priors

*¿Es, pues, cierto o sólo vana fantasía?*

Eurípides, Yone.

Es comúnmente aclamado que con los últimos desarrollos observacionales hemos entrado en una era de cosmología de precisión, en la cual los valores de los parámetros cosmológicos son conocidos con gran precisión. Las mediciones del CMB prácticamente logran este ideal por si mismas, pero son limitadas debido a la presencia de las bien conocidas degeneraciones entre parámetros cosmológicos (Efstathiou & Bond 1999). Algunas de estas degeneraciones pueden romperse mediante la incorporación de otras fuentes de información en el análisis (tales como, por ejemplo, LSS, SN Ia o el espectro de potencia del bosque de Ly- $\alpha$ ). De todas formas, muchas degeneraciones continúan aún después de la incorporación de estos conjuntos de datos. Otra forma de romper degeneraciones es imponiendo priors, los cuales tienen implicancias en los resultados finales (ver, por ejemplo, Bridle et al. 2003a). En este capítulo revisamos las restricciones obtenidas en diferentes conjuntos de parámetros y priors para analizar cuales de nuestros resultados son más robustos.

### 8.1. La densidad de bariones

Uno de los logros más importantes de la cosmología moderna es el acuerdo entre los valores de la densidad física de bariones determinada a partir del CMB y la inferida a partir de la teoría de Nucleosíntesis del Big Bang (BBN) y las líneas de absorción

en los espectros de cuasares distantes. En nuestro análisis, obtenemos un valor de la densidad de bariones de  $\omega_b = 0,0229_{-0,0013}^{+0,0012}$  a partir de información del CMB, totalmente consistente con las últimas restricciones de BBN:  $\omega_b = 0,022 \pm 0,002$  (Cuoco et al. 2004). Este acuerdo se refuerza cuando el espectro de potencia del 2dFGRS es incorporado al análisis, con  $\omega_b = 0,0225_{-0,0010}^{+0,0010}$ . La variación del valor de  $\omega_b$  obtenido con diferentes conjuntos de parámetros y priors es menor que las barras de error de  $1\sigma$ , demostrando que este resultado es extremadamente robusto. Este nivel de acuerdo es inclusive más importante si se consideran las épocas a las que cada conjunto de datos está relacionado: BBN es una teoría que describe procesos que ocurren en el Universo temprano, sólo unos minutos después del Big Bang, mientras que el CMB da una muestra del estado del Universo algunos cientos de miles de años después del Big Bang, y el espectro de potencia de las galaxias muestra el estado presente del Universo, 13.000 millones de años después. El hecho de que es posible brindar una historia coherente a lo largo de un período tan largo de la historia del Universo, con condiciones físicas tan variadas, es una importante verificación del modelo cosmológico.

## 8.2. La densidad de materia oscura

Las terceras filas de las tablas 7.1 y 7.2 muestran que el valor de  $\omega_{dm}$  es altamente insensible a los priors aplicados en los restantes parámetros. La única excepción se encuentra cuando se abandona la hipótesis de la planitud del Universo,  $\Omega_k = 0$ , en cuyo caso se encuentra un menor valor para  $\omega_{dm}$  con barras de error mayores. Las restricciones obtenidas en  $\omega_{dm}$  mediante datos del CMB únicamente, y cuando estos se combinan con información del 2dFGRS son completamente consistentes.

De todas formas, las implicancias del valor de  $\omega_{dm}$  en el valor de la densidad de materia  $\Omega_m$ , dependen de los priors utilizados. En el espacio de parámetros b6 ampliado mediante la incorporación de  $f_\nu$ , mediante el uso de CMB y 2dFGRS combinados, encontramos  $\Omega_m = 0,282 \pm 0,040$ , pero su valor puede ser tan bajo como  $\Omega_m = 0,224 \pm 0,022$  cuando se considera el espacio de parámetros b6 más  $r$ . Con la excepción del caso de neutrinos masivos, todas nuestras estimas de  $\Omega_m$  yacen significativamente por debajo de la elección estándar de 0.3. La figura 8.1 muestra como la elección del espacio de parámetros afecta los resultados obtenidos. Las restricciones en el plano  $\Omega_m - \sigma_8$  en el espacio de parámetros b6 son más fuertes que las obtenidas cuando la fracción de neutrinos masivos,  $f_\nu$ , es incorporada al análisis. En este último caso la región permitida por los datos es mayor, con menores valores de  $\sigma_8$ . Una

situación similar puede verse en la figura 8.2 para el plano  $\Omega_m - h$ . Los valores de  $h$  preferidos por los datos son menores en el caso en que los modelos no-planos son considerados en el análisis. Estas discrepancias causan diferencias en los resultados marginalizados obtenidos para estos parámetros. Esta situación ocurre en muchos otros casos y en general la influencia del espacio de parámetros considerado no es despreciable. Por este motivo, las restricciones en un dado parámetro siempre deben citarse conjuntamente con el espacio de parámetros explorado en el análisis. La figura 8.2 muestra los límites de  $1\sigma$  en la constante de Hubble derivados por el HST Key Project (Freedman et al. 2001). El rango permitido para  $h$  en este análisis es substancialmente más amplio que los obtenidos a partir del CMB y del espectro de potencias del 2dFGRS, demostrando que la inclusión de la medición realizada por el Key Project como un prior tendría poco efecto en nuestros resultados.

### 8.3. La amplitud de las fluctuaciones

Al restringir los valores de los parámetros cosmológicos, sólo utilizamos información de la forma del espectro de potencias de las galaxias y no su amplitud. De esta manera, las restricciones en la amplitud de las fluctuaciones en densidad provienen principalmente de los datos del CMB, con los datos de  $P(k)$  sólo en un rol secundario al mejorar las restricciones en parámetros que pueden dar resultados degenerados para el CMB. Los valores obtenidos para  $\sigma_8$  varían de  $\sigma_8 = 0,678_{-0,072}^{+0,073}$  para el caso b6 más  $f_\nu$  a  $\sigma_8 = 0,817_{-0,079}^{+0,077}$  para modelos no-planos (b6 más  $\Omega_k$ ). Incorporando más datos, como la función de luminosidad en rayos X de los cúmulos de galaxias, u otra medición de la amplitud de las fluctuaciones puede ayudar a mejorar las restricciones en  $\sigma_8$ , pero el modelado teórico de estos datos observacionales es menos directo. En la figura 8.1 comparamos nuestros resultados con las restricciones obtenidas a partir de observaciones de lentes gravitacionales débiles (*weak lensing*) de Hoekstra et al. (2002). Henry (2004) utilizó la función de temperatura de los cúmulos de galaxias en rayos X para encontrar  $\sigma_8 = 0,66 \pm 0,16$ , en buen acuerdo con el resultado obtenido para los modelos b6 más la fracción de masa en neutrinos masivos. Otros grupos han obtenido restricciones similares (Bacon et al. 2003; Heymans et al. 2005).

### 8.4. La profundidad óptica

La profundidad óptica a la superficie de último scattering tiene un efecto importante en casi todos los parámetros cosmológicos restantes. La señal de que  $\tau > 0$

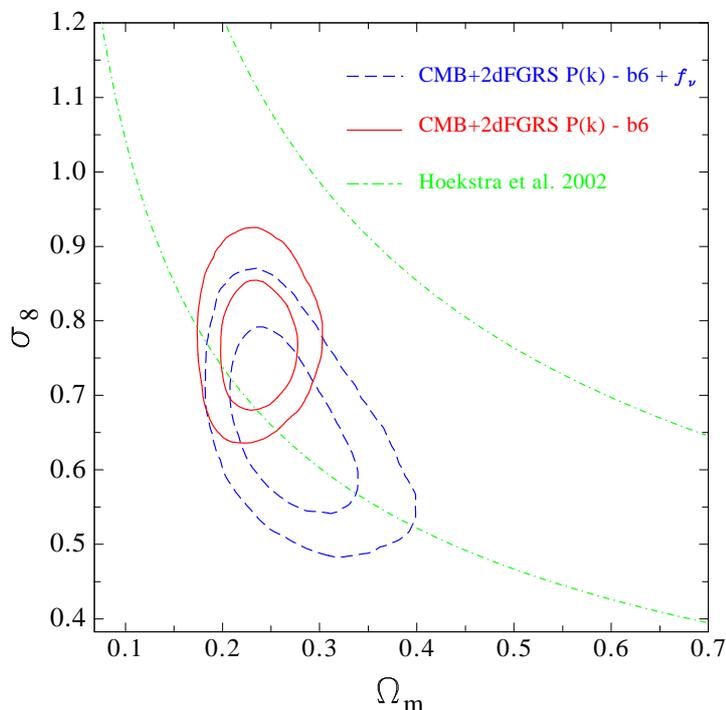


Figura 8.1: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_m - \sigma_8$  obtenida utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS para diversos espacios de parámetros. La línea sólida muestra los contornos de 68% y 95% de confiabilidad obtenidos para el caso b6. Las líneas de trazos corresponden a los resultados obtenidos cuando la fracción de neutrinos masivos  $f_\nu$  es incluida en el análisis. Las líneas a puntos y trazos muestran las restricciones obtenidas en base al efecto de lente débil por Hoekstra et al. (2002).

proviene de la correlación cruzada de las fluctuaciones en temperatura y polarización en escalas angulares grandes. Hansen et al. (2004) llevó a cabo un análisis de los datos del primer año de vuelo del satélite WMAP en forma separada para los hemisferios norte y sur, y encontró que mientras que el hemisferio norte privilegia un valor de  $\tau = 0$ , el hemisferio sur prefiere un valor de  $\tau = 0,24_{-0,07}^{+0,06}$ , inconsistente con  $\tau = 0$  al nivel de  $2\sigma$ , sugiriendo que la señal de  $\tau > 0$  puede deberse a estructuras en el hemisferio sur.

En su análisis de los datos del primer año de vuelo del satélite WMAP, Spergel et al. (2003) impusieron un prior de  $\tau < 0,3$ , justificando esta elección con la necesidad de evitar regiones ‘no-físicas’ del espacio de parámetros. En la Sección 7.4

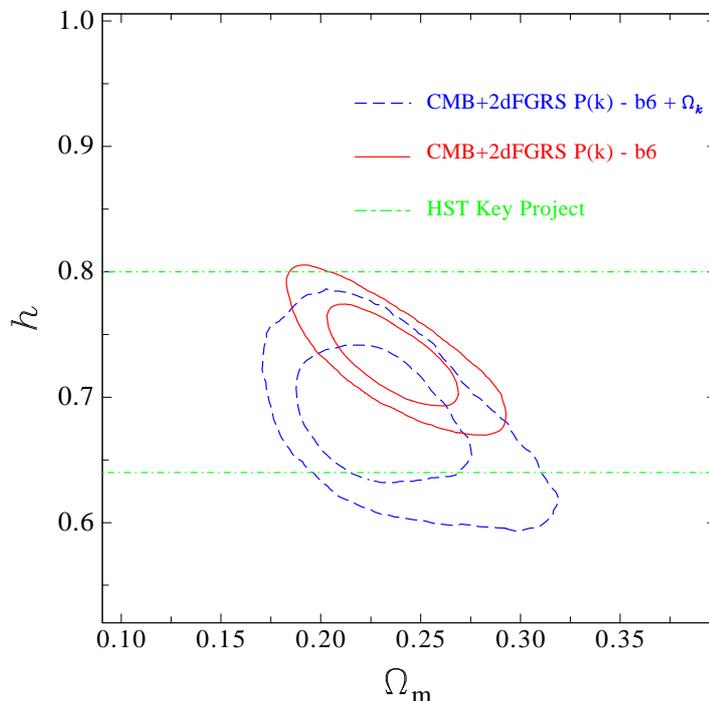


Figura 8.2: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_m - h$  obtenida utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS para diversos espacios de parámetros. La línea sólida muestra los contornos de 68% y 95% de confiabilidad obtenidos para el caso b6. Las líneas de trazos corresponden a los resultados obtenidos cuando se incluyen modelos no planos (b6 más  $\Omega_k$ ) la fracción de neutrinos masivos  $f_\nu$  es incluida en el análisis. Las líneas a puntos y trazos muestran las restricciones de  $1\sigma$  en  $h$  obtenidas por el HST Key Project (Freedman et al. 2001).

demostramos que, al igual que fuera señalado en Tegmark et al (2004b), este prior tiene un fuerte efecto en los resultados obtenidos. En particular, el prior de  $\tau < 0,3$  es requerido para reconciliar las restricciones en  $\Omega_k$  con la predicción de planitud de la inflación en el espacio de parámetros b6 más  $\Omega_k$ , y para producir restricciones más precisas en las masas de los neutrinos en el caso b6 más  $f_\nu$ . El efecto de este prior debe ser tenido en cuenta al interpretar los resultados de análisis multiparamétricos.

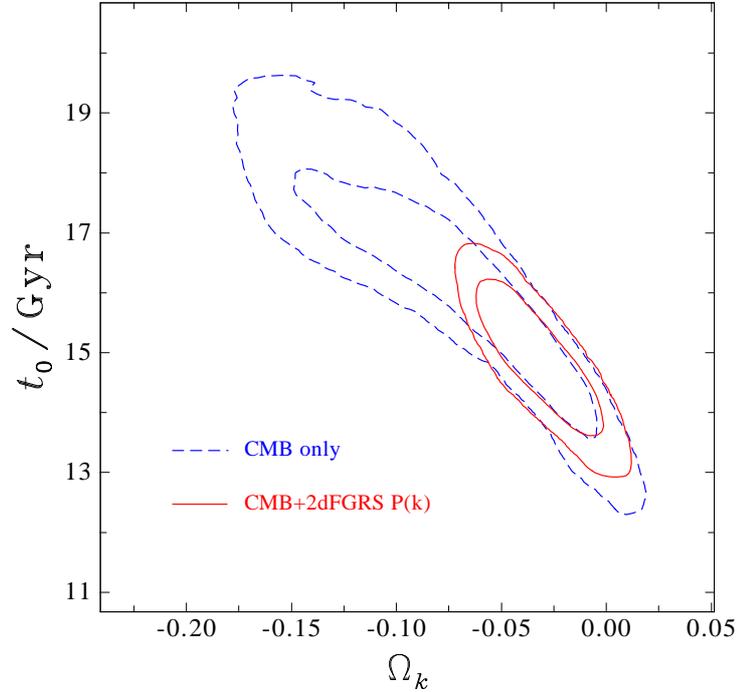


Figura 8.3: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_k - t_0$  para el caso b6 más  $\Omega_k$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68 % y 95 % de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

## 8.5. El prior de la planitud

El prior de  $\Omega_k = 0$  es comúnmente utilizado al obtener restricciones en parámetros cosmológicos. Es importante recordar que, si la hipótesis de planitud es dejada de lado, el valor privilegiado para este parámetro es  $\Omega_k < 0$  y sólo marginalmente consistente con  $\Omega_k = 0$ . Además esta hipótesis tiene un gran impacto en los valores de muchos otros parámetros cosmológicos.

El valor obtenido para la edad del Universo,  $t_0$ , muestra un cambio importante cuando se permiten variaciones en  $\Omega_k$ , y es sólo marginalmente consistente con los valores encontrados cuando  $\Omega_k = 0$ . La figura 8.3 muestra los contornos de la función de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_k - t_0$ . Existe una clara degeneración entre estos dos parámetros, donde los menores valores de  $\Omega_k$  privilegian valores más altos de  $t_0$ ; la incorporación del espectro de potencias del 2dFGRS no rompe esta degeneración

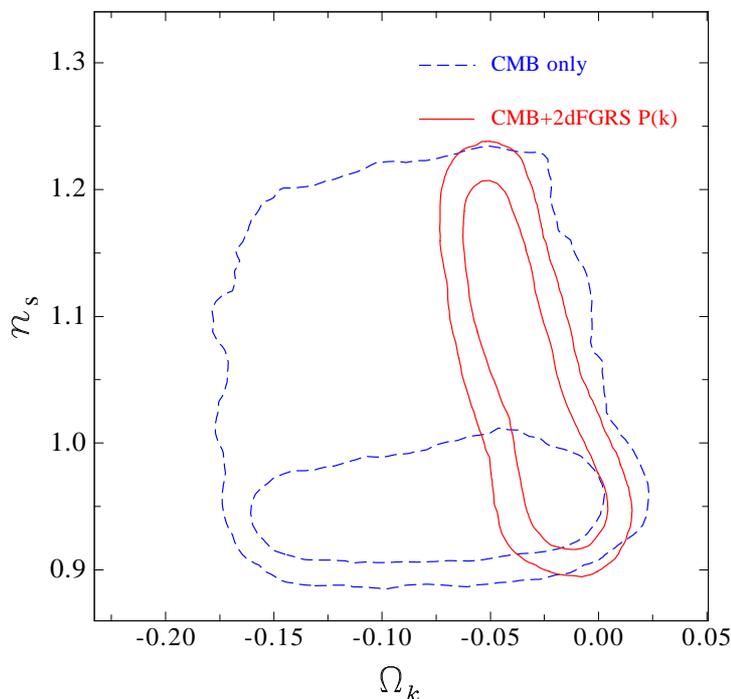


Figura 8.4: La distribución de likelihood marginalizada en el plano  $\Omega_k - n_s$  para el caso b6 más  $\Omega_k$ . La línea de trazos muestra los contornos de 68 % y 95 % de confiabilidad obtenidos mediante información del CMB únicamente. Las líneas sólidas corresponden a las restricciones obtenidas utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del 2dFGRS.

completamente. La misma degeneración puede verse en el plano  $\Omega_k - h$ , lo cual implica que un prior en la constante de Hubble proveniente del HST key project (Freedman et al. 2001) puede mejorar la situación, pero inclusive en ese caso, las restricciones en estos parámetros son menos robustas que en el caso plano.

El índice espectral,  $n_s$ , también merece atención especial. En la sección 7.2, encontramos que las restricciones en  $n_s$  en el modelo b6 son sólo marginalmente consistentes con el valor  $n_s = 1$ ; este espectro es formalmente excluido al nivel de confiabilidad de 95 %. La figura 8.4 muestra los contornos bidimensionales marginalizados en el plano  $\Omega_k - n_s$ . Cuando sólo se utiliza información del CMB, hay una amplia región permitida, que disminuye considerablemente cuando se utiliza también el espectro de potencias del 2dFGRS. En ese caso, hay una correlación entre estos parámetros que produce restricciones en  $n_s$  mucho más anchas que las obtenidas en el caso especial

en que  $\Omega_k = 0$ . Teniendo en cuenta que la evidencia para  $n_s < 1$  es más débil cuando se consideran espacios de parámetros más generales (como por ejemplo, el caso b6 más  $f_\nu$ ) y que los datos actuales poseen una débil preferencia por modelos cerrados (aún cuando se aplica el prior  $\tau < 0,3$ ), se debe tener prudencia antes de argumentar una detección de una desviación significativa de la invariancia en escala.

## 8.6. Modos tensoriales

Otro prior comúnmente aplicado es la hipótesis de que los modos tensoriales pueden ser despreciados. Es importante incluir  $r$  como un parámetro libre, no sólo porque tiene importantes implicancias para modelos inflacionarios, sino también porque muchos parámetros poseen degeneraciones con la amplitud de los modos tensoriales, lo cual resulta en un incremento de las regiones permitidas para estos parámetros. Los parámetros que son influenciados más fuertemente por esta hipótesis son  $n_s$ ,  $\Omega_m$  y  $h$ .

# Capítulo 9

## Selección de Modelos

*Hubo una batalla en el cielo.*

Apocalipsis 12:7

### 9.1. ¿Cuántos parámetros deben variar?

Hemos demostrado que un modelo en el cual se permiten variaciones en cinco parámetros da una buena descripción de las observaciones del CMB y el 2dFGRS. Además hemos explorado espacios de seis o siete parámetros encontrando que en algunos casos los resultados dependen de la elección particular de dicho espacio. Pero, es justificada la incorporación de parámetros libres adicionales a nuestro conjunto b5?

La forma más sencilla de realizar una comparación objetiva de distintos modelos es determinar cual de ellos da una mejor descripción de los datos, lo cual se realiza generalmente mediante la comparación de los cocientes de sus respectivos likelihoods. De todas formas, es importante compensar por el hecho de que la incorporación de nuevos parámetros debe necesariamente mejorar el ajuste de los datos. Liddle (2004) ha propuesto el uso de dos simples estadísticas que cuantifican el nivel de mejora en la descripción de un conjunto de datos cosmológicos cuando un nuevo parámetro libre es introducido en el modelo teórico. De esta manera, permiten analizar si la incorporación de un nuevo parámetro es justificada o no, es decir, si produce una mejora en la descripción de los datos mayor de la esperada. Las estadísticas, el Criterio de Información de Akaike (AIC; Akaike 1974) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC; Schwarz 1978) han sido utilizadas numerosas veces en otras ramas de la física, pero han sido prácticamente ignoradas en cosmología. La definición de estas estadísticas

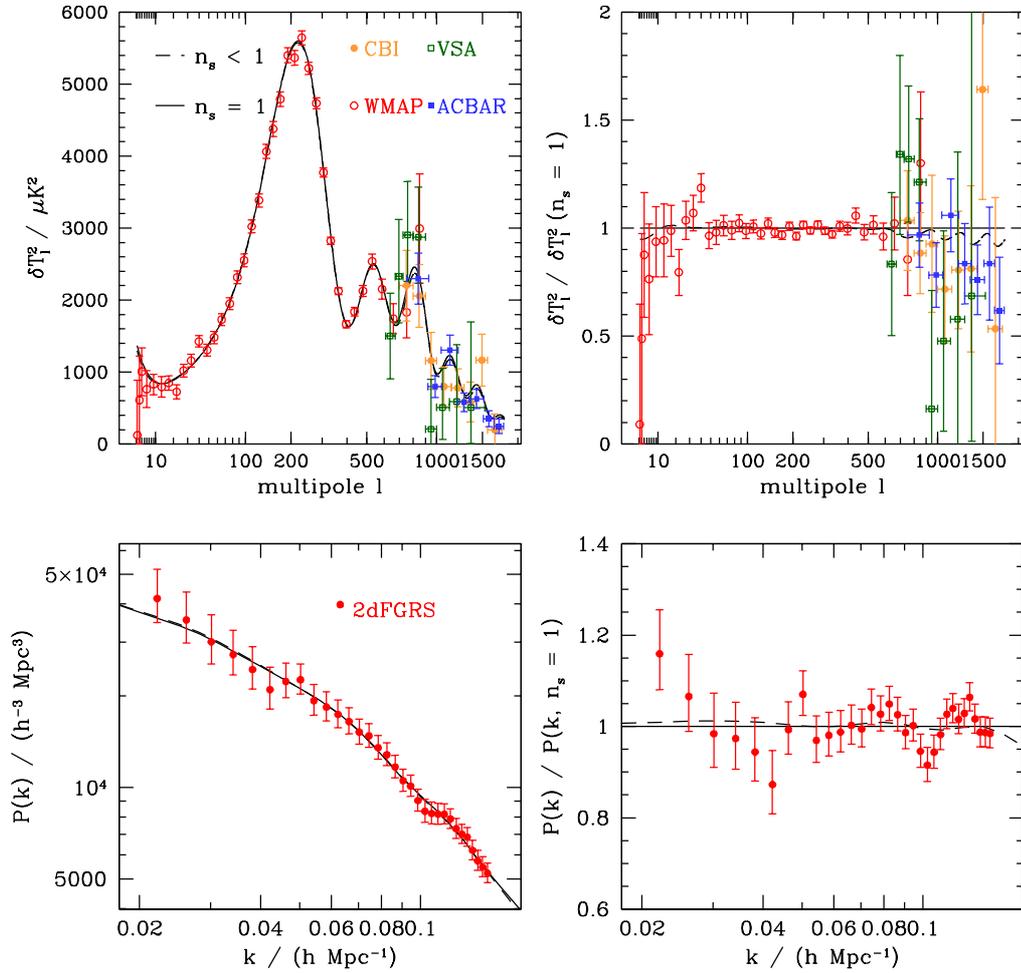


Figura 9.1: juste de los modelos a los datos del CMB (paneles superiores) y el espectro de potencia del 2dFGRS (paneles inferiores) para los casos b5 (línea sólida) y b6 (línea de trazos), con los valores de los parámetros listados en la tabla 7.2. Los  $P(k)$  correspondiente a los modelos han sido convolucionados con la función ventana del catálogo 2dFGRS de Cole et al. (2005). En los paneles de la derecha, las curvas de los modelos y los datos han sido divididas por el mejor ajuste del modelo b5 para expandir el rango del eje y.

Cuadro 9.1: Número de parámetros, likelihoods y los valores de las estadísticas AIC y BIC para los diversos modelos analizados en este trabajo. En todos los casos,  $N_{\text{data}} = 1403$ .

Modelo	$N_{\text{par}}$	$-2 \ln(\mathcal{L})$	AIC	BIC
b5	5	1495.8	1505.8	1532.1
b6	6	1492.1	1504.1	1535.6
b6 + $f_\nu$	7	1491.3	1505.3	1542.0
b6 + $\Omega_k$	7	1490.4	1504.4	1541.1
b6 + $w_{\text{DE}}$	7	1491.5	1505.5	1542.2
b6 + $r$	7	1491.7	1505.7	1542.4

es muy sencilla

$$\text{AIC} = -2 \ln(\mathcal{L}) + 2N_{\text{par}}, \quad (9.1)$$

$$\text{BIC} = -2 \ln(\mathcal{L}) + N_{\text{par}} \ln(N_{\text{data}}), \quad (9.2)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el mayor likelihood,  $N_{\text{par}}$  es el número de parámetros variados y  $N_{\text{data}}$  es el número de datos incluidos en el análisis. El modelo que mejor describe los datos mediante el uso más económico de los parámetros es el que minimiza estas cantidades. En ambas expresiones, el primer término favorece al modelo que da un mejor ajuste a los datos, mientras que el segundo favorece al modelo con el menor número de parámetros. Debe notarse que, como el valor  $\ln(N_{\text{data}}) > 2$  en nuestro análisis, el BIC da una mayor penalización al número de parámetros libres que el AIC.

La tabla 9.1 brinda un resumen de los números de parámetros, likelihoods y los valores de las estadísticas AIC y BIC para los modelos considerados en este trabajo. La incorporación de nuevos parámetros lleva claramente a la mejora en la descripción de los datos por el modelo. La información en el valor de AIC es menos clara. Todos los modelos muestran una leve disminución del valor de AIC comparados con el caso b5, pero la estadística BIC muestra una situación diferente. De acuerdo a Liddle (2004), una diferencia de 2 en el valor de BIC debe ser considerada como ‘evidencia positiva’ y 6 como ‘fuerte evidencia’ en favor del modelo con el menor valor de BIC. Por lo tanto, aparentemente hay una ‘evidencia positiva’ de que no es necesario expandir el espacio de parámetros b5 para permitir variaciones en el índice espectral escalar, y

‘fuerte evidencia’ de que no debe incorporarse un parámetro libre extra.

Esta conclusión, como la base misma de la fórmula para BIC, parece contradecir el enfoque de este trabajo. Para datos con errores gaussianos, es de esperar que la incorporación de un parámetro extra reduzca  $-2 \ln \mathcal{L}$  por la regla usual de los ‘grados de libertad’ (aunque debe notarse que esto se aplica estrictamente sólo a parámetros relacionados linealmente con los datos, tales como coeficientes de expansiones polinomiales). Además, la disminución en  $-2 \ln \mathcal{L}$  debe distribuirse como  $\chi^2$  con un grado de libertad si el nuevo parámetro no es parte del verdadero modelo, independientemente del número de datos. Por lo tanto, una reducción de  $-2 \ln \mathcal{L}$  en 4 implica un rechazo al 95 % de confiabilidad de que este nuevo parámetro no es requerido. Por lo tanto, el hecho de que incluir desviaciones de la invariancia en escala reduce  $-2 \ln \mathcal{L}$  en 3.7 implica una evidencia marginal de la realidad de la detección de  $n_s < 1$ . Este razonamiento corresponde bien con el enfoque del AIC, mientras el coeficiente 2 en el término  $2N_{\text{par}}$  pueda ser ajustable de acuerdo al nivel de significancia de interés.

La estadística BIC es una forma aproximada de la ‘evidencia bayesiana’ (Hobson, Bridle & Lahav 2002, Liddle 2004, Trotta 2005). Una de las condiciones que deben satisfacerse para que BIC sea una buena aproximación de la evidencia bayesiana es la independencia de los puntos en los datos considerados. Al fijar  $N_{\text{data}} = 1403$  en la definición de BIC en la ecuación (9.2), efectivamente estamos tratando a todos los puntos considerados en nuestro análisis como independientes. Por lo tanto, nuestro cálculo de BIC brinda una impresión demasiado pesimista del impacto de incorporar nuevos parámetros. Si, por ejemplo, se aplica a los datos un análisis de ‘automodos’, o una compresión radical a los puntos del CMB, eso produciría un número mucho menor de puntos genuinamente independientes que describan completamente las mediciones (Bond, Jaffe & Knox 2000). Los valores de las estadísticas AIC y BIC serían más cercanos para este conjunto reducido de puntos. Uno podría argumentar que se debería calcular la evidencia bayesiana en vez de aproximaciones como el BIC. Hay dos razones por las que no hemos hecho esto. Primero, la evidencia bayesiana es difícil de calcular utilizando técnicas MCMC, aunque existen algoritmos rápidos en desarrollo (Mukherjee, Parkinson & Liddle 2006). Segundo, la definición de los priors en el espacio de parámetros es parte del modelo que está siendo testeado y consideramos que esto es un punto débil en el método. Como la elección del prior es arbitraria hasta cierto punto, es posible en principio elegir un prior tal que la evidencia bayesiana crezca por la adición de nuevos parámetros. Por esto preferimos utilizar un argumento frecuentista y simplemente requerir una reducción en  $-2 \ln \mathcal{L}$  del orden de la unidad para argumentar la detección de un nuevo grado de libertad.

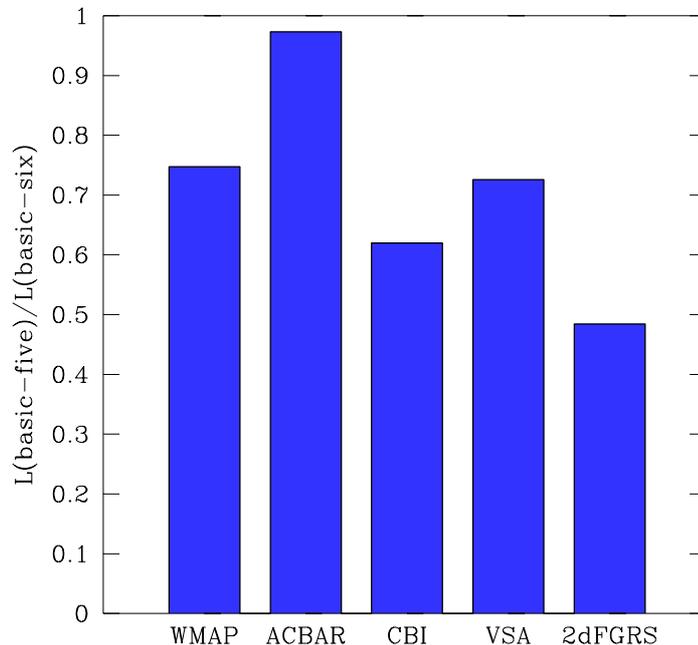


Figura 9.2: Cocientes de los likelihoods de los mejores ajustes obtenidos en los modelos b5 y b6 para los conjuntos de datos individuales utilizados en nuestro análisis.

## 9.2. Detalles de la evidencia de $n_s < 1$

Dejando de lado los problemas surgidos del uso de la estadística BIC, es importante analizar los resultados para el índice espectral escalar obtenidos en los modelos b5 y b6 con más detalle, ya que la detección de un valor de  $n_s < 1$  posee importantes implicancias para los modelos inflacionarios. Para recapitular, en la sección 7.1 fijamos  $n_s = 1$ , es decir el valor invariante en escala del índice espectral de las fluctuaciones primordiales escalares. En la sección 7.2 tratamos al índice espectral como un parámetro libre y encontramos que el valor  $n_s = 1$  estaba en el límite de 95 % de confiabilidad. La figura 9.1 muestra muestra los modelos correspondientes a los mejores ajustes en cada caso, comparados con las observaciones del espectro de potencia de la temperatura del CMB (paneles superiores) y los datos del espectro de potencia del 2dFGRS (paneles inferiores) para los modelos b5 (línea sólida) y b6 (línea a trazos). Las diferencias entre ambos modelos son pequeñas y se dan principalmente fuera de las escalas cubiertas por WMAP. Esto puede verse más claramente

en los paneles del lado derecho, en el cual los modelos y los datos han sido divididos por el modelo con  $n_s = 1$ . La figura 9.2 muestra los cocientes de likelihood entre los modelos b5 y b6 para cada conjunto de datos en forma separada. Es claro que los datos que son principalmente responsables de la desviación del índice espectral del valor invariante en escala son las mediciones de CBI y el espectro de potencias del 2dFGRS: el modelo b6 representa sólo una modesta mejora en la descripción de los datos de WMAP y VSA, mientras que la incorporación del parámetro extra produce muy poca diferencia en cuanto bien son reproducidos los datos de ACBAR. De cualquier manera, existe una impactante consistencia entre los distintos datos: un error sistemático en uno de ellos podría haber causado una mejora en el likelihood general con la introducción de una desviación de la invariancia en escala, pero con el costo de provocar un peor ajuste en alguno de los datos correctos. Esto no es lo que encontramos, más aún, el 2dFGRS fortalece una tendencia ya presente en los datos del CMB. Aún así, el resultado final se encuentra en condiciones difíciles en términos de significancia estadística: un límite del 95 % de confiabilidad no es suficiente para aclamar una firme detección de un efecto de esta importancia. Lo mejor que puede decirse es que hasta la cantidad más modesta de información extra llevaría las cosas al territorio de una detección firme.

El mensaje final de este análisis es que una comparación de las restricciones obtenidas en diferentes estudios requiere la consideración cuidadosa de los parámetros libres y los priors implementados. Aunque los datos actuales miden una combinación de parámetros con alta precisión, aún existen degeneraciones. Como hemos discutido, existe una alta posibilidad de que las observaciones se encuentren en el límite de poder rechazar el modelo más sencillo, dado por el espacio de parámetros b5 a favor de un modelo más complicado. De todas formas, aún en ese caso se requerirá mucho trabajo antes de que tal desviación del ‘modelo estándar’ pueda ser interpretada en forma única.

## Capítulo 10

# Análisis de la consistencia entre 2dFGRS y SDSS

*¡La enemistad sea entre vosotros! Es demasiado pronto para una alianza. Buscad por caminos separados, pues sólo así la verdad os será revelada.*

Friedrich von Schiller

En este capítulo reemplazamos el espectro de potencia del catálogo 2dFGRS medido por Cole et al. (2005) por el espectro de potencia de la distribución de galaxias en el catálogo SDSS determinado por Tegmark et al. (2004a) y examinamos el impacto que este cambio tiene sobre los valores obtenidos para los parámetros cosmológicos. Existen algunas diferencias entre estas dos mediciones del espectro de potencia. El catálogo SDSS fue seleccionado en el rojo, mientras que el catálogo 2dFGRS fue seleccionado en el azul. En su determinación de  $P(k)$ , Tegmark et al. utilizaron un sofisticado método de deconvolución de auto-modos para intentar remover los efectos de la función ventana del catálogo y de las distorsiones en el espacio de redshift; Cole et al. en cambio, utilizaron un enfoque simple basado en la transformada de Fourier de la densidad de galaxias observada que compara los datos a modelos convolucionados con la función ventana del catálogo, en escalas en donde las distorsiones en el espacio de redshifts son cuantificables por la comparación con los resultados de simulaciones numéricas realistas.

Tegmark et al. (2004b) utilizaron los datos del primer año de vuelo del satélite WMAP y el espectro de potencia de las galaxias del SDSS para obtener restricciones

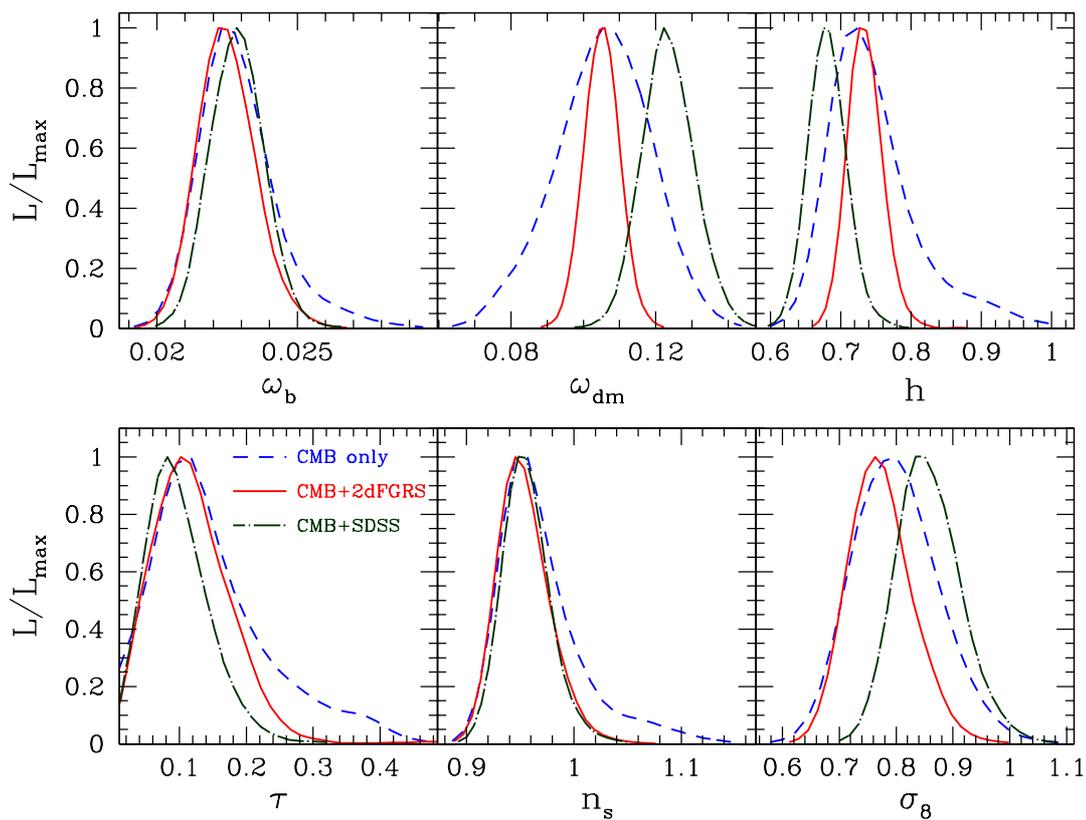


Figura 10.1: Distribución de likelihood marginalizada a una dimensión para el espacio de parámetros  $\theta_6$  obtenida mediante el uso de información del CMB (línea a trazos), del CMB y el espectro de potencias del 2dFGRS (línea sólida) y del CMB y el espectro de potencias del SDSS (línea a puntos y trazos).

en los valores de parámetros cosmológicos. Estos autores modelaron el espectro de potencia de las galaxias con un modelo no-lineal correspondiente a las fluctuaciones en la materia multiplicado por un factor de bias independiente de la escala. Los datos del espectro de potencia fueron utilizados en escalas mayores a  $k < 0,20 h \text{ Mpc}^{-1}$ . No es claro que un bias constante sea una buena aproximación en escalas en las cuales las fluctuaciones en densidad comienzan a ser regidas por el régimen no-lineal. En nuestro análisis adoptamos un enfoque más sencillo y asumimos que el espectro de potencia de las galaxias puede ser asociado con el espectro de potencia lineal de la materia a través de un factor de bias constante, y restringimos nuestro análisis a las mismas escalas utilizadas en los capítulos anteriores para el análisis del 2dFGRS ( $k_{\text{max}} = 0,15 h \text{ Mpc}^{-1}$ ). Como fue mencionado anteriormente, las simulaciones utilizadas por Cole et al. indican que los efectos de la no-linealidad y de las distorsiones en el espacio de redshifts no son importantes en estas escalas.

La tabla 10.1 muestra los resultados obtenidos al repetir el análisis descrito en los capítulos anteriores utilizando el espectro de potencia del SDSS en reemplazo de su contraparte del 2dFGRS. En su mayoría, los resultados obtenidos de esta manera son compatibles con los encontrados utilizando el  $P(k)$  del catálogo 2dFGRS. Sin embargo, existen casos en los que los resultados son diferentes. Esto se muestra en la figura 10.1, donde se comparan las restricciones en algunos parámetros correspondientes al modelo  $b_6$  obtenidas utilizando únicamente información del CMB (en línea a trazos), del CMB combinada con 2dFGRS (línea sólida) y CMB combinada con SDSS (línea a trazos y puntos). En tres de los seis parámetros presentados,  $\omega_b$ ,  $\tau$  y particularmente en  $n_s$ , existe un acuerdo impactante entre los diferentes resultados; los picos en las distribuciones de likelihoods coinciden en los casos de información del CMB, y en que ésta es combinada con información del espectro de potencia. De todas formas, para los otros tres parámetros que se muestran en el gráfico,  $\omega_{\text{dm}}$ ,  $h$  y  $\sigma_8$ , el acuerdo es menos significativo. Las diferencias en los valores recobrados de  $h$  y  $\sigma_8$  están determinadas por el cambio en los resultados para  $\omega_{\text{dm}}$ . Como fue señalado en el Capítulo 7, el pico en la distribución de likelihood para el caso de información proveniente sólo del CMB y ésta combinada con 2dFGRS, muestra un muy buen acuerdo. Sin embargo existe una clara discrepancia con los valores preferidos para los parámetros cuando se utiliza el espectro del SDSS. Este resultado es más importante para la densidad de materia oscura,  $\omega_{\text{dm}}$ . Cole et al. (2005) encontraron que el espectro de potencia del SDSS tiene una forma un poco más ‘azul’ que la del 2dFGRS, favoreciendo de esta manera mayores valores de  $\Omega_{\text{m}}$ .

Cuadro 10.1: Restricciones de 68 % de confiabilidad (salvo que se exprese lo contrario) en los parámetros cosmológicos obtenidos utilizando información del CMB combinada con el espectro de potencias del SDSS para distintos espacios de parámetros.

	b5	b6	b6 + $f_\nu$	b6 + $\Omega_k$	b6 + $w_{DE}$	b6 + $r$
$\Omega_k$	0	0	0	$-0,070^{+0,037}_{-0,039}$	0	0
$\Theta$	$1,0493^{+0,0036}_{-0,0036}$	$1,0436^{+0,0048}_{-0,0047}$	$1,0436^{+0,0047}_{-0,0048}$	$1,0408^{+0,0051}_{-0,0052}$	$1,0440^{+0,0048}_{-0,0049}$	$1,0452^{+0,0047}_{-0,0047}$
$\omega_{dm}$	$0,1227^{+0,0074}_{-0,0073}$	$0,1234^{+0,0070}_{-0,0071}$	$0,1304^{+0,0094}_{-0,0094}$	$0,106^{+0,010}_{-0,010}$	$0,104^{+0,012}_{-0,012}$	$0,1203^{+0,0069}_{-0,0069}$
$\omega_b$	$0,0242^{+0,0006}_{-0,0006}$	$0,0228^{+0,0009}_{-0,0009}$	$0,0225^{+0,0009}_{-0,0009}$	$0,0224^{+0,0011}_{-0,0012}$	$0,0235^{+0,0013}_{-0,0013}$	$0,0234^{+0,0010}_{-0,0010}$
$f_\nu$	0	0	< 0,104 (95 %)	0	0	0
$\tau$	$0,173^{+0,034}_{-0,036}$	$0,097^{+0,046}_{-0,045}$	$0,098^{+0,043}_{-0,044}$	$0,147^{+0,071}_{-0,077}$	$0,124^{+0,065}_{-0,064}$	$0,099^{+0,046}_{-0,046}$
$w_{DE}$	-1	-1	-1	-1	$-0,45^{+0,23}_{-0,23}$	-1
$n_s$	1	$0,956^{+0,020}_{-0,020}$	$0,947^{+0,022}_{-0,022}$	$0,958^{+0,026}_{-0,032}$	$0,988^{+0,040}_{-0,039}$	$0,974^{+0,024}_{-0,025}$
$\log_{10}(10^{10} A_s)$	$3,273^{+0,057}_{-0,061}$	$3,100^{+0,098}_{-0,098}$	$3,097^{+0,094}_{-0,095}$	$3,12^{+0,14}_{-0,15}$	$3,10^{+0,13}_{-0,13}$	$3,100^{+0,097}_{-0,098}$
$r$	0	0	0	0	0	< 0,31 (95 %)
$\Omega_{DE}$	$0,710^{+0,030}_{-0,030}$	$0,682^{+0,035}_{-0,035}$	$0,603^{+0,070}_{-0,073}$	$0,577^{+0,083}_{-0,088}$	$0,557^{+0,085}_{-0,085}$	$0,706^{+0,034}_{-0,034}$
$t_0/\text{Gyr}$	$13,35^{+0,12}_{-0,12}$	$13,65^{+0,20}_{-0,20}$	$13,97^{+0,26}_{-0,27}$	$16,2^{+1,2}_{-1,1}$	$14,35^{+0,56}_{-0,50}$	$13,54^{+0,21}_{-0,21}$
$\Omega_m$	$0,289^{+0,030}_{-0,030}$	$0,317^{+0,035}_{-0,035}$	$0,397^{+0,073}_{-0,070}$	$0,49^{+0,12}_{-0,11}$	$0,443^{+0,084}_{-0,085}$	$0,294^{+0,034}_{-0,034}$
$\sigma_8$	$0,947^{+0,039}_{-0,040}$	$0,858^{+0,054}_{-0,054}$	$0,732^{+0,084}_{-0,083}$	$0,773^{+0,071}_{-0,071}$	$0,57^{+0,15}_{-0,16}$	$0,853^{+0,055}_{-0,055}$
$z_{re}$	$17,5^{+2,3}_{-2,4}$	$11,9^{+3,9}_{-3,9}$	$12,2^{+3,8}_{-3,9}$	$14,8^{+7,1}_{-7,1}$	$13,4^{+4,7}_{-4,9}$	$11,8^{+3,8}_{-3,9}$
$h$	$0,714^{+0,021}_{-0,021}$	$0,681^{+0,026}_{-0,026}$	$0,626^{+0,040}_{-0,042}$	$0,519^{+0,064}_{-0,067}$	$0,544^{+0,047}_{-0,047}$	$0,701^{+0,028}_{-0,029}$
$\sum m_\nu/\text{eV}$	0	0	< 1,27 (95 %)	0	0	0

Existen otras dos discrepancias entre los resultados obtenidos con el SDSS y el 2dFGRS  $P(k)$  en nuestros modelos de seis parámetros libres más uno adicional. Cuando se relaja la hipótesis de un Universo plano, encontramos que las restricciones en  $\Omega_k$  son más débiles en el caso del SDSS,  $\Omega_k = -0,070^{+0,037(0,058)}_{-0,039(0,079)}$ ; el rango permitido es de aproximadamente el doble que en el caso del 2dFGRS  $P(k)$ . Esto se debe a que en las escalas utilizadas en nuestro análisis, el espectro de potencia del SDSS realiza un trabajo más pobre restringiendo  $\Omega_m$  comparado con el del 2dFGRS  $P(k)$ , y por lo tanto no es tan efectivo para romper la degeneración geométrica.

En el conjunto de parámetros básico más la ecuación de estado de la energía oscura, utilizando el SDSS  $P(k)$  encontramos  $w_{DE} = -0,45^{+0,23}_{-0,23}$ , mucho mayor que la encontrada en el caso del 2dFGRS  $P(k)$  e inconsistente con una constante cosmológica. Si también incluimos los datos de SNIa de Riess et al. (2004), obtenemos entonces un valor para la ecuación de estado que es consistente con nuestros resultados previos:  $w_{DE} = -0,89^{+0,19}_{-0,18}$ . Nuevamente, la discrepancia en el resultado para la ecuación de estado puede rastrearse a los valores de  $\omega_{dm}$  privilegiados. MacTavish et al. (2006) encontraron resultados similares a los nuestros utilizando el espectro de potencia de galaxias del SDSS.

La figura 7.8 muestra la degeneración existente en el plano  $\Omega_m - w_{DE}$  cuando sólo se incluye información del CMB en el análisis. Al incorporar información del espectro de potencia  $P(k)$  esta degeneración se rompe. Si el espectro de potencia de las galaxias privilegia valores altos de  $\Omega_m$ , como en el caso de los datos del SDSS, entonces se obtiene como resultado un valor más alto de  $w_{DE}$ .

Es posible que estas diferencias entre los catálogos 2dFGRS y SDSS se deban simplemente a una desafortunada cantidad de varianza cósmica, pero claramente se obtendría una mayor confianza en los resultados si éstos mostraran una mayor consistencia. Por lo tanto es importante que cada catálogo sea analizado utilizando diversas técnicas y metodologías, de igual manera que lo ocurrido con posterioridad a la publicación del espectro de potencia de la versión preliminar del 2dFGRS por Percival et al. (2001) 2dFGRS (Tegmark, Zaldarriaga & Hamilton 2001). Estas comparaciones encontraron resultados consistentes, pero dado que los nuevos errores son mucho menores, una nueva comparación sería mucho más exigente.

## Parte III

# Cosmología con cúmulos de galaxias

# Capítulo 11

## La función de correlación cruzada cúmulo-galaxia: resultados observacionales

*La confusión aparente es un producto del buen orden.*

Sun Tzu

### 11.1. Introducción

El análisis estadístico de los cúmulos y grupos de galaxias se cuenta entre las herramientas estadísticas más poderosas para el estudio de la estructura en gran escala del universo. En los modelos jerárquicos de formación de estructuras, estos objetos se forman por la ampliación gravitacional de las fluctuaciones primordiales en el campo de densidad, de forma que pueden ser utilizadas para caracterizar la distribución espacial de los picos de dicho campo. Además, al ser los objetos gravitacionalmente ligados más grandes del universo y cubrir un amplio rango de masas, pueden ser utilizados como laboratorios para determinar el papel de los diferentes procesos astrofísicos que rigen la formación de galaxias.

Los primeros análisis estadísticos en este tipo de objetos fueron basados en catálogos de cúmulos de galaxias construidos en base a identificación visual (Abell, 1958; Abell, Olowin & Corwin, 1989). La función de correlación cúmulo-cúmulo  $\xi_{cc}(r)$  ha sido la herramienta preferida para dichos análisis, brindando un medio estadístico sencillo y conveniente para caracterizar su distribución espacial y obtener restricciones

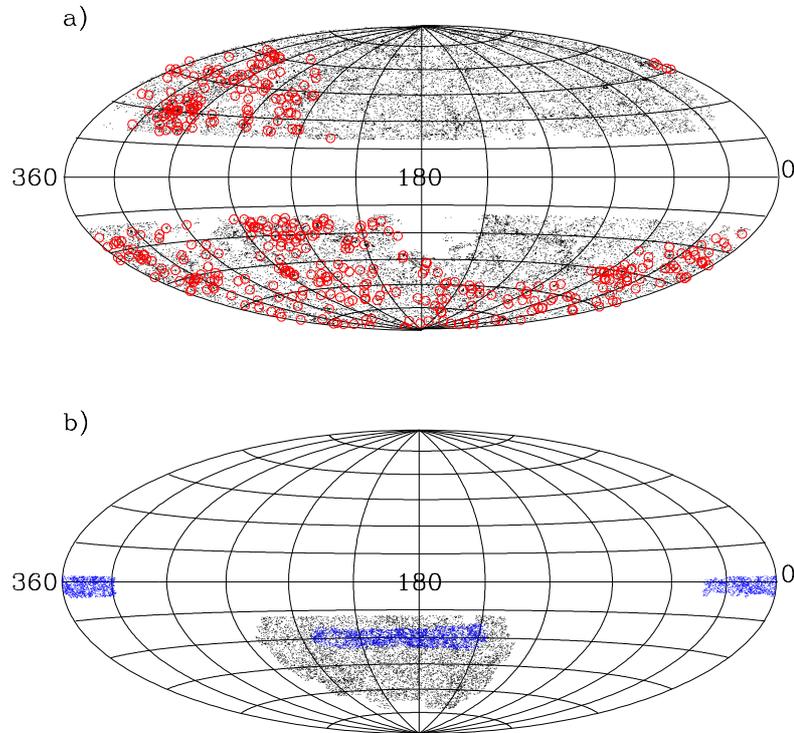


Figura 11.1: a) Proyección *Aitoff* de la distribución, en coordenadas galácticas, de las galaxias 2MASS con  $K_s < 12,5$  (puntos) junto con la muestra de cúmulos REFLEX (círculos rojos). La máscara angular descrita en la sección 11.2.1 ha sido aplicada a ambas muestras. b) Proyección Aitoff de la distribución, en coordenadas ecuatoriales, del 10 % de las galaxias APM con  $b_j < 18,5$  (puntos negros) y todos los grupos del 2dFGGC (puntos azules).

en modelos cosmológicos (Bahcall & Soneira 1983; Klypin & Kopylov 1983; Peacock & West 1992; Postman, Huchra & Geller 1992). De todas formas, se encontraron claras evidencias de inhomogeneidades y de efectos de proyección en la línea de la visual (Lucey 1983; Sutherland 1988), que eran responsables de parte de la amplitud observada de la función de correlación. La situación mejoró con los catálogos de cúmulos digitalizados, como el Edinburgh/Durham Cluster Catalogue (Nichol et al. 1992) y el catálogo APM (Dalton et al 1992, 1994; Croft et al 1997). Aunque éstos eran más homogéneos, aún poseían errores sistemáticos debido a efectos de proyección, los cuales son inherentes a la identificación de cúmulos basada en posiciones angulares en el cielo (Padilla & Lambas, 2003).

En años recientes, se ha utilizado información en rayos X para construir nuevas muestras de cúmulos de galaxias. Este método de identificación posee numerosas ventajas respecto del uso de datos ópticos. La emisión en rayos X es una fuerte evidencia de un pozo de potencial gravitatorio ya que existe una fuerte relación entre la luminosidad en rayos X  $L_X$  y la masa (Reiprich & Böhringer 2002). Además la emisividad de la radiación de Bremsstrahlung térmico es proporcional al cuadrado de la densidad de electrones, con lo que brinda una clara evidencia de una concentración de masa que no está fuertemente afectada por efectos de proyección. Más aún, la emisión de rayos X de los cúmulos de galaxias está concentrada en el denso núcleo central, brindando una mejor resolución angular comparado con la obtenida utilizando concentraciones de galaxias, ayudando también de esta forma a reducir la posibilidad de efectos de proyección. El catálogo de cúmulos de galaxias ROSAT-ESO Flux Limited X-ray (REFLEX) cluster survey (Böhringer et al. 2004), que contiene 447 objetos, es la muestra estadísticamente completa más grande seleccionada en rayos X. Ha sido utilizada para el análisis de la estructura en gran escala del Universo a través de su espectro de potencias (Schuecker et al. 2001) y de su función de correlación (Collins et al., 2000). Aunque Schuecker et al (2001) encontró una tendencia sistemática al aumento de la amplitud del espectro de potencia con respecto a la luminosidad límite en rayos X, los resultados de Collins et al. (2000) no muestran dicha tendencia en la función de correlación, caracterizada por una ley de potencia aproximada con una longitud de correlación  $r_0 = 18,8 \pm 0,9 h^{-1}\text{Mpc}$ .

Por otro lado, desde la elaboración de grandes catálogos de galaxias con redshift, ha sido posible realizar una identificación confiable de grupos de galaxias utilizando no sólo información angular, sino también la información completa en redshift, evitando de esta manera una fuerte contaminación por efectos de proyección. Los primeros algoritmos diseñados para esta tarea fueron desarrollados por Huchra & Geller (1982) y Nolthenius & White (1987). Estos métodos estaban basados en el algoritmo friends-of-friends utilizado en simulaciones numéricas, con una longitud de linqueo dependiente del redshift. Una variedad de catálogos de grupos de galaxias fueron construidos utilizando estos algoritmos: Merchán et al. (2000) utilizó el Updated Zwicky Catalogue (Falco et al. 1999), Giuricin et al. (2000) construyó un catálogo de grupos a partir del Nearby Optical Galaxy Sample, Tucker et al. (2000) extrajo una muestra de grupos del Las Campanas Redshift Survey (Shectman et al. 1996), y Ramella et al. (2002) utilizó la información del Updated Zwicky catalogue y el Southern Sky Redshift Survey (da Costa et al. 1998). Recientemente la liberación de datos de 100000 galaxias (100K public data release) del 2dF Galaxy Redshift Survey (2dFGRS, Colles et al. 2001) ha sido utilizada por Merchán & Zandivarez (2002)

para construir uno de los catálogos de grupos de galaxias mas grandes utilizando una pequeña modificación del algoritmo de Huchra & Geller (1982). La distribución espacial en gran escala de éstos objetos ha sido estudiada por Zandivarez, Merchán & Padilla (2003). En dicho análisis la función de correlación tiene un comportamiento de ley de potencias con una longitud de correlación de  $s_0 = 8,9 \pm 0,3 h^{-1}\text{Mpc}$ .

Los catálogos de cúmulos y grupos de galaxias identificados por información en rayos X y algoritmos de percolación tridimensional, representan diferentes tipos de objetos. Para ser capaces de confrontar los resultados obtenidos mediante estas muestras con las predicciones de modelos teóricos, es crucial un entendimiento completo de las diferencias en las propiedades estadísticas de las muestras. Una de las comparaciones posibles más importantes es el análisis de la distribución de galaxias, seleccionadas en diferentes bandas, alrededor de estos objetos y de como depende de propiedades como la luminosidad en rayos X o la masa virial. La mejor herramienta estadística para dicho análisis es la función de correlación cruzada cúmulo-galaxias  $\xi_{cg}(r)$ , que es una medida del perfil de la distribución radial media alrededor de los cúmulos. La primera medición de esta función de correlación fue llevada a cabo por Seldner & Peebles (1977), quién estudió la función de correlación cruzada angular de los cúmulos de Abell y las galaxias del catálogo Lick. Ellos encontraron que  $\xi_{cg}(r)$  poseía un valor alto y positivo hasta escalas tan grandes como  $r \simeq 100 h^{-1}\text{Mpc}$  pero fueron contradichos por Lilje & Efstathiou (1988) quienes no encontraron ninguna evidencia fuerte de clustering más allá de  $r \geq 20 h^{-1}\text{Mpc}$  argumentando que parte de la señal detectada por Seldner & Peebles (1977) era una consecuencia de gradientes artificiales en la densidad superficial en el catálogo Lick. En escalas más pequeñas, Lilje & Efstathiou (1988) encontraron que  $\xi_{cg}(r)$  era bien descripta por una ley de potencia con  $r_0 = 8,8 h^{-1}\text{Mpc}$ . Trabajos posteriores (Dalton 1992; Mo, Peacock & Xia 1993; Moore et al. 1994) encontraron resultados similares basados en mediciones directas a partir de catálogos de galaxias y cúmulos con redshifts. Ellos encontraron que  $\xi_{cg}(r)$  tiene una forma similar a  $\xi_{cc}(r)$  y  $\xi_{gg}(r)$  pero con una amplitud aproximadamente igual a su media geométrica. Croft et al. (1999) estimaron  $\xi_{cg}(r)$  en el espacio real y de redshifts a partir de los catálogos APM de cúmulos y galaxias y encontraron que su forma no puede ser descripta por una única ley de potencias y que su amplitud es prácticamente independiente de la riqueza de los cúmulos o de la magnitud límite de las galaxias.

En este capítulo mostramos los resultados presentados en Sánchez et al. (2005) del cómputo de  $\xi_{cg}(r)$  usando una muestra de grupos derivada de la versión final del catálogo 2dFGRS y el catálogo de cúmulos REFLEX, y las galaxias de los catálogos 2MASS (Skrutskie et al. 1997) y APM (Maddox et al. 1990). En la sección

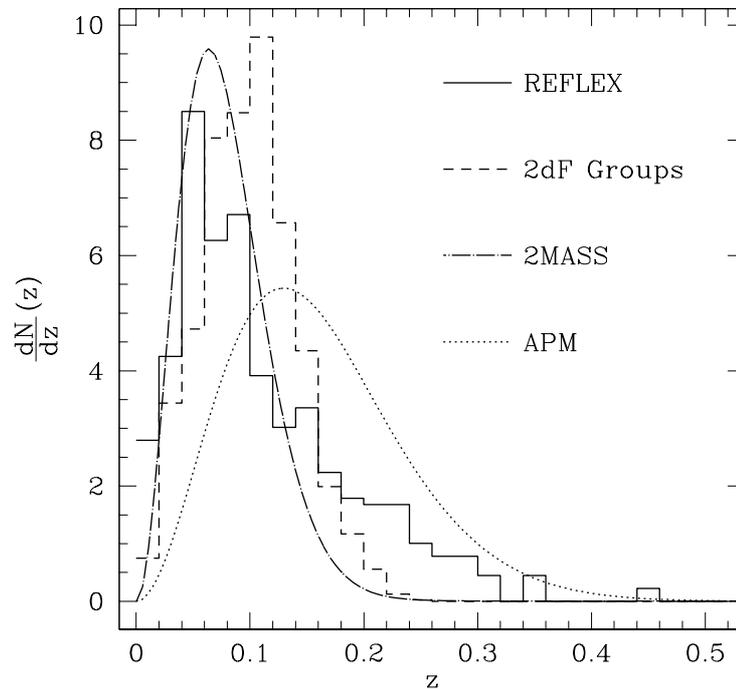


Figura 11.2: Distribución en redshift de las diferentes muestras de cúmulos y galaxias analizadas en este trabajo. Puede verse que la distribución de los cúmulos REFLEX tiene su pico aproximadamente en el mismo redshift que las galaxias 2MASS.

11.2.1 describimos los diferentes conjuntos de datos utilizados en este trabajo. En 11.3 describimos el método utilizado para obtener la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia 3D en el espacio real a partir de la función de correlación cruzada en distancias proyectadas. En 11.4 analizamos la dependencia de los resultados de la magnitud límite del catálogo de galaxias, la luminosidad en rayos X  $L_X$  en el catálogo REFLEX, y la masa virial  $M_{vir}$  en el catálogo de grupos de galaxias del 2dFGRS. En 11.5 mostramos una comparación con los resultados de una simulación de N-cuerpos correspondiente al modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM. Finalmente en 11.6 presentamos una discusión y nuestras principales conclusiones.

## 11.2. Los datos

### 11.2.1. Catálogos de Galaxias

Usamos información del *Two Micron All Sky Survey* (2MASS; Skrutskie et al. 1997). 2MASS caracteriza la distribución en gran escala de las galaxias en el infrarrojo cercano utilizando la banda  $K_s$  ( $2,15\mu\text{m}$ ). Nuestra muestra fue seleccionada a partir del catálogo público de fuentes extendidas en el cielo completo (XSC; Jarret et al. 2000) que contiene cerca de 1.1 millones de objetos más brillantes que  $K_s = 14\text{mag}$ . Las magnitudes fueron corregidas por extinción galáctica utilizando los mapas de enrojecimiento en el infrarrojo de Schlegel, Finkbeiner & Davis (1998). Existe una fuerte correlación entre la extinción por polvo y la densidad estelar, que aumenta exponencialmente hacia el plano galáctico. La densidad estelar es el principal factor contaminante del XSC ya que la confiabilidad de la separación de estrellas y las fuentes extendidas es muy sensible a esta cantidad (Jarret et al. 2000). Para evitar contaminación de estrellas construimos una máscara para el catálogo 2MASS utilizando un mapa de *HEALPIX* (Gorski et al. 1999) con resolución dada por  $N_{\text{side}} = 256$  y excluimos aquellos píxeles donde la extinción en la banda  $K_s$ ,  $A(K_s) = 0,367 \times E(B - V) > 0,05$  y  $|b| > 20^\circ$  que reduce la contaminación por fuentes galácticas al 2% (Maller et al. 2003). También impusimos un corte en  $K_s = 13,57$  mag en las magnitudes corregidas. La Figura 11.1 muestra una proyección Aitoff de la muestra final obtenida con estas restricciones, que contiene 397447 galaxias.

También utilizamos información del catálogo de galaxias APM (Maddox et al. 1990), que está basado en 185 placas fotográficas IIIa-J Schmidt cada una correspondiente a  $5,8 \times 5,8 \text{ deg}^2$  en el cielo limitado en magnitud  $b_j \simeq 20,5$  y con una profundidad media de  $\simeq 400 h^{-1}\text{Mpc}$  para  $b < -40^\circ$  y  $\delta < -20^\circ$ . Seleccionamos nuestra muestra del catálogo APM imponiendo el corte  $b_j < 20,5$ . Una sub-muestra con  $b_j < 18,5$  también se muestra en la Figura 11.1.

La luminosidad  $K_s$  de las galaxias es menos sensible al polvo y las poblaciones estelares que la banda  $B$ , brindando un muestreo más uniforme de la población de galaxias. La banda  $K_s$  también brinda una mejor medida del contenido de masa estelar que la banda  $B$ . Entonces, las variaciones en la función de correlación de las muestras seleccionadas en estas bandas puede darnos información invaluable acerca de la dependencia del sesgo o bias de las galaxias de sus diversas propiedades y arrojar luz en los procesos que gobiernan su formación y evolución.

### 11.2.2. Los catálogos de grupos y cúmulos

En nuestro análisis usamos información del ROSAT-ESO X-ray Flux Limited (REFLEX) Cluster Survey (Böhringer et al., 2004). La geometría del catálogo es descrita por el hemisferio sur con  $\delta < +2,5^\circ$ , excluyendo la zona donde  $|b| < 20^\circ$  y las Nubes Mayor y Menor de Magallanes, cubriendo un área de 4.24sr. La muestra posee un límite nominal de flujo de  $3 \times 10^{-12} \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$  en la banda de energía de ROSAT (0.1-2.4)keV y contiene 447 cúmulos. La Figura 11.1 muestra una proyección Aitoff de los 422 cúmulos dentro de la máscara del 2MASS descrita en la sección 11.2.1.

También utilizamos un catálogo de grupos de galaxias (en adelante el 2dF Galaxy Group Catalogue, 2dFGGC) construido a partir de la versión final del 2dF Galaxy Redshift Survey (2dFGRS, Colless et al. 2001), utilizando la misma técnica empleada por Merchán & Zandivarez (2002). Esta muestra contiene 5568 grupos para los cuales la masa virial, dispersión de velocidades y el radio virial han sido determinados.

Estas muestras fueron determinadas utilizando técnicas muy diferentes. La fuerte relación entre  $L_X$  y  $M$  (ver por ejemplo Reiprich & Böhringer, 2002) indica que las muestras de cúmulos seleccionadas en rayos X están cercanas a ser básicamente seleccionadas por masa. La situación es muy diferente para los grupos y cúmulos seleccionados óptimamente, donde el criterio de selección está basado en la riqueza, que no es un buen indicador de la masa. El estudio de las diferencias en la forma en que las galaxias se agrupan alrededor de estos objetos puede ser muy importante para mejorar nuestro conocimiento de los mismos y de comprender sus propiedades estadísticas.

La Figura 11.2 muestra la distribución de redshifts de las muestras analizadas en este trabajo. La distribución de las galaxias 2MASS fue obtenida por Maller et al. (2004) identificando objetos de dicha muestra en la liberación temprana de datos del SDSS (Stoughton et al. 2002) y el 2dFGRS 100K release (Colles et al. 2001). Para las galaxias APM utilizamos un ajuste de Baugh & Efstathiou (1993). Puede notarse que la distribución del catálogo REFLEX posee su pico en aproximadamente el mismo redshift que las galaxias 2MASS. Como medimos la función de correlación cruzada en distancias proyectadas, la principal contribución a esta cantidad proviene de pares cúmulo-galaxia que yacen a redshifts similares, lo cual aumenta nuestra señal. Por otro lado, las diferencias entre las distribución de las galaxias APM causarán una menor amplitud en las correlaciones proyectadas.

### 11.3. Correlaciones Cúmulo-Galaxia

La función de correlación cruzada cúmulo-galaxia  $\xi_{cg}(r)$  es definida de forma tal que la probabilidad  $dP$  de encontrar una galaxia en el elemento de volumen  $dV$  a una distancia  $r$  del centro de un cúmulo es

$$dP = \bar{n} [1 + \xi_{cg}(r)] dV, \quad (11.1)$$

donde  $\bar{n}$  es la densidad espacial media de galaxias. Sólo poseemos información de las distancias (redshifts) de los cúmulos y no de las galaxias individuales en los catálogos 2MASS y APM. Entonces, con el objetivo de obtener  $\xi_{cg}(r)$  primero determinamos la función de correlación cruzada proyectada  $\omega_{cg}(\sigma)$ , definida por Lilje & Efstathiou (1988), donde  $\sigma = cz\theta/H_0$  es la separación proyectada entre un cúmulo a redshift  $z$  y una galaxia a una distancia angular  $\theta$  de su centro. Para determinar esta cantidad a partir de nuestros datos utilizamos el estimador

$$\omega(\sigma) = \frac{\langle CG(\sigma) \rangle N_R}{\langle CR(\sigma) \rangle N_G} - 1, \quad (11.2)$$

donde  $N_G$  es el número de galaxias,  $\langle CG(\sigma) \rangle$  es el número de pares cúmulo-galaxia a una distancia proyectada  $\sigma$ , y  $\langle CR(\sigma) \rangle$  es la cantidad análoga definida para una distribución aleatoria de  $N_R$  puntos que cubre la misma máscara angular que el catálogo de galaxias original.

Cuando el ángulo  $\theta \ll 1$  rad, es decir, la distancia  $y$  al centro del cúmulo es mucho mayor que la distancia proyectada cúmulo-galaxia, la función de correlación proyectada esta relacionada con la función de correlación espacial por la simple ecuación integral (Saunders, Rowan-Robinson & Lawrence, 1992)

$$\xi(r) = -\frac{1}{B\pi} \int_r^\infty \frac{d\omega_{cg}(\sigma)}{d\sigma} \frac{1}{(\sigma^2 - r^2)^{1/2}} d\sigma. \quad (11.3)$$

La constante  $B$  regula la amplitud de la función de correlación teniendo en cuenta las diferencias en las funciones de selección de los cúmulos y las galaxias y puede calcularse a través de la expresión (Lylje & Efstathiou 1988)

$$B = \frac{\sum_i \psi(y_i)}{\sum_i \frac{1}{y_i^2} \int_0^\infty \psi(x) x^2 dx}, \quad (11.4)$$

donde  $\psi(y)$  es la función de selección del catálogo de galaxias,  $y_i$  es la distancia al cúmulo  $i$  y la suma se extiende a todos los cúmulos de la muestra.

La ecuación (11.3) puede resolverse analíticamente en forma fácil si realizamos una interpolación lineal de  $\omega_{cg}$  entre su valor medido en los diferentes  $\sigma$ . Con este enfoque la solución a la ecuación (11.3) es (Saunders, Rowan-Robinson & Lawrence, 1992)

$$\xi_{cg}(\sigma_i) = -\frac{1}{B\pi} \sum_{i \leq j} \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{\sigma_{j+1} - \sigma_j} \ln \left( \frac{\sigma_{j+1} + \sqrt{\sigma_{j+1}^2 - \sigma_i^2}}{\sigma_j + \sqrt{\sigma_j^2 - \sigma_i^2}} \right). \quad (11.5)$$

Utilizamos esta expresión para obtener  $\xi_{cg}$  a partir de  $\omega_{cg}$ . Con el objetivo de calcular el valor del factor  $B$  evaluamos la función de selección  $\psi(y)$  mediante

$$\psi(y) = \int_{L_{min}(y)}^{\infty} \phi(L) dL, \quad (11.6)$$

donde  $L_{min}(y)$  es la luminosidad mínima que una galaxia a una distancia  $y$  debe tener para ser incluida en el catálogo y  $\phi(x)$  es la función de luminosidad, para la cual usamos los parámetros de Bell et al. (2003) para el 2MASS y Loveday et al. (1992) para el APM.

## 11.4. Resultados

### 11.4.1. Las funciones de correlación cruzada proyectada y 3D

Los paneles superiores de la figura 11.3 muestran la función de correlación proyectada  $\omega_{cg}(\sigma)$  obtenida para los cúmulos REFLEX y los grupos 2dF contra las galaxias APM (derecha) y 2MASS (izquierda) para tres límites de magnitud diferentes. En ambos casos las barras de error fueron obtenidas por la técnica de muestreo bootstrap. Especialmente para los grupos 2dF, la forma de esta función difiere de una simple ley de potencia ya que muestra un aumento en la amplitud en pequeña escala que puede ser asociado al perfil interno de los grupos y cúmulos.

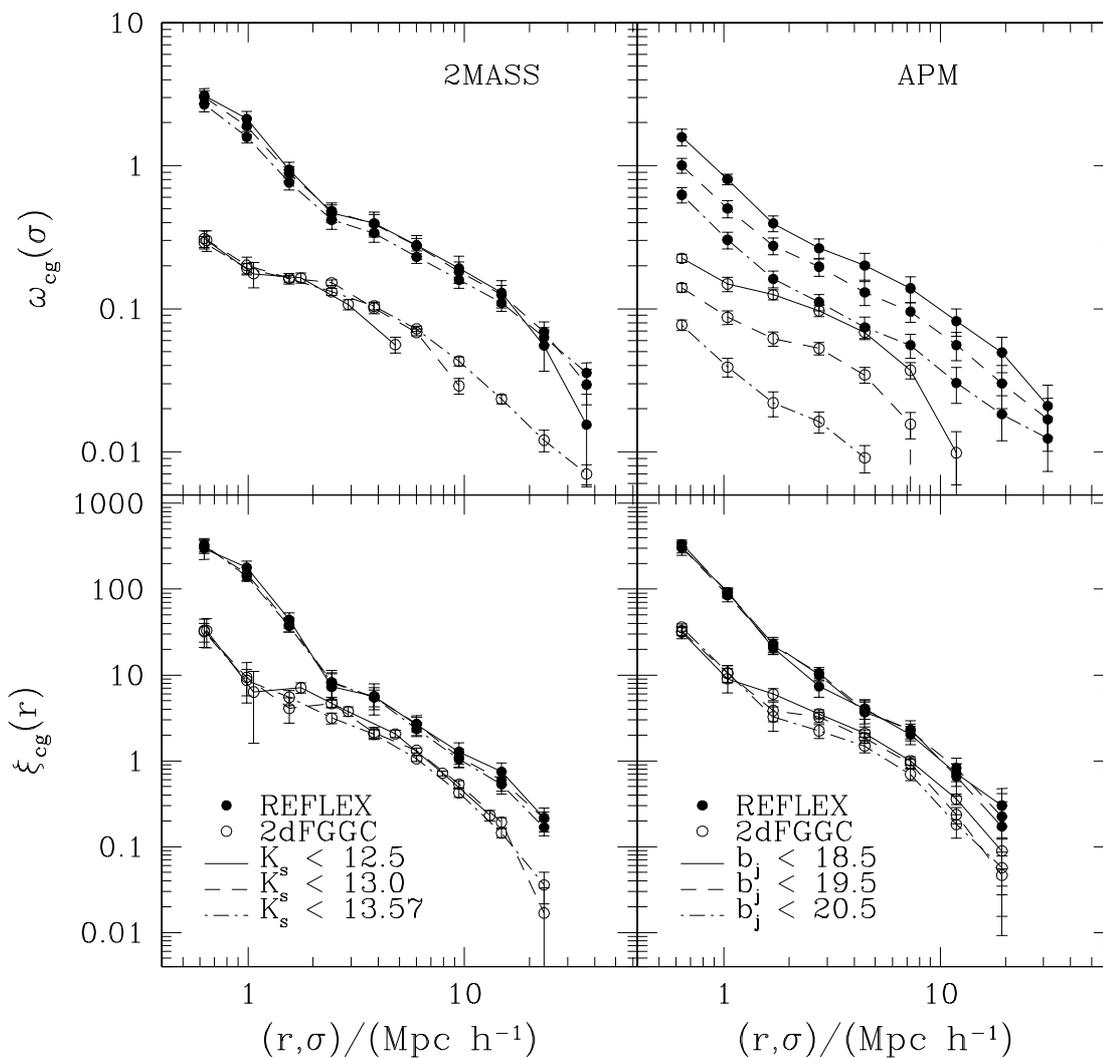


Figura 11.3: Los paneles superiores muestran la función de correlación en distancias proyectadas  $\omega_{cg}(\sigma)$  obtenida para los cúmulos REFLEX y los grupos 2dF contra las galaxias APM (derecha) y 2MASS (izquierda) para tres límites de magnitud diferentes. Los paneles inferiores muestran la función de correlación cruzada correspondiente recuperada a partir de  $\omega_{cg}(\sigma)$ . En todos los casos los errores fueron obtenidos por la técnica de re-muestreo bootstrap.

Cuadro 11.1: Resultados para ajustes de leyes de potencia de la forma  $\xi_{cg}(r) = (r/r_0)^\gamma$  a las regiones interior y exterior de  $\xi_{cg}(r)$  para las diferentes muestras analizadas utilizando cúmulos REFLEX como centros.

Muestra REFLEX	Muestra de galaxias	$r_0^{inner}$	$\gamma^{inner}$	$r_0^{outer}$	$\gamma^{outer}$
all	2MASS $K_s < 12,5$	$6,1^{+1,1}_{-0,6}$	$-2,60^{+0,26}_{-0,17}$	$10,3^{+0,90}_{-1,17}$	$-1,55^{+0,17}_{-0,19}$
all	2MASS $K_s < 13,0$	$6,2^{+1,1}_{-0,7}$	$-2,52^{+0,22}_{-0,19}$	$9,85^{+0,67}_{-0,73}$	$-1,69^{+0,09}_{-0,14}$
all	2MASS $K_s < 13,57$	$5,97^{+1,30}_{-0,46}$	$-2,62^{+0,19}_{-0,15}$	$9,18^{+0,60}_{-0,59}$	$-1,77^{+0,13}_{-0,12}$
all	APM $b_j < 18,5$	$5,47^{+0,64}_{-0,38}$	$-2,69^{+0,24}_{-0,10}$	$9,9^{+1,0}_{-1,1}$	$-1,67^{+0,16}_{-0,15}$
all	APM $b_j < 19,5$	$5,47^{+1,0}_{-0,4}$	$-2,61^{+0,25}_{-0,17}$	$10,4^{+1,3}_{-1,1}$	$-1,71^{+0,13}_{-0,14}$
all	APM $b_j < 20,5$	$5,54^{+0,88}_{-0,38}$	$-2,65^{+0,21}_{-0,14}$	$9,5^{+1,2}_{-1,0}$	$-1,79^{+0,16}_{-0,19}$
$\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > -1,5$	2MASS $K_s < 13,57$	$5,96^{+0,79}_{-0,46}$	$-2,62^{+0,19}_{-0,15}$	$9,18^{+0,59}_{-0,59}$	$-1,77^{+0,13}_{0,13}$
$\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > -1,0$	2MASS $K_s < 13,57$	$6,24^{+0,95}_{-0,61}$	$-2,57^{+0,18}_{-0,18}$	$10,28^{+0,67}_{-0,66}$	$-1,70^{+0,14}_{-0,13}$
$\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > -0,85$	2MASS $K_s < 13,57$	$6,24^{+0,83}_{-0,57}$	$-2,58^{+0,21}_{-0,22}$	$10,45^{+0,58}_{-0,65}$	$-1,75^{+0,10}_{-0,12}$
$\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > -0,5$	2MASS $K_s < 13,57$	$6,41^{+0,45}_{-0,27}$	$-2,75^{+0,11}_{-0,06}$	$10,8^{+1,2}_{-0,7}$	$-1,75^{+0,11}_{-0,12}$
$\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > 0$	2MASS $K_s < 13,57$	$7,13^{+0,89}_{-0,44}$	$-2,72^{+0,27}_{-0,07}$	$13,1^{+1,1}_{-1,1}$	$-1,69^{+0,15}_{-0,18}$

Cuadro 11.2: Resultados para ajustes de leyes de potencia de la forma  $\xi_{cg}(r) = (r/r_0)^\gamma$  a las regiones interior y exterior de  $\xi_{cg}(r)$  para las diferentes muestras analizadas utilizando grupos 2dFGGC como centros.

Muestra de grupos	Muestra de galaxias	$r_0^{inner}$	$\gamma^{inner}$	$r_0^{outer}$	$\gamma^{outer}$
all	2MASS $K_s < 12,5$	$1,9_{-0,5}^{+1,6}$	$-3,28_{-0,26}^{+0,32}$	$6,28_{-0,22}^{+0,20}$	$-1,60_{-0,07}^{+0,07}$
all	2MASS $K_s < 13,0$	$2,2_{-0,6}^{+1,5}$	$-2,78_{-0,35}^{+0,34}$	$6,21_{-0,21}^{+0,21}$	$-1,51_{-0,06}^{+0,06}$
all	2MASS $K_s < 13,57$	$2,1_{-0,3}^{+1,2}$	$-2,90_{-0,40}^{+0,25}$	$5,18_{-0,20}^{+0,18}$	$-1,58_{-0,06}^{+0,06}$
all	APM $b_j < 18,5$	$1,8_{-0,2}^{+1,1}$	$-1,75_{-0,61}^{+0,50}$	$6,65_{-0,37}^{+0,33}$	$-1,37_{-0,08}^{+0,08}$
all	APM $b_j < 19,5$	$2,6_{-0,7}^{+1,3}$	$-2,02_{-0,69}^{+0,59}$	$5,71_{-0,35}^{+0,35}$	$-1,42_{-0,09}^{+0,09}$
all	APM $b_j < 20,5$	$2,5_{-0,6}^{+1,1}$	$-2,20_{-0,61}^{+0,43}$	$4,82_{-0,36}^{+0,34}$	$-1,46_{-0,11}^{+0,12}$
$\log(M_{vir}/M_\odot) > 13$	2MASS $K_s < 13,57$	$1,95_{-0,16}^{+0,53}$	$-3,23_{-0,55}^{+0,82}$	$6,73_{-0,25}^{+0,27}$	$-1,52_{0,07}^{+0,06}$
$\log(M_{vir}/M_\odot) > 13,5$	2MASS $K_s < 13,57$	$2,29_{-0,13}^{+0,65}$	$-3,47_{-0,31}^{+0,94}$	$8,21_{-0,35}^{+0,39}$	$-1,59_{-0,07}^{+0,08}$
$\log(M_{vir}/M_\odot) > 14$	2MASS $K_s < 13,57$	$5,7_{-1,1}^{+1,2}$	$-2,47_{-0,28}^{+0,29}$	$10,6_{-1,1}^{+1,0}$	$-1,63_{-0,17}^{+0,15}$
$\log(M_{vir}/M_\odot) > 14,5$	2MASS $K_s < 13,57$	$6,3_{-1,5}^{+1,5}$	$-2,74_{-0,42}^{+0,47}$	$10,8_{-1,5}^{+1,7}$	$-1,84_{-0,35}^{+0,35}$

Los paneles inferiores de la Figura 11.3 muestran las funciones de correlación cruzada 3D en el espacio real recuperadas a partir de  $\omega_{cg}(\sigma)$ . Nuestros resultados están en completo acuerdo con los resultados de Croft et al. (1999). Encontramos que la función de correlación no puede ser descripta por una única ley de potencia para todas las escalas, ya que muestra una mayor pendiente en pequeña escala. Las Tablas 11.1 y 11.2 muestran los resultados de ajustes de leyes de potencia de la forma  $\xi(r)_{cg} = (r/r_0)^\gamma$  a las regiones interna y externa de las diferentes muestras analizadas. Puede notarse claramente que la función de correlación es casi independiente del límite de magnitud impuesto a la muestra de galaxias mostrando sólo una pequeña variación en los parámetros de los mejores ajustes de leyes de potencia. La forma de la función de correlación cruzada para las galaxias 2MASS y APM son diferentes. El quiebre en  $r \simeq 2 h^{-1}\text{Mpc}$  que muestra la transición al perfil interno de los cúmulos es más evidente que para las galaxias 2MASS. Este efecto puede ser asociado con la diferente distribución espacial de estos objetos alrededor de los cúmulos. Las galaxias 2MASS fueron seleccionadas en el infrarrojo cercano y por lo tanto tienden a ser luminosas y de morfologías de tipos tempranos, y por lo tanto, poseen una mayor aglomeración en los picos de densidad (Norberg et al. 2002).

#### 11.4.2. Dependencia de $L_X$ y $M_{vir}$

Con el objetivo de analizar la dependencia de la distribución de galaxias alrededor de los cúmulos y grupos de propiedades como su masa y su luminosidad en rayos X calculamos  $\xi_{cg}(r)$  para las galaxias 2MASS y los cúmulos REFLEX para cuatro límites diferentes en  $L_X$ . Análogamente, para el 2dFGGC adoptamos cuatro límites de  $M_{vir}$ . Los resultados obtenidos para estas muestras pueden verse en las figuras 11.4 y 11.5. Encontramos una clara dependencia de la amplitud de  $\xi_{cg}(r)$  de  $L_X$  que indica que las galaxias están más aglomeradas alrededor de los objetos más luminosos (masivos). El valor de la amplitud de la función de correlación en las regiones exteriores cambia de  $r_0 = 9,18 \pm 0,59$  para  $\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > -1,5$  a  $r_0 = 13,1 \pm 1,1$  para  $\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > 0$  y la región interna muestra un comportamiento similar. La forma de  $\xi_{cg}(r)$  no muestra ninguna diferencia importante, pero los pequeños cambios en  $\gamma^{inner}$  muestra un débil indicio de que a mayores valores límites de  $L_X$  las regiones internas poseen perfiles más pronunciados.

Los cambios en  $\xi_{cg}(r)$  para grupos 2dF y galaxias 2MASS al variar la masa virial límite son aún mayores. La forma total de  $\xi_{cg}(r)$  cambia, especialmente en las escalas más pequeñas donde el incremento en la amplitud de la muestra con  $\log(M_{vir}/M_\odot) > 13$  a la obtenida con el límite  $\log(M_{vir}/M_\odot) > 14,5$  es un factor 20 mientras que para

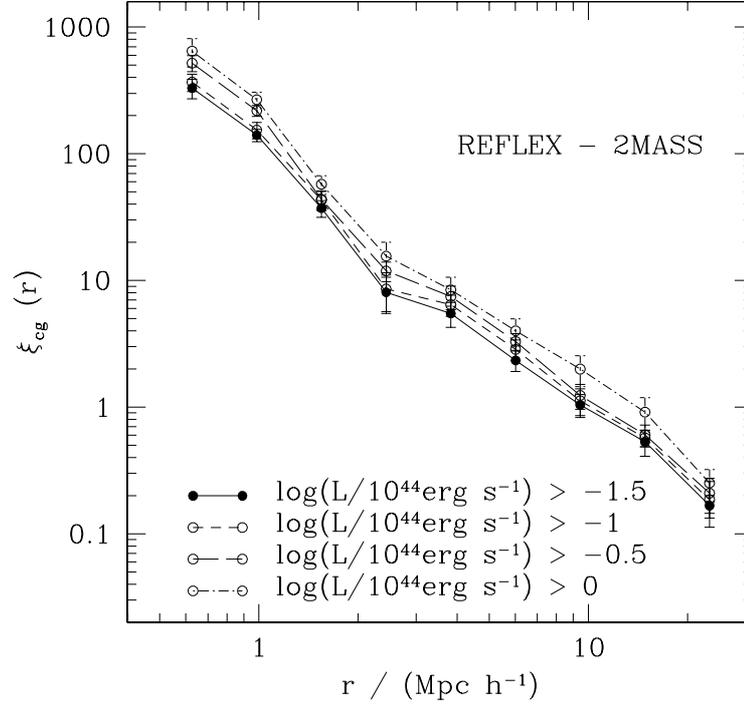


Figura 11.4: La función de correlación cruzada en el espacio real para cúmulos REFLEX y todas las galaxias 2MASS para diferentes límites de luminosidad en rayos X.

escalas  $r \simeq 10 h^{-1} \text{Mpc}$  el incremento es un factor 5. El valor de  $\gamma$  en la región interna también aumenta con  $M_{vir}$  y para  $\log(M_{vir}/M_{\odot}) > 14,5$  su valor es similar al de la región interna.

La Figura 11.5 también muestra, a modo de comparación, a la función  $\xi_{cg}(r)$  para los cúmulos REFLEX con  $\log(L_X/10^{44} \text{erg s}^{-1}) > -0,85$ . Debe notarse su gran similitud con la función de correlación cruzada obtenida utilizando los grupos 2dF con  $\log(M_{vir}/M_{\odot}) > 14$ . Este hecho puede ser utilizado como una prueba indirecta de la relación  $L_X - M$ . Reiprich & Böhringer (2002) encontraron una relación de ley de potencias entre  $L_X$  en la banda de energía de *ROSAT* (0.1-2.4 keV) y la masa  $M_{200}$  (donde  $M_{200} = M_{total}(r < r_{200})$ ) de la forma

$$\log \left[ \frac{L_X}{h_{50}^{-2} 10^{40} \text{erg s}^{-1}} \right] = A + \alpha \log \left( \frac{M_{200}}{h_{50}^{-1} M_{\odot}} \right). \quad (11.7)$$

La transformación de  $M_{vir}$  a  $M_{200}$  puede realizarse asumiendo un dado perfil de densidad para los cúmulos (White 2000). Para un modelo  $\Lambda$ CDM la diferencia es pequeña ( $M_{vir} \simeq 1,2M_{200}$ ). Entonces, asumiendo  $h = 0,7$ ,  $A = -20,055$  y  $\alpha = 1,652$  (de la

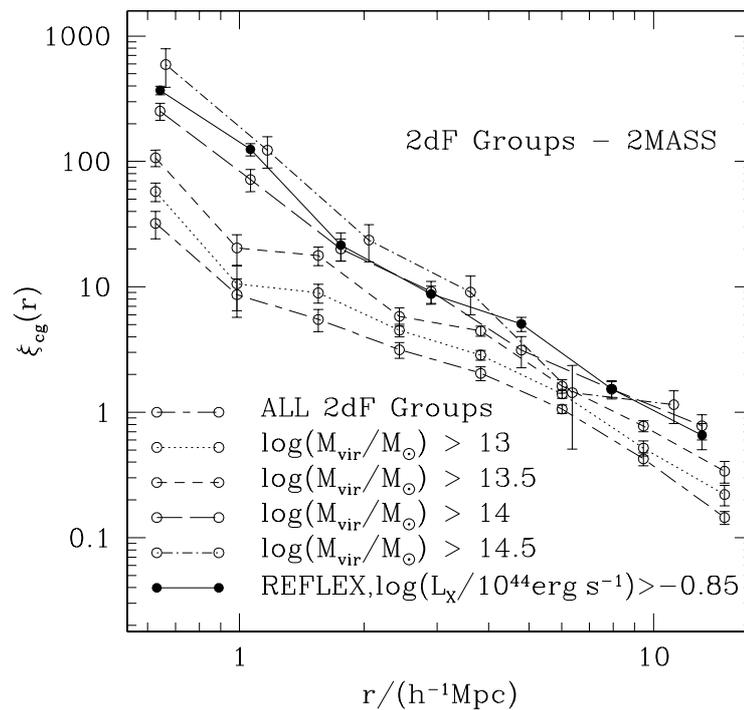


Figura 11.5: La función de correlación cruzada en el espacio real de los grupos 2dFGGC y todas las galaxias 2MASS para distintos límites en  $M_{\text{vir}}$ . Para comparación también se muestra el resultado para  $\xi_{cg}(r)$  correspondiente a los cúmulos REFLEX con  $\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) > -0,85$  y las galaxias 2MASS.

Tabla 7 de Reiprich and Böhringer, 2002),  $\log(M_{vir}/h^{-1}M_{\odot}) = 14,0$  corresponde a  $\log(L_X/10^{44}\text{erg s}^{-1}) = -0,85$  en excelente acuerdo con el límite impuesto a la muestra utilizada en la Figura 11.5.

## 11.5. Comparación con los resultados de simulaciones numéricas del modelo $\Lambda$ CDM

Con el objeto de realizar una comparación entre nuestros resultados y los correspondientes al modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM utilizamos las simulaciones numéricas VLS (Very Large Simulations). Las simulaciones fueron realizadas por el Virgo Supercomputing Consortium. Los datos son disponibles públicamente en la página web [www.mpa-garching.mpg.de/NumCos](http://www.mpa-garching.mpg.de/NumCos). Utiliza  $512^3$  partículas en un cubo de  $480 h^{-1}\text{Mpc}$ , con condiciones iniciales consistentes con un espectro de potencia  $\Lambda$ CDM, normalizado de forma tal que  $\sigma_8 = 0,9$ . Identificamos grupos utilizando un algoritmo Friends-Of-Friends (FOF) con un parámetro de linqueo  $b = 0,2$  y utilizamos estos halos como centros para medir la función de correlación cruzada halo-masa  $\xi_{hm}(r)$  para diferentes valores de masa límite. Utilizamos estos resultados para inferir la dependencia en escala del factor de bias cúmulo-galaxia, esto es, el sesgo entre la distribución de galaxias y masa alrededor de los cúmulos, definido por

$$b_{cg}^2(r) = \xi_{cg}(r)/\xi_{hm}(r). \quad (11.8)$$

Para pequeñas escalas esto es simplemente la diferencia entre los perfiles de densidad de la masa y las galaxias.

Con el objetivo de obtener  $b_{cg}(r)$  utilizamos cuatro valores de la masa límite para medir  $\xi_{hm}(r)$ :  $m_1 = 7,5 \times 10^{13} M_{\odot}$ ,  $m_2 = 1,4 \times 10^{14} M_{\odot}$ ,  $m_3 = 4,1 \times 10^{14} M_{\odot}$  y  $m_4 = 7,5 \times 10^{14} M_{\odot}$ . Como los cúmulos REFLEX y los grupos 2dF cubren diferentes rangos de masa, utilizamos el catálogo 2dFGGC como centros para calcular  $\xi_{cg}(r)$  para  $m_1$  y  $m_2$ , y el catálogo REFLEX para  $m_3$  y  $m_4$ . Cuando utilizamos el 2dFGGC simplemente impusimos los límites antes mencionados en  $m_{vir}$ . Para los cúmulos REFLEX, utilizamos el límite en luminosidad en rayos X para el cual la abundancia, calculada por la integración de la función de luminosidad en rayos X de Böhringer et al. (2002), da los mismos valores que los obtenidos en la simulación. Los resultados se muestran en la Figura 11.6.

Nuestros resultados para los dos límites inferiores de la masa límite muestran que, en escalas grandes,  $b_{cg}(r)$  es consistente con una constante de orden  $b_{cg} \simeq 1$  para las galaxias APM y levemente mayor para las galaxias 2MASS, lo que muestra que las

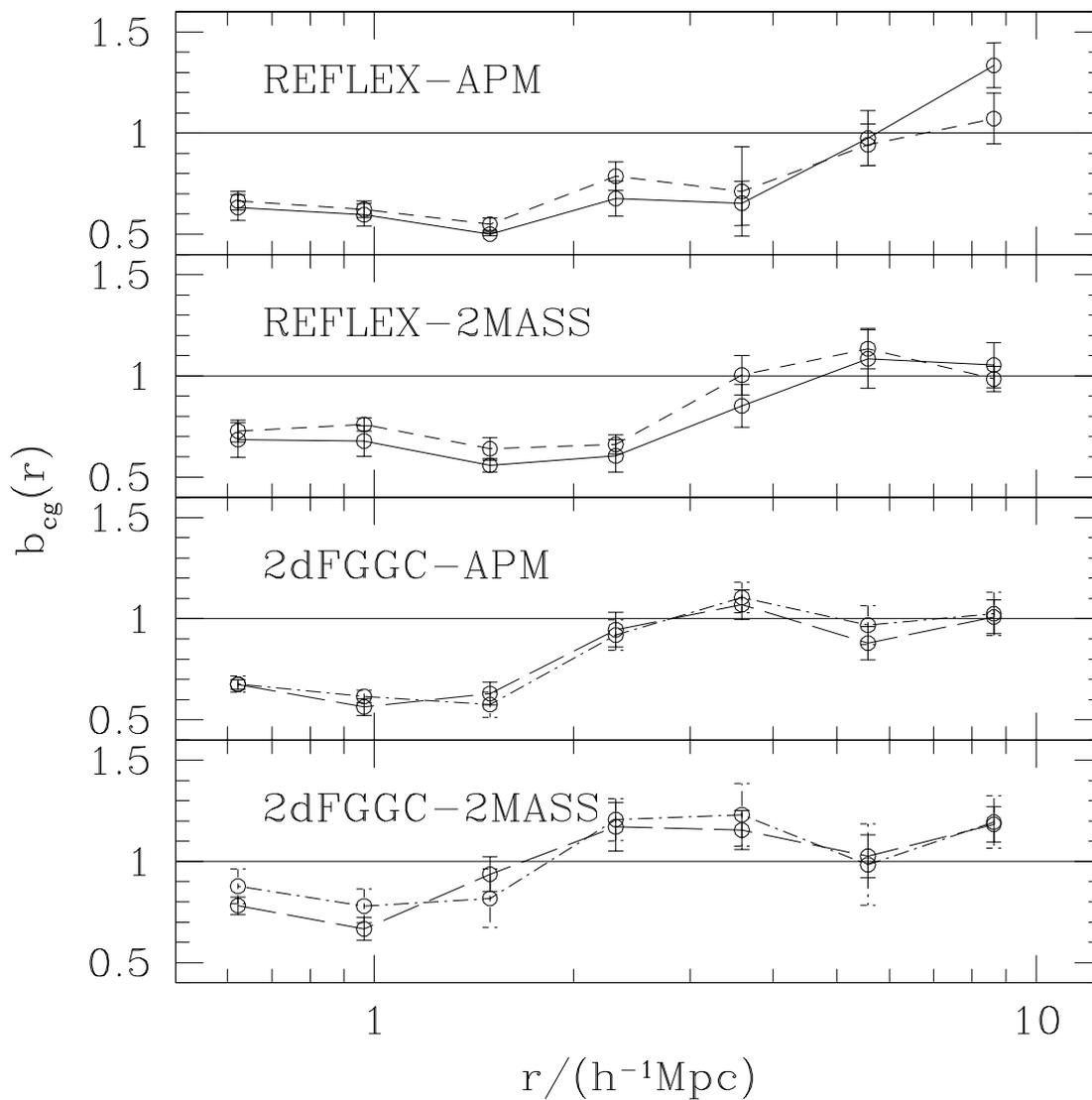


Figura 11.6: Resultados para  $b_{cg}(r)$  para todas las muestras analizadas obtenidos mediante la comparación de los resultados con los correspondientes a una simulación de N-cuerpos del modelo  $\Lambda$ CDM. Las diferentes líneas muestran los resultados obtenidos para muestras seleccionadas con masas límite dadas por  $m_1 = 7,5 \times 10^{13} M_{\odot}$  (línea a puntos y trazos),  $m_2 = 1,4 \times 10^{14} M_{\odot}$  (línea a trazos largos),  $m_3 = 4,1 \times 10^{14} M_{\odot}$  (línea a trazos cortos) y  $m_4 = 7,5 \times 10^{14} M_{\odot}$  (línea sólida).

galaxias 2MASS están más sesgadas respecto de la distribución de masa que las galaxias seleccionadas óptimamente. En escalas menores ( $r < 2 h^{-1}\text{Mpc}$ ) la distribución de galaxias alrededor de los cúmulos muestra un claro y significativo anti-bias constante de  $b_{cg} \simeq 0,7$ . Para  $m_3$  y  $m_4$ ,  $b_{cg}(r)$  muestra el mismo comportamiento pero con una escala de transición mayor entre los dos regímenes ( $r \simeq 2 h^{-1}\text{Mpc}$ ). En todos los casos esta escala corresponde con el punto en que las no-linealidades comienzan a dominar, donde  $\xi_{cg}(r)$  se vuelve más pronunciada y tiene lugar la virilización. Un factor de bias constante es una característica de la teoría lineal y por lo tanto no es sorprendente que deje de ser válido en el régimen no-lineal. Otra razón que puede sumarse al anti-bias en las zonas del cúmulo y de infall de material es el cambio en los tipos de galaxias. Los ambientes densos contienen galaxias con poblaciones estelares más viejas con menor luz por masa bariónica. Por lo tanto las regiones de los cúmulos pueden estar sub-muestreadas por este efecto. Es importante notar que estos resultados son independientes del valor límite de masa, luminosidad en X o magnitud utilizado en la construcción de las muestras de cúmulos o galaxias, lo que muestra que esta no es una propiedad de un dado tipo de galaxias, sino una propiedad genérica de los procesos que controlan la eficiencia de la formación de galaxias.

## 11.6. Discusión y conclusiones

En este capítulo llevamos a cabo la primera determinación detallada de la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia 3D en espacio real de una muestra de cúmulos de galaxias seleccionada en rayos X y galaxias seleccionadas en las bandas óptica y del infrarrojo cercano. También presentamos la primera determinación de esta cantidad estadística para una muestra de grupos de galaxias del 2dFGRS. Estas dos muestras cubren un amplio rango de masas por lo que nos permitieron analizar la dependencia de  $\xi_{cg}(r)$  con  $M_{vir}$ . Los resultados obtenidos a partir de diferentes sub-muestras de galaxias de los catálogos 2MASS y APM con diferentes magnitudes límite muestran que  $\xi_{cg}(r)$  es casi independiente de las propiedades de las galaxias y que su forma está determinada de manera casi exclusiva por el criterio utilizado para definir la muestra de cúmulos.

De acuerdo con trabajos anteriores (Croft et al. 1999) encontramos que la forma de  $\xi_{cg}(r)$  no puede ser descripta por una única ley de potencias en todas las escalas ya que muestra dos regímenes con una clara transición, uno para grandes escalas y uno de mayor pendiente en escalas menores mostrando el perfil interno de la distribución de galaxias alrededor de los centros de los cúmulos. Hemos utilizado nuestros resultados

para chequear la relación  $L_X - M$  de Reiprich & Böhringer (2002). Encontramos que las funciones de correlación obtenidas utilizando grupos 2dF para un dado valor límite de masa esta en completo acuerdo con la obtenida utilizando los cúmulos REFLEX con el límite en  $L_X$  correspondiente, demostrando la validez de esta relación.

La comparación de nuestros resultados con los obtenidos a partir de la función de correlación cruzada halo-masa en una simulación numérica de N-cuerpos correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM muestra que los resultados son consistentes con un bias constante en escalas grandes de orden uno para las galaxias APM y levemente mayor para las galaxias 2MASS. En escalas menores nuestros resultados sugieren que existe un anti-bias substancial ( $b_{cg}(r) \simeq 0,7$ ). En todos los casos la escala de transición entre los dos regímenes corresponde con el comienzo del comportamiento no-lineal, cuando la función de correlación cambia su pendiente. Este es un fuerte resultado de nuestro análisis que es independiente de las propiedades de las muestras de cúmulos o galaxias utilizadas, lo que muestra que se trata simplemente de una característica genérica de los procesos que gobiernan la formación de las galaxias y su posterior evolución.

# Capítulo 12

## La función de correlación cruzada cúmulo-galaxia y el modelo de halos

*No hay error más común que suponer que porque se hayan realizado numerosos y complicados cálculos matemáticos, la aplicación del resultado a algún hecho de la naturaleza es absolutamente cierta.*

A. N. Whitehead

### 12.1. Introducción

En este capítulo realizaremos un análisis teórico de la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia en el marco del modelo de halos descrito en el capítulo 5.

En el capítulo 5 vimos que el modelo de halos es un formalismo teórico desarrollado para comprender las propiedades estadísticas de la distribución de masa en el Universo. Para ello, se asume que toda la masa del Universo forma parte de un halo de algún valor de masa  $m$ . En base a estas hipótesis pueden encontrarse expresiones para estadísticas como la función de correlación o el espectro de potencia, las cuales estaban separadas en dos términos, uno representando las correlaciones entre galaxias (o materia) perteneciente a un mismo halo, y otro correspondiente a las correlaciones entre galaxias (o materia) pertenecientes a distintos halos. El primero domina las

estadísticas en escalas pequeñas mientras que el segundo es el más importante en escalas grandes.

En el capítulo anterior encontramos resultados observacionales para la función de correlación cruzada cúmulo galaxia. En la figura 11.4 puede verse que la misma presenta dos regímenes bien diferenciados, uno correspondiente a las escalas grandes, y otro a escalas chicas, en el cual la  $\xi_{cg}$  decae más rápidamente. Estos regímenes pueden interpretarse como los correspondientes a las zonas dominadas por los términos de  $2h$  y  $1h$  respectivamente, lo cual constituye una motivación para la aplicación del modelo de halos a esta estadística. Ese constituye el objetivo del presente capítulo. Comenzaremos por obtener un modelo para la función de correlación cruzada halo-masa  $\xi_{hm}(r)$ . Luego extenderemos dicho modelo a  $\xi_{cg}(r)$  y analizaremos las predicciones para  $b_{cg}$  que se obtienen de esta manera.

## 12.2. La función de correlación cruzada halo-masa

Para obtener una expresión teórica de  $\xi_{hm}(r)$  en el modelo de halos se necesitan expresiones para la densidad de materia  $\rho(\mathbf{x})$  y la densidad de halos  $n_c(\mathbf{x})$ . De acuerdo a (5.35) se tiene que

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i m_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i). \quad (12.1)$$

La densidad de halos, por su parte, puede expresarse como

$$n_c(\mathbf{x}) = \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i), \quad (12.2)$$

donde  $\delta_D$  es la función delta de Dirac, y  $\psi(m)$  es una función que refleja nuestro criterio de selección de halos como función de su masa. En el caso más sencillo en el que la muestra de halos se obtiene mediante una cota inferior en la masa de los mismos, la función  $\psi(m)$  está dada por una función escalón.

La densidad media  $\bar{\rho}$  estará dada por

$$\bar{\rho} = \left\langle \sum_i m_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) \right\rangle, \quad (12.3)$$

$$= \int_0^\infty dm m \left\langle \sum_i \delta_D(m - m_i) u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m) \right\rangle, \quad (12.4)$$

$$= \int_0^\infty dm m \int d^3y \left\langle \sum_i \delta_D(m - m_i) \delta_D(\mathbf{y} - \mathbf{x}_i) \right\rangle u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m). \quad (12.5)$$

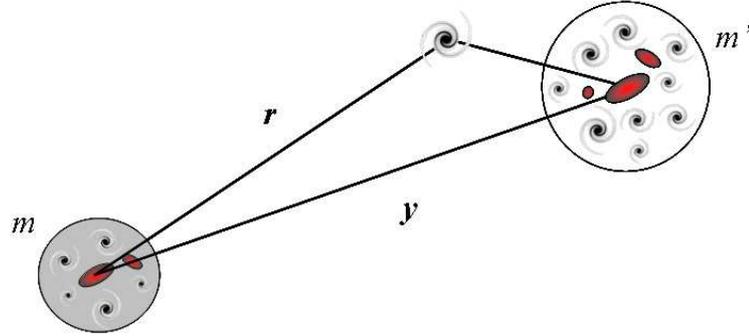


Figura 12.1: Situación esquemática correspondiente al término de dos halos. Para cada halo de masa  $m$  dentro de nuestra muestra deben tenerse en cuenta las contribuciones de masa en un punto situado a una distancia  $r$ , producidas por los halos de masa  $m'$  situados en un punto arbitrario del espacio  $\mathbf{y}$ .

Recordando la definición de la función de masa (5.36)

$$n(m) = \left\langle \sum_i \delta_D(m - m_i) \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right\rangle, \quad (12.6)$$

y la normalización del perfil de densidad de los halos, (12.5) se reduce a

$$\bar{\rho} = \int_0^\infty dm m n(m). \quad (12.7)$$

De igual manera, la densidad media de halos  $\bar{n}_c$  estará dada por

$$\bar{n}_c = \left\langle \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i) \right\rangle \quad (12.8)$$

$$= \int_0^\infty dm \left\langle \sum_i \delta_D(m - m_i) \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right\rangle \psi(m) \quad (12.9)$$

$$= \int_0^\infty dm n(m) \psi(m). \quad (12.10)$$

Con estos elementos podemos buscar la expresión para la función de correlación

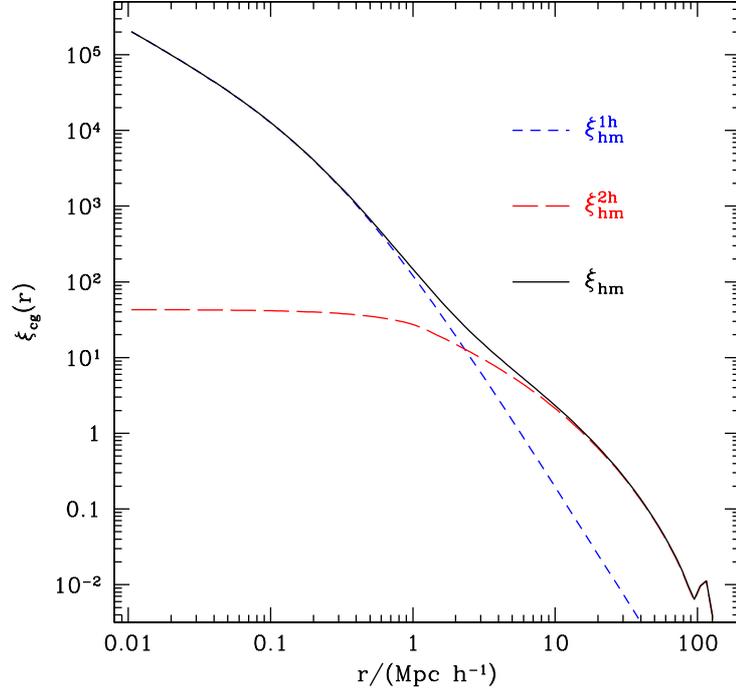


Figura 12.2: Términos de uno y dos halos (líneas a trazos cortos y largos respectivamente), y la función de correlación cruzada total (línea sólida). El término de un halo domina el valor de esta estadística en escalas pequeñas, mientras que el término de dos halos lo hace en escalas grandes.

cruzada halo materia en el modelo de halos. La misma estará dada por

$$\xi_{hm}(r) = \left\langle \left( \frac{n_c(\mathbf{x})}{\bar{n}_c} - 1 \right) \left( \frac{\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\bar{\rho}} - 1 \right) \right\rangle \quad (12.11)$$

$$= -1 + \left\langle \frac{n_c(\mathbf{x})}{\bar{n}_c} \frac{\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\bar{\rho}} \right\rangle \quad (12.12)$$

$$= -1 + \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \left\langle \left( \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i) \right) \left( \sum_j m_j u(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{x}_j | m_j) \right) \right\rangle \quad (12.13)$$

A continuación separamos de la suma sobre  $j$  el término correspondiente al halo  $i$ .

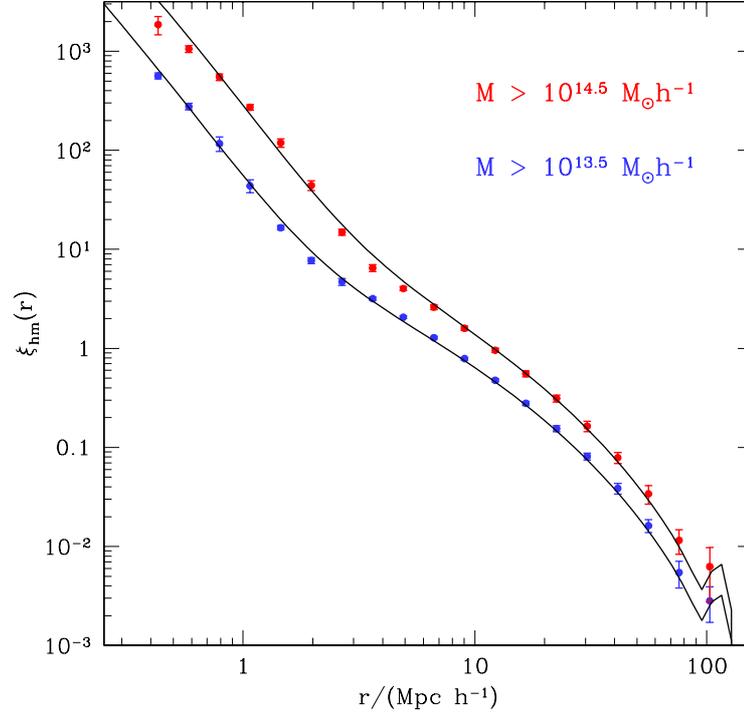


Figura 12.3: Comparación entre los resultados de la función de correlación halo-masa obtenida en una simulación numérica de N-cuerpos para dos límites de masa diferentes con la expresión teórica derivada en este capítulo.

De esta forma se obtiene

$$\xi_{hm}(r) = -1 + \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \left\langle \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i) m_i u(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{x}_i | m_i) \right\rangle \quad (12.14)$$

$$+ \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \left\langle \left( \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i) \right) \left( \sum_{j \neq i} m_j u(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{x}_j | m_j) \right) \right\rangle \quad (12.15)$$

Basándonos en esta expresión vamos a escribir a  $\xi_{hm}(r)$  como la suma de dos términos

$$\xi_{hm}(r) = \xi_{hm}^{1h}(r) + \xi_{hm}^{2h}(r), \quad (12.16)$$

donde definimos

$$\xi_{hm}^{1h}(r) = \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \left\langle \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i) m_i u(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{x}_i | m_i) \right\rangle, \quad (12.17)$$

y

$$\xi_{hm}^{2h}(r) = -1 + \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \left\langle \left( \sum_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \psi(m_i) \right) \left( \sum_{j \neq i} m_j u(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{x}_j | m_j) \right) \right\rangle. \quad (12.18)$$

A continuación analizaremos cada uno de estos términos por separado.

Para el primer término, que denominaremos *término de un halo*, realizando pasos análogos a los utilizados para obtener las expresiones (12.5) y (12.10), se obtiene que

$$\xi_{hm}^{1h}(r) = \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \int_0^\infty dm m n(m) u(r|m) \psi(m). \quad (12.19)$$

Este término es de fácil interpretación. Representa la correlación existente entre un halo y la masa contenida en ese halo. Dicha correlación depende del perfil de densidad del halo. Por este motivo, el término de un halo es simplemente un promedio de los perfiles de densidad de los halos considerados en nuestra muestra de acuerdo a la función de selección  $\psi(m)$

El segundo término, que denominamos *término de dos halos*, es un poco más complicado. Realizando pasos análogos a los anteriores se obtiene

$$\xi_{hm}^{2h} = \frac{1}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \int dm n(m) \psi(m) \int dm' n(m') m' \quad (12.20)$$

$$\times \int d^3y \xi_{hh}(\mathbf{y}|m, m') u(\mathbf{y} - \mathbf{r}|m'), \quad (12.21)$$

donde  $\xi_{hh}(\mathbf{y}|m, m')$  es la función de correlación halo-halo, donde uno de los halos del par tiene masa  $m$  y el otro  $m'$ . Este término representa las correlaciones entre un halo y la masa contenida en otros halos. Esta situación se muestra esquemáticamente en la figura 12.1. Para cada halo de masa  $m$  dentro de nuestra muestra deben tenerse en cuenta las contribuciones de masa en un punto situado a una distancia  $r$ , producidas por los halos de masa  $m'$  situados en un punto arbitrario del espacio  $\mathbf{y}$ . Estas contribuciones estarán dadas por el perfil de densidad  $m' u(\mathbf{y} - \mathbf{r}|m')$ , cada una de las cuales debe ser pesada por la probabilidad de encontrar un halo de masa  $m'$  en esa posición, lo que viene dado por  $\xi_{hh}(\mathbf{y}|m, m')$ .

La figura 12.2 muestra la dependencia con la escala de los términos de uno y dos halos (líneas a trazos cortos y largos respectivamente), así como de la función de correlación cruzada total (línea sólida). El término de un halo domina el valor de esta estadística en escalas pequeñas, mientras que el término de dos halos lo hace en escalas grandes. Es fácil ver que las soluciones teóricas presentan el mismo comportamiento

descripto para los resultados observacionales de la función de correlación cúmulo-galaxia, lo cual indica que los dos regímenes encontrados corresponden a las escalas en las que domina cada uno de los dos términos de la función de correlación.

La figura 12.3 muestra una comparación entre los resultados de la función de correlación halo-masa obtenida en una simulación numérica de N-cuerpos para dos límites de masa diferentes y la expresión teórica derivada en este capítulo. El gran acuerdo existente muestra la validez de las expresiones obtenidas. En la siguiente sección analizaremos una extensión de presente modelo a la distribución de galaxias.

Podemos analizar el comportamiento de  $\xi_{hm}^{2h}$  en escalas grandes. Para ello utilizaremos la aproximación (5.45) por la cual

$$\xi_{hh}(y|m, m') = b_1(m)b_1(m') \xi(y). \quad (12.22)$$

Además, en escalas grandes podemos pensar al perfil de densidad como una función delta de Dirac  $\delta_D(\mathbf{y} - \mathbf{r})$  y, recordando la relación de consistencia (5.21) para la función de bias  $b_1(m)$  se obtiene que

$$\xi_{hm}^{2h}(r) = \frac{\bar{n}_c^b}{\bar{n}_c} \xi(r), \quad (12.23)$$

donde

$$\bar{n}_c^b = \int_0^\infty dm n(m) \psi(m). \quad (12.24)$$

Una comparación de esta expresión con (12.10) muestra que  $\bar{n}_c^b$  representa una densidad media de halos pesada por el factor de bias  $b_1(m)$ . La ecuación (12.23) indica que en escalas grandes, donde la función de correlación cruzada halo-masa está dominada por el término de dos halos, la misma es directamente proporcional a la función de correlación de la materia  $\xi(r)$  con un factor de bias dado por  $\frac{\bar{n}_c^b}{\bar{n}_c}$ .

### 12.3. Extensión a la distribución de galaxias

En esta sección describimos la extensión del análisis realizado en la sección anterior a la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia  $\xi_{cg}(r)$ . Para ello utilizaremos una Distribución de Ocupación de Halos  $P(N|m)$ , la cual fue descrita en la sección 5.5.

El campo de densidad de galaxias está dado por

$$n_g(\mathbf{x}) = \sum_i N_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i). \quad (12.25)$$

La densidad media de galaxias puede expresarse de acuerdo a (5.53) como

$$\bar{n}_g = \int dm n(m) \langle N|m \rangle, \quad (12.26)$$

donde  $\langle N|m \rangle$  es el primer momento de la Distribución de Ocupación de Halos (DOH), el cual puede descomponerse en un término para las galaxias satélites y otro para las galaxias centrales que están parametrizados de acuerdo a (5.54) y (5.55).

La función de correlación cúmulo-galaxia se obtendrá mediante

$$\xi_{cg}(r) = \left\langle \left( \frac{n_c(\mathbf{x})}{\bar{n}_c} - 1 \right) \left( \frac{n_g(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\bar{n}_g} - 1 \right) \right\rangle \quad (12.27)$$

Al igual que para  $\xi_{hm}(r)$ , en este caso tendremos

$$\xi_{cg}(r) = \xi_{cg}^{1h}(r) + \xi_{cg}^{2h}(r), \quad (12.28)$$

donde los términos de uno y dos halos estarán dados por

$$\xi_{cg}^{1h}(r) = \frac{1}{\bar{n}_c \bar{n}_g} \int dm n(m) \langle N|m \rangle u(r|m) \psi(m), \quad (12.29)$$

y

$$\xi_{cg}^{2h}(r) = \frac{1}{\bar{n}_c \bar{n}_g} \int dm n(m) \psi(m) \int dm' n(m') \langle N|m' \rangle \quad (12.30)$$

$$\times \int d^3y \xi_{hh}(\mathbf{y}|m, m') u(\mathbf{y} - \mathbf{r}|m'). \quad (12.31)$$

Estos términos son completamente análogos a los que se obtienen en el caso de  $\xi_{cg}(r)$  (ecuaciones (12.17) y (12.18)), pero el factor  $m$  es ahora reemplazado por el primer momento de la DOH  $\langle N|m \rangle$ .

El panel superior de la figura 12.4 muestra una comparación entre las predicciones teóricas para  $\xi_{hm}(r)$  y  $\xi_{cg}(r)$  para un mismo corte en masa. En el cálculo de  $\xi_{cg}(r)$  se asumieron los parámetros de la DOH de forma tal de ajustar el espectro de potencias de las galaxias del catálogo PSCz. Puede verse como en escalas grandes, dominadas por el término de dos halos, ambas funciones muestran el mismo comportamiento, mientras que en escalas pequeñas, dominadas por el término de un halo, la amplitud de  $\xi_{cg}^{1h}(r)$  es menor que la de  $\xi_{hm}^{1h}(r)$ . Esto provoca una diferencia en el comportamiento de ambas funciones en escalas pequeñas. El panel inferior de la figura 12.4 muestra el factor de bias  $b_{cg}^2$  definido como

$$b_{cg}^2 = \frac{\xi_{cg}^{1h}(r)}{\xi_{hm}^{1h}(r)}. \quad (12.32)$$

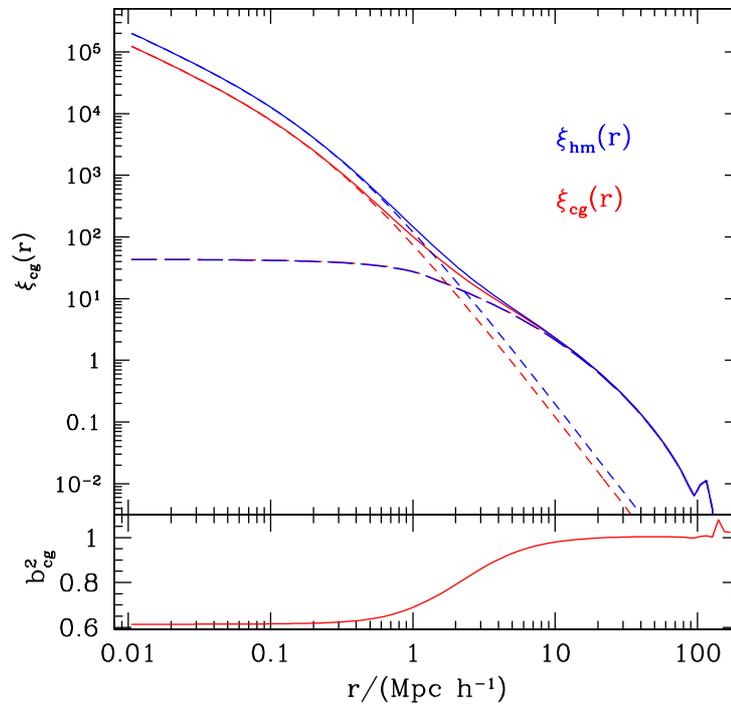


Figura 12.4: Panel superior: comparación entre las predicciones teóricas para  $\xi_{hm}(r)$  y  $\xi_{cg}(r)$  para un mismo corte en masa. Panel inferior: factor de bias  $b_{cg}^2$  correspondiente a estas soluciones.

El comportamiento de esta función con la escala presenta de características similares a las señaladas en la sección 11.5. De esta manera, la aplicación del modelo de halos al análisis de la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia es capaz de dar una explicación teórica a las observaciones del anti-bias de la distribución de las galaxias respecto de la distribución de materia alrededor del centro de los halos.

## 12.4. Importancia cosmológica

En esta sección utilizamos la expresión teórica obtenida para la función de correlación cruzada cúmulo galaxia en el modelo de halos para resaltar la información cosmológica contenida en esta estadística tanto en pequeña como en gran escala.

### 12.4.1. Información en pequeña escala: la distribución de galaxias

En escalas pequeñas,  $\xi_{cg}(r)$  está dominada por el término de un halo. De esta manera, una medición precisa de esta estadística puede utilizarse para obtener restricciones en los valores de los parámetros de la DOH. Esto es muy importante para la evaluación de modelos semi-analíticos de formación de galaxias, los cuales deben ser capaces de reproducir la DOH observada. Más aún, tanto el término de dos halos como el de un halo, dependen sólo del primer momento  $\langle N|m \rangle$  de la DOH. Por lo tanto, es posible realizar un análisis de la DOH que no requiera la hipótesis de que la distribución de satélites es Poisson, la cual es necesaria para expresar  $\langle N(N-1)|m \rangle$  mediante la ecuación (5.56).

Además de su uso para calibrar los parámetros de la DOH, la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia en pequeña escala puede ser utilizada para testear una hipótesis importante. En los cálculos del modelo de halos se asume generalmente que el perfil de densidad de la distribución de galaxias en los halos es el mismo que el de la distribución de materia y que está dado por un perfil de Navarro, Frenk y White (1996). Sin embargo, existen trabajos que plantean que es más correcto utilizar el perfil de abundancia de subestructuras. Además, la relación Morfología-densidad (Dressler 1980, Dominguez 2001) implica que el perfil de densidad difiere para distintos tipos de galaxias, con galaxias tempranas mostrando una distribución más concentrada que las de morfologías tardías. Es posible que mediante el estudio de resultados observacionales de  $\xi_{cg}$  se obtengan pistas acerca de este hecho.

### 12.4.2. Información en gran escala: el pico acústico

En escalas grandes  $\xi_{cg}(r)$  esta dominada por el término de dos halos. De manera análoga a  $\xi_{hm}^{2h}(r)$  puede verse que

$$\xi_{cg}^{2h}(r) = \frac{\bar{n}_c^b \bar{n}_g^b}{\bar{n}_c \bar{n}_g} \xi(r), \quad (12.33)$$

donde  $\bar{n}_c$ ,  $\bar{n}_c^b$  y  $\bar{n}_g$  están dados por las ecuaciones (12.10), (12.24) y (12.26) respectivamente, mientras que

$$\bar{n}_g^b = \int dm n(m) b_1(m) \langle N|m \rangle, \quad (12.34)$$

representa la densidad media de galaxias pesada por el bias del halo que la contiene. Esto indica que en gran escala, la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia es

proporcional a  $\xi(r)$  con un factor de bias dado por

$$b_{cg}^2 = \frac{\bar{n}_c^b \bar{n}_g^b}{\bar{n}_c \bar{n}_g}. \quad (12.35)$$

De esta manera, todo rasgo presente en  $\xi(r)$  debe ser observable también en  $\xi_{cg}(r)$ .

En los últimos años, la señal de las oscilaciones acústicas en el fluido de fotones y bariones previas a la época de recombinación, contenida en la estructura de picos del espectro de potencia del CMB ha sido detectada con alta precisión (de Bernardis et al. 2000; Hanany et al. 2000, Bennett et al. 2003; Hinshaw et al. 2003). Desde entonces se han convertido en una de las más poderosas herramientas para obtener restricciones en los valores de parámetros cosmológicos.

Como la materia bariónica constituye una fracción no despreciable de la densidad total de materia en el Universo, estas fluctuaciones llevaron también a la formación de una serie de picos en el espectro de potencia de la materia. Como estas oscilaciones poseen una amplitud mucho menor que en el caso del CMB, su detección en el espectro de potencia de las galaxias ha sido difícil.

En la actualidad, la evidencia más contundente de la señal de las oscilaciones acústicas en la estructura en gran escala del Universo trazada por las galaxias proviene de la detección del pico acústico en la función de correlación de la muestra de Galaxias Rojas Luminosas (LRG, de sus siglas en inglés) del catálogo SDSS (Eisenstein et al. 2005). Cuando se realiza una transformada de Fourier, la serie de picos presentes en el espectro de potencia se convierten en un único pico en una escala que corresponde aproximadamente a la longitud de onda de la oscilación. De esta manera, la posición del pico esta fuertemente relacionada con el horizonte de sonidos en la época de recombinación. Las oscilaciones acústicas también han sido observadas en el espectro de potencia de la muestra de LRG (Hütsi 2006, Tegmark et al. 2006, Percival et al. 2006).

Este nuevo hallazgo ha abierto nuevas posibilidades de obtener restricciones más robustas en los parámetros cosmológicos. En este contexto, la ecuación (12.33) tiene importantes implicancias, ya que indica que pueden utilizarse mediciones de  $\xi_{cg}(r)$  en escalas grandes ( $r \sim 110 \text{Mpc}^{-1}$ ) para medir el pico acústico.

Para realizar esto de una manera que evite la introducción de errores sistemáticos, se requiere un entendimiento completo de todos los procesos que dan forma a la función de correlación observada. Además de la evolución lineal de las perturbaciones de densidad, hay otros procesos que afectarán una medición de la función de correlación obtenida a partir de los nuevos grandes catálogos de galaxias con redshift: la evolución no lineal del campo de densidad, las distorsiones en el espacio de redshift

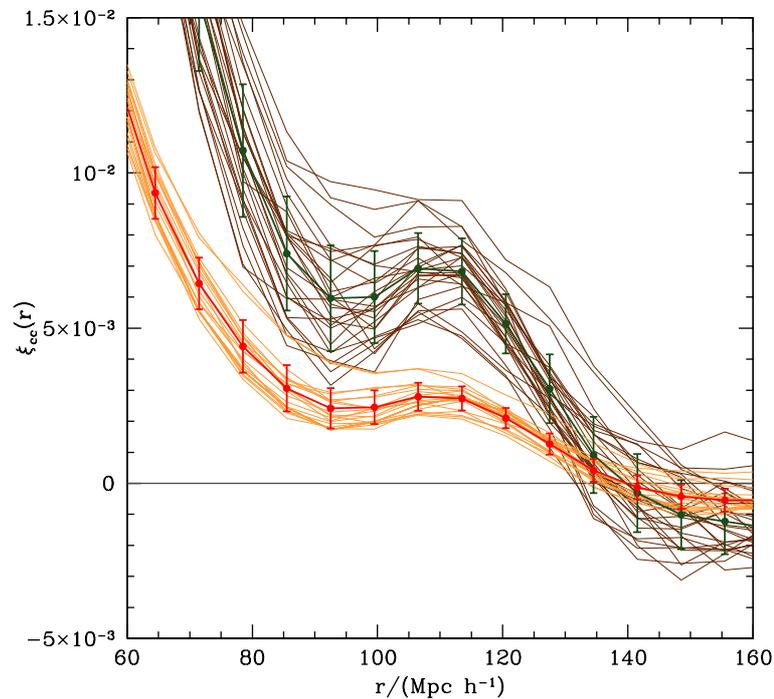


Figura 12.5: Funciones de correlación cúmulo-cúmulo  $\xi_{cc}(r)$  y cúmulo-galaxia  $\xi_{cg}(r)$  para 30 simulaciones numéricas de N-cuerpos las cuales corresponden a distintas realizaciones de la cosmología determinada por los parámetros del modelo b6 (segunda columna de la tabla 7.2).

y el bias de la distribución de galaxias. Es de extrema importancia probar nuestra habilidad para modelar estos efectos a fin de estimar de manera robusta si los niveles de precisión predichos por algunos de los experimentos futuros son realmente alcanzables con nuestro entendimiento actual de estos efectos. Este trabajo sólo puede ser realizado en base a simulaciones numéricas de N-cuerpos y modelos semi-analíticos de formación de galaxias

A modo de ejemplo, la figura 12.5 muestra el resultado para las funciones de correlación cúmulo-cúmulo  $\xi_{cc}(r)$  y cúmulo-galaxia  $\xi_{cg}(r)$  para 30 simulaciones numéricas de N-cuerpos las cuales corresponden a distintas realizaciones de la cosmología determinada por los parámetros del modelo b6 (segunda columna de la tabla 7.2). La figura muestra también la media y la dispersión de las diferentes realizaciones. En ella puede verse como la señal del pico acústico está presente tanto en  $\xi_{cc}(r)$  como en  $\xi_{cg}(r)$ , por lo que ambas estadísticas pueden utilizarse para este fin. La señal en  $\xi_{cc}(r)$

posee una mayor amplitud, pero también una mayor dispersión. En observaciones en catálogos reales, ambas estarán sujetas a distintos efectos sistemáticos, por lo que su utilización en forma combinada puede ayudar a mejorar las restricciones obtenidas.

# Capítulo 13

## La determinación del espectro de potencia a partir de la función de masa

*Ahora vemos por espejo, oscuramente; pero entonces veremos cara a cara.*

1 Corintios 13:12

### 13.1. Introducción

Los modelos cosmológicos predicen la evolución de la distribución de materia en grandes escalas a partir de las fluctuaciones primordiales en densidad del Universo. Desafortunadamente, esta distribución no es accesible directamente mediante observaciones debido a que sólo es posible observar la distribución de objetos como galaxias o cúmulos de galaxias los cuales no necesariamente trazan la distribución de masa de manera simple.

El espectro de potencia de la distribución de galaxias ha probado ser la estadística más popular utilizada para caracterizar la distribución de materia en el Universo. Esto es debido a su estrecha relación con las propiedades físicas del crecimiento de las estructuras a lo largo de su historia. También, los diferentes tipos de datos que pueden ser utilizados para medir el espectro de potencia han permitido resultados independientes a partir de estudios de redshift y catálogos angulares de galaxias, catálogos de cúmulos y fluctuaciones del CMB. Sin embargo, cada uno de estos enfoques tienen diferentes desventajas. Por ejemplo, los resultados obtenidos a partir de catálogos

de redshifts extensos están sujetos a varios problemas, ya que están afectados por la incompletitud del catálogo, su geometría, las distorsiones del espacio de redshift y el factor bias (el cual puede ser dependiente de la escala). Además, la distribución de galaxias o cúmulos de galaxias está afectada por efectos de evolución no lineal, lo que hace aun más difícil llevar a cabo comparaciones directas entre resultados observacionales y predicciones de modelos teóricos.

Una técnica alternativa fue presentada por Gaztañaga & Baugh (1998), y ha sido aplicada de diferentes maneras por otros autores (Dodelson & Gastañaga, 2001, Eisenstein & Zaldarriaga, 2001). En ésta, el espectro de potencia de la distribución de galaxias es derivado a partir de la función de correlación angular invirtiendo la ecuación de Limbert. Como este procedimiento no involucra ninguna transformada de Fourier o la utilización de datos de redshift, los resultados obtenidos no se encuentran afectados por una convolución con la función ventana del catálogo, ni por las distorsiones del espacio de redshift. La principal incerteza de esta técnica es la distribución del redshift de galaxias, el cual puede no ser conocido con precisión, y además los resultados continúan siendo afectados por el factor bias y la evolución no lineal.

En este capítulo presentamos método para obtener el espectro de potencia, libre de los problemas de los métodos descritos anteriormente. Para esto, utilizamos los formalismos de Press & Schechter (1974, de aquí en adelante PS), Sheth, Mo & Tormen (2001, de aquí en adelante SMT) y Jenkins et al. (2001, de aquí en adelante J01) donde los halos se forman en los picos más altos de las fluctuaciones primordiales en densidad, las cuales están relacionadas con el espectro de potencia lineal. Esto indica que estudiando la distribución de las masas de los halos es posible obtener información sobre la distribución de materia y, por lo tanto, recobrar el espectro de potencia de la masa. Más precisamente, las recetas de PS son conjuntos de ecuaciones que permiten la determinación de la función de masa de los halos de materia oscura a partir del espectro de potencia de la masa. Si la función de masa puede ser determinada observacionalmente, podemos utilizar estas ecuaciones en el sentido inverso para recuperar el espectro de potencia lineal.

El resumen de este capítulo es el siguiente, en la sección 13.2 damos un resumen general de nuestro método y un test simple en un caso idealizado. En la sección 13.3 describimos el test de nuestro método aplicándolo a simulaciones GIF (Kauffman et al. 1999). En la 13.4 mostramos una comparación con resultados obtenidos utilizando la técnica estándar de Feldman, Kaiser & Peacock (1994, FKP de aquí en adelante) para medir el espectro de potencia y, finalmente, en la 13.5 presentamos una corta discusión y las conclusiones principales.

## 13.2. El Método

En esta sección analizamos el problema de recuperar el espectro de potencia  $\Delta^2(k)$  utilizando la ecuación (5.1) y las expresiones para la función de masa en los formalismos descriptos. Los pasos a seguir para en la obtención del espectro de potencia lineal son:

1. Obtener la varianza  $\sigma(M)$  a partir de la función de masa. Para ello, es necesario reescribir las expresiones que relacionan estas estadísticas.
2. Invertir el espectro de potencia a partir de la varianza. Esto involucra la aplicación y testeo de diferentes algoritmos de inversión.

### 13.2.1. Obteniendo $\sigma(M)$ a partir de $n(M)$ los formalismos de PS, SMT y J01

Asumiendo que la función de masa de los halos de materia oscura obedece uno de los tres formalismos descriptos en la sección (5.2.1), podemos re-interpretar las ecuaciones (5.3), (5.4) and (5.9) como ecuaciones diferenciales y utilizarlas en la determinación de  $\sigma(M)$  si se conoce la función  $n(M)$ . Si utilizamos el formalismo de PS, la función de masa está dada por

$$n(M, z)dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma(M, z)} \left| \frac{d \ln(\sigma)}{d \ln(M)} \right| e^{-\left(\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M, z)}\right)} dM, \quad (13.1)$$

que puede ser escrita como

$$Mn(M)dM = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{\sigma^2} e^{-\left(\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right)} \frac{d\sigma}{dM} dM, \quad (13.2)$$

donde toda dependencia de  $\sigma$  está en el término derecho de la ecuación. Integrando ambos lados con respecto a  $M$  entre una masa  $M$  y  $M_8 = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} (8h^{-1} Mpc)^3$  correspondiente a una esfera de densidad uniforme y radio  $R = 8h^{-1} Mpc$ , obtenemos

$$G(M) \equiv \int_M^{M_8} \dot{M} n(\dot{M}) d\dot{M} = \bar{\rho} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{\mu_M}^{\mu_8} e^{-\mu^2} d\mu \right], \quad (13.3)$$

donde  $\mu = \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)}$  y  $\mu_8 = \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_8}$ .

Utilizando la definición de la función error

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\mu^2} d\mu, \quad (13.4)$$

y usando el valor de  $\sigma_8$  como una constante de integración, (13.3) puede ser expresada como

$$G(M) = \bar{\rho} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_8}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)}\right) \right], \quad (13.5)$$

y se obtiene así una expresión para  $\sigma(M)$  dada por

$$\sigma(M) = \frac{\delta_c}{\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_8}\right) - \frac{G(M)}{\bar{\rho}} \right]}. \quad (13.6)$$

Si asumimos la validez del formalismo SMT, entonces la ecuación diferencial para  $\sigma(M)$  es

$$Mn(M)dM = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} A\bar{\rho} \frac{\sqrt{a}\delta_c}{\sigma^2} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{a}\delta_c} \right)^{2p} \right] e^{-\left(\frac{a\delta_c^2}{2\sigma^2}\right)} \frac{d\sigma}{dM} dM. \quad (13.7)$$

Ésta es un poco más complicada que la correspondiente al formalismo de PS, pero puede ser resuelta de manera análoga. Integrando entre  $M$  y  $M_8$  obtenemos

$$G(M) = A\bar{\rho} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{\mu_M}^{\mu_8} e^{-\mu^2} d\mu + 2^{-p} \int_{\mu_M}^{\mu_8} \mu^{-2p} e^{-\mu^2} d\mu \right], \quad (13.8)$$

donde  $G(M)$  está dada por (13.3) y ahora  $\mu = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\delta_c}{\sigma(M)}$ .

El primer término de la derecha en (13.8) es el mismo que el del formalismo de PS y es igual a  $\operatorname{erf}(\mu) \Big|_{\mu_M}^{\mu_8}$ , la diferencia en este caso está dada por el segundo término. Si utilizamos la definición de la *función gamma incompleta*

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \quad (a > 0), \quad (13.9)$$

podemos ver fácilmente que

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu_M} \mu^{-2p} e^{-\mu^2} d\mu &= \frac{1}{2} \int_0^{\mu_M^2} t^{-(p+\frac{1}{2})} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) P\left(\frac{1}{2} - p, \mu_M^2\right). \end{aligned}$$

Entonces, si definimos la función

$$\Phi(x) = \operatorname{erf}(x) + \frac{2^{-p}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) P\left(\frac{1}{2} - p, x^2\right), \quad (13.10)$$

podemos escribir (13.8) como

$$G(M) = A\bar{\rho} \left[ \Phi\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_8}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)}\right) \right] \quad (13.11)$$

de donde obtenemos la expresión para  $\sigma(M)$  en el formalismo de SMT dada por la ecuación

$$\sigma(M) = \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\Phi^{-1} \left[ \Phi\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_8}\right) - \frac{G(M)}{A\bar{\rho}} \right]} \quad (13.12)$$

Es posible considerar que la función de masa del J01 da una descripción más precisa del comportamiento real de la función de masa. si este es el caso, entonces usamos la expresión

$$n(M, z)dM = \frac{A\bar{\rho}(z)}{M^2} \frac{d \ln(\sigma^{-1})}{d \ln(M)} e^{-(|\ln(\sigma^{-1}+B)|^\epsilon)} dM, \quad (13.13)$$

la cual debe ser re-interpretada como una ecuación diferencial para  $\sigma(M)$ . Esta expresión puede ser escrita como

$$Mn(M)dM = A\bar{\rho}e^{-(|S+B|^\epsilon)} \frac{dS}{dM} dM, \quad (13.14)$$

donde  $S \equiv \ln(\sigma^{-1}) = -\ln(\sigma)$ . Integrando a ambos lados con respecto a  $M$ , entre  $M$  y  $M_8$ , y manteniendo la definición de  $G(M)$ , obtenemos

$$G(M) = A\bar{\rho} (\Psi(S_8) - \Psi(S)), \quad (13.15)$$

donde

$$\Psi(S) = \int_0^S e^{-|x+B|^\epsilon} dx. \quad (13.16)$$

Luego, podemos escribir

$$S = \Psi^{-1} \left[ \Psi(S_8) - \frac{G(M)}{A\bar{\rho}} \right], \quad (13.17)$$

de donde obtenemos la siguiente expresión para  $\sigma(M)$

$$\sigma(M) = \exp \left\{ -\Psi^{-1} \left[ \Psi(\ln \sigma_8^{-1}) - \frac{G(M)}{A\bar{\rho}} \right] \right\}. \quad (13.18)$$

Si asociamos a los cúmulos de galaxias con halos de materia oscura podemos obtener  $\sigma(M)$  a partir de una estimación observacional de la función diferencial de masa

de cúmulos de galaxias, utilizando las ecuaciones (13.6), (13.12) o (13.18), asumiendo que es bien descrita por el formalismo de PS, SMT o J01. Con el fin de obtener un  $\sigma$  realista debemos asegurar que el formalismo asumido provee una descripción precisa de la función de masa. Los resultados más confiables serán obtenidos para el formalismo que mejor describa la función de masa, un hecho que puede ser testado con simulaciones numéricas.

### 13.2.2. Invirtiendo $P(k)$ a partir de $\sigma(M)$

#### Un primer intento

Como resultado de los procedimientos descritos en la última sección, obtenemos un conjunto de valores  $\sigma(R_i)$  para  $i = 1, \dots, N_R$ . Para cada uno de ellos tenemos una ecuación que relaciona esta varianza con el espectro de potencia  $\Delta^2(k)$

$$\sigma^2(R_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2(k) W^2(kR_i) d \ln(k). \quad (13.19)$$

Esta es una ecuación integral de Fredholm, con una función kernel dada por la transformada de Fourier de la función ventana. Con esta ecuación somos capaces de recuperar una estima de  $\Delta^2(k)$  en un conjunto de valores  $k_\alpha$  para  $\alpha = 1, \dots, N_k$ . Siguiendo Dodelson & Gaztañaga (1999) utilizaremos índices griegos para cantidades en el espacio- $k$  y latinos para aquellas en el espacio real.

Un primer y simple procedimiento para lograr esto es usar el hecho de que la ecuación (13.19) posee un pico angosto alrededor de un valor de  $k$  característico y solamente en un intervalo relativamente pequeño de valores de  $k$  contribuye a esta integral. Luego,  $\sigma^2(R)$  puede ser entendido como el valor promedio del espectro de potencia en el intervalo que satisface la relación (Peacock 1991, Padilla & Baugh 2001):

$$\sigma^2(R) = \Delta^2(k_{eff}), \quad (13.20)$$

para algún valor de  $k_{eff}$  definido adecuadamente.

De hecho, si asumimos que el espectro de potencia es una ley de potencia  $\Delta^2(k) = Ak^n$ , ésta relación es exacta y  $k_{eff}$  está dada por

$$k_{eff} = \frac{1}{R} [9I(n)]^{\frac{1}{n}}, \quad (13.21)$$

donde

$$I(n) = \int_0^{\infty} y^{n-7} [\sin(y) - y \cos(y)]^2 dy. \quad (13.22)$$

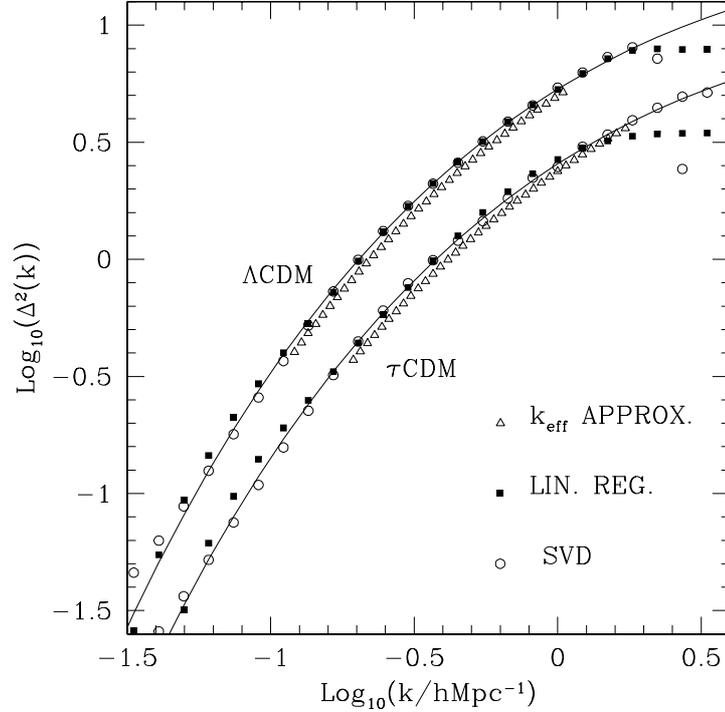


Figura 13.1: Resultados de la implementación de la aproximación  $\Delta^2(k_{eff})$ , SVD y regularización lineal a las funciones  $\sigma(M)$  obtenidas a partir del espectro de potencia de los modelos  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM.

No es necesario asumir que el espectro de potencia se comporta como una ley de potencia en todas las escalas, como fue mencionado anteriormente. Esto puede verse considerando que para un dado valor de  $R$ , sólo un pequeño rango en  $k$  es importante, y podemos aproximar localmente el espectro de potencia como una ley de potencia  $\Delta^2(k) \propto k^n$ , y por lo tanto se espera que la ecuación (13.21) se cumpla al menos en forma aproximada para este valor de  $n$ . Esto es especialmente cierto en el caso del espectro de potencia de la clase CDM, el cual se beneficia de tener un  $n(k)$  que varía lentamente.

No es posible que utilicemos directamente este procedimiento para obtener  $\Delta^2(k)$  ya que la ecuación (13.21) depende del índice  $n$  del espectro de potencia no conocido. Podemos evitar esta dificultad ya sea fijando un valor para  $n$  en todas las escalas (e.g.  $n = -2$  para todas las escalas correspondientes a cúmulos de galaxias), u obteniendo su valor a partir de  $\sigma(M)$ . Si  $\sigma^2(M)$  se comporta como una ley de potencia  $\sigma^2(R) \propto$

$R^{\tilde{n}}$  se cumple que,

$$n = -\tilde{n}. \quad (13.23)$$

La Figura 13.1 muestra el espectro de potencia recuperado a partir de la función  $\sigma(M)$ , calculada para dos espectros de potencia correspondientes a los modelos  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM utilizando este método. El rango de masas utilizado en este cálculo es  $10^{12}h^{-1}M_{\odot} < M < 10^{15}h^{-1}M_{\odot}$ . A partir de esta figura es claro que este procedimiento da buenos resultados a pesar de su simplicidad. Las soluciones obtenidas para  $\Delta^2(k)$  tienen la forma correcta pero su amplitud es de alguna manera subestimada.

### Singular Value Decomposition

Si denotamos como  $D_{\alpha}$  y  $S_i$  los valores de  $\Delta^2(k_{\alpha})$  and  $\sigma^2(R_i)$ , la ecuación integral (13.19) puede ser proyectada como una matriz, dando lugar a

$$\mathbf{S} = K\mathbf{D}, \quad (13.24)$$

donde  $K$  es la matriz kernel  $N_{\sigma} \times N_k$  y los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{S}$  están formados por los valores  $D_{\alpha}$  y  $S_i$  respectivamente. Expresada de esta manera, la primera idea de cómo obtener una solución es por inversión directa de la matriz kernel, eso es

$$\mathbf{D} = K^{-1}\mathbf{S}. \quad (13.25)$$

Desafortunadamente, este enfoque simple no funciona. Las soluciones obtenidas invirtiendo  $K$  son inestables y muchas veces no tienen un sentido físico real. Esto se debe al hecho de que tratamos de obtener más información acerca del espectro de potencia que la que está contenida en  $\sigma(M)$ . Esta situación causa que la matriz  $K$  sea numéricamente singular (aunque no *estrictamente* singular).

Para obtener la mejor solución de  $\mathbf{D}$  es necesario asumir que los errores en  $S_i$  obtenidos a partir de la función de masa tienen una distribución Gaussiana alrededor de sus valores reales  $\bar{S}_i$ , entonces la probabilidad de obtener un vector  $\mathbf{S}$  es proporcional a  $\exp(-\frac{\chi^2}{2})$  donde

$$\chi^2 = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})^T C_S^{-1} (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}), \quad (13.26)$$

y  $C_S$  es la matriz covariante para  $\mathbf{S}$ .

Podemos relacionar  $\bar{\mathbf{S}}$  al verdadero valor del espectro de potencia con  $\bar{\mathbf{S}} = K\mathbf{D}$ . Es simple ver que la solución  $\mathbf{D}$  que minimiza (13.26) es simplemente  $\mathbf{D} = K^{-1}\mathbf{S}$ , y que su matriz covariante estará dada por  $C_D = (K^T C_S^{-1} K)^{-1}$ , pero, como ha sido mencionado anteriormente, esta solución no funciona. Para resolver este problema utilizamos la técnica de Descomposición en Valores Singulares (SVD, ver Press et

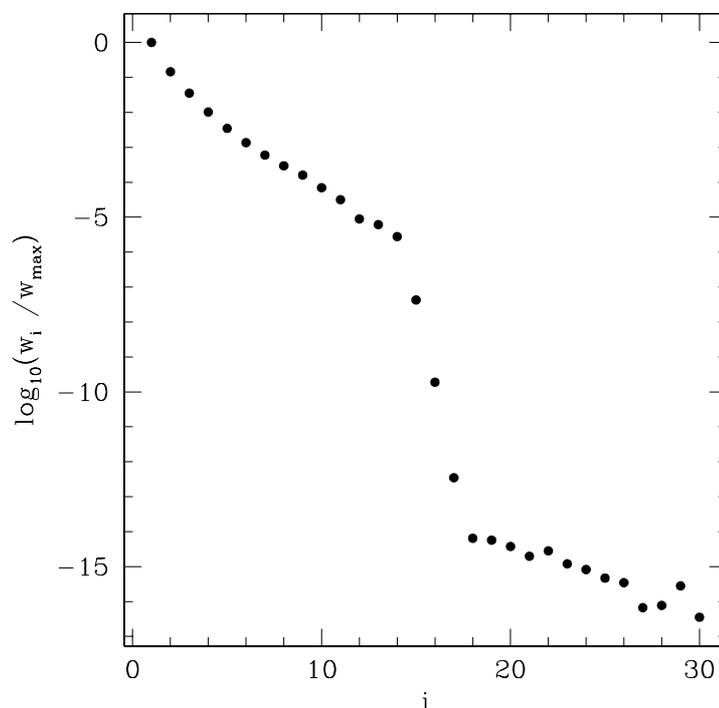


Figura 13.2: Valor de  $\log(\frac{w_i}{w_{\text{máx}}})$  para los diferentes valores singulares de la matriz  $\mathbf{W}$ . Un gran número de los  $w_i$  son muy pequeños y susceptibles a errores de redondeo.

al. 1992). Siguiendo Eisenstein & Zaldarriaga (2001), definimos  $\tilde{K} = C_S^{-\frac{1}{2}}K$  and  $\tilde{\mathbf{S}} = C_S^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}$ , donde  $C_S^{-\frac{1}{2}}$  es la matriz inversa de  $C_S^{\frac{1}{2}}$  construida tomando la raíz cuadrada de los autovalores de  $C_S$ . Luego tenemos

$$\chi^2 = \left| \tilde{K}\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{S}} \right|^2. \tag{13.27}$$

SVD puede ser utilizada para encontrar la solución  $\mathbf{D}$  que minimiza esta cantidad. La descomposición en valores singulares de la matriz  $\tilde{K}$  está dada por  $\tilde{K} = U\mathbf{W}V^T$ , donde  $U$  es una matriz ortogonal columna  $N_R \times N_k$ ,  $\mathbf{W}$  es una matriz diagonal  $N_k \times N_k$  cuyas entradas  $w_i$  son llamadas valores singulares, y  $V$  es una matriz ortogonal  $N_k \times N_k$ . Con esta notación podemos expresar la solución (13.25) como  $\mathbf{D} = V\mathbf{W}^{-1}U^T\mathbf{S}$ , y la matriz de covariancia  $C_p = V\mathbf{W}^{-2}V^T$ . Si la matriz kernel es singular, entonces algunos de los elementos  $w_i$  de la matriz  $\mathbf{W}$  son cero y la matriz inversa  $\mathbf{W}^{-1}$  no está definida. Pero incluso cuando ninguno de los valores singulares son exactamente iguales a cero, sus valores pueden ser tan pequeños que estén dominados por errores de redondeo y sus inversas  $w_i^{-1}$  tendrán valores muy grandes causando que el problema

sea intratable numéricamente. La figura 13.2 muestra los valores singulares de  $w_i$  obtenidos realizando la SVD de la matriz  $K$ . Puede observarse que hay un gran número de valores singulares que son muy pequeños, causando que el problema sea singular.

La solución obtenida reemplazando por cero los cocientes  $w_i^{-1}$  correspondientes a valores singulares más chicos minimiza la ecuación (13.26) y, por lo tanto, es la solución  $\mathbf{D}$  que estamos buscando (Press et al., 1992).

En la Figura 13.1 también se muestra el espectro de potencia recuperado a partir de  $\sigma(M)$  aplicando el método SVD para el mismo rango de masas que en la aproximación  $\sigma^2(R) = \Delta^2(k_{eff})$ . Es claro a partir de esta figura que el SVD da muy buenos resultados en un amplio rango de escalas, reproduciendo correctamente la forma y la amplitud del espectro de potencia teórico.

### Regularización lineal

Otro camino para obtener una solución para (13.24) es utilizando un enfoque Bayesiano. Como mencionamos anteriormente, el problema que tratamos de resolver es singular ya que deseamos obtener más información sobre  $\Delta^2(k)$  a partir de  $\sigma(M)$  de la realmente disponible. Para evitar esta falta de información podemos proveer una hipótesis previa de un espectro de potencia “suave”. Para ello, agregamos una segunda exponencial en la distribución de probabilidades para  $\mathbf{S}$ , que será proporcional a  $\exp[-\frac{1}{2}(\chi^2 + \lambda\beta)]$ , donde

$$\beta = \mathbf{D}^T H \mathbf{D}. \tag{13.28}$$

Ahora debemos encontrar la solución  $\mathbf{D}$  que minimice la suma pesada  $\chi^2 + \lambda\beta$ . Si la minimización de la funcional  $\beta$  es por si misma no-singular, la minimización general también lo será (Press et al., 1992). La primera funcional ( $\chi^2$ ) es una medida de la concordancia de la solución  $\mathbf{D}$  con los datos  $\mathbf{S}$ , el segundo término ( $\beta$ ) puede ser visto como la medida de su acuerdo con un *prior*, implementado mediante la matriz  $H$ , que hace que  $\mathbf{D}$  no varíe mucho. El factor  $\lambda$  en el segundo término de la ecuación (13.28) fija el peso relativo de las dos funcionales. El ímite  $\lambda \rightarrow 0$  corresponde a la minimización de  $\chi^2$ . En este trabajo hemos elegido la matriz  $H$  correspondiente a una  $\mathbf{D}$  constante (ecuación 18.5.3 en Press et al., 1992).

Con estas definiciones, la solución para  $\mathbf{D}$  que minimiza  $\chi^2 + \lambda\beta$  puede ser encontrada resolviendo las *ecuaciones normales*

$$\left( \tilde{K}^T \tilde{K} + \lambda H \right) \mathbf{D} = \tilde{K}^T \tilde{\mathbf{S}}$$

y la matriz covariante estará dada por

$$C_D = \left( \tilde{K}^T \tilde{K} + \lambda H \right)^{-1}.$$

Las soluciones obtenidas de esta manera dependen del valor de  $\lambda$ . Éste debe ser determinado de acuerdo a nuestra confianza en los datos observacionales. Un valor que da igual peso a la minimización de las funcionales  $\chi^2$  and  $\beta$  está dado por

$$\lambda = \text{Tr}(\tilde{K}^T \tilde{K}) / \text{Tr}(H). \quad (13.29)$$

Los resultados de la aplicación de este método pueden apreciarse en la figura 13.1, donde mostramos el espectro de potencia recuperado de la misma  $\sigma(M)$  utilizada en los métodos  $K_{eff}$  y SVD. El valor de  $\lambda$  adoptado es aquel de (13.29). Es claro de la figura que la Regularización Lineal (LR) también provee resultados apropiados para  $\Delta^2(k)$  en un amplio rango de escalas.

## 13.3. Probando el método

### 13.3.1. Las simulaciones GIF

Para probar la capacidad del método desarrollado en la última sección para recuperar el verdadero espectro de potencia a partir de la función de masa diferencial, lo aplicamos a las simulaciones GIF  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM (Kauffman et al., 1999). Los valores para los parámetros cosmológicos de cada simulación se listan en la tabla 13.1.

Para aplicar el método primero determinamos la función de masa de cúmulos identificados en las simulaciones numéricas. Para ello utilizamos identificadores de halos tipo Friends Of Friends (FOF) y de Sobredensidad Esférica (SO). La función de masa determinada de esta manera es sensible a la elección del parámetro de linqueo  $b$  y al contraste de densidad  $\kappa$  en los algoritmos FOF y SO, respectivamente. Ambos parámetros fueron fijados en acuerdo con el modelo de colapso esférico como fue descrito por Eke et al. (1996):  $b = 0,2$  y  $\kappa = 180$  para  $\Omega = 1$ , y  $b = 0,164$  y  $\kappa = 324$  para  $\Omega = 0,3$ .

Las funciones de masa diferenciales obtenidas están graficadas en la Figura 13.3, donde, para comparación, también graficamos las predicciones de los formalismos de PS, SMT y J01. Como puede verse, los resultados obtenidos con los dos identificadores de halos están en excelente acuerdo. Esto nos permite concentrarnos solamente en un algoritmo, para lo cual utilizamos FOF. Esta elección se basa en el hecho de que éste es el algoritmo utilizado por J01 en la determinación de los valores de los coeficientes

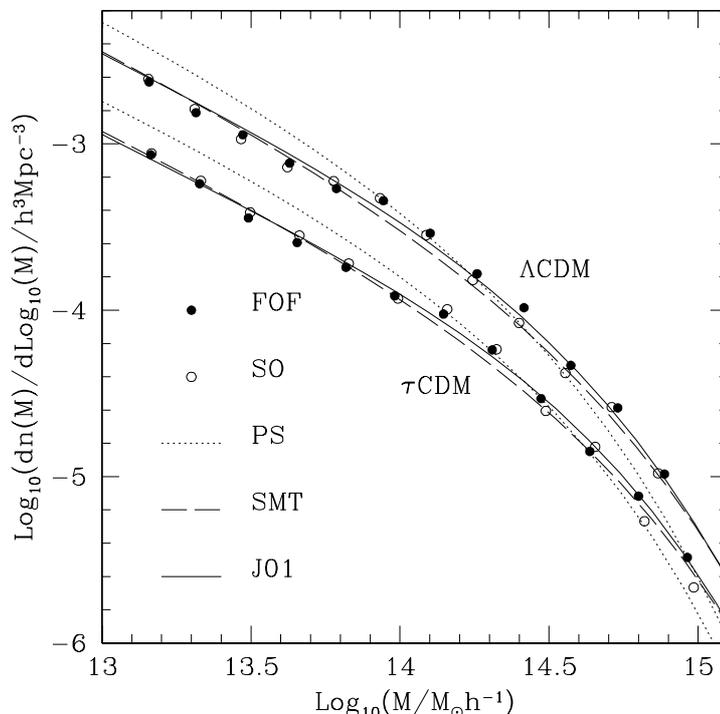


Figura 13.3: Función de masa para las simulaciones GIF  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM, determinadas utilizando el FOF halo finder comparadas con la predicciones de los formalismos de PS, SMT y J01.

en la función de masa (5.9). Otro punto que apoya nuestra elección proviene del argumento presentado por J01, el cual sostiene que la universalidad de la función de masa es más evidente utilizando FOF en lugar de SO. Debe notarse que la predicción del formalismo de PS falla en reproducir las funciones de masa obtenidas a partir de las simulaciones, mientras que las prescripciones de SMT y J01 dan un resultado más preciso. Esto no es sorpresa ya que las simulaciones GIF fueron utilizadas para obtener los parámetros en las expresiones de la función de masa de estos formalismos.

### 13.3.2. La determinación de $\sigma(R)$ :

El siguiente paso del método descrito en la sección 13.2 es la determinación de  $\sigma(R)$  a partir de  $n(M)$  utilizando las ecuaciones (13.6) (13.12) y (13.18). Para ello, sólo hemos utilizado las funciones de masa obtenidas de las simulaciones para  $M > 10^{13}h^{-1}M_{\odot}$ , que es aproximadamente el rango que corresponde a cúmulos de

Cuadro 13.1: Valores de los parámetros cosmológicos en las simulaciones GIF (Kauffman et al., 1999)

Modelo	$\Omega_o$	$\Omega_\Lambda$	$h$	$\sigma_8$	$\Gamma$	Box
$\tau$ CDM	1.0	0.0	0.5	0.6	0.21	$85h^{-1}\text{Mpc}$
$\Lambda$ CDM	0.3	0.7	0.7	0.9	0.19	$140h^{-1}\text{Mpc}$

galaxias. La Figura 13.4 muestra los resultados para  $\sigma(M)$  obtenidos de esta manera para simulaciones  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM, junto con la función  $\sigma(M)$  calculada utilizando (13.19) y el espectro de potencia presente en cada modelo.

Las mejores soluciones para  $\sigma(M)$  se obtuvieron utilizando el formalismo de J01, indicando que éste da la mejor descripción de la función de masa de los halos de materia oscura cuando éstos son identificados utilizando el algoritmo FOF.

Los resultados obtenidos con el formalismo de SMT están en buen acuerdo con los obtenidos utilizando la receta de J01 para la simulación  $\Lambda$ CDM, pero no es el caso de la simulación  $\tau$ CDM, demostrando que este formalismo no describe la función de masa  $\tau$ CDM al nivel de certeza requerido por nuestro método. Los resultados obtenidos con el formalismo de PS difieren notablemente de los obtenidos a partir de los modelos teóricos presentes en las simulaciones, mostrando que éste representa una descripción pobre de la función de masa, un resultado que es recurrente en la literatura sobre esta área.

Intentamos determinar la matriz de covariancia  $C_S$  para  $\sigma^2(M)$  utilizando una técnica de re-muestreo bootstrap. Determinamos  $n(M)$  para un gran número de muestras de grupos seleccionados al azar de la lista original de las simulaciones. Para cada una de ellas calculamos  $\sigma^2(M)$  de acuerdo con las recetas de PS, SMT y J01. Siguiendo con la notación utilizada en la §3.2 estimamos la matriz de covariancia como

$$(C_S)_{ij} = \langle (S_i - \bar{S}_i) (S_j - \bar{S}_j) \rangle$$

donde  $\bar{S}$  representa el valor teórico de  $\sigma^2$  para el modelo considerado.

La figura 13.5 muestra la matriz de correlación  $Cor_{ij} = (C_S)_{ij} / \sqrt{(C_S)_{ii} (C_S)_{jj}}$  obtenida con este procedimiento para las soluciones de J01 determinadas de la simulación  $\Lambda$ CDM, los resultados obtenidos utilizando los otros formalismos son similares. Debe notarse que todas las masas más chicas (grandes) que  $M_8$  están correlacionadas. Como la masa  $M$  sólo aparece en las expresiones para  $\sigma(M)$  a través de la función  $G(M) = \int_M^{M_8} Mn(M)dM$ , el valor de  $\sigma(M)$  para las masas mayores (menores) que  $M_8$

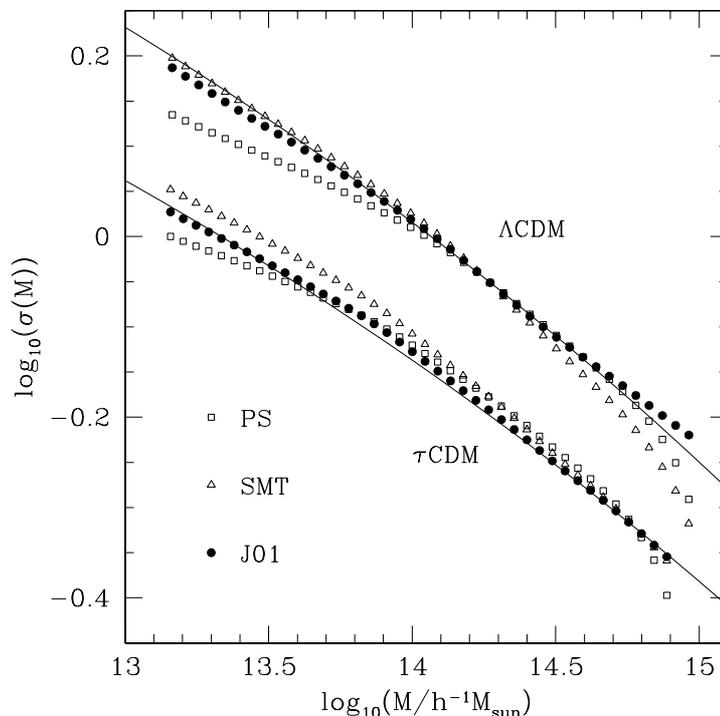


Figura 13.4: Soluciones para  $\sigma(M)$  obtenidas mediante la aplicación de los diferentes formalismos a las funciones de masa de las simulaciones GIF. Para mayor claridad, las soluciones obtenidas para las simulaciones  $\tau$ CDM están divididas por un factor 1.25.

no tiene influencia en el valor de  $\sigma(M)$  para masas menores (mayores) que este límite y, por lo tanto, las correlaciones entre estas dos regiones deberían desaparecer. Esta característica no está presente en la matriz de correlación determinada mediante la técnica bootstrap resampling, la cual muestra correlaciones espúreas que prueban la insuficiencia de esta técnica para la determinación de la matriz de covariancia. Debido a que no hemos tenido éxito en determinar  $C_S$  asumimos de ahora en más que posee una forma diagonal. Como fue mencionado por Eisenstein & Zaldarriaga (2001), esta simplificación puede causar una desestimación de los errores en el espectro de potencia final. Para el propósito de este trabajo, esta aproximación es razonable, pero tiene que ser tenida en cuenta apropiadamente si está destinada a obtener restricciones precisas en los modelos cosmológicos utilizando datos observacionales.

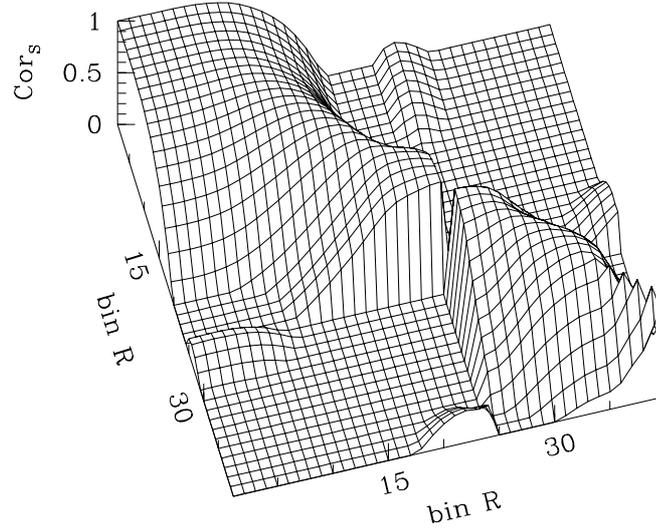


Figura 13.5: Matriz de correlación de la función  $\sigma^2(M)$  obtenida a partir de la función de masa  $\Lambda$ CDM utilizando el formalismo de J01. Esta matriz fue calculada utilizando el método bootstrap resampling .

### 13.3.3. La determinación de $\Delta^2(k)$

Dado que en los dos casos ( $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM) la solución  $\sigma(M)$  determinada utilizando la ecuación (13.18) con el ajuste general de J01 es la que muestra el mejor acuerdo con el correspondiente modelo cosmológico, utilizamos esta solución para determinar el espectro de potencia asumiendo que  $C_S$  es diagonal. La Figura 13.6 muestra los resultados obtenidos de esta manera para las simulaciones  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM utilizando las diferentes técnicas descritas en la sección 13.2.2. Para comparación también graficamos el espectro de potencia teórico  $\Delta^2(k)$  para cada modelo.

En la implementación de la aproximación  $\sigma^2(R) = \Delta^2(k_{eff})$ , el valor del índice  $n$  no fue determinado a partir de  $\sigma(R)$  como se describió en la sección 13.2.2. La solución obtenida aplicando este procedimiento mostró un comportamiento oscilatorio. En su lugar, fijamos el valor  $n = -2$ . En aquellas escalas en las que esta aproximación es válida, el espectro de potencia obtenido muestra un buen acuerdo con el correspondiente a los diferentes modelos. La solución comienza a fallar donde esta

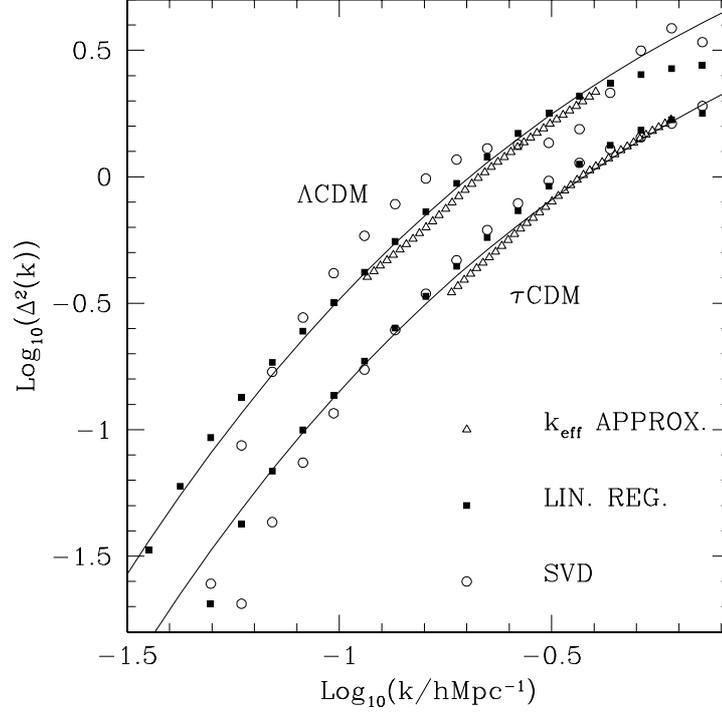


Figura 13.6: Soluciones para  $\Delta^2(k)$  obtenidas con las diferentes técnicas descritas en §3.2, utilizando la solución para  $\sigma(M)$  determinada por el ajuste general de J01 con el espectro de potencia correcto de los modelos  $\tau\text{CDM}$  y  $\Lambda\text{CDM}$ .

aproximación deja de ser válida. Las soluciones recuperadas tienen aproximadamente la forma correcta pero sufren del mismo problema mencionado en 13.2.2, desestimando la amplitud del espectro de potencia. Este análisis muestra que esta técnica puede ser una herramienta poderosa para determinar el espectro de potencia si el índice  $n$  es determinado de una manera más eficiente.

La solución obtenida aplicando SVD como fue descrita la sección 13.2.2 muestra un muy buen acuerdo con el espectro de potencia correcto en un amplio rango de escalas en la simulación  $\tau\text{CDM}$ , pero falla en reproducir la forma correcta para el caso de  $\Lambda\text{CDM}$ . Este comportamiento no estaba presente en la solución graficada en la figura 13.1, donde los mejores resultados fueron encontrados utilizando esta técnica. Esto muestra que las soluciones obtenidas con SVD son muy sensibles a las diferencias entre las  $\sigma(M)$  usadas y exactas y, por lo tanto, a las desviaciones de  $n(M)$  con respecto a las predicciones del ajuste general de J01. Esto indica que la implementación del método de SVD a los datos reales no es muy eficiente, una

situación que puede mejorar con la utilización de la matriz de covariancia completa, en lugar de la diagonal  $C_S$ .

Las mejores soluciones se encontraron utilizando la técnica LR, la cual reproduce la forma y amplitud correcta del espectro de potencia en un amplio rango de escalas, mostrando el mismo rendimiento que en la sección 13.2.2. Esto prueba que, al menos dentro de la hipótesis de la matriz diagonal, ésta prueba ser la mejor técnica para recuperar el espectro de potencia a partir de la función de masa de los cúmulos de galaxias.

Debe notarse el hecho de que las simulaciones utilizadas en la prueba tienen un volumen pequeño. Por lo tanto, no ha sido posible analizar la capacidad de nuestro método para lidiar con la presencia de objetos masivos. Los formalismos de PS, SMT y J01 han sido probados extensivamente con resultados de simulaciones numéricas utilizando volúmenes mucho mayores que los utilizados en este trabajo. Estos análisis han mostrado que las funciones de masa de SMT y J01 tienen en adecuadamente los objetos más masivos. Esto indica que el efecto de la presencia de cúmulos masivos en la función de masa estará en perfecto acuerdo con los formalismos teóricos. Además, la inclusión de estos objetos en nuestro análisis mejorará nuestros resultados y aumentará el rango de escalas en los que  $\Delta^2(k)$  es recuperado, ya que los problemas numéricos son tratables más fácilmente cuando se tiene en cuenta un rango de masas mayor.

Para probar nuestro método en una situación más realista, también analizamos los efectos de introducir errores en las determinaciones de las masas individuales de los cúmulos. Construimos 5 muestras de grupos a partir de los originales identificados en las simulaciones GIF  $\Lambda$ CDM, añadiendo errores gaussianos a las masas individuales de amplitudes 10 %, 20 %, 30 %, 40 % y 50 %. Para cada una de estas nuevas muestras determinamos la función de masa. Los resultados obtenidos muestran que incluso un error de hasta un 50 % en las determinaciones de masa individuales produce un pequeño efecto en el extremo de masas chicas, causando desviaciones de menos del 10 % en todos los casos. En el extremo de masas grandes ( $\log_{10}(M/h^{-1}M_{\odot}) > 14,5$ ) estos errores pueden producir desviaciones de incluso un 30 % debido a la pequeña cantidad de objetos. Sin embargo, su presencia no produce un efecto considerable en el espectro de potencia final, indicando que nuestro método es robusto incluso cuando se manejan grandes errores en las estimas de la masa.

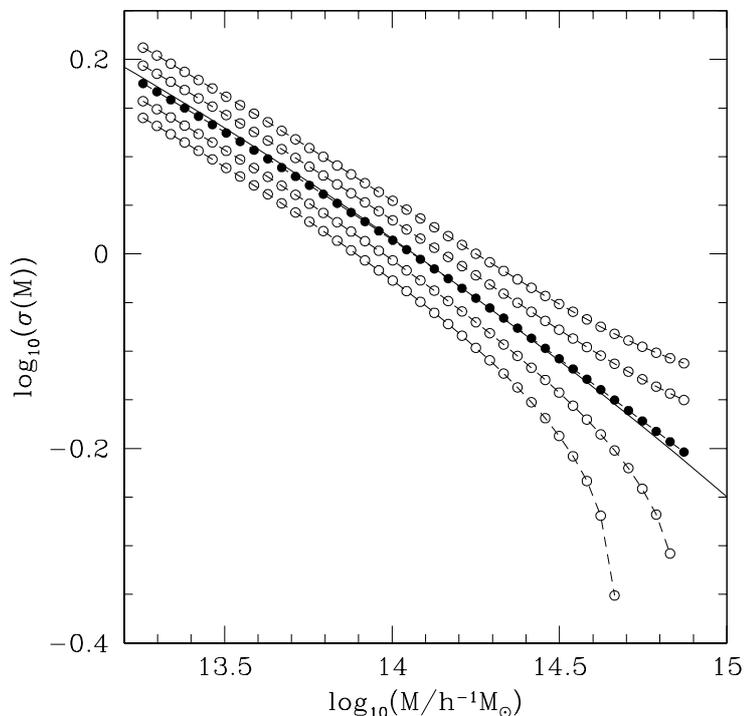


Figura 13.7: Soluciones para  $\sigma(M)$  obtenida a partir de la función de masa de la simulación GIF  $\Lambda$ CDM con el ajuste general de J01 fijando los valores de  $\Omega = 0,3$ , y variando  $\sigma_8$  en los valores 0.8, 0.85, 0.9, 0.95 y 1.0. Los círculos llenos indican la solución para  $\sigma_8 = 0,9$ .

### 13.3.4. Dependencia de $\Omega_m$ y $\sigma_8$

El método para la determinación del espectro de potencia descrito en la sección 13.2 requiere el conocimiento previo del parámetro de densidad  $\Omega$  y el rms de las fluctuaciones de masa en alguna escala de referencia, por ejemplo  $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$  ( $\sigma_8$ ). En esta sección analizamos la dependencia de nuestros resultados de estos parámetros. Para ello calculamos la solución  $\sigma(M)$  de la función de masa de la simulación  $\Lambda$ CDM ( $\Omega = 0,3$ ,  $\sigma_8 = 0,9$ ) fijando  $\Omega = 0,3$  y variando  $\sigma_8 = 0,8, 0,85, 0,9, 0,95$ , y 1,0, y fijando  $\sigma_8 = 0,9$ , y variando  $\Omega$  desde 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 y 0.4. Los resultados obtenidos de esta manera están graficados en las Figuras 13.7 y 13.8.

La figura 13.7 muestra que, a excepción de extremos de grandes masas, el efecto de cambiar  $\sigma_8$  en las soluciones de  $\sigma(M)$  es simplemente un cambio en la normalización general. Por otro lado, la forma de las soluciones es afectada en el límite de masas grandes. Como se muestra más adelante, este efecto se propaga en el espectro de potencia causando diferencias en el límite inferior de  $k$ .

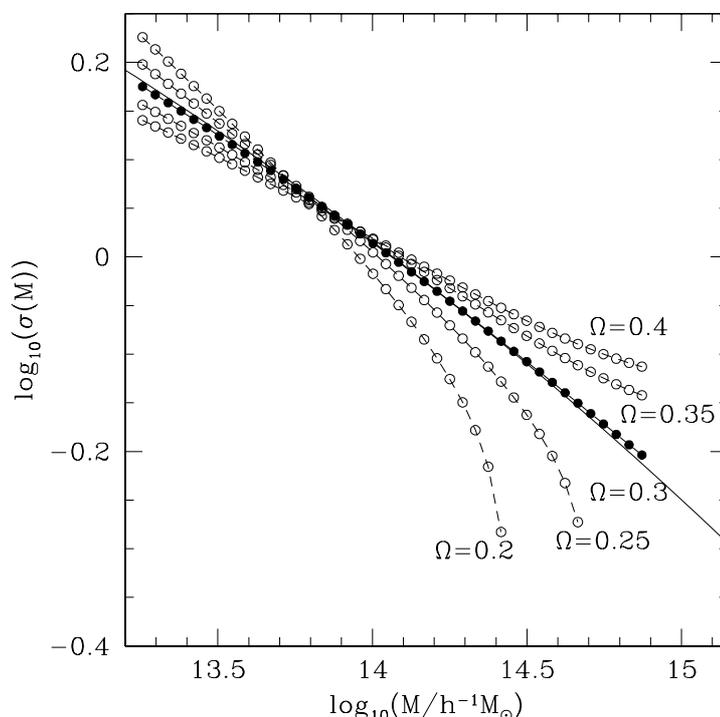


Figura 13.8: Soluciones para  $\sigma(M)$  obtenidas a partir de la función de masa de la simulación GIF  $\Lambda$ CDM utilizando el ajuste general de J01 fijando los valores de  $\sigma_8 = 0,9$ , y variando  $\Omega$  en los valores 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 y 0.4. Los círculos llenos indican la solución correspondiente a  $\Omega = 0,3$ .

La figura 13.8 muestra que los efectos de cambiar el valor de  $\Omega_m$  pueden ser más serios, ya que las soluciones obtenidas tienen comportamientos diferentes que el observado en el caso de  $\Omega = 0,3$ . Ésto causará diferencias en el espectro obtenido en todas las escalas.

Para analizar el efecto de estas variaciones sobre el espectro de potencia, utilizamos la técnica LR para obtener  $\Delta^2(k)$  a partir de las funciones  $\sigma(M)$  graficadas en las figuras 13.7 y 13.8. Para ello utilizamos el valor de  $\lambda$  empleado en la sección 13.2.2 cuando obtuvimos el espectro de potencia a partir de esta simulación. Los resultados obtenidos de esta manera se encuentran graficados en las figuras 13.9 y 13.10.

La figura 13.9 muestra que, como fue mencionado anteriormente, el efecto que surge de cambiar el valor de  $\sigma_8$  es importante en los valores más chicos de  $k$ , donde puede producir cambios considerables en las soluciones. Para los valores grandes de  $k$ , las soluciones obtenidas no son muy diferentes de las obtenidas para el valor

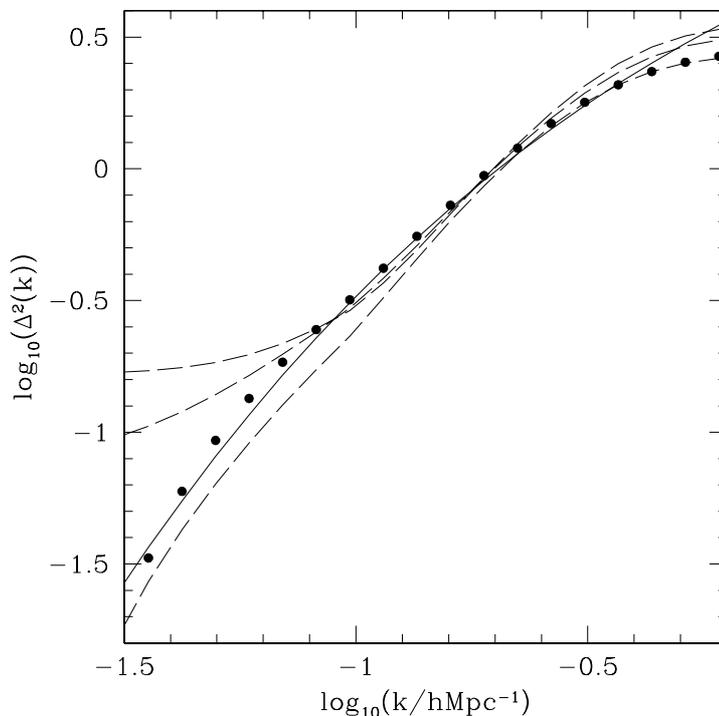


Figura 13.9: Soluciones para  $\Delta^2(k)$  obtenidas aplicando la técnica LR a las soluciones para  $\sigma(R)$  de la simulación  $\Lambda$  CDM fijando  $\Omega$  y variando  $\sigma_8$  (ver Figura 8).

correcto de  $\sigma_8$ . Este es el mismo efecto observado en el análisis de  $\sigma(M)$  donde sólo encontramos una renormalización y ningún cambio en la forma.

El efecto más importante en el espectro de potencia es el causado por el uso del valor incorrecto de  $\Omega_m$ . Como puede verse en la figura 13.10, las soluciones obtenidas difieren notablemente entre ellas, y muestran un comportamiento diferente en cada escala. La razón para ello es que el efecto de cambiar  $\Omega_m$  en  $\sigma(M)$  no es una simple renormalización, sino un cambio en la pendiente de las soluciones. Esto hace a  $\Omega$  el parámetro más importante en el modelo.

### 13.4. Comparación con el método FKP

Como una prueba final de nuestro método, comparamos las salidas del método presentado en este trabajo con las del FKP, descrito en Zandivarez, Abadi & Lambas (2001).

Aplicamos ambos métodos a las simulaciones GIF y graficamos los resultados en

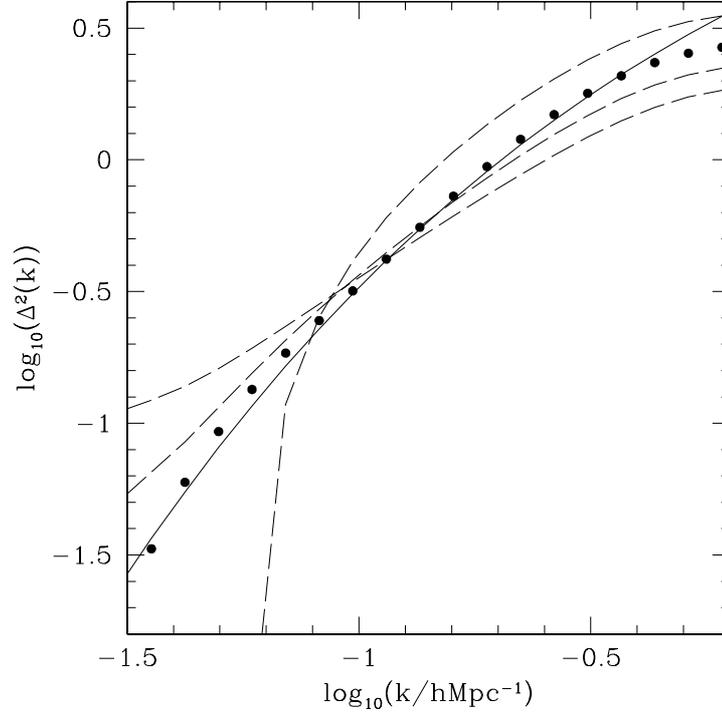


Figura 13.10: Soluciones para  $\Delta^2(k)$  obtenidas aplicando la técnica LR a las soluciones para  $\sigma(R)$  de la simulación  $\Lambda$  CDM fijando  $\sigma_8$  y variando  $\Omega$  (ver Figura 9).

las figuras 13.11 y 13.12 correspondientes a los modelos  $\Lambda$ CDM y  $\tau$ CDM, respectivamente, donde graficamos el espectro de potencia  $P(k)$ , obtenido mediante la técnica de FKP, en escalas logarítmicas (panel superior) y lineales (panel inferior). Para poder comparar estos resultados hemos normalizado arbitrariamente el espectro de potencia derivado con la técnica FKP al espectro de masa lineal, el cual es la salida de nuestro método.

Es claro de estas figuras que nuestro método y el FKP arriban a resultados similares, mostrando de esta forma la eficacia de nuestro enfoque. Notamos que las soluciones para  $P(k)$  obtenidas a partir de la función de masa muestra un mejor acuerdo con el espectro de potencia del modelo correspondiente que aquellas obtenidas con la técnica FKP. El rango de validez de nuestra soluciones debe tenerse en cuenta, ya que la aparente buena descripción de  $P(k)$  en los valores más altos de  $k$  corresponde a una región donde LR da una solución constante para  $\Delta^2(k)$ , la cual a su vez da  $P(k) \propto k^{-3}$ , el comportamiento aproximado del espectro de potencia en estas escalas. Incluso si LR da una descripción más adecuada de  $P(k)$  en el rango

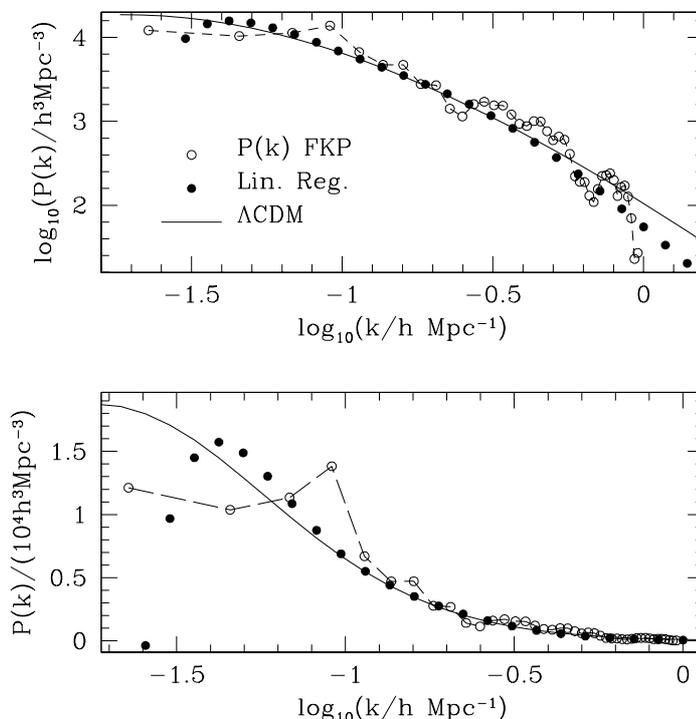


Figura 13.11: Resultados obtenidos para el espectro de potencia  $P(k)$  de la simulación GIF  $\Lambda$  CDM utilizando la técnica LR y el método FKP a la misma muestra de grupos, con escalas logarítmicas (panel superior) y lineal (panel inferior).

donde se ha probado que es aplicable, el espectro de potencia estimado utilizando la técnica FKP funciona para valores de  $k$  mayores. Como el rango de validez de nuestra solución depende del rango de masas de la función diferencial de masa, la inclusión de cúmulos de baja masa mejorará esta situación.

Como puede verse en los paneles inferiores de las figuras 13.11 y 13.12, la solución obtenida utilizando LR da una descripción muy precisa del espectro de potencia para los valores de  $k$  más chicos, donde el método FKP falla en dar una respuesta satisfactoria. Además, los bins logarítmicos en la solución de LR muestrean estos valores de  $k$  de mejor manera que la técnica de FKP, mostrando que nuestro método es mejor para estudiar el espectro de potencia en estas escalas.

Es importante mencionar el hecho de que nuestro método provee el espectro de potencia lineal, mientras que la solución de la técnica FKP está afectada por efectos de no linealidad. Éstos no son tan importantes en las escalas que analizamos aquí, pero pueden ser significativos cuando se incluyen objetos de masas menores en el

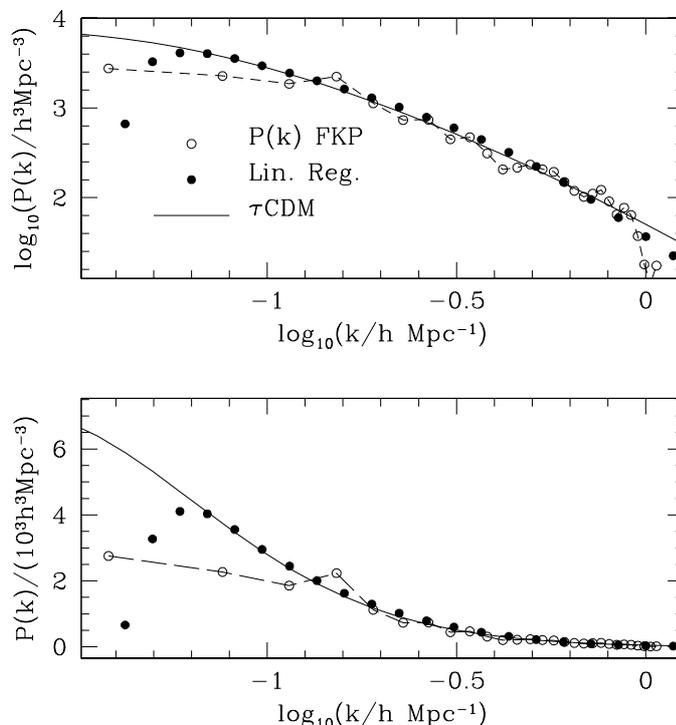


Figura 13.12: Lo mismo que en la Figura 13.11, pero para la simulación GIF  $\tau$ .

análisis.

Una diferencia significativa e importante en nuestra técnica es que naturalmente permite utilizar la información proveniente de diferentes escalas y objetos, desde cúmulos de galaxias ricos hasta pobres de una manera homogénea. Por otro lado, la técnica FKP dará resultados diferentes para subconjuntos de sistemas de galaxias con diferentes masas, reflejando su bias relativo con respecto a la distribución de masa. Además, en nuestro método es deseable la inclusión de objetos con un amplio rango de masas, ya que esto permite una mejor determinación del espectro de potencia en un rango de escalas más amplio.

## 13.5. Conclusiones

En este capítulo hemos desarrollado un nuevo método para determinar el espectro de potencias lineal de la masa a partir de la función de masa de los cúmulos de galaxias basado en los formalismos de PS, SMT y J01. La rms de las fluctuaciones masa  $\sigma(M)$  es determinada utilizando la expresión para la función de masa en la forma de

una ecuación diferencial. Luego utilizamos diferentes técnicas de teoría de ecuaciones integrales para obtener el espectro de potencial adimensional  $\Delta^2(k)$  a partir de  $\sigma(M)$ .

La implementación de este método a simulaciones GIF  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM muestra una alta eficiencia para recuperar la forma y amplitud correcta del espectro de potencia en un amplio rango de escalas, mostrando una buena performance y una utilidad práctica. Si bien las diferentes soluciones de  $\sigma(M)$  obtenidas de diferentes simulaciones muestran un acuerdo general, es claro que la prescripción de J01 da un resultado mucho mejor que los formalismos de PS o SMT, mostrando que el ajuste general de J01 da una excelente descripción de la función diferencial de masa de los cúmulos identificados en las simulaciones.

En el caso teórico analizado en la sección 13.2.2 la mejor solución fue aquella obtenida a partir de la implementación de SVD, que recupera el espectro de potencia en un amplio rango de escalas. Sin embargo, a partir del análisis de los resultados obtenidos de las simulaciones, concluimos que la mejor técnica para invertir la ecuación integral en nuestro problema es la regularización lineal. Esta situación puede cambiar con el uso de la matriz de covariancia completa y, por lo tanto, debe ser analizada sin la hipótesis de una matriz  $C_S$  diagonal.

La comparación de los resultados obtenidos con nuestro método con aquellos obtenidos con la técnica estándar FKP muestra un muy buen acuerdo general. Sin embargo, en escalas donde tienen validez nuestras soluciones, nuestras respuestas dan una descripción mucho más precisa del espectro de potencia que las obtenidas utilizando el método FKP. Esto es especialmente válido en los valores más chicos de  $k$  donde la solución de FKP falla en dar una respuesta correcta. Además, los bins logarítmicos de nuestro método muestrean las escalas en un modo más eficiente que los bins lineales (como es el caso de la salida de FKP). Esto produce efectos importantes en el análisis del espectro de potencia en escalas grandes. La técnica FKP trabaja para valores mayores de  $k$  que la solución LR. Sin embargo, esto puede mejorar significativamente si la información de  $n(M)$  para masas más chicas es incluida en el análisis.

Para aplicar nuestro procedimiento a datos reales necesitamos una estima de la función de masa de cúmulos de galaxias. Desafortunadamente las estimas actuales de esta importante medición estadística no son completamente satisfactorios ya que los valores citados son significativamente diferentes y además están referidos a definiciones diferentes de masas de cúmulos (ver por ejemplo Bahcall & Cen, 1993; Biviano et al., 1993; Girardi et al., 1998; Girardi & Giuricin, 2000; Reiprich & Böhringer, 2001; Bahcall et al., 2002).

Como ya hemos mencionado, incluso en los casos en los que los errores en las ma-

sas individuales son grandes, el efecto general en la función de masa no es importante cuando se compara con otras fuentes de incertezas como, por ejemplo, el uso de definiciones diferentes de masa. Diferentes métodos para las estimas de masa de cúmulos (i.e. óptico, rayos-x, lentes gravitacionales) claramente están correlacionados, pero proveen diferentes valores de masa para el mismo cúmulo. Incluso, no es claro cómo estas definiciones de masa están relacionadas con las utilizadas en las simulaciones numéricas (i.e. FOF  $b = 0,2$ , FOF  $b = 0,17$ , SO  $\kappa = 200$ , etc), lo cual también muestra diferencias entre ellas (ver White, 2001). Esto es de extrema importancia y es la principal causa de incertezas en nuestro método. Dado que las masas observacionales de cúmulos son estimadas utilizando uno de los métodos mencionados anteriormente, puede ser incorrecto asumir un ajuste a la función de masa cuyos coeficientes han sido determinados utilizando masas FOF, como el formalismo de J01.

Esto indica que el uso de las expresiones derivadas a partir de formalismos teóricos en el análisis de datos observacionales (una práctica común en la literatura) no debe llevarse a cabo sin un análisis cuidadoso de las relaciones entre las diferentes definiciones de masa involucradas.

Existen otras estadísticas disponibles en la literatura como la función de temperatura de muestras de rayos-x (Henry & Arnaud 1991, Markevitch 1998, Blanchard et al. 2000, Ikebe et al 2001). La alta correlación entre la temperatura y la masa sugerida por simulaciones numéricas (Evrard, 1990; Evrard, Metzler & Navarro, 1996; Yoshikawa & Suto, 2000, Mathiesen & Evrard, 2001) ha llevado a muchos autores a utilizar las funciones de temperatura para confrontar las observaciones con predicciones teóricas, en lugar de funciones de masa.

El método aquí descrito puede ser aplicado igualmente a la función de temperatura  $P(k)\alpha k^{-3}$  de cúmulos de galaxias, pero para ello es necesario una relación masa-temperatura confiable. Desafortunadamente esta transformación todavía no ha sido determinada de una manera precisa, y diferentes relaciones  $T - M$  dan resultados igualmente diferentes entre ellas.

La determinación observacional de la función de masa de cúmulos de galaxias puede mejorar en los próximos años con nuevas estimas de masa a partir de lentes gravitacionales, o incluso a partir de estimas de masas viriales obtenidas de nuevos grandes catálogos como 2dF o SDSS.

Si la discusión anterior es tenida en cuenta en forma apropiada los métodos descritos en este trabajo pueden ser herramientas muy útiles para proveer nuevas y confiables determinaciones del espectro lineal de masa.

# Capítulo 14

## Conclusiones

*Había una Puerta para la que no encontré ninguna llave.  
Había un velo a través del cual no pude ver.*

*Rubaiyat* de Omar Khayyam

En esta tesis se presentó un análisis de las diversas herramientas con las que cuenta la cosmología observacional para fijar cotas en los valores de los parámetros cosmológicos, obteniendo así restricciones en las teorías que son compatibles con el Universo Observado.

En la Parte I se realizó una descripción teórica del estado actual del campo. Recopilando los conocimientos necesarios para el trabajo en esta área, prestando particular atención a las teorías y parámetros que son analizados y utilizados en las partes II y III, que contienen los resultados de las tareas de investigación realizadas en esta tesis.

En la parte II, se obtienen restricciones en los valores de parámetros cosmológicos utilizando el espectro de potencia de la distribución de galaxias determinado a partir de la versión final del two-degree field galaxy redshift survey (2dFGRS) y una compilación de mediciones del espectro de potencia de las fluctuaciones en temperatura y el espectro de potencias de la correlación entre las fluctuaciones de temperatura y la polarización del fondo cósmico de microondas. Los resultados encontrados para los diferentes espacios de parámetros analizados se detallan en las tablas 7.1 y 7.2. Los mismos indican que existe un impactante acuerdo entre los resultados obtenidos mediante la utilización del CMB únicamente y mediante su combinación con el espectro de potencia del catálogo 2dFGRS. En todos los casos la combinación de los diferentes

conjuntos de datos mejora las restricciones obtenidas, especialmente en el caso de la densidad de materia oscura. En particular, inferimos una densidad de materia significativamente inferior al valor  $\Omega_m = 0,3$ . Otro resultado de gran importancia es la evidencia de una desviación del espectro de potencia invariante en escala de las fluctuaciones primordiales escalares. Nuestros resultados para el índice espectral escalar son sólo marginalmente consistentes con el valor invariante en escala  $n_s = 1$ ; este espectro es formalmente excluido al nivel de 95 % de confiabilidad. De todas formas esta conclusión se debilita si se abandona la hipótesis de un Universo plano o se permite la presencia de neutrinos masivos. También se obtuvieron nuevos límites en la fracción de masa en forma de neutrinos masivos:  $f_\nu < 0,105$  y  $\sum m_\nu < 1,2$  eV al nivel de 95 %. Además confirmamos la evidencia previamente reportada por Efstathiou et al. (2002) de una contribución no nula de energía oscura a la densidad de energía del Universo, cuya ecuación de estado es consistente con una constante cosmológica ( $w_{DE} = -0,85^{+0,18}_{-0,17}$ ).

La figura 14.1 muestra la comparación entre el espectro teórico correspondiente al mejor ajuste obtenido para el espacio de parámetros b6 definido en 6.6 y las observaciones correspondientes al espectro de potencia de la distribución de la galaxias en el catálogo 2dFGRS, y al WMAP. Este último conjunto de datos fue transformado a mediciones en  $P(k)$  de acuerdo a lo descrito en Tegmark & Zaldarriaga (2003). En la misma es posible observar como este modelo cosmológico es capaz de describir las observaciones más precisas disponibles en la actualidad acerca de las fluctuaciones en la densidad del Universo sobre un amplio rango de escalas. Esto es una muestra del grado de avance alcanzado por la cosmología observacional en la última década.

La tabla 10.1 muestra los resultados obtenidos utilizando el espectro de potencias del catálogo SDSS en combinación con información del CMB. En ella puede verse que existen diferencias con los resultados obtenidos mediante la utilización de información del catálogo 2dFGRS. Es posible que las mismas sean simplemente consistentes con la varianza cósmica, pero claramente se obtendría una mayor confianza en los resultados si éstos mostraran una mayor consistencia. Por lo tanto es importante que cada catálogo sea analizado utilizando diversas técnicas y metodologías. Es de gran importancia para la cosmología observacional encontrar el origen de esta discrepancia. En continuación al trabajo realizado en esta tesis, Cole, Sánchez & Wilkins (2006) han demostrado que esta diferencia es debida a que el catálogo SDSS ha sido seleccionado en la banda  $r$ , privilegiando de esta manera a galaxias rojas, las cuales tienden a localizarse en regiones de mayor densidad, donde los efectos no lineales y de bias son m'as importantes. Este resultado implica que, para obtener estimas no sesgadas de los valores de los parámetros cosmológicos utilizando información de los

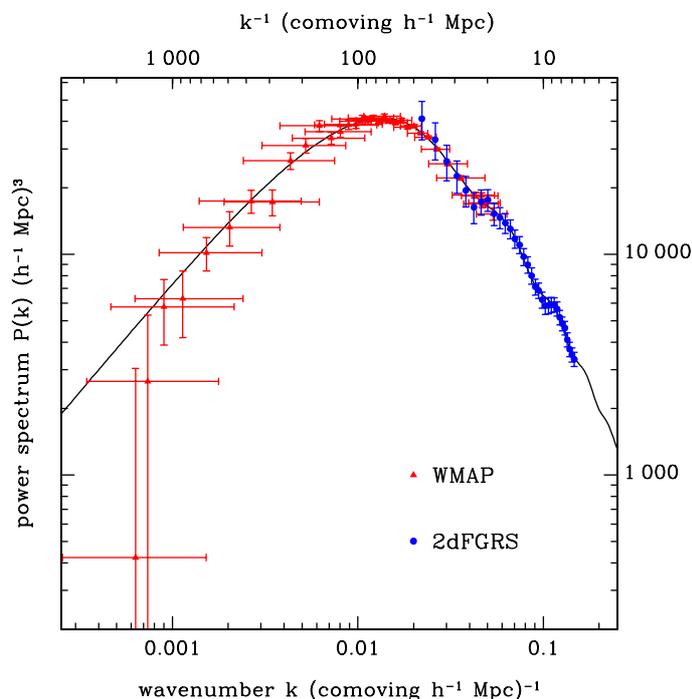


Figura 14.1: Mediciones del espectro de potencia lineal en diversas escalas. Los puntos correspondientes a WMAP fueron transformados a  $P(k)$  de acuerdo a lo descrito en Tegmark & Zaldarriaga (2003). La curva sólida representa el modelo que mejor ajusta las observaciones para el conjunto de parámetros  $b_6$  definido en 6.6.

grandes catálogos de galaxias presentes y futuros, es de gran importancia la realización de un análisis detallado de las distorsiones en la forma del espectro de potencia de las galaxias introducidas por la evolución no lineal de las fluctuaciones y por la dependencia con la escala del bias entre las distribuciones de los distintos tipos de galaxias y la distribución de materia subyacente.

En la Parte III, se analizaron diversas formas en las que las observaciones de cúmulos de galaxias pueden ser utilizadas para determinar parámetros cosmológicos. Se analizan los resultados de la función de correlación cruzada cúmulo-galaxia entre muestras de grupos y cúmulos de galaxias seleccionadas en el óptico y en rayos-X, con galaxias seleccionadas en el óptico y el infrarrojo, para estudiar la forma en la que las galaxias se distribuyen alrededor de los centros de los cúmulos. alargar con las conclusiones de los alemanes. Se utilizó información de los catálogos *ROSAT-ESO Flux Limited X-ray cluster survey* (REFLEX), y un catálogo de grupos (2dFGGC)

construido en base a la version final del catálogo 2dFGRS, y galaxias extraídas de los catálogos 2MASS y APM. Esta determinación constituye el primer cálculo detallado de ésta estadística para cúmulos seleccionados en rayos X y grupos seleccionados en el óptico. Los resultados son consistentes con trabajos anteriores y muestran que  $\xi_{cg}(r)$  no puede ser descrita por una única ley de potencia. Se analizó la dependencia de  $\xi_{cg}(r)$  con la luminosidad en rayos X de los cúmulos y la masa virial de los grupos y la magnitud límite de la muestra de galaxias. Se realizó además una comparación de nuestros resultados con los obtenidos para la función de correlación cruzada halo-masa obtenida en una simulación numérica de N-cuerpos correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM para inferir la dependencia con la escala del bias de las galaxias alrededor de los cúmulos. Nuestros resultados indican que la distribución de galaxias muestra un anti-bias significativo en escalas pequeñas, las cuales están más afectadas por efectos no-lineales, de  $b_{cg} \sim 0,7$ , independientemente de la masa virial o luminosidad en rayos X del grupo/cúmulo central. Esto muestra que un proceso genérico controla la eficiencia de la formación y evolución de galaxias en las regiones de alta densidad. En escalas mayores,  $b_{cg}(r)$  crece hasta un valor constante del orden de la unidad. La escala de la transición corresponde aproximadamente al límite del cúmulo central.

Se realizó además una descripción teórica de las funciones de correlación cruzada halo-masa y cúmulo-galaxia en el marco del modelo de halos. Una comparación de las expresiones teóricas obtenidas para  $\xi_{hm}(r)$  con los resultados de simulaciones numéricas muestra un buen acuerdo, demostrando la validez del método. En particular, el modelo teórico es capaz de dar una explicación teórica al anti-bias observado en escalas chicas entre la distribución de galaxias y de materia alrededor de los centros de los halos, la cual se debe a la Distribución de Ocupación de Halos. Cabe destacar que la expresión teórica obtenida para  $\xi_{cg}(r)$  permite entender el contenido de información cosmológica presente en esta estadística. En escalas chicas, donde esta es dominada por el término de un halo, puede utilizarse para obtener información de la Distribución de Ocupación de Halos y del perfil de densidad de las galaxias. En escalas grandes puede ser utilizada para determinar la posición del pico acústico en escalas cercanas al horizonte de sonido en la época de la recombinación. Para esto es necesario realizar un análisis en base a simulaciones numéricas y modelos semi-analíticos de formación de galaxias, con especial énfasis en los posibles errores sistemáticos introducidos por la evolución no-lineal de las fluctuaciones en densidad, las distorsiones en el espacio de redshifts y el sesgo entre las distribuciones de halos y materia.

Otra aplicación cosmológica de los cúmulos de galaxias presentada en esta tesis corresponde a la presentación de un método para la determinación del espectro de potencia lineal de la masa, a través de la función de masa de los cúmulos de galaxias.

La comparación de la aplicación de este método con los resultados de los métodos existentes más utilizados en la actualidad muestra que este método es capaz de brindar resultados mucho más precisos, si se cuenta con una buena estima observacional de la función de masa.

Otra aplicación cosmológica de los cúmulos de galaxias descrita en esta tesis corresponde a la presentación de un método para la determinación del espectro de potencia correspondiente a la evolución lineal de las fluctuaciones en la distribución de masa utilizando la función de masa de los cúmulos de galaxias. En dicho método se obtiene en primer lugar la varianza de las fluctuaciones en masa  $\sigma(M)$  utilizando la expresión para la función de masa en los formalismos de Press & Schechter (1974), Sheth, Mo & Tormen (2001) y Jenkins et al. (2001). Posteriormente se recupera el espectro de potencia adimensional  $\Delta^2(k)$  a partir de  $\sigma(M)$ . Para ello se evaluó el uso de diversas técnicas como la aproximación  $k_{eff}$ , la descomposición en valores singulares y el método de regularización lineal. La aplicación de estas técnicas a las simulaciones  $\tau$ CDM y  $\Lambda$ CDM GIF muestra una gran eficiencia para recuperar el espectro de potencia teórico sobre un amplio rango de escalas. La comparación de nuestros resultados con los obtenidos mediante la aplicación del método estándar de Feldman, Kaiser & Peacock (1994, FKP) para el cálculo del espectro de potencias de la distribución espacial a la misma muestra de cúmulos en la simulación muestra un buen acuerdo. Nuestros resultados indican que el método de la función de masa presentado aquí brinda estimas muy precisas del espectro de potencias lineal, particularmente para valores pequeños de  $k$ . Nuestra estima es comparable o de mejor comportamiento que la solución obtenida mediante la técnica FKP.

La principal ventaja del método presentado aquí es que The principal advantage of our method permite determinar el espectro de potencia lineal utilizando información conjunta de objetos en un amplio rango de masas sin necesidad de realizar hipótesis específicas acerca del bias relativo entre los objetos utilizados y la distribución de masa subyacente.

Estos resultados muestran que la cosmología observacional ha alcanzado niveles de precisión en sus resultados muy superiores a los obtenidos en años anteriores. La incorporación de información proveniente de los cúmulos de galaxias en futuros análisis multiparamétricos puede ayudar a mejorar aún más las restricciones en los parámetros cosmológicos, y por ende, nuestra comprensión del Universo.

# Referencias

- [1] Abazajian K. et al., 2005, AJ, 129, 1755
- [2] Abell G. O., 1958, ApJS, 3, 211
- [3] Abell G. O., Corwin H.G., Corwin H.G., 1989, ApJS, 70,1
- [4] Ahmad Q.R., Allen R.C., Andersen T.C., 2001, Phys. Rev. Letters, 87, 071301
- [5] Allen S.W., Schmidt R.W., Bridle S.L., 2003, MNRAS, 346, 593
- [6] Akaike H., 1974, IEEE Trans. Auto. Control, 19, 716
- [7] Arnowitt R.L., Deser S., Misner C.W., 1962, Recent Developments in General Relativity. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1962., p.127
- [8] Bacon D.J., Massey R.J., Refregier A.R., Ellis R.S., 2003, MNRAS, 344, 673
- [9] Bahcall, N. A., Cen, R, 1993, Apj, 407, L49
- [10] Bahcall N.A., Soneira R.M., 1983, ApJ, 270, 20
- [11] Bardeen J.M., 1980, PRD, 22, 1882
- [12] Bardeen J.M., 1988, The Early Universe: Reprints Edited by Edward W. Kolb and Michael S. Turner. Frontiers in Physics, Reading: Addison-Wesley, 563
- [13] Barger V., Marfatia D., Whisnant K., 2003, Int. J. Mod. Phys., E12, 569
- [14] Baugh C.M., and Efstathiou G., 1993, MNRAS, 265, 145
- [15] Bell E.F., McIntosh D.H., Katz N., and Weinberg M.D., 2003, ApJS, 149, 289
- [16] Bennett C.L., et al. , 2003, ApJS, 148, 1

- 
- [17] de Bernardis P., et al., 2000, *Nature*, 404, 955
- [18] Bertschinger E., 1995, Technical Report, Massachusetts Inst. of Tech. Cambridge, MA United States Dept. of Physics., astro-ph/9503125
- [19] Biviano, A., Girardi, M., Giuricin, G., Mardirossian, F., Mezzetti, M., 1993, *ApJ*, 411L, 13
- [20] Blanchard, A., Sadat, R., Bartlett, J.G., Le Dour, M., 2000, *A&A*, 362, 809B
- [21] Böhringer H., Collins C.A., Guzzo L., Schuecker P., Voges W., Neumann D.M., Schindler S., Chincarini G., De Grandi S., Cruddace R.G., Edge A.C., Reiprich T.H., Shaver P.H., 2002, *ApJ*, 566, 93
- [22] Böhringer H., Schuecker P., Guzzo L., Collins C.A., Voges W., Cruddace R.G., Ortiz-Gil A., Chincarini G., De Grandi S., Edge A.C., MacGillivray H.T., Neumann D.M., Schindler S., Shaver P.H., 2004, *A&A*, 425, 367
- [23] Bond, J. R., Cole, S., Efstathiou, G., Kaiser, N., 1991, *Apj*, 379, 440
- [24] Bond J.R., Jaffe A.H., Knox, L., 2000, *ApJ*, 533, 19
- [25] Bridle S.L., Lahav O., Ostriker J.P., Steinhardt P.J., 2003a, *Science*, 299, 1532
- [26] Bridle S.L., Lewis A.M., Weller J., Efstathiou G., 2003b, *MNRAS*, 342, L72.
- [27] Colberg, R. G., Couchman, H, M. P., 1989, *Apj*, 340, 47
- [28] Cole S., et al. 2005, *MNRAS*, 362, 505
- [29] Colless M., et al., 2001, *MNRAS*, 328, 1039
- [30] Colless M., et al., 2003, astro-ph/0306581
- [31] Collins C.A., Guzzo L., Böhringer H., Schuecker P., Chincarini G., Cruddance R., De Grandi S., MacGillivray H.T., Neumann D.M., Schindler S., Shaver P., Voges W., 2000, *MNRAS*, 319, 939
- [32] Cuoco A., Iocco F., Magnano G., Miele G., Pisanti O., Serpico P.D., 2004, *Int. J. Mod. Phys.*, A19, 4431
- [33] Croft R.A.C., Dalton G.B., Efstathiou G., Sutherland W.J., Maddox S.J., 1997, *MNRAS*, 291, 305

- 
- [34] Croft R.A.C., Dalton G.B., Efstathiou G., 1999, MNRAS, 305, 547
- [35] Croft R.A.C., Weinberg D.H., Bolte M., Burles S., Hernquist L. Katz N., Kirkman D., Tytler D., 2002, ApJ, 581, 20
- [36] de Oliveira-Costa A., Tegmark M., Zaldarriaga M., Hamilton A., 2004, Phys. Rev. D., 69, 063516
- [37] da Costa L. N. et al., 1998, AJ, 116, 1
- [38] Dalton G.B., Efstathiou G., Maddox S.J., Sutherland W.J., 1992, ApJ, 390, L1
- [39] Dalton G.B., Efstathiou G., Maddox S.J., Sutherland W.J., 1994, MNRAS, 269, 151
- [40] Dickinson C., et al. , 2004, MNRAS, 353, 732
- [41] Dressler A., 1980, Apj, 236, 351
- [42] Dodelson, S., Gaztañaga, E., 1999
- [43] Dodelson, S., Gaztañaga, E., 2000, MNRAS, 312, 774
- [44] Dominguez M., Muriel H., Lambas D.G., 2001, AJ, 121, 1266
- [45] Dressler A., 1980, Apj, 236, 351
- [46] Durrer R., 1989, A&A, 208, 1
- [47] Efstathiou G., 2003, MNRAS, 343, L95
- [48] Efstathiou G., 2004, MNRAS, 348, 885
- [49] Efstathiou G., Bond J.R., 1999, MNRAS, 304, 75
- [50] Efstathiou G., Frenk C.S., White S.D.M., Davis M., 1988, MNRAS, 235, 715
- [51] Efstathiou G., et al. 2002, MNRAS, 330, L29
- [52] Eisenstein, D. J. , Zaldarriaga, M., 2001, Apj, 546, 2
- [53] Eke, V. R., Cole, S., Frenk, C. S., 1996, MNRAS, 282, 263
- [54] Eriksen H.K., O'Dwyer I.J., Jewell J.B., Wandelt B.D., Larson D.L., Górski K.M., Levin S., Banday A.J., Lilje P.B., 2004, ApJS, 155, 227

- 
- [55] Evrard, A. E., 1990, *Apj*, 363, 349
- [56] Evrard, A. E., Metzler, C.A., Navarro, J. F., 1996, *Apj*, 469, 494
- [57] Evrard, A. E., 1990, *Apj*, 363, 349
- [58] Evrard, A. E., Metzler, C.A., Navarro, J. F., 1996, *Apj*, 469, 494 i
- [59] Elgaroy O., et al., 2002, *Phys. Rev. Letters*, 89, 061301
- [60] Falco E. E. et al., 1999, *PASP*, 111, 438
- [61] Feldman, H.A., Kaiser, N., Peacock, J.A., 1994, *Apj*, 426, 23 (FKP)
- [62] Freedman W.L., et al., 2001, *ApJ*, 553, 47
- [63] Frenk C.S., White S.D.M., Davis M., 1983, *ApJ*, 271, 417
- [64] Gaztañaga, E., Baugh, C.M., 1998, *MNRAS*, 294, 229
- [65] Gaztañaga E., Wagg J., Multamaki T., Montana A., Hughes D.H., 2003, *MNRAS*, 346, 47
- [66] Gaztañaga E., Norberg P., Baugh C.M., Croton D.J., 2005, *MNRAS*, 364, 620
- [67] Gelman A., Rubin D., 1992, *Statistical Science*, 7, 457
- [68] Girardi, M., Borgani, S., Giuricin, G., Mardirossian, F., Mezzetti, M., 1998, *ApJ*, 506, 45
- [69] Girardi, M., Giuricin, G., 2000, *Apj*, 540, 45
- [70] Giuricin G., Marinoni C., Ceriani L., Pisani A., 2000, *ApJ*, 543, 178
- [71] Gnedin N.Y., Hamilton A.J.S., 2002, *MNRAS*, 334, 107
- [72] Gorski, K.M., Hivon, E., B.D., Wandelt, B.D. 1999, "Analysis Issues for Large CMB Data Sets", in *Proceedings of the MPA/ESO Cosmology Conference "Evolution of Large-Scale Structure"*, eds. A.J. Banday, R.S. Sheth and L. Da Costa, PrintPartners Ipskamp, NL, pp. 37-42
- [73] Governato, F., Babul, A., Quinn, T., Tozzi, P., Baugh, C.M., Katz, N., Lake, G., 1999, *MNRAS*, 307, 949

- 
- [74] Hamilton A.J.S., Kumar P., Lu E., Matthews A., 1991, *ApJ*, 374, L1
- [75] Hanany S., et al., 2000, 545, L5.
- [76] Hannestad S., 2002, *Phys. Rev. D.*, 66, 125011
- [77] Hansen F.K., Balbi A., Banday A.J., Gorski K.M., 2004, *MNRAS*, 354, 905
- [78] Henry J.P., 2004, *ApJ*, 609, 603
- [79] Henry, J.P., Arnaud, K.A., 1991, *Apj*, 372, 410
- [80] Heymans C. et al., 2005, *MNRAS*, 361, 160
- [81] Hinshaw G., et al., 2003, *ApJS*, 148, 135
- [82] Hobson M.P., Bridle S.L., Lahav O., 2002, *MNRAS*, 335, 377
- [83] Hoekstra H., Yee H.K., Gladders M.D., 2002, *ApJ*, 577, 595
- [84] Hu W., Eisenstein D.J., Tegmark M., 1998, *Phys. Rev. Letters*, 80, 5255
- [85] Huchra J. P., Geller M. J., 1982, *ApJ*, 257, 423
- [86] Huffenberger K. M., Seljak U., 2003, *MNRAS*, 340, 1199
- [87] Hütsi, G., 2006, *A&A*, 449, 891
- [88] Hwang J., 1994, *ApJ*, 427, 542
- [89] Hwang J., Noh H., 1996, *PhRvD*, 54, 1460
- [90] Ikebe, Y., Reiprich, T.H., Böhringer, H., Tanaka, Y., Kitayama, T., *A&A*, 383, 773
- [91] Jarret, T.H., Chester, T., Cutri, R., Scheider, S., Skrutskie, M. and Huchra, J.P., 2000, *AJ*, 119, 2498
- [92] Jenkins, A., Frenk, C. S., White, S. D. M., Colberg, J. M., Cole, S., Evrard, A. E., Couchman, H. M. P., Yoshida, N., 2001, *MNRAS*, 321, 372
- [93] Kauffman, G., Colberg, J. M., Diaferio, A., White, S. D. M., 1999, *MNRAS*, 303, 188
- [94] Klypin A.A., Kopylov A.I., 1983, *SvAL*, 9, 41

- 
- [95] Kodama H., Sasaki M., 1984, PThPS, 78, 1
- [96] Kogut A., et al., 2003, ApJS, 148, 161
- [97] Komatsu E., et al. 2003, ApJS, 148, 119
- [98] Kosowsky A., Milosavljevic M., Jimenez R., 2002, Phys. Rev. D., 66, 063007
- [99] Kuo C.L., et al., 2004, ApJ, 600, 32
- [100] Leach S.M., Liddle A.R., 2003a, MNRAS, 341, 1151
- [101] Leach S.M., Liddle A.R., 2003b, Phys. Rev. D., 68, 123508
- [102] Lewis A., Bridle S., 2002, Phys. Rev. D, 66, 103511
- [103] Lewis A., Challinor A., Lasenby A., 2000, Apj 538, 473
- [104] Liddle A.R., 2004, MNRAS, 351, L49
- [105] Lifshitz E.M., 1946, J. Phys. (USSR), 10, L49
- [106] Lilje P.B., Efstathiou G., 1988, MNRAS, 231, 635
- [107] Loveday J., Peterson B.A., Efstathiou G. and Maddox S.J., 1992, ApJ, 390, 338
- [108] Lucey J.R., 1983, MNRAS, 204, 33
- [109] MacTavish C.J. et al., 2006, ApJ, 647, 799
- [110] Maddox S.J., Efstathiou G., Sutherland W.J., Loveday J., 1990, MNRAS, 242, 43
- [111] Maller A.H., McIntosh D.H., Katz N., Weimberg M.D., 2003, ApJ, 598L, 1
- [112] Markevitch, M., 1998, Apj, 504, 27
- [113] McDonald P., Seljak U., Cen R., Bode P., Ostriker J.P., 2005, MNRAS, 360, 147
- [114] Mathiesen, B., Evrard, A. G., 2001, Apj, 546, 100
- [115] Merchán M.E., Maia M.A.G., Lambas D.R., 2000, ApJ, 545, 26
- [116] Merchán M.E., Zandivarez A.A., 2002, MNRAS, 335, 216

- 
- [117] Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth R., Teller A., Teller E., 1953, J. Chem. Phys., 21, 1087
- [118] Mo H.J., Jing Y.P., White S.D.M., 1997, MNRAS, 284, 189
- [119] Mo H.J., Peacock J.A., Xia X.Y., 1993, MNRAS, 260, 121
- [120] Moore B., Frenk C., Efstathiou G., Saunders W., 1994, MNRAS, 260, 121
- [121] Moore B., Quinn T., Governato F., Stadel J., Lake G., 1999, MNRAS, 310, 1147
- [122] Mukhanov V.J., Feldman H.A., Brandenberger R.H., 1992, Phys. Rep., 215, 203
- [123] Mukherjee P, Parkinson D, Liddle A.R., 2006, MNRAS, 369, 1725
- [124] Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1996, ApJ, 462, 563
- [125] Neyman J., Scott E. L., 1952, ApJ, 116, 144
- [126] Nichol R.C., Collins C.A., Guzzo L., Lumsden S.L., 1992, MNRAS, 255, 21
- [127] Nolthenius R., White S. D. M., 1987, MNRAS, 225, 505
- [128] Norberg P. et al. (the 2dFGRS Team), 2002, MNRAS, 332, 827
- [129] de Oliveira-Costa et al. 2004, PhRvD, 69f3516
- [130] Padilla, N. D., Baugh, C. M., 2002, MNRAS, 329, 431
- [131] Padilla N.D., Lambas D.R., 2003, MNRAS, 342, 532
- [132] Peacock J.A., 1991, MNRAS, 253, 1
- [133] Peacock J. A., Dodds S. J., 1994, MNRAS, 267, 1020
- [134] Peacock J. A., Heavens, A., 1989, MNRAS, 243, 133
- [135] Peacock J.A., Smith R.E., 2000, MNRAS, 318, 1144
- [136] Peacock J.A., West M.J., 1992, MNRAS, 259, 494
- [137] Peebles P. J. E., 1980, Issu.book, *Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton series in Physics

- 
- [138] Peiris H. V. et al. 2003, ApJS, 148, 213
- [139] Percival W.J., et al., 2001, MNRAS, 327, 1297
- [140] Percival W.J., et al., 2002, MNRAS, 337, 1068
- [141] Percival W.J., et al., 2004, MNRAS, 353, 1201
- [142] Percival W.J., et al., 2006, MNRAS,
- [143] Perlmutter S., et al., 1999, ApJ, 517, 565
- [144] Peiris H.V., et al., 2003, ApJS, 148, 213
- [145] Polenta G. et al. 2005, JCAP, 11, 001
- [146] Pope A.C. et al., 2004, ApJ, 607, 655
- [147] Postman M., Huchra J.P., Geller M.J., 1992, ApJ, 384, 404
- [148] Press, W. H., Schechter, P., 1974, Apj, 187, 425
- [149] Press, W. H, Teukosky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery B. P., 1992, *Numerical Recipes*, sec. ed., Cambridge University Press
- [150] Ramella M., Geller M. J., Pisani A., da Costa L. N., 2002, AJ, 123, 2976
- [151] Readhead A.C.S. et al., 2004, ApJ, 609, 498
- [152] Reiprich, T.H., Böhringer, H., 2002, ApJ, 567, 716
- [153] Riess A.G., et al., 2004, ApJ, 607, 665
- [154] Sahni V., 2005, in Papantonopoulos E. ed., *The Physics of the Early Universe*. Springer, Berlin, p. 141
- [155] Sánchez A.G., Padilla N.D., Lambas D.G., 2002, MNRAS, 337, 161
- [156] Sánchez A.G., Lambas D.G., Böhringer H., Schuecher P., 2005, 362, 1225
- [157] Sánchez A.G., et al. 2006, MNRAS, 366, 189
- [158] Saunders W., Rowan-Robinson M., Lawrence A., 1992, MNRAS, 258, 134
- [159] Schlegel, D.J., Finkbeiner, D.P. and Davis, M. 1998, ApJ, 500, 525

- 
- [160] Schuecker P., Böhringer H., Guzzo L., Collins C.A., Neumann D.M., Schindler S., Voges W., Chincarini G., Crudance R.G., De Grandi S., Edge A.C., Müller V, Reiprich T.H., Retzlaff J., Shaver P., 2001, *A&A*, 368, 86
- [161] Schwarz D. J., Terrero-Escalante C. A., Garcia A. A., 2001, *Phys. Let. B.*, 517, 243
- [162] Schwartz G., 1978, *Annals of Statistics*, 5, 461
- [163] Seldner M., Peebles P.:J.E., 1977, *ApJ*, 215, 703
- [164] Seljak U. et al., 2005, *Phys. Rev. D*, 71, 103515
- [165] Shectman S.A., Landy S.D., Oemler A., Tucker D.L., Lin H., Kirshner R.P., Schechter P.L., 1996, *ApJ*, 470, 172
- [166] Sheth, R. K., Tormen, G., 1999, *MNRAS*, 308, 119
- [167] Sheth R. K., Tormen G., 2002, *MNRAS*, 329, 61
- [168] Sheth, R. K., Mo, H. J., Tormen, G., 2001, *MNRAS*, 323, 1
- [169] Skrutskie, M.F., et al. 1997, in "The Impact of Large Scale Near-IR Sky Surveys", eds. F. Garzon et al., Kluwer Academic Publishing Company, p. 25.
- [170] Slosar A., Seljak U., Makarov A., 2003, *Phys. Rev. D.*, 69, 123003
- [171] Smith R.E., Peacock J.A., Jenkins A., White S.D.M., Frenk C.S., Pearce F., Thomas P., Efsthathiou G., Couchman H., 2003. *MNRAS*, 341, 1311
- [172] Spergel D.N., et al., 2003, *ApJS*, 148, 175
- [173] Spergel D. N., et al., 2006, *ApJS* submitted, astro-ph/0603449
- [174] Stoughton C., et al., 2002, *AJ*, 123, 485
- [175] Sutherland, W., 1988, *MNRAS*, 234, 159
- [176] Tegmark M., et al. 2006, *PhRvD*, 73b3505
- [177] Tegmark M., Zaldarriaga M., Hamilton A.J.S., 2001, *MNRAS*, 335, 887
- [178] Tegmark M., Zaldarriaga M., 2002, *Phys. Rev. D*, 66, 103508

- 
- [179] Tegmark M. et al., 2004a, ApJ 606, 702
- [180] Tegmark M. et al., 2004b, Phys. Rev. D, 69, 103501
- [181] Tormen, G., 1998, MNRAS, 297, 648
- [182] Trotta R, 2005, MNRAS, submitted. (astro-ph/0504022)
- [183] Tucker D. L. et al., 2000, ApJS, 130, 237
- [184] Verde L., et al., 2002, MNRAS, 335, 432
- [185] Verde L., et al., 2003, ApJS, 148, 195
- [186] Weinberg S., 1972, gcpa.book
- [187] Weinheimer C., 2002, eprint arXiv:hep-ex/0210050
- [188] Weinheimer C., 2003, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 118, 279
- [189] White, M., 2001, A&A, 367, 27
- [190] York D., et al., 2000, AJ, 120, 1579
- [191] Yoshikawa, K., Jing, Y. P., Suto, Y., 2000, Apj, 535, 593
- [192] Zandivarez, A. A., Abadi, M. G., Lambas, D. G., 2001, MNRAS, 326, 147
- [193] Zandivarez A.A., Merchán M.E., Padilla N.D., 2003, MNRAS, 344, 247
- [194] Zel'dovich Ya. B., 1968, Astronomicheskii Zhurnal, 45, 913
- [195] Zheng et al. 2005, 633, 791
- [196] Yorke H.W., 1980, A&A, 85, 215.

# Agradecimientos

La lista de agradecimientos es muy larga. Aquí hay sólo algunas de las personas que ayudaron de uno u otro modo a la finalización de esta tesis. Quiero agradecer a:

- A Ximena, quien siempre me acompañó a lo largo de las subidas y bajadas de la carrera, y ha tenido que soportar infinitas veces la distancia, mis miedos y mi cansancio, siempre prestándome su hombro para descansar y alegrar mis días. Se que no ha sido fácil. Muchas gracias!
- A mis padres, Mercedes y Cristián, por guiarme en este mundo y enseñarme a descubrir quién quiero ser.
- A mi director, Diego Lambas, por brindarme la libertad de explorar nuevos caminos y temas, desviándome quizás de su idea original para esta tesis.
- A Alvaro, Marcelo, Maxi y Martín. Ya no es lo mismo pero siempre les estaré agradecido! We have the bomba!
- A Fede, Laura, Yamila, Claudia, Laura, Dante, Luciana y Seba, por su amistad y compañía a lo largo de estos cinco años.
- A todos ustedes. A pesar de que nunca nos veremos y nunca leerán estas líneas, se que conocen muy bien lo que costó llegar hasta aquí. Van para ustedes mis saludos y felicitaciones.

# Acknowledgments

I would like to give special thanks to Carlton Baugh for his invaluable and kind help during my visits to the Physics Department of Durham University where a substantial part of the research related to this thesis has been carried out.