Analizando las estructuras en el universo con sistemas de galaxias

 por

 $Arnaldo\ Ariel\ Zandivarez$

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Astronomía de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

> Marzo, 2006 ©FaMAF - UNC 2006 Director: Dr. Diego García Lambas

Diego G. Lambas

Analizando las estructuras en el universo con sistemas de galaxias

Resumen

En esta tesis se analiza una muestra de grupos de galaxias para estudiar el universo observado. Los grupos son identificados en el catálogo de galaxias con redshifts más grande construido hasta el presente, Sloan Digital Sky Survey Data Release 4, y por lo tanto el catálogo de grupos resultante es el más numeroso con el que se pueda contar. En la primera parte del trabajo se describe el proceso de identificación de los grupos de galaxias y se estudian sus propiedades internas a través de la luminosidad de sus galaxias miembro. A continuación, se analizan los grupos de galaxias como trazadores de la estructura en gran escala del universo. Se utilizan el espectro de potencias y la función de correlación bipuntual para analizar cómo están distribuidas las amplitudes de las fluctuaciones en densidad descriptas por los grupos de galaxias. Por otro lado, se complementa el estudio de la estructura en gran escala calculando los Funcionales de Minkowski, los cuales permiten analizar completamente la morfología de la distribución de grupos de galaxias en el universo. Ambas estudios se confrontan con el modelo cosmológico para un universo dominado por materia oscura fría con constante cosmológica (ΛCDM). Esto permite analizar la habilidad del modelo cosmológico para describir completamente el universo observado trazado por los grupos de galaxias, tanto en su distribución espacial como en su forma general.

Analizing structures in the universe with galaxy systems Abstract

In this thesis a sample of galaxy groups is analyzed in order to study the observed universe. Groups are identified in the largest redshift survey at the present, the Sloan Digital Sky Survey Data Release 4. Therefore, the resulting group catalogue is the largest ever built. Firstly, a description of the identification procedure is given. The internal group properties are studied by means of the galaxy member luminosities. Then, the galaxy groups are analysed as large scale structure tracers of the universe. With the aim of analysing the distribution of amplitudes of group density fluctuations, the power spectrum and the two point correlation function are used. On the other hand, the large scale structure analysis is complemented using the Minkowski Functionals. They fully describe the morphology of the galaxy groups distribution in the universe. The results are compared with those obtained from a cosmological model with cold dark matter and cosmological constant (ΛCDM). This comparison allow us to quantify how well the adopted cosmological model describes the universe traced by galaxy groups, in both the spatial distribution and the global shape.

98 - 65 - r Galaxy groups, clusters and superclusters; large scale structure of the universe.

Contenidos

	Pág	a de presentación	i
	Resi	men	ii
	Tab	ι de Contenidos	iv
	Agr	lecimientos	vi
	Ded	eación	vii
1	Intr	oducción	1
2	Ide	tificación de los Grupos de Galaxias	7
	2.1	El catálogo de galaxias	7
	2.2	Identificación de Grupos de Galaxias	9
	2.3	Mejoras en la identificación de los grupos ricos	13
		2.3.1 Re-identificación de grupos de galaxias	14
		2.3.2 Método para el re-centrado de grupos de galaxias	16
	2.4	El catálogo de grupos de galaxias	21
3	La	unción de Luminosidad de galaxias en los grupos	۵ ۲
0	La .	uncion de Lummosidad de galaxías en los grupos	25
3	La . 3.1	Introducción	25 25
Э	3.1 3.2	Introducción	25 25 28
J	3.1 3.2	Introducción	 25 25 28 28
J	3.1 3.2	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias 3.2.2 Métodos para la estima de la FL	25 25 28 28 30
J	3.1 3.2 3.3	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias 3.2.2 Métodos para la estima de la FL La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4 Introducción	25 28 28 30 33
J	3.1 3.2 3.3	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4 Introducción Introducción 3.3.1 La FL en distintas bandas Introducción Introducción	25 28 28 30 33 33
J	3.1 3.2 3.3	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción Junto Introducción Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción Junto Introducción Introducción Introducción	25 28 28 30 33 33 36
J	3.1 3.2 3.3	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4 Introducción Introducción 3.3.1 La FL en distintas bandas Introducción Introducción 3.3.2 Variación de la FL con la masa virial Introducción Introducción 3.3.3 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos Introducción	25 28 28 30 33 33 36 45
J	3.1 3.2 3.3	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4 Introducción Introducción 3.3.1 La FL en distintas bandas Introducción Introducción 3.3.2 Variación de la FL con la masa virial Introducción Introducción 3.3.3 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos Introducción Introducción 3.3.4 Dependencia de la FL con la galaxia más brillante Introducción Introducción	25 28 28 30 33 33 36 45 51
3	 3.1 3.2 3.3 El I 	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.3 La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4 Introducción 3.3.1 La FL en distintas bandas Introducción 3.3.2 Variación de la FL con la masa virial Introducción 3.3.3 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos Introducción 3.3.4 Dependencia de la FL con la galaxia más brillante Introducción spectro de Potencias de Grupos de Galaxias Introducción Introducción	25 28 28 30 33 36 45 51 54
3	EII 3.1 3.2 3.3 EII 4.1	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4 Introducción de la FL en distintas bandas 3.3.1 La FL en distintas bandas Introducción de la FL con la masa virial 3.3.2 Variación de la FL con la masa virial Introducción de la FL con la galaxia en grupos 3.3.3 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos Introducción de la FL con la galaxia más brillante spectro de Potencias de Grupos de Galaxias Resultados previos Introducción de Galaxias	25 28 28 30 33 36 45 51 54 54
3	El I 4.1 4.2	Introducción Introducción Magnitudes absolutas y estimadores de la FL Introducción 3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.2.2 Métodos para la estima de la FL Introducción 3.3.1 La FL en distintas bandas Introducción 3.3.1 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos Introducción 3.3.3 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos Introducción 3.3.4 Dependencia de la FL con la galaxia más brillante Introducción spectro de Potencias de Grupos de Galaxias Introdución Introdución El P(k) de las fluctuaciones en densidad Introdución Introdución	25 28 28 30 33 33 36 45 51 54 54 58

		4.2.2 Consideraciones generales	61
	4.3	Catálogos mocks del SDSS DR4 para un modelo ΛCDM	67
	4.4	Cálculo del Espectro de Potencias	70
	4.5	La Función de Correlación de Grupos	75
5	Los	Funcionales de Minkowski para grupos de galaxias	82
	5.1	Breve Reseña	82
	5.2	Los Funcionales de Minkowski en la cosmología	87
	5.3	Nomenclaturas y predicciones	90
	5.4	Descripción del algoritmo	92
	5.5	Aplicación a los grupos del SDSS DR4	100
		5.5.1 Muestras de grupos de galaxias limitadas por volumen	100
		5.5.2 Los FM y su comparación con el ΛCDM	103
6	Sun	nario y Conclusiones	113
Bibliografía			

Agradecimientos

A Manuel, Julian y Mariano con los cuales hemos realizado varios trabajos con grupos de galaxias durante los últimos 5 años, he inclusive una gran parte del trabajo realizado en esta tesis.

A la Euge que tuvo que soportar leer la primera versión de esta tesis y realizar innumerables correcciones (aunque en el fondo le gusta hacer de señorita maestra).

A la Cande por hacerme compañia durante largas tardes de escritura.

A este lado de la fuerza que no se cual es.

y ... a todos los que me conocen.

Gaviota, gaviota, vals del equilibrio cadencia increíble, llamada en el hombro gaviota, gaviota, blancura de lirio ay de bailarinas, gaviota de asombro Adonde te marchas, canción de la brisa tan rápida, tan detenida? disparo en la sien y metralla en la risa gaviota que pasa y se lleva la vida. Corrían los días de fines de guerra paso una gaviota volando y el que anduvo intacto rodó por la tierra huérfano, desnudo herido, sangrando.

No siempre lloverá.

Capítulo 1

Introducción

Los grupos de galaxias son objetos muy importantes en el universo, ya que son los sistemas más comunes y por lo tanto constituyen la piedra fundamental para la formación de las grandes estructuras en el universo. El estudio de estos sistemas puede enfocarse en dos aspectos principales: el análisis de su estructura interna, es decir de las propiedades de sus galaxias miembro, y la capacidad de estos sistemas de galaxias para trazar la estructura en gran escala de universo.

Uno de los temas fundamentales en la astronomía extragaláctica es tratar de entender cómo evolucionan las galaxias en un medio denso. Es posible entender a través del estudio de propiedades observacionales de las galaxias, cuáles son los posibles procesos involucrados en su formación? Cómo afecta el medio intra-grupo las diferentes poblaciones de galaxias? Si tenemos en cuenta la información que disponemos en un catálogo observacional de galaxias, el observable más común es la magnitud aparente de una galaxia. En base a ésta y conociendo la distancia o corrimiento al rojo (redshift) se puede obtener una importante propiedad intrínseca de las galaxias: su luminosidad. La estadística a utilizar para el análisis de esta propiedad, es la Función de Luminosidad de galaxias, que se define como el número de galaxias por unidad de volumen un rango de magnitudes absolutas. El estudio de la Función de Luminosidad y su dependencia con las propiedades físicas de los grupos de galaxias contiene implícitamente información sobre la formación de las galaxias, su evolución, el comportamiento de las distintas poblaciones de galaxias, etc. Por otro lado, las Funciones de Luminosidad son una herramienta muy importante para poner condiciones de contorno en los modelos semi-analíticos de formación de galaxias. Varios de estos modelos ajustan sus parámetros de manera que el resultado obtenido esté de acuerdo con la Función de Luminosidad observada. Debido a que los modelos semi-analíticos están generados de acuerdo a un dado modelo cosmológico, entonces puede probarse fácilmente si el modelo cosmológico adoptado permite reproducir la Función de Luminosidad extraída de las observaciones.

En segundo lugar, la distribución de los grupos de galaxias brinda información muy valiosa acerca de la distribución global de materia en el universo. El entendimiento de la estructura en gran escala es uno de los principales objetivos en la cosmología. Una de las ideas que más a progresado en las últimas décadas establece que dichas estructuras se crearon a partir de pequeñas fluctuaciones o inhomogeneidades en la densidad de materia presente en el universo primordial. A medida que el universo se fue expandiendo, dichas fluctuaciones colapsaron por inestabilidad gravitacional y formaron las galaxias y sistemas de galaxias que observamos hoy (universo jerárquico).

Diversas herramientas estadísiticas se han desarrollado para estudiar estas fluctuaciones, siendo el espectro de potencia una de las más utilizadas. Si se representa la densidad de masa $\rho(\mathbf{r}, t)$ como una función continua en un instante t, con un valor medio $\rho_0(t)$, entonces se puede definir el contraste de densidad como

$$\delta(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)}$$
(1.1)

El contraste de densidad puede expandirse como suma de ondas planas con fases aleatorias en ese volumen, es decir, una expansión en serie de Fourier

$$\delta(\mathbf{r},t) = \frac{(2\pi)^{2/3}}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$
(1.2)

donde

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3} V^{1/2}} \int \delta(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r$$
(1.3)

y $k \sim 1/r$. La hipótesis de fases aleatorias implica que la masa contenida dentro de una esfera de radio arbitrario posee una distribución Gaussiana. De estas ecuaciones puede verse que $\delta_{\mathbf{k}}$ caracteriza la amplitud de las fluctuaciones en la densidad. Debido a que las fluctuaciones oscilan hacia arriba y abajo el promedio espacial de $\delta_{\mathbf{k}}$ es igual a cero, pero si se calcula el valor medio del modulo cuadrado, éste da distinto de cero. En consecuencia, se define el espectro de potencia como

$$P(k) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \tag{1.4}$$

Esta función, que solo depende del módulo de \mathbf{k} debido a la isotropía del universo, nos indica cual es la amplitud media de las pequeñas fluctuaciones primordiales para una dada escala espacial de longitud. Otra de las estadística conocidas en el análisis de la fluctuaciones en densidad es la contraparte en el espacio real del espectro de potencia, la función de correlación bipuntual. Dada una distribución de puntos, la probabilidad de encontrar dos objetos separados por una distancia r en un volumen V es

$$dP = n(1 + \xi(r))dV \tag{1.5}$$

donde $\xi(r)$ es la función de correlación bipuntual y representa el exceso o defecto en el número de pares separados por una distancia r respecto de una distribución aleatoria de puntos.

Si la distribución de inhomogeneidades en la densidad es gaussiana entonces el espectro de potencia (ó la función de correlación bipuntual) caracteriza completamente la distribución de materia en el universo. Debido a que el módulo de las ondas es un número complejo, éstas pueden ser caracterizadas con un módulo y una fase. La teoría indica que si las fases son gaussianas entonces es suficiente la información que se encuentra en el módulo de la amplitud de las fluctuaciones. Bajo esta suposición, basta con conocer el espectro de potencias para establecer el modelo cosmológico que se corresponde con el universo observado. Es por eso que la gran parte de los trabajos encontrados en la literatura están avocados a medir esta función en los relevamientos de galaxias y sistemas de galaxias. Sin embargo, es sabido que, aun cuando la distribución de fases primigenias fuese gaussiana, la evolución no-lineal de las perturbaciones en densidad debido a la gravitación hace que las fases se vuelvan nogaussianas. Por lo tanto, a la hora de analizar una distribución de objetos no alcanza con el espectro de potencias, si no que se debe complementar el análisis con alguna estadística que contenga información acerca de las correlaciones de órdenes más altos. Existen estadísticas morfológicas desarrolladas en el campo de la geometría integral las cuales condensan la información morfológica contenida en todos los órdenes de las funciones de correlación de n-puntos en un conjunto de d+1 funcionales, donde d es la dimensión del espacio patrón. Estas estadísticas son denominadas Funcionales de Minkowski (V_i) que en el espacio tridimensional definen cuatro funciones relacionadas con el volumen, el área superficial, la integral de curvatura media y la conectividad de una distribución de objetos. Aplicar estas herramientas estadísticas, P(k), $\xi(r)$ y V_i , a una muestra observacional de objetos permite obtener una descripción completa de la estructura en gran escala del universo. Esta información es muy importante, ya que con ella se puede estudiar que tan bien un modelo cosmológico dado puede describir el universo observado.

Por lo tanto, para realizar en forma paralela un análisis de las propiedades físicas de las galaxias miembro y de la estructura en gran escala trazada por los grupos de galaxias, de manera de obtener resultados altamente confiables, es necesario contar con una muestra estadísticamente significativa de grupos de galaxias. El catálogo de galaxias con redshifts más grande construido hasta el presente es el Sloan Digital Sky Survey Data Release Fourth (SDSS DR4, Adelman-McCarthy et al. 2005). Este catálogo cubre un área muy grande en el cielo, con información fotométrica de alta calidad en cinco bandas y posee el doble de galaxias que la versión final del 2 degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS). La gran cantidad de objetos en el catálogo de galaxias del Sloan nos proporcionará el catálogo de grupos más grande construido en la actualidad con información fotométrica y espectroscópica.

El objetivo principal de esta tesis es extraer información a partir de los grupos de galaxias identificados en el SDSS DR4, tanto para describir la evolución de galaxias en el medio intra-grupo como para analizar la distribución de estructuras en el universo. En este trabajo, se describirá detalladamente el proceso propuesto para identificar, de la mejor manera posible, los grupos de galaxias en un catálogo de galaxias con redshifts (Capítulo 2). Se estimará la Función de Luminosidad de galaxias en grupos, con muestras de gran significancia estadística, a partir de la cual se podrá imponer restricciones en los procesos que gobiernan la evolución de galaxias (Capítulo 3). En lo concerniente a la estructura en gran escala trazada por los grupos de galaxias, se adoptará el espectro de potencia y la función de correlación bipuntual como una medición de la distribución espacial de sistemas de galaxias de masa intermedia (Capítulo 4). Además, se complementará el estudio de la estructura en gran escala analizando la topología resultante de la distribución de grupos de galaxias por medio de los Funcionales de Minkowski (Capítulo 5). Por último, se resumirán los resultados obtenidos y las principales conclusiones de este trabajo (Capítulo 6).

Capítulo 2

Identificación de los Grupos de Galaxias

En este capítulo se describirá la construcción del catálogo de grupos de galaxias que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Detallaremos las diferentes consideraciones tenidas en cuenta en el procedimiento destinado para la identificación de grupos en catálogos con un límite en magnitud aparente.

2.1 El catálogo de galaxias

El Sloan Digital Sky Survey (SDSS) ha puesto disponible públicamente el cuarto conjunto de datos (Fourth Data Release, DR4, Adelman-McCarthy et al. 2005), el cual es un relevamiento tanto fotométrico como espectroscópico construido con el telescopio de 2.5 m del Observatorio Apache Point en Nuevo México.

El SDSS DR4 consta de 6670 deg² de imágenes en cinco bandas ($u \ g \ r \ i \ z$) y 673,280

 $(4783~{\rm deg}^2)$ espectros de galaxias, quasars y estrellas. La muestra principal de galaxias del DR4 incluye aproximadamente 400,000 galaxias con redshifts (corrimientos al rojo) medidos hasta $z\sim0.3$ y con una magnitud aparente límite de 17.77 en la banda r.



Figura 2.1: Distribuciones angulares y radiales del SDSS. El panel superior muestra las proyecciones Aitoff en coordenadas ecuatoriales para el SDSS. El panel inferior muestra el histograma de la distribución de redshifts normalizada.

En la Figura 2.1 se muestra, en el panel superior, la distribución angular de

galaxias en el SDSS DR4 en coordenadas ecuatoriales, mientras que la distribución de redshifts de la muestra puede observarse en el panel inferior. Puede verse que el redshift medio de la muestra de galaxias es ~ 0.1 .

2.2 Identificación de Grupos de Galaxias

El arribo de los catálogos con redshifts ha generado la necesidad de tener algoritmos confiables para la detección de sistemas de galaxias. Muchos esfuerzos se han realizado en este campo en las últimas dos décadas, sin embargo los dos algoritmos más importantes fueron desarrollados en los años 80 (Huchra & Geller 1982, Nolthenius & White 1987). Ambos métodos usan el algoritmo "amigo-de-los-amigos" (friend-of-friends) modificándole las longitudes de percolación de manera de tener en cuenta la dependencia del número de objetos con el redshift debido al corte por magnitud aparente de una muestra. La diferencia entre ambos métodos reside en la manera en que esta dependencia es introducida en el algoritmo. Estos métodos han sido ampliamente probados usando simulaciones numéricas cosmológicas de N-cuerpos (Frederic 1995) y subsecuentemente utilizados sobre muestras de galaxias con redshifts (Merchán et al. 2000, Giuricin et al. 2000, Tucker et al. 2000, Ramella et al. 2002).

En este caso haremos uso del algoritmo desarrollado por Huchra & Geller 1982 y cuyo detalle es el siguiente. De acuerdo con estos autores, dado un par de galaxias con distancia comóvil radial media $D = (D_1 + D_2)/2$ y separación angular θ_{12} , el algoritmo asocia galaxias que satisfacen las siguientes condiciones:

$$D_{12} = 2sen\left(\frac{\theta_{12}}{2}\right)D \le D_L = D_0R \tag{2.1}$$

у

$$V_{12} = |V_1 - V_2| \le V_L = V_0 R \tag{2.2}$$

donde D_{12} es la distancia proyectada y V_{12} es la diferencia de velocidad en la línea de la visual. Las distancias comóviles D_i son estimadas usando la relación:

$$D_i(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\Omega_M(1+z') + \Omega_\Lambda}$$
(2.3)

con parámetros de densidad $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ y constante de Hubble $H_0 = 100 \ h \ km \ s^{-1} \ Mpc^{-1}$. Las longitudes de percolación transversal (D_L) y radial (V_L) escalan con el factor R para compensar por la variación en la densidad numérica con el redshift debido a la magnitud aparente límite del catálogo de galaxias. El factor de escalado R se calcula usando la función de luminosidad de galaxias de la muestra $\phi(M)$

$$R = \left[\frac{\int_{-\infty}^{M_{12}} \phi(M) dM}{\int_{-\infty}^{M_{lim}} \phi(M) dM}\right]^{-1/3}$$
(2.4)

donde M_{lim} y M_{12} son las magnitudes absolutas de la galaxia más brillante visible a la distancia fiducial D_f y la distancia media de las galaxias D, respectivamente. Usualmente D_0 se elije de manera tal de obtener la sobredensidad deseada $\delta \rho / \rho$ que viene dada por

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{3}{4\pi D_0^3} \left(\int_{-\infty}^{M_{lim}} \phi(M) dM \right)^{-1} - 1$$
(2.5)

y se corresponde con el contorno de sobredensidad fijo que circunscribe al grupo.

Por lo tanto para proceder con la identificación lo único que faltaría determinar son las longitudes de percolación V_0 y $\delta \rho / \rho$. Los parámetros elegidos son los mismos que los obtenidos por Merchán & Zandivarez 2002. En ese trabajo, los autores realizaron un análisis exhaustivo a cerca de cuales deberían ser las longitudes de percolación más apropiadas cuando un catálogo de galaxias posee varias incompletitudes en la cobertura del cielo.



Figura 2.2: Panel superior: el porcentaje de grupos identificados en el espacio de redshifts que tienen una contraparte en el espacio real. Panel Inferior: el porcentaje del total de grupos en el espacio real asociados con los grupos en el espacio de redshifts que coincidieron con uno en el espacio real. En ambos paneles, los distintos colores denotan identificaciones con distinta sobredensidad $\delta \rho / \rho$.

Su análisis fue realizado para identificar grupos en el catálogo 2dF 100-K Data Release. La determinación de los parámetros más apropiados para la identificación fue llevada a cabo mediante la identificación de grupos de galaxias en catálogos sintéticos tanto en el espacio de redshift como en el espacio real (es decir el de las

distancias sin distorsionar). Además de contemplar la existencia de una magnitud aparente límite, propia de la mayoría de los catálogos observacionales, ellos también tuvieron en cuenta catálogos con incompletitud en el muestreo angular y una magnitud aparente límite variable con la posición en el cielo. Como resultado general, Merchán & Zandivarez 2002 obtuvieron que las modificaciones introducidas en las longitudes de percolación para tener en cuenta todas estas incompletitudes mejoraron la muestra final de grupos identificados en el espacio de redshifts en un 14% respecto de la identificación realizada con el algoritmo original de Huchra & Geller 1982. Además, analizando las identificaciones en el espacio real y en el de redshifts, encontraron que la contaminación es de aproximadamente un 30% para grupos con más de 4 miembros. Finalmente para obtener las longitudes de percolación más apropiadas para la identificación ellos variaron estos parámetros y los compararon con la identificación en el espacio real para los mismos valores. En la Figura 2.2 puede verse el resultado de esta comparación para catálogos con una magnitud aparente límite (los resultados teniendo en cuenta las otras incompletitudes son similares variando un poco los porcentajes). En esta Figura, las abscisas muestra la variación del parámetro V_0 , mientras que los distintos colores representan distintos valores de $\delta \rho / \rho$. En el panel superior se muestra el porcentaje de grupos identificados en el espacio de redshifts que tienen una contraparte en el espacio real mientras que en el panel inferior se muestra el porcentaje del total de grupos en el espacio real asociados con la muestra de grupos en el espacio de redshifts que coincidieron con uno en el espacio real. Si solo tenemos en cuenta el panel superior, entonces las identificaciones con $V_0 = 100 \; km \; s^{-1}$ son las más adecuadas ya que un alto porcentaje de los grupos identificados en el espacio de redshifts está asociado con algún grupo en el espacio real. Sin embargo este conjunto de grupos con una contraparte en el espacio real representa un bajo porcentaje del catálogo de grupos total en el espacio real como lo muestra el panel inferior. Por lo tanto los valores más apropiados surgen de un compromiso entre los dos análisis, es decir, se deberán obtener los porcentajes más altos posibles entre los dos paneles. Es por esto que las longitudes de percolación más adecuadas son $V_0 = 200 \ km \ s^{-1} \ y \ \delta \rho / \rho$ de 80 o 160. El valor adoptado para el contraste de densidad por Merchán & Zandivarez 2002 es el de 80 ya que con este valor se obtiene una muestra de grupos más numerosa. Por lo tanto en este trabajo adoptaremos para la identificación en el catálogo de galaxias del SDSS DR4 las longitudes de percolación $V_0 = 200 \ km \ s^{-1} \ y \ \delta \rho / \rho = 80.$

2.3 Mejoras en la identificación de los grupos ricos

De acuerdo con lo mencionado en la sección anterior, Merchán & Zandivarez 2002 midieron una contaminación del 30% en los grupos identificados en el espacio de redshifts usando el algoritmo de Huchra & Geller 1982 modificado. Esta contaminación se debe a que el algoritmo de identificación aplicado en el espacio distorsionado tiende a fusionar algunas estructuras y/ó incluír miembros ficticios en los grupos identificados. Por ejemplo, como la longitud de percolación radial V crece con la distancia, para redshifts altos, este valor es considerablemente grande tendiendo a incluir galaxias que no son parte del sistema ó , lo que es aun peor, a generar un sistema que no hubiese sido identificado en el espacio real. Es por esto que sería ideal disponer de algún procedimiento que permita disminuir estos problemas en los grupos identificados. En esta sección se describirán dos métodos que intentan disminuir las posibles contaminaciones existentes en los sistemas de galaxias obtenidos después de la aplicación del algoritmo de identificación.

2.3.1 Re-identificación de grupos de galaxias

Es sabido que el identificador denominado "amigo-de-los-amigos" tiende a producir, en ciertas condiciones, sistemas ficticios con múltiples sobredensidades. Este tipo de contaminación es más fácilmente distinguible en sistemas ricos, es decir, con más de 10 miembros. Este efecto puede observarse visualmente y resulta un problema muy importante cuando se realizan estudios de la distribución de galaxias a partir del centro del sistema.

En procura de disminuir este efecto en los grupos ricos identificados en el 2dF-GRS y en el SDSS DR1, Díaz et al. 2005 propusieron un método que describiremos a continuación. En primer lugar realizaron un análisis de la identificación resultante de grupos de galaxias en catálogos sintéticos tanto en el espacio real como en el espacio de redshifts para una sobredensidad $\delta\rho/\rho = 80$. Luego de comparar los grupos ricos en el espacio de redshifts que poseen múltiples sobredensidades (dos o más) con los grupos identificados en el espacio real ubicados en la misma región que los anteriores observaron lo que mostramos con un ejemplo en la Figura 2.3. En esta Figura, el panel de la derecha muestra con un círculo rojo el centro de un grupo identificado en el espacio de redshifts con sus miembros en puntos negros, mientras que los círculos azules son los centros de los grupos identificados en el espacio real.



Figura 2.3: Ejemplo del método de doble identificación en grupos de galaxias. Los círculos rojos son los centros de los grupos identificados en el espacio de redshifts mientras que los círculos azules son los centros de los grupos identificados en el espacio real. El panel superior muestra una primera identificación en el espacio distorsionado con $(\delta\rho/\rho)_z = 80$, mientras que el panel inferior muestra el resultado después de una segunda identificación con $(\delta\rho/\rho)_z = 315$. La identificación en el espacio real se realizó con $\delta\rho/\rho = 80$. Los puntos negros muestran las galaxias miembros del grupo identificado en el espacio de redshifts.

Es evidente que el grupo en el espacio de redshifts es ficticio y está asociado con varios grupos en el espacio real. En un intento por corregir esto, Díaz et al. 2005 se propusieron investigar con qué sobredensidad se debería realizar una segunda identificación sobre los grupos obtenidos en el espacio de redshifts para obtener una distribución de grupos lo más parecida posible a la obtenida en el espacio real para una sobredensidad $\delta\rho/\rho = 80$. Realizando varias sobre-identificaciones en el espacio de redshifts variando $\delta\rho/\rho$, observaron que cuando esta sobredensidad es del orden de 300, la identificación resultante en el espacio distorsionado reproduce satisfactoriamente la distribución de grupos en el espacio real. Esto puede observarse en el panel inferior de la Figura 2.3, donde la segunda identificación se realizó con una $\delta\rho/\rho = 315$. Aun cuando la nueva distribución de grupos no reproduce perfectamente la de los grupos en el espacio real, la mejora con respecto a la primera identificación es notable. Por lo tanto adoptaremos este procedimiento de doble identificación para grupos ricos, con una sobredensidad $\delta\rho/\rho = 315$, cuando se realice la identificación de grupos de galaxias en el SDSS DR4.

2.3.2 Método para el re-centrado de grupos de galaxias

En un trabajo realizado recientemente sobre perfiles de densidad en grupos de galaxias, Díaz et al. 2005 observaron que las densidades medidas en las zonas centrales de los grupos estaban subestimadas respecto al perfil de densidad real. Esta subestima la observaron tanto en grupos identificados en simulaciones numéricas de Ncuerpos como en las observaciones y era debido puramente a un mal posicionamiento del centro del grupo.

Ellos observaron que el centro geométrico, ó baricentro (r_b) , por lo general, no coincide con el pico de sobredensidad del sistema y por lo tanto el centro no coincide con el principal pozo de potencial. Un manera de mejorar esto en las simulaciones numéricas de N-cuerpos es realizar una identificación con una sobredensidad $\delta \rho / \rho$



Figura 2.4: Diagrama esquemático mostrando el funcionamiento del algoritmo de recentrado de los grupos de galaxias.

mucho más grande, es decir, pasar de ~ 300 a ~ 2000 . Esto prácticamente resuelve el problema, sin embargo, esta solución es inaplicable para sistemas de galaxias identificados en catálogos observacionales ya que se perdería la mayoría de los sistemas.

Para solucionar este inconveniente, Díaz et al. 2005 desarrollaron un método para mejorar el centrado de los grupos de galaxias identificados. Este método introduce un nuevo estimador pesado de la posición proyectada del centro del grupo y luego realiza un procedimiento iterativo para posicionar el centro del grupo sobre el pico de sobredensidad. Por lo tanto, aplicaremos este método para re-centrar los grupos ricos (con más de 10 miembros) identificados en el SDSS DR4 de manera de tener un catálogo de grupos con sus propiedades geométricas y físicas estimadas con un alto grado de confiabilidad.

El procedimiento adoptado para la estima del nuevo centro usa la densidad numérica proyectada en la posición de cada galaxia. Una primera estima del centro del sistema se obtiene calculando

$$r_c^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_i^{PL} r_i}{N\bar{\rho}^{PL}}$$
(2.6)

donde N es el número de miembros de cada grupo, ρ_i^{PL} es la densidad local proyectada en la posición de la partícula i-ésima y $\bar{\rho}^{PL}$ es la densidad local proyectada media del grupo. La densidad local proyectada para la i-ésima galaxia se calcula dentro del área circular proyectada que encierra los 5 miembros más cercanos. Este nuevo estimador mejora la ubicación del centro pero en algunos casos no es suficiente para colocar el centro del grupo sobre el pico de sobredensidad del sistema. Para lograr esto se ideó un método iterativo que se encuentra descripto gráficamente en la Figura 2.4. El procedimiento consta de los siguientes pasos:

- Usando el centro geométrico (r_b) se determina la distancia d_0 a la galaxia más lejana.
- Después del cálculo de $r_c^{(1)}$ se eliminan todas las galaxias con distancias a $r_c^{(1)}$ mayores que d_0 . Luego se estima la distancia de la galaxia más lejana d_1 del conjunto de galaxias restantes respecto de $r_c^{(1)}$.
- Se calcula $r_c^{(2)}$ para el nuevo conjunto de galaxias usando la ecuación 2.1 y se aplica el mismo procedimiento descripto en el paso anterior.

La iteración continúa hasta que $d_{M-1} = d_M$ y consecuentemente, luego de M iteraciones, se obtiene el centro del grupo como $r_c = r_c^{(M)}$. El funcionamiento de este método iterativo puede visualizarse en la Figura 2.5. Allí se muestra en 4 etapas la posición del centro del sistema a medida que se suceden las iteraciones. En esa Figura, el punto negro marca el centro geométrico r_b , los puntos azules los centros $r_c^{(i)}$, los puntos verdes son las galaxias en el grupo, mientras que los puntos rojos muestran las galaxias que van quedando después de eliminar las que no cumplen con el criterio. Puede observarse claramente como los centros $r_c^{(i)}$ van moviéndose hasta ubicarse sobre la más alta concentración de galaxias del grupo, es decir el pico de sobredensidad. Este método no solo mejora considerablemente la ubicación del centro del grupo de galaxias si no que también corrige por posibles problemas de grupos fusionados por el proceso de identificación lo cual sabemos, es una característica inevitable en los algoritmos de identificación aplicados en el espacio de redshifts.



Figura 2.5: Ejemplo del re-centrado de un grupo de galaxias. Los puntos verdes son las galaxias iniciales del grupo y los puntos rojos son las galaxias que van quedando después de cada eliminación. El punto negro muestra la posición del centro geométrico del grupo mientras que los puntos azules muestran la ubicación de los nuevos centros estimados iterativamente hasta la convergencia del método (panel inferior).

2.4 El catálogo de grupos de galaxias

Finalmente, se aplicó el procedimiento completo de identificación de grupos de galaxias y el re-centrado de grupos sobre el catálogo de galaxias con redshifts SDSS DR4. Como resultado se obtuvo una muestra de 14004 grupos de galaxias con al menos 4 miembros y comprende un total de 85728 galaxias. La distribución de los grupos de galaxias (puntos rojos) sobre la distribución de galaxias (puntos negros) puede observarse en la Figura 2.6. Esta Figura muestra ambas distribuciones como función del redshift y de la ascención recta donde la coordenada proyectada es la declinación (diagrama de tarta). En el caso de la región que se encuentra en el hemisferio norte ecuatorial, el diagrama se presenta en dos rangos de declinación.

Para realizar el posterior análisis de esta muestra de grupos de galaxias se procedió a estimar los correspondientes parámetros físicos. La masa virial de los grupos se calculó usando la fórmula de Limber & Mathews 1960:

$$\mathcal{M}_{vir} = \frac{\sigma^2 R_V}{G} \tag{2.7}$$

donde R_V es el radio virial del sistema y σ es la dispersión de velocidades de sus galaxias miembro. El radio virial se estima usando

$$R_V = \frac{\pi}{2} \frac{N_g (N_g - 1)}{\sum_{i>j} R_{ij}^{-1}}$$
(2.8)

donde N_g es el número de galaxias miembro y R_{ij} son las distancias proyectadas de las galaxias al centro del grupo. La dispersión de velocidades σ es estimada usando su contraparte observacional, la dispersión de velocidades en la línea de la visual σ_v , usando $\sigma = \sqrt{3}\sigma_v$. En particular, se usaron los métodos desarrollados por



Figura 2.6: Distribución de los grupos de galaxias (puntos rojos) como función de la ascención recta y el redshift para cuatro franjas de declinación. Los puntos negros muestran la distribución de galaxias del SDSS DR4.

Beers et al. 1990 para obtener estimas robustas de las dispersiones de velocidades radiales para los grupos de nuestra muestra.

Se aplicó el estimador de doble-peso (biweight) para grupos con más de 15 miembros,

$$\sigma_v = \sqrt{N_g} \frac{\left[\sum_{|u_i|<1} (v_i - \bar{V})^2 (1 - u_i^2)^4\right]^{1/2}}{\left|\sum_{|u_i|<1} (1 - u_i^2) (1 - 5u_i^2)\right|}$$
(2.9)

donde $u_i = (v_i - \bar{V})/c(Mediana(|v_i - \bar{V}|)), c$ es una constante ajustable con valor 9.0 y \bar{V} es la mediana de las v_i . Para los grupos más pobres se usó el estimador denominado de espaciado (gapper) definido como

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{\pi}}{N_g(N_g - 1)} \sum_{i=1}^{N_g - 1} i(N_g - i)(v_{i+1} - v_i).$$
(2.10)

Aun cuando estos métodos mejoran las estimas de las dispersiones de velocidades en términos de eficiencia y estabilidad cuando se trata de grupos con pocos miembros, debe recordarse que pequeños errores en la estima de las dispersiones de velocidades se traducen en errores más grandes en las masas viriales calculadas.

Las distribuciones de redshifts y las principales propiedades físicas de los grupos identificados en el SDSS DR4 pueden verse en la Figura 2.7. Las medianas de dichas distribuciones son: 0.09, 226 km s⁻¹, $3.6 \times 10^{13} h^{-1} \mathcal{M}_{\odot}$ y $1.1 h^{-1} Mpc$ para el redshift, dispersión de velocidades, masa y radio virial respectivamente. En los paneles de la Figura 2.7, las líneas verticales a rayas muestran las medianas de cada histograma.



Figura 2.7: Histogramas mostrando las propiedades medidas (redshift, dispersión de velocidades, masa y radio virial) de la muestra final de grupos de galaxias identificados en el SDSS DR4. Las líneas verticales muestran la mediana de cada distribución.

Capítulo 3

La Función de Luminosidad de galaxias en los grupos

3.1 Introducción

Dentro de la información que podemos extraer de los grupos de galaxias, sus galaxias miembro son una de las fuentes más importantes, ya que sus propiedades y comportamiento hablan claramente de la evolución y formación de estos sistemas. Para entender estos procesos se necesita de un conocimiento muy detallado del comportamiento de las diferentes poblaciones de galaxias bajo diferentes condiciones. Una manera de lograr extraer esta información es el estudio de las luminosidades de las galaxias y su variación con el medio que las rodea. La herramienta estadística más indicada para realizar este tipo de análisis es la Función de Luminosidad (FL) de galaxias. Esta función describe la distribución de luminosidades para una dada población de galaxias y, en la mayoría de los casos, puede parametrizarse por una función con dos parámetros (Schechter 1976), la magnitud absoluta característica M^* y la pendiente del extremo débil α . Los resultados obtenidos a partir del análisis de estos parámetros están dentro de los temas más controversiales de la astronomía extragaláctica.

A través de los años la FL ha sido estimada para galaxias en el campo, grupos y cúmulos de galaxias (ver por ejemplo Marzke, Huchra & Geller 1994, Lin et al. 1996, Zucca 1997, López-Cruz et al. 1997, Valotto et al. 1997, Ratcliffe et al. 1998, Muriel, Valotto & Lambas 1998, Rauzy, Adami & Mazure 1998, Trentham 1998). Dos líneas de pensamiento surgieron de estos trabajos: una de ellas establece que la FL depende del medio, mientras que la otra sustenta la idea de una FL universal. La dependencia de la FL con el medio fue propuesta por algunos autores debido a que una pendiente en el extremo débil muy empinada fué encontrada para la FL en los cúmulos de galaxias. Este resultado ha sido interpretado como un exceso en la población de galaxias enanas respecto del campo. Sin embargo, para tener resultados más confiables en este tema, son necesarias grandes muestras de galaxias con información fotométrica y espectroscópica de alta calidad.

Desde el advenimiento de los grandes catálogos de galaxias, tales como el SDSS (York et al. 2000) y el Two degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS, Colless et al. 2001) se han obtenido mejores determinaciones de la FL (Blanton et al. 2001, Blanton et al. 2003b, Blanton et al. 2005, Norberg et al. 2002, Madgwick et al. 2002, Trentham & Tully 2002, Martínez et al. 2002b, Christlein & Zabludoff 2003, Eke et al. 2004b). La mayoría de estos trabajos coinciden con una FL de galaxias plana en el campo ($\alpha \sim -1$) mientras que en los sistemas de galaxias se observa una magnitud característica M^* más brillante y una pendiente en el extremo débil α más empinada en el rango de magnitudes absolutas -23 < M < -16. Analizando una muestra de cúmulos de galaxias obtenidos a partir de una correlación cruzada entre el SDSS y el Rosat All Sky Survey, Popesso et al. 2005 encontró que la pendiente del extremo muy débil (M > -17) es considerablemente más empinada ($\alpha \sim -2$) en estos medios. Resultados similares fueron encontrados por González et al. 2005 cuando se analizaron medios de densidades bajas como lo son los grupos de galaxias. Debe tenerse en cuenta que estos trabajos fueron llevados a cabo usando métodos basados en la sustracción estadística de galaxias de fondo debido a la falta de información espectroscópica para las galaxias débiles. Estos métodos son sensibles al cálculo del número de galaxias de fondo (ver Tabla 2 de Popesso et al. 2005) y a la presencia de estructuras a lo largo de la línea de la visión (Valotto et al. 2001), y por lo tanto, son menos confiables que aquellos métodos basados en información espectroscópica.

En este capítulo, utilizaremos las muestras de grupos de galaxias identificados en el SDSS DR4 para calcular las FLs de galaxias en grupos bajo diferentes condiciones, con el fin de entender el comportamiento de galaxias en medios de densidad intermedia y, consecuentemente, proveer importantes pistas sobre la formación y evolución de las galaxias.



Figura 3.1: Respuesta estimada de las cinco bandas del SDSS como función de la longitud de onda. La línea negra muestra un espectro sintético para un burst instantáneo de 4 Giga-años observado a z=0.

3.2 Magnitudes absolutas y estimadores de la FL

3.2.1 Cálculo de las magnitudes absolutas de las galaxias

Las magnitudes aparentes que usamos en este estudio son las Petrosian y son corregidas por extinción galáctica siguiendo Schlegel et al. 1998. Las magnitudes absolutas son estimadas asumiendo $\Omega_0 = 0.3$, $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ y una constante de Hubble de $H_0 = 100 \ h \ \mathrm{km \ s^{-1} \ Mpc^{-1}}$.

La corrección K para cada galaxia se estimó usando el método de Blanton et al. 2003a. Estos autores desarrollaron un código (kcorrect version 4.1) el cual consiste en inferir la Distribución Espectral de Energía (comúnmente abreviado en inglés como SED) de un conjunto de galaxias en un rango de redshift requiriendo que estas SED pertenezcan a una población similar. Para cada galaxia se recupera un modelo de SED que puede ser usado para sintetizar la magnitud de una galaxia en una dada banda. Aplicado a las galaxias del SDSS, el código usa como entrada un archivo con 6 columnas que contienen, el redshift y las cinco magnitudes Mag. Las magnitudes Mag se calculan haciendo $10^{-0.4 \times \text{mag}}$ donde mag es la magnitud aparente Petrosian corregida por extinción galáctica. En la Figura 3.1 observamos la respuesta estimada de cada uno de los 5 filtros del SDSS, u, g, r, i y z. El código devuelve dos archivos, uno con las Mag observadas y otro con las Mag_0 en el sistema en reposo. La corrección K se calcula como $K = -2.5 \log_{10}(Mag/Mag_0)$. Este código también preve la posibilidad de introducir un corrimiento de la banda a un dado redshift. En el caso del SDSS la mayor parte de las galaxias se observan a un redshift cercano a 0.1, por lo tanto es lógico introducir un corrimiento de la banda en la corrección K de 0.1 ya que este procedimiento minimiza los errores en la estima de la corrección K. En caso de introducir el corrimiento, las galaxias a z = 0.1 tendrían una corrección independiente de sus SEDs e igual a $-2.5 \log_{10}(1+0.1)$.

Finalmente, también se incluyó para la estima de la magnitud absoluta una corrección por evolución de la forma E = Q(z + 0.1) donde la constante Q fué calculada por Blanton et al. 2003b. Todas las magnitudes utilizadas están en el sistema AB. A lo largo de este capítulo nos referiremos a estas bandas corridas como
${}^{0.1}u \; {}^{0.1}g \; {}^{0.1}r \; {}^{0.1}i \; {}^{0.1}z.$

3.2.2 Métodos para la estima de la FL

En un estudio comparativo de estimadores de FLs usando simulaciones Monte Carlo, Willmer 1997 mostró que el método C^- de Lynden-Bell 1971 y el método STY de Sandage, Tammann & Yahil 1979 son los mejores estimadores para medir la forma de la FL. Además, el análisis realizado por Willmer muestra que el método $C^$ es el más robusto, siendo el menos afectado por los diferentes valores de la pendiente débil de la parametrización de Schechter y el tamaño de la muestra. Por lo tanto usaremos el método C^- para obtener una determinación no paramétrica de la FL y el método STY para calcular la mejor función de Schechter que ajusta los resultados.

El método C^- fue simplificado y desarrollado por Choloniewski 1987 de manera de calcular simultáneamente la forma y la normalización de la FL. La FL es obtenida diferenciando la FL acumulativa, $\Psi(M)$. La función X(M) definida como la densidad de galaxias observada con magnitud absoluta más brillante que M, representa solamente un submuestreo de la $\Psi(M)$,

$$\frac{dX}{X} < \frac{d\Psi}{\Psi};\tag{3.1}$$

el punto clave del método es construir una cantidad C(M), submuestra de X(M), tal que

$$\frac{dX}{C} = \frac{d\Psi}{\Psi}.$$
(3.2)

Lynden-Bell 1971 definió esta cantidad como el número de galaxias más brillantes que M las cuales podrían ser observadas si sus magnitudes fueran M. Siguiendo a

Choloniewski 1987, la FL diferencial puede ser escrita como

$$\langle \Phi(M) \rangle = \frac{\Gamma \sum_{i}^{M_{i} \in [M, M + \Delta M]} \psi_{i}}{\Delta M}$$
(3.3)

donde

$$\Gamma = \prod_{k=2}^{N} \frac{C_k + 1}{C_k} \left(V \sum_{i=1}^{N} \psi_i \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \right)^{-1}, \qquad (3.4)$$

$$\psi_k = \prod_{i=1}^k \frac{C_i + 1}{C_{i+1}} \tag{3.5}$$

y $C_k = C^-(M_k)$ está definida como C(M) pero excluyendo el objeto k.

Además del método no paramétrico definido anteriormente, también aplicaremos el método STY que usa una técnica de máxima probabilidad (maximum likelihood) para encontrar los parámetros más probables de una función analítica $\Phi(M)$, en general asumida como la función de Schechter:

$$\Phi(M) \propto 10^{-0.4(M-M^*)(\alpha+1)} \exp\left[-10^{-0.4(M-M^*)}\right]$$
(3.6)

La probabilidad p_i de obtener un objeto con magnitud absoluta M es

$$p_i \equiv \frac{\Phi(M_i)}{\int_{M_{\text{bright}}}^{M_{\text{faint}}} \Phi(M) dM}$$
(3.7)

donde M_{bright} y M_{faint} son las magnitudes absolutas más brillante y más débil observables en la muestra, ubicadas en el redshift de la galaxia considerada con la correspondiente corrección K + E. Consecuentemente, el método busca los parámetros M^* y α maximizando la función de likelihood

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{N} p_i. \tag{3.8}$$

Los errores pueden ser estimados a partir de los elipsoides de error definidos como

$$\ln \mathcal{L} = \ln \mathcal{L}_{\max} - \frac{1}{2} \chi_{\beta}^2(N), \qquad (3.9)$$



Figura 3.2: La función de luminosidad (en unidades arbitrarias) de galaxias en grupos para la banda $^{0.1}r$. La línea sólida muestra la función de Schechter mejor ajustada (ver detalle). Las bandas de error fueron estimadas usando la técnica de re-muestreo bootstrap.

donde $\chi^2_{\beta}(N)$ es el punto β de la distribución χ^2 con N grados de libertad. El volumen comóvil involucrado en las ecuaciones anteriores es estimado usando la fórmula general

$$V = \frac{\omega c}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{d_L(z)^2 (1+z)^{-2} dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}}$$
(3.10)

donde w es el ángulo sólido, c es la velocidad de la luz, y $d_L(z)$ es la distancia luminosidad.

3.3 La FL de galaxias en grupos del SDSS DR4

3.3.1 La FL en distintas bandas

Para calcular las funciones de luminosidad, hemos adoptado los mismos cortes en magnitud aparente que los introducidos por Blanton et al. 2003b. Dado que las correcciones K en cada banda son confiables solamente en un dado rango de redshift, también introdujimos cortes en redshift dependientes de la banda (Tabla 3.1, ver Blanton et al. 2003a).

La FL en la banda $^{0.1}r$ para galaxias en grupos se muestra en la Figure 3.2, junto con la función de Schechter que mejor ajusta los datos. La FL en otras bandas con sus correspondientes ajustes se muestran en la Figure 3.3. Los parámetros de la función de Schechter que mejor ajustaron las FL se encuentran en la Tabla 3.1. A partir de estas figuras puede observarse que las funciones de Schechter describen correctamente las FL en todas las bandas.

Cuando comparamos nuestros resultados con los obtenidos por Blanton et al. 2003b (ver su Tabla 2) para las FL de la Muestra Principal de Galaxias (MPG) en el DR1, observamos, con la excepción de la banda ^{0.1}u, que las magnitudes características $M^* - 5\log(h)$ son más brillantes para galaxias en grupos. Estos abrillantamientos observados en M^* van de 0.29 en la banda ^{0.1}z a ~ 0.5 magnitudes en las bandas ^{0.1}g, ^{0.1}r e ^{0.1}i, con más de 7σ de significancia en todos los casos. Al mismo tiempo, los grupos de galaxias muestran un pequeño empinamiento de la pendiente del extremo débil, α . El empinamiento es más pronunciado para las bandas azules, ^{0.1}u, ^{0.1}g, donde se observa un cambio de ~ 0.2 en α . Sin embargo, estas diferencias no son



Figura 3.3: La función de luminosidad de galaxias en grupos en diferentes bandas. La línea sólida muestra la función de Schechter mejor ajustada (ver detalle). Las bandas de error fueron estimadas usando la técnica de re-muestreo bootstrap.

Banda	$\mathrm{m}_{\mathrm{lim}}$	rando de redshift	$N_{\rm galaxias}$	$M^* - 5\log(h)$	α
$^{0.1}u$	18.40	0.02 - 0.14	15743	-17.83 ± 0.03	-1.13 ± 0.04
$^{0.1}g$	17.70	0.02 - 0.17	37239	-19.71 ± 0.02	-1.09 ± 0.02
$^{0.1}r$	17.77	0.02 - 0.22	83869	-20.85 ± 0.01	-1.08 ± 0.01
$^{0.1}i$	16.91	0.02 - 0.22	54233	-21.21 ± 0.02	-1.15 ± 0.02
$^{0.1}z$	16.50	0.02 - 0.22	46001	-21.47 ± 0.02	-1.12 ± 0.01

Tabla 3.1: Los parámetros de la función de Schechter mejor ajustados a las FLs de galaxias en grupos usando el método STY.

muy significativas, ya que todas ellas yacen dentro de ~ 2σ . Estos resultados están de acuerdo con aquellos obtenidos por Martínez et al. 2002b para galaxias en grupos identificados en el conjunto de datos 100K del 2dFGRS, en la banda b_J . Ellos encontraron que la magnitud característica es más brillante para galaxias en grupos respecto a los valores observados para la FL obtenida para galaxias de campo por Norberg et al. 2002, mientras que la pendiente del extremo débil para galaxias en grupos resultó estadísticamente comparable con los valores de campo.

En los modelos de formación jerárquica y evolución de galaxias, la frecuencia de fusiones de galaxias crece para sistemas de masa intermedia como los grupos. Por lo tanto, en este escenario, se espera que las galaxias en grupos y cúmulos sean típicamente más brillantes que sus contrapartes del campo, resultando una M^* más brillante. Esto puede explicar las diferencias entre las galaxias de campo y las galaxias de grupos. Por otro lado, el resultado obtenido en la banda ^{0.1}u no es inesperado ya que esta banda es una buena indicadora de la tasa de formación estelar actual, y es probable que las galaxias en sistemas tengan una tasa de formación estelar m/ás baja o disminuída que la observada para galaxias de campo (ver por ejemplo Martínez et al. 2002a).



Figura 3.4: Los parámetros de la función de Schechter mejor ajustados a las FL en la banda b_J en diferentes rangos de masa para galaxias en grupos del 2PIGG (Eke et al. 2004b). También se muestran las elipses de 1σ , 2σ y 3σ de confidencia.

3.3.2 Variación de la FL con la masa virial

En esta subsección estudiaremos la dependencia de la FL de galaxias en grupos con la masa virial de los grupos. Un análisis previo de este tipo fué realizado por Eke et al. 2004b para los grupos de galaxias del 2dFGRS Percolation-Inferred Galaxy Group catalog (2PIGG; Eke et al. 2004a). Estos autores dividieron su muestra de grupos en tres rangos de masas y calcularon las FLs correspondientes usando los métodos estándar $1/V_{\rm max}$ y STY. En la Figure 3.4 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros de la función de Schechter por Eke et al. 2004a. Aún cuando su rango de masa más alto produjo resultados estadísticamente pobres y los valores medios obtenidos no siguen el mismo comportamiento que los rangos de masa más bajos, estos autores concluyeron que M^* y α decrecen cuando la masa crece.

Dado el gran número de grupos que hemos identificado en el SDSS DR4, esperamos



Figura 3.5: La función de luminosidad de galaxias en grupos para la banda $^{0.1}r$ en distintos rangos de masa virial. La línea sólida muestra la función de Schechter mejor ajustada (ver detalle). Las bandas de error fueron estimadas usando la técnica de re-muestreo bootstrap.

Muestra	rango de masa ^{a}	$N_{\rm grupos}$	$N_{\rm galaxias}$	$M^* - 5\log(h)$	α
\mathcal{M}_1	11.0 - 12.9	2322	10326	-20.44 ± 0.04	-0.93 ± 0.03
\mathcal{M}_2	12.9 - 13.3	2392	12514	-20.56 ± 0.04	-0.93 ± 0.03
\mathcal{M}_3	13.3 - 13.6	2409	13580	-20.64 ± 0.04	-0.96 ± 0.03
\mathcal{M}_4	13.6 - 13.9	2362	14415	-20.75 ± 0.04	-1.01 ± 0.03
\mathcal{M}_5	13.9 - 14.25	2150	14626	-20.86 ± 0.04	-1.06 ± 0.04
\mathcal{M}_6	> 14.25	2231	17331	-21.20 ± 0.04	-1.29 ± 0.04

Tabla 3.2: Dependencia de las FL en la banda $^{0.1}r$ con la masa de los grupos: los parámetros de la función de Schechter mejor ajustado usando STY.

^{*a*} Las unidades están en $\log(\mathcal{M}/(h^{-1}M_{\odot}))$.

obtener una descripción más detallada de este tópico. Se dividió la muestra completa de grupos con $z \leq 0.22$ en 6 rangos de masa virial definidos de tal manera que cada rango posea aproximadamente el mismo número de grupos (~ 2200). Los detalles de esta selección pueden observarse en la Tabla 3.2. El gran número de galaxias en las submuestras nos permite determinar las FLs con un alto nivel de confiabilidad, aún cuando hayamos dividido la muestra de grupos en varios rangos.

En la Figura 3.5 se muestran las FLs en la banda $^{0.1}r$ resultantes para cada rango de masa. Los parámetros de la función de Schechter que mejor ajustaron los datos están listados en cada panel de la Figura 3.5 y en la Tabla 3.2. Como puede verse de esta figura, las FLs están bien descriptas por una función de Schechter para todas las masas. Para simplificar la interpretación de los resultados, se muestran los valores de M^* vs. α (Figura 3.6) y M^* y α como función de la masa (Figura 3.7). La Figura 3.6 muestra las elipses de 1σ y 2σ de confidencia de acuerdo a las estimas del método STY. Las bandas de error a lo largo del eje Y en la Figura 3.7 son las proyecciones de la elipse de error de 1σ en cada eje coordenado de la Figura 3.6, mientras que las bandas de error en el eje X son el rango semi-interquartile de la mediana de la masa virial para el rango de masa correspondiente. Existen dos claras y continuas



Figura 3.6: Los parámetros de la función de Schechter mejor ajustados a las FL en la banda $^{0.1}r$ para diferentes rangos de masa. También se muestran las elipses de 1σ y 2σ de confidencia.

tendencias: un abrillantamiento de M^* y empinamiento simultaneo de α a medida que la masa virial crece. M^* cambia en ~ 0.75 magnitudes mientras que α varía en 0.4, en un rango de dos órdenes de magnitud en la masa del grupo.

Se realizó el cálculo de las FLs para las otras bandas del SDSS. Los resultados pueden observarse en la Figura 3.8, mientras que los parámetros de la función de Schechter que mejor ajustaron se encuentran en la Tabla 3.3. Es claro que nuevamente la función de Schechter realiza una buena descripción de las FLs para todas las bandas



Figura 3.7: Los parámetros mejor ajustados de la función de Schechter, $M^* - 5 \log(h)$ (panel superior) y α (panel inferior) para la FL en la banda $^{0.1}r$ como función de la mediana de la masa virial. Las bandas de error en la masa son el rango semi-interquartile, mientras que los errores en los parámetros de Schechter son las proyecciones de la elipse de error de 1σ en cada eje de coordenadas.

en todos los rangos de masa. En la Figura 3.9 graficamos los parámetros que mejor ajustaron como función de la masa. Se encontraron las mismas tendencias en cada banda como las observadas anteriormente, excepto por algunas diferencias en los resultados obtenidos para la banda $^{0.1}u$. En este caso observamos un abrillantamiento de M^* de ~ 0.4 magnitudes, significativamente menor que el de ~ 0.75 magnitudes observado en el resto de las bandas. Esto no es inesperado, ya que la banda $^{0.1}u$, como mencionamos anteriormente, es sensible a la formación estelar, es decir, que la



Figura 3.8: Las funciones de luminosidad para galaxias en grupos en las bandas ${}^{0.1}u$, ${}^{0.1}g$, ${}^{0.1}i$ y ${}^{0.1}z$ para diferentes rangos de masa virial (ver Tabla 3.3). Las líneas sólidas muestran la función de Schechter mejor ajustada (ver detalle). Las bandas de error fueron estimadas usando la técnica de re-muestreo bootstrap.



Figura 3.9: Los parámetros mejor ajustados de la función de Schechter, $M^* - 5 \log(h)$ (panel superior) y α (panel inferior) para la FL en las bandas ${}^{0.1}u$, ${}^{0.1}g$, ${}^{0.1}g$ y ${}^{0.1}z$ como función de la mediana de la masa virial. Las bandas de error en la masa son el rango semiinterquartile, mientras que los errores en los parámetros de Schechter son las proyecciones de la elipse de error de 1σ en cada eje de coordenadas.

FL en $^{0.1}u$ es un pobre indicador de la distribución de masa subyacente. Por otro lado, la variación de la pendiente del extremo débil de las LF es aproximadamente la misma, de ~ 0.5 para todas las bandas.

Estos resultados significan que, a medida que la masa del sistema se incrementa, la luminosidad característica de las galaxias también crece. Acerca del empinamiento de la pendiente del extremo débil, al menos dos posibilidades surgen: una fracción importante de galaxias brillantes $M_{0.1_r} \lesssim -18$ se vuelven más brillantes, entonces la rodilla de la función de Schechter se vuelve menos pronunciada produciendo un α más empinado, ó, existe un incremento del número de galaxias débiles, $M_{^{0.1}r}\gtrsim$ -18. Por lo tanto, existen algunos procesos que aumentan el brillo de las galaxias brillantes y posiblemente otros que incrementan el número de galaxias débiles. El efecto producido por estos procesos se vuelve más notorio para sistemas más masivos. La fusión de galaxias y el canibalismo galáctico tienen alta probabilidad de ser los responsables de producir galaxias más brillantes. Como resultado de esta clase de interacciones tidales entre dos galaxias, la contraparte masiva se vuelve más brillante mientras que la menos masiva disminuye su luminosidad. Por otro lado, los procesos que involucran interacciones entre las galaxias y el medio interno de los sistemas, tales como la ram-pressure, son importantes en sistemas masivos. Estos generan que las galaxias menos ligadas gravitacionalmente pierdan gas, reduciendo drásticamente su formación estelar, aumento así el número de galaxias débiles.

parametros	ue la fulle	ion de beneente	n mejer ajastaa			
$Muestra^{a}$	$N_{\rm galaxias}$	$M^* - 5\log(h)$	α			
$^{0.1}u$ banda						
\mathcal{M}_1	4067	-17.72 ± 0.06	$5 -1.03 \pm 0.07$			
\mathcal{M}_2	3727	-17.70 ± 0.06	$5 -0.98 \pm 0.08$			
\mathcal{M}_3	3025	-17.77 ± 0.06	$5 -1.07 \pm 0.10$			
\mathcal{M}_4	2220	-17.91 ± 0.09	-1.15 ± 0.12			
\mathcal{M}_5	1460	-18.10 ± 0.09	-1.51 ± 0.12			
\mathcal{M}_6	1008	-18.15 ± 0.09	-1.55 ± 0.14			
		$^{0.1}g$ banda				
\mathcal{M}_1	6794	-19.42 ± 0.04	-0.93 ± 0.04			
\mathcal{M}_2	7303	-19.49 ± 0.04	-0.91 ± 0.05			
\mathcal{M}_3	6965	-19.57 ± 0.05	$6 -0.95 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_4	6381	-19.77 ± 0.05	$5 -1.13 \pm 0.06$			
\mathcal{M}_5	5209	-19.90 ± 0.06	$5 -1.27 \pm 0.06$			
\mathcal{M}_6	4095	-20.12 ± 0.07	-1.41 ± 0.07			
^{0.1} <i>i</i> banda						
\mathcal{M}_1	7559	-20.74 ± 0.05	$5 -0.90 \pm 0.04$			
\mathcal{M}_2	8842	-20.93 ± 0.05	$6 -0.95 \pm 0.04$			
\mathcal{M}_3	9266	-21.02 ± 0.04	-1.02 ± 0.04			
\mathcal{M}_4	9457	-21.16 ± 0.05	$5 -1.12 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_5	9060	-21.30 ± 0.05	$5 -1.26 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_6	9528	-21.64 ± 0.05	$5 -1.50 \pm 0.05$			
		$^{0.1}z$ banda				
\mathcal{M}_1	6519	-21.01 ± 0.05	$5 -0.87 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_2	7643	-21.20 ± 0.05	$5 -0.91 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_3	7938	-21.28 ± 0.05	$5 -0.98 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_4	8092	-21.43 ± 0.05	$5 -1.09 \pm 0.05$			
\mathcal{M}_5	7619	-21.57 ± 0.05	$5 -1.23 \pm 0.06$			
\mathcal{M}_6	7861	-21.87 ± 0.05	$5 -1.45 \pm 0.05$			

Tabla 3.3: Dependencia de las FLs en las bandas ${}^{0.1}u$, ${}^{0.1}g$, ${}^{0.1}i$, y ${}^{0.1}z$ con la masa de los grupos: los parámetros de la función de Schechter mejor ajustado usando STY.

^{*a*} Las unidades están en $\log(\mathcal{M}/(h^{-1}M_{\odot}))$.



Figura 3.10: La distribución color-magnitud corregida por incompletitud. Los contornos están en escala lineal de la densidad numérica. La línea recta gruesa traza el punto divisor de la distribución bimodal (ver ecuación 3.11).

3.3.3 La FL para distintas poblaciones de galaxias en grupos

En un trabajo previo, Strateva et al. 2001 encontraron que la distribución de color de las galaxias puede ser aproximada por una función bimodal, es decir, por la suma de dos funciones Gaussianas normales. Este comportamiento puede ser explicado por dos procesos diferentes de formación los cuales generaron dos poblaciones de galaxias con diferentes colores promedio.

Existen varios trabajos en la literatura científica que usan la distribución de colores u - r para distinguir entre las dos poblaciones de galaxias. Recientemente, Baldry et al. 2004 mostraron que no se puede tomar un único punto divisor de la



Figura 3.11: Funciones de luminosidad en la banda $^{0.1}r$ de galaxias rojas (panel superior) y azules (panel inferior) en grupos. Las líneas sólidas muestran la función de Schechter mejor ajustada (ver detalle). Las bandas de error fueron estimadas usando la técnica de re-muestreo bootstrap.

distribución de color para separar las poblaciones ya que este punto posee una dependencia con la magnitud absoluta. Por lo tanto, para dividir la muestra de galaxias en grupos en dos diferentes poblaciones se parametrizó la relación entre el punto divisor de la distribución de color y la magnitud absoluta en la banda ^{0.1}r. Para lograr esto, primero usamos la MPG y la dividimos en varios rangos de magnitud absoluta de ancho 0.5. Para cada rango en magnitud absoluta, ajustamos la distribución de color $^{0.1}(u - r)$, previamente corregida por las correcciónes K + E, con la suma de dos funciones Gaussianas. El punto divisor de la distribución de color se toma como el punto de intersección entre ambas Gaussianas. Finalmente, se ajustó una línea recta a los puntos divisores como función de la magnitud absoluta en la banda $^{0.1}r.$ La relación lineal resultante es

$$C_{\rm cut}(M_{0.1_r}) = -0.062(M_{0.1_r} + 18) + 2.078.$$
(3.11)

La Figura 3.10 muestra la distribución color-magnitud pesada por $1/V_{\text{max}}$ para la MPG. La líinea recta muestra el punto divisor como función de la magnitud absoluta de acuerdo con la Ecuación 3.11. Usando esta función dividimos la muestra de galaxias en grupos en dos submuestras de galaxias: Roja, $^{0.1}(u - r) > C_{\text{cut}}(M_{0.1r})$, y Azul, $^{0.1}(u - r) < C_{\text{cut}}(M_{0.1r})$.

Las FLs en la banda ^{0.1}r para las submuestras Roja y Azul de galaxias en grupos se muestran en la Figura 3.11 junto con los correspondientes ajustes de la función de Schechter (ver parámetros en la Tabla 3.4). Al comparar los resultados obtenidos con los estimados para las galaxias de campo por Baldry et al. 2004, observamos que las galaxias Rojas en grupos tienen una magnitud característica más brillante y una pendiente del extremo débil un poco más empinada. Teniendo en cuenta las bandas de error y el corrimiento de la banda (en el caso de las galaxias de campo, no existe corrimiento a z = 0.1), las galaxias Rojas en el campo y en los grupos muestran FLs comparables. Por otro lado, existen diferencias mayores para las galaxias Azules en el campo y en los grupos. Encontramos un abrillantamiento de M^* y un empinamiento de α en grupos. Baldry et al. 2004 encontró para las galaxias Azules una $M_r^* 5 \log(h) = -19.82 \pm 0.08$ lo cual significa una diferencia de ~ 0.8 magnitudes en M^* comparado con el valor obtenido para los grupos. Sus galaxias Azules mostraron una pendiente en el extremo débil de $\alpha = -1.35 \pm 0.05$, por lo tanto, las galaxias en grupos muestran un empinamiento en α de ~ 0.12. Sin embargo, debido a los errores



Figura 3.12: Los parámetros mejor ajustados de la función de Schechter en la banda $^{0.1}r$ para galaxias rojas y azules en grupos como función de la mediana de la masa virial. Las bandas de error en la masa son el rango semi-interquartile, mientras que los errores en los parámetros de Schechter son las proyecciones de la elipse de error de 1 σ en cada eje de coordenadas. Los puntos negros son los parámetros mejor ajustados de la función de Schechter para la muestra completa de galaxias en grupos en cada rango de masa como lo mostrado en la Figura 3.7.

en ambas determinaciones, las pendientes del extremo débil son estadísticamente comparables (~ 1.5 σ de diferencia). Debe recordarse que las similitudes observadas entre los resultados obtenidos para galaxias Rojas tanto en el campo como en los grupos no es inesperado ya que estas galaxias se encuentran principalmente localizadas en los sistemas de galaxias. La diferencia en la FL de las galaxias Azules en grupos comparada con la obtenida para el campo también era esperable ya que una alta fracción de estas galaxias no está en grupos y, consecuentemente, no sufre de la acción de algunos de los procesos físicos típicos que se supone ocurren en medios densos.

También hemos calculado las FLs en la banda ^{0.1}r para las galaxias Rojas y Azules como función de la masa del grupo, dividiendo (como en la sección anterior) en seis rangos de masa. Los parámetros de las funciones de Schechter que mejor ajustaron los datos están listados en la Tabla 3.4 y se muestran en la Figura 3.12. En esta figura, los paneles superior e inferior muestran el comportamiento de M^* y α como función de la masa, respectivamente. Ambos paneles muestran además la variación de los parámetros de Schechter con la masa para todas las galaxias en grupos (calculado en la sección anterior). Observando la variación de M^* con la masa, queda claro que el cambio es mayor para las galaxias Rojas. M^* decrece suavemente en ~ 1.1 magnitudes entre los extremos del intervalo de masa bajo estudio. Las galaxias Azules, muestran una pequeña variación (~ 0.2 magnitudes) para los primeros 5 rangos de masa, y duplica este abrillantamiento en el último rango de masa. La pendiente del extremo débil como función de la masa también muestra una variación importante para las galaxias Rojas, un empinamiento de 0.75 en todo el rango de masas. Excluyendo el rango de más alta masa ($\alpha ~ -1.6$), las galaxias Azules tienen un comportamiento

$Muestra^{a}$	$N_{\rm galaxias}$	$M^* - 5\log(h)$	α		
galaxias Azules					
Todas las masas	29896	-20.76 ± 0.03	-1.47 ± 0.03		
\mathcal{M}_1	4542	-20.46 ± 0.08	-1.36 ± 0.04		
\mathcal{M}_2	4820	-20.45 ± 0.07	-1.35 ± 0.05		
\mathcal{M}_3	4922	-20.54 ± 0.07	-1.38 ± 0.06		
\mathcal{M}_4	4804	-20.59 ± 0.09	-1.38 ± 0.07		
\mathcal{M}_5	4514	-20.64 ± 0.07	-1.33 ± 0.09		
\mathcal{M}_6	5785	-21.08 ± 0.07	-1.62 ± 0.08		
	galaxi	ias Rojas			
Todas las masas	53941	-20.85 ± 0.02	-0.87 ± 0.02		
\mathcal{M}_1	5776	-20.29 ± 0.04	-0.53 ± 0.03		
\mathcal{M}_2	7680	-20.50 ± 0.05	-0.63 ± 0.03		
\mathcal{M}_3	8655	-20.60 ± 0.04	-0.70 ± 0.04		
\mathcal{M}_4	9608	-20.80 ± 0.04	-0.85 ± 0.04		
\mathcal{M}_5	10110	-20.98 ± 0.05	-1.00 ± 0.04		
\mathcal{M}_6	11544	-21.36 ± 0.05	-1.27 ± 0.04		

Tabla 3.4: Dependencia de las FL en la banda $^{0.1}r$ con la masa de los grupos para las poblaciones de galaxias Azules y Rojas: los parámetros de la función de Schechter mejor ajustado usando STY.

^{*a*} Las unidades están en $\log(\mathcal{M}/(h^{-1}M_{\odot}))$.

constante de $\alpha \sim -1.4$.

De acuerdo con los resultados, las luminosidades de la población de galaxias Rojas muestran una fuerte variación con la masa, mientras que las luminosidades de las galaxias Azules son prácticamente independientes de la masa del sistema. En la sección anterior encontramos que M^* se abrillanta y α se empina cuando la masa de los sistemas crece, por lo tanto, ahora podemos concluir que esos cambios se observan principalmente en una de las poblaciones, las galaxias Rojas.

3.3.4 Dependencia de la FL con la galaxia más brillante

Cuando se estudian los cúmulos de galaxias, uno de los temas más interesantes es la galaxia más Brillante del Cúmulo de Galaxias (BCG). Estas galaxias son preferentemente elípticas, están localizadas en el centro del pozo de potencial y son particularmente masivas y brillantes. Aún cuando su evolución y el efecto que produce el medio intra-cúmulo sobre ellas no se entiende a la perfección, el escenario más posible para su origen es aquel que sostiene que estos sistemas se forman rápidamente a partir de fusiones de varias galaxias durante las etapas tempranas de formación del cúmulo o por el colapso de grupos al mismo. Posteriormente, estas galaxias se tornan más brillantes en sistemas más masivos a medida que la formación jerárquica de estructuras prosigue (Merritt 1985, Edge 1991, Dubinski 1998, Lin & Mohr 2004).

En esta subsección estamos interesados en estudiar la FL de galaxias en grupos (es decir, sistemas con masas bajas e intermedias) donde existe una importante diferencia entre la galaxia más brillante del grupo (BGG) y la segunda galaxia más brillante. Para hacer esto, dividimos la muestra de grupos en dos submuestras con aproximadamente el mismo número de grupos: aquellos con una diferencia en magnitud entre la BGG y la segunda galaxia más brillante $\Delta M_{12} \geq 0.6$, y aquellos con $\Delta M_{12} < 0.6$. Es importante mencionar que la distribución de magnitudes absolutas de las BGGs para ambas submuestras son muy similares. Para eliminar cualquier posible vicio dependiente del redshift hemos restringido las submuestras de grupos en el rango $0.02 \leq z \leq 0.05$. Las FLs resultantes se muestran en la Figura 3.13 mientras que los correspondientes parámetros de la función de Schechter se encuentran en la Tabla 3.5. Puede verse que la submuestra de grupos con $\Delta M_{12} \geq 0.6$ tiene una M^* que es



Figura 3.13: Las funciones de luminosidad de galaxias en grupos en la banda $^{0.1}r$ para muestras con diferencia en magnitud absoluta entre la primera y segunda galaxias más brillante, ΔM_{12} , mayor o igual que 0.6 (panel superior) y menor que 0.6 (panel inferior). Las líneas sólidas muestran la función de Schechter mejor ajustada (ver detalle). Las bandas de error fueron estimadas usando la técnica de re-muestreo bootstrap.

~ 0.7 magnitudes más brillante y un α que es ~ 0.3 más empinado (con ~ 5 σ de significancia) que los parámetros obtenidos para la submuestra con $\Delta M_{12} < 0.6$. Hemos observado previamente que ambas submuestras tiene distribuciones de masas viriales muy similares. Esto también fue encontrado por Lin & Mohr 2004 en cúmulos, donde la diferencia entre la luminosidad de la BCG y la segunda galaxia más brillante no correlacionó con la masa del sistema. Por lo tanto, el resultado obtenido para las FLs no puede asociarse con un posible vicio introducido por la masa, es decir, que la submuestra con $\Delta M_{12} \geq 0.6$ no se corresponde con una muestra de grupos con masas

ΔM_{12}	rango de redshift	$N_{\rm galaxias}$	$M^* - 5\log(h)$	α
≥ 0.6	0.02 - 0.05	6447	-20.8 ± 0.1	-1.14 ± 0.03
< 0.6	0.02 - 0.05	6553	-20.12 ± 0.06	-0.83 ± 0.03

Tabla 3.5: FL de galaxias en grupos divididas según la diferencia en magnitud entre las dos galaxias más brillantes.

viriales más grandes que las observadas en la submuestra restante.

Como dijimos anteriormente, el escenario más probable para la formación de las BCGs está basado en la idea de que estos objetos se formaron a partir de fusiones entre varias galaxias en grupos de galaxias o en cúmulos poco masivos. Bajo este esquema, la fusión de galaxias que genera las BCGs, también forma las BGGs, es decir, las galaxias más luminosas en los grupos. Ya que la tasa de fusiones es una función decreciente de la dispersión de velocidades de los sistemas de galaxias, las fusiones deberían ser las principales responsables de la formación de las BGGs, progenitores de las futuras BCGs. De nuestros resultados concluimos que las BGGs, que son considerablemente más brillantes que el resto de los miembros del grupo, se encuentran preferentemente en grupos donde, a lo largo del tiempo, las fusiones han sido más efectivas, produciendo un abrillantamiento de la magnitud característica M^* .

Capítulo 4

El Espectro de Potencias de Grupos de Galaxias

4.1 Resultados previos

Existen muchos trabajos en la literatura científica acerca de la estructura en gran escala trazada por galaxias y cúmulos de galaxias. Esto significa que la mayoría de los resultados obtenidos en este tema están relacionados con fluctuaciones en densidad pequeñas y grandes. Comúnmente, las herramientas estadísticas adoptadas para realizar estos análisis son la función de correlación bipuntual $\xi(r)$ y el espectro de potencias P(k). La función de correlación bipuntual ha sido ampliamente aplicada tanto a galaxias (Hawkins et al. 2003, Ratcliffe et al. 1998) como a cúmulos de galaxias (Peacock & West 1992, Dalton et al. 1994, Croft et al. 1997) como así también para catálogos de objetos seleccionados en diferentes bandas (Hawkins et al. 2001, Abadi et al. 1998). Los principales resultados que se obtuvieron a partir de estos trabajos están relacionados con la longitud de correlación r_0 . La mayoría de los autores están de acuerdo con un $r_0 \sim 5 - 6 \ h^{-1}Mpc$ para galaxias y $r_0 \sim 15 - 20 \ h^{-1}Mpc$ para cúmulos de galaxias. Por otro lado, el espectro de potencias también ha sido usado por muchos autores en el análisis de diferentes fluctuaciones en densidad (Lin et al. 1996, Tadros et al. 1998, Hoyle et al. 1999, Zandivarez et al. 2001, Padilla & Baugh 2003, Tegmark et al. 2004). Esta herramienta es muy útil ya que permite realizar una comparación directa con los modelos cosmológicos. A partir de estos trabajos puede observarse que las amplitudes medidas para los espectros de potencias son más altas para cúmulos de galaxias que las obtenidas para galaxias y que el modelo Λ CDM es el más exacto para describir la estructura en gran escala del universo.

Los resultados para fluctuaciones en densidad intermedia como las representadas por los grupos de galaxias se han ido dando progresivamente en los últimos 10 anõs. En los comienzos, gran parte del análisis en estas escalas fué realizado con la función de correlación bipuntual en el espacio de redshifts ($\xi(s)$) (Ramella et al. 1990, Trasarti-Battistoni et al. 1997, Merchán et al. 2000). Estos trabajos encontraron que la amplitud de correlación observada para grupos de galaxias se ubica entre las amplitudes obtenidas para galaxias y para cúmulos de galaxias. Debido a que la muestra utilizada por Merchán et al. 2000 abarcaba un amplio rango de masas de grupos, estos autores analizaron la longitud de correlación en el espacio de redshifts para submuestras de grupos en distintos rangos de masa virial y observaron un incremento de los valores obtenidos a medida que la masa virial de los objetos crece. Debido a la falta de muestras estadísticamente grandes de grupos de galaxias, no se realizaron estimas



Figura 4.1: Vista ortográfica de la subdivisión de la esfera usando la rutina HEALPIX. El trazado del las lineas del ecuador y los meridianos muestra la simetría de octaédro de la subdisión de HEALPIX. El sombreado gris claro muestra uno de los ocho pixeles idénticos mientras que las región sombreada con gris oscuro muestra una de los cuatro pixeles ecuatoriales idénticos. Si nos movemos en sentido horario, observamos como varía la subdivisión realizada por HEALPIX a medida que se aumenta el número de celdas, es decir, a medida que se aumenta la resolución.

del espectro de potencias para estos sistemas. Con la llegada de los grandes catálogos de galaxias, los análisis de la función de correlación se han incrementado para los grupos de galaxias (Zandivarez et al. 2003, Padilla et al. 2004, Yang et al. 2004), con la consiguiente mejora en la confiabilidad de los resultados debido a la importancia estadística de los datos, y además se obtuvieron las primeras estimas del espectro de potencias (Zandivarez et al. 2003). La comparación del P(k) de grupos de galaxias con el correspondiente a las galaxias permitió una estima fehaciente del bias relativo entre las fluctuaciones en densidad de estos sistemas. Los resultados obtenidos mostraron un bias entre galaxias y grupos prácticamente constante con la escala, lo que implica que analizar fluctuaciones más grandes en densidad sólo implica un aumento en la amplitud del P(k) resultante. Además, los análisis de la $\xi(s)$ confirmaron las tendencias obtenidas previamente pero mejorando notablemente la calidad de los resultados y ampliando el rango de densidades bajo análisis.

Por lo tanto, se puede llegar a extraer información muy importante sobre la estructura en gran escala si se usan muestras de grupos de galaxias construídas a partir de catálogos con grandes cantidades de galaxias con redshifts. En el siguiente capítulo se realizará un análisis de la estructura en gran escala del universo usando la muestra de grupos de galaxias identificados en el SDSS DR4, la cual resulta ser la muestra de grupos más grande construida hasta el momento. Este análisis resulta de gran importancia para confirmar los resultados obtenidos previamente tanto para el P(k)como para la $\xi(s)$.

4.2 El P(k) de las fluctuaciones en densidad

En esta sección se describen los pasos a seguir para poder determinar el P(k) de la muestra de grupos de galaxias del SDSS DR4.

4.2.1 El Método de Feldman, Kaiser & Peacock

El método adoptado para el cálculo del P(k) es el desarrollado por Feldman, Kaiser & Peacock 1994 (FKP) en la versión descripta por Hoyle et al. 1999. A continuación se detallan las pautas generales.

Si se tiene una muestra con N_c sistemas de galaxias cuyas posiciones vectoriales son $\mathbf{x_c}$, entonces se construye un catálogo sintético (mock) con la misma geometría y función de selección radial de la muestra a utilizar. Este catálogo sintético consta de N_r puntos distribuídos aleatoriamente con vectores posición $\mathbf{x_r}$. Entonces, se define una cantidad con valor medio cero como

$$\delta(\mathbf{k}) = D(\mathbf{k}) - \alpha W(\mathbf{k}) \tag{4.1}$$

donde

$$D(\mathbf{k}) = \sum_{c=1}^{N_c} w(\mathbf{x}_c) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_c}$$
(4.2)

у

$$W(\mathbf{k}) = \sum_{r=1}^{N_r} w(\mathbf{x}_r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_r}$$
(4.3)

son la transformadas de Fourier de la distribución de sistemas y la transformada de Fourier de la función ventana, respectivamente. En estas ecuaciones se adopta la cantidad $\alpha = S_c/S_r$ donde

$$S_{c} = \sum_{c=1}^{N_{c}} w^{2}(\mathbf{x}_{c}) \qquad y \qquad S_{r} = \sum_{r=1}^{N_{r}} w^{2}(\mathbf{x}_{r})$$
(4.4)



Figura 4.2: Comparación entre una distribución aleatoria de partículas dentro de la máscara construida para el SDSS DR4 (gráfico superior) y sus correspondientes galaxias (gráfico inferior).

Si se asume un campo gaussiano de fluctuaciones en densidad, entonces se encuentra que la función de peso

$$w(r) = \frac{1}{1 + n(r)P_w(k)}$$
(4.5)

minimiza la varianza del espectro de potencias. Como puede apreciarse de la ecuación anterior, para calcular el peso es necesario conocer a priori el valor del espectro de potencias. Para resolver esta situación, lo más usual es proponer diferentes valores fiduciarios de P_w que expandan todo el rango de interés y analizar luego la dependencia de los resultados ante estos valores. Habiendo definido la función $\delta(\mathbf{k})$, el estimador del espectro de potencias es

$$P(\mathbf{k}) = \frac{1}{C} (|\delta(\mathbf{k})|^2 - \alpha (1+\alpha)S_r)$$
(4.6)

donde C es una constante de normalización definida como

$$C = \frac{\alpha^2}{V} \sum_{i=1}^{N^3} (|W(\mathbf{k_i})|^2 - S_r)$$
(4.7)

y V es el volumen donde se asume periodicidad. La adopción de la definición particular de α , permite re-obtener el P(k) definido originalmente por FKP. Finalmente, asumiendo isotropía, se calcula el espectro de potencias promediando sobre cáscaras esféricas donde se tienen N_k vectores de onda con $k < |\mathbf{k}| < k + dk$, obteniéndose:

$$P(k) = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} P(\mathbf{k_i})$$
(4.8)

Los errores del espectro de potencias se estiman utilizando las ecuaciones de FKP adaptadas de acuerdo a la definición anterior de P(k). Es decir

$$\sigma^{2}(k) = \frac{2}{N_{k}^{2}} \sum_{i=1}^{N_{k}} \sum_{j=1}^{N_{k}} |P(k)Q(\mathbf{k_{i}} - \mathbf{k_{j}}) - S(\mathbf{k_{i}} - \mathbf{k_{j}})|^{2}$$
(4.9)

donde

$$Q(k) = \alpha \sum_{r=1}^{N_r} n(x_r) w^2(x_r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x_r}} / C \quad y \quad S(k) = \alpha (1+\alpha) \sum_{r=1}^{N_r} w^2(x_r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x_r}} / C \quad (4.10)$$

En esta ecuación, $\mathbf{k_i}$ y $\mathbf{k_j}$ pertenecen a la misma cáscara esférica. Se hace notar que $S(\mathbf{k} = (0, 0, 0)) = \alpha(1 + \alpha)S_r$ es el segundo término de la definición de P(k).

4.2.2 Consideraciones generales

A continuación se detallan ciertos aspectos esenciales para la aplicación del método.

La función ventana

El cálculo del término que involucra a la función ventana implica el hecho de construir un catálogo mock con puntos distribuidos aleatoriamente con una función de selección radial n(r) y en la misma región angular que el catálogo observacional.

La función de densidad radial n(r) puede obtenerse del histograma de la distribución de objetos como función de la distancia comóvil. Estas curvas se suavizan con la fórmula de ajuste propuesta por FKP

$$N(r) = 2^{1+x/y} N_{max} \left(\frac{r}{r_{max}}\right)^x \left[1 + \left(\frac{r}{r_{max}}\right)^y\right]^{1+x/y}$$
(4.11)

donde los parámetros a ajustar se encuentran a través de un método de cuadrados mínimos para funciones no lineales.

Para distribuir los objetos en la misma región en la que se encuentran los datos observacionales es necesario conocer detalladamente la cobertura angular del cielo del catálogo, lo que se conoce como máscara angular. Para poder construir una máscara angular necesitamos encontrar un método para pixelizar la esfera celeste



Figura 4.3: Panel superior: El espectro de potencias de los grupos en el SDSS DR4 (puntos rojos). Los puntos azules representan el espectro de potencias medio de grupos en los mocks del SDSS DR4 construidos a partir de simulaciones numéricas de N-cuerpos para un modelo ΛCDM . Las barras de error son la dispersión cuadrática media de los 10 mocks del SDSS DR4. Panel inferior: La diferencia entre el P(k) de los grupos del SDSS DR4 con el obtenido a partir de los catálogos mocks.

y marcar los pixeles que se encuentran ocupados por los datos observacionales. La pixelización de la esfera celeste se llevó ha cabo usando las rutinas en Fortran90 del paquete denominado HEALPIX (Hierarchical Equal Area, Iso-Latitude Pixelisation) desarrollado por Górski, Wandelt, Hivon, Hansen & Banday.

HEALPIX es una partición genuinamente curvilínea de la esfera en cuadriláteros de igual área y de forma variable. La resolución base comprende 12 pixeles en 3 anillos alrededor de los polos y el ecuador. La resolución de cada celda está expresada por el parámetro N_{side} , el cual define el número de divisiones a lo largo del lado de un pixel de resolución base que es necesario para alcanzar una partición con alta resolución. Todos los pixeles están centrados sobre $4 \times N_{side} - 1$ anillos de latitud constante, y son equidistantes en azimut (sobre cada anillo). Los anillos de iso-latitud entre las esquinas superior e inferior de los pixeles de resolución base del ecuador, la zona ecuatorial, están divididos en el mismo número de pixeles: $N_{eq} = 4 \times N_{side}$. Los anillos restantes están ubicados entre las regiones de las capas polares y contienen un número variable de pixeles, incrementándose de anillo a anillo cuando crece la distancia de un pixel a partir de los polos dentro de cada cuadrante. Los límites de los pixeles no son geodésicos y toman la simple forma $\cos \theta = a \pm b.\phi$ en la zona ecuatorial, y $\cos \theta = a + b/\phi^2$ ó $\cos \theta = a + b/(\pi/2 - \phi)^2$ en las capas polares. Los valores de θ y ϕ pueden expresarse en coordenadas ecuatoriales como, $\theta=-\delta+\pi/2$ y $\phi=\alpha.$ Un ejemplo gráfico de cómo se ve la pixelización realizada por HEALPIX puede observarse en la Figura 4.1.

Como el número total de pixeles es $N_{pix} = 12 \times N_{side}^2$ y teniendo en cuenta que se adoptó un valor de $N_{side} = 512$, el número de pixeles en el que se dividió la esfera celeste es $N_{pix} = 3145728$. Para construir la máscara se leyeron las posiciones angulares de las galaxias en el SDSS DR4 y se procedió a marcar los pixeles de la esfera asociados con dichas galaxias. Además, para cada galaxia, se generaron 100 puntos aleatorios en una esfera de radio 2×10^{-3} radianes alrededor de la posición de la galaxia y se marcaron los pixeles correspondientes. De esa manera, se consiguió una máscara lo suficientemente homogénea para cubrir el área ocupada por las galaxias del SDSS DR4. En el panel superior de la Figura 4.2 se observa una distribución angular de 500000 puntos aleatorios dentro de la máscara construida, mientras que en el panel inferior se observa la distribución angular de las galaxias del SDSS DR4.

La Transformada Rápida de Fourier

Para poder calcular el espectro de potencias, es necesario realizar la transformada de Fourier de la distribución del catálogo real y del sintético. En general, la transformada de Fourier de una distribución h_k se expresa de la siguiente manera

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \ e^{2\pi i k n/N} \tag{4.12}$$

entonces, si definimos $W = e^{2\pi i/N}$ tenemos

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \ W^{nk} \tag{4.13}$$

es decir, el vector de componentes h_k , está multiplicado por una matriz cuyo nkésimo elemento es una constante W elevada a nk. Esta multiplicación da como resultado un vector cuyas componentes son los H_n . Esta multiplicación requiere N^2 operaciones, más un pequeño número de operaciones para generar las potencias de Wrequeridas. En consecuencia, la transformada de Fourier aparece como un proceso de



Figura 4.4: Panel superior: Comparación entre el P(k) para los grupos de galaxias (puntos rojos) y las galaxias (puntos azules) del SDSS DR4. Las barras de error fueron obtenidas a partir de la dispersión cuadrática media obtenida para los catálogos mocks. Panel inferior: Bias relativo grupo-galaxias obtenido a partir de los espectros mostrados en el panel superior (ver ecuación 4.14). Las barras de error fueron obtenidas a través de la fórmula de propagación de errores.
orden $O(N^2)$. Sin embargo la transformada discreta de Fourier puede calcularse en un proceso de orden $O(N\log_2 N)$ con un algoritmo llamado la Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT). La diferencia entre realizar $N\log_2 N$ y N^2 operaciones es inmensa. Con $N = 10^6$, por ejemplo, la diferencia, medida en tiempo de CPU, es de aproximadamente 30 segundos vs 2 semanas. El desarrollo de este algoritmo se realizóa mediados de la década del 60, a partir de un trabajo de J.W. Cooley y J.W. Tuley. Por lo tanto, para el cálculo del espectro de potencias en este trabajo se usará la rutina denominada FOURN (Press et al. 1986) la cual realiza la FFT en n dimensiones. Esta rutina requiere como valores de entrada: un escalar, que indica el número de dimensiones; un vector, que indica la dimensión de cada arreglo (las longitudes deben ser todas potencias de 2 y son números de valores complejos en cada dirección); un escalar, ± 1 indicando si se desea la transformada o la antitransformada de Fourier y por último el arreglo de datos. Para poder usar dicha rutina es necesario además, embeber la distribución de sistemas dentro de un volumen cúbico periódico $V = r_{box}^3$ mayor que el catálogo, dividido en N celdas por lado y asignar dicha distribución de puntos a los nodos del celdificado, por medio de algún esquema de asignación de pesos. El esquema adoptado es el denominado NGP (Nearest Grid Point) que asocia la posición del objeto con el nodo más cercano.

4.3 Catálogos mocks del SDSS DR4 para un modelo ΛCDM

Antes de proceder con la aplicación del método sobre el catálogo de grupos del SDSS DR4 es necesario establecer cómo se hará para comparar los resultados obtenidos con un modelo cosmológico. Esta comparación se llevará a cabo construyendo catálogos mocks de los grupos de galaxias del SDSS DR4 a partir de un conjunto de simulaciones numéricas de N-cuerpos para un dado modelo cosmológico. El modelo adoptado para realizar estas simulaciones es el de materia oscura fría con constante cosmológica denominado ΛCDM , el cual es el modelo más aceptado en la actualidad para describir el universo observado. Las simulaciones numéricas fueron realizadas usando el código GADGET (Galaxies with Dark mater and Gas intEracT, Springel et al. 2001), con 128³ partículas en un volumen cúbico comóvil periódico 180 $h^{-1} Mpc$ de lado. Los parámetros que describen el modelo cosmológico son: densidad de materia, $\Omega_m = 0.3$, densidad de energía de vacío, $\Omega_{\Lambda} = 0.7$, constante de Hubble, $H_0 = 100 \ h \ km \ s^{-1} \ Mpc^{-1}$ con h = 0.7 y amplitud de las fluctuaciones en masa en un radio de 8 $h^{-1} \ Mpc$, $\sigma_8 = 0.9$. En total se realizaron 10 simulaciones numéricas con estas características iniciadas a partir de un redshift de z = 50.

La subsiguiente construcción de los catálogos mocks se describe a continuación:

- Dada una salida a z = 0 para una de las simulaciones, se pegan el número necesario de cubos para alcanzar la profundidad del catálogo de galaxias del SDSS DR4 (z ~ 0.3).
- Se seleccionan aquellas partículas que se ubican dentro de la máscara angular



Figura 4.5: Panel superior: Comparación entre el P(k) para los grupos de galaxias (puntos rojos) y las galaxias (puntos azules) del 2dFGRS Early Data Release. Las barras de error fueron obtenidas a partir de la dispersión cuadrática media obtenida para los catálogos mocks. Panel inferior: Bias relativo grupo-galaxias obtenido a partir de los espectros mostrados en el panel superior (ver ecuación 4.14). Las barras de error fueron obtenidas a través de la fórmula de propagación de errores.

del SDSS DR4 descripta en la sección 4.2.2.

- Se asignan magnitudes absolutas a las partículas de manera aleatoria de acuerdo con una función de probabilidad definida en base a la función de luminosidad de las galaxias en la banda r del SDSS (α = -1.05; M_{*} 5 log h = -20.44) estimada por Blanton et al. 2003b.
- Se calculan las magnitudes aparentes en el sistema del observador usando la corrección por evolución de Blanton et al. 2003b y una corrección K media estimada a partir de las correcciones K de las galaxias del SDSS DR4 estimadas según lo descripto en el Capítulo 2.
- Finalmente, se eliminan las partículas cuyas magnitudes aparentes son más débiles que la magnitud aparente límite del SDSS en la banda $r (m_{lim} = 17.77)$.

Una vez que disponemos de los catálogos mocks de galaxias para el SDSS DR4, realizamos el mismo procedimiento completo descripto en el Capítulo 2 para la identifación de grupos de galaxias. Por lo tanto, y después de aplicados todos estos pasos, se dispone de 10 catálogos mocks de grupos de galaxias originados en una cosmología del tipo ΛCDM . Estos catálogos serán usados para comparar los resultados observacionales con el modelo cosmológico como así también para asignar errores a la determinación del P(k) observado. Esto último se hace calculando la correspondiente dispersión cuadrática media de los P(k) medidos en los catálogos mocks.

4.4 Cálculo del Espectro de Potencias

Para el cálculo de los P(k) utilizaremos como valores fiduciales los siguientes: número de celdas en las que embeber el catálogo, $N = 256^3$; tamaño de un lado del volumen cúbico, $r_{box} = 2 r_{min}$ con r_{min} el tamaño mínimo para embeber el catálogo completo; valor del P(k) en la función de peso, $P_w(k) = 50000 h^{-3} Mpc^3$. Además, el catálogo sintético con puntos aleatorios necesario para el cálculo del P(k) (sección 4.2.1) es construido con 1×10^6 partículas.

El P(k) para los grupos de galaxias del SDSS DR4 puede observarse con puntos rojos en el panel superior de la Figura 4.3. En puntos azules se observa el P(k)medio para los catálogos mocks de grupos de galaxias en un modelo ΛCDM . La barras de error representan la dispersión cuadrática media de los 10 P(k) para los catálogos mocks. Como primer resultado puede verse un muy buen acuerdo, tanto en amplitud como en forma, entre el P(k) observado y la predicción del modelo ΛCDM , prácticamente en todo el rango de números de onda k. En el panel inferior mostramos las diferencias entre los P(k), normalizadas a 1×10^4 . El modelo ΛCDM describe muy bien el P(k) observado para $k > 0.03 h Mpc^{-1}$.

En segunda instancia, nos interesaría observar en que se diferencian el P(k) de los grupos con el que se obtiene para las galaxias del SDSS DR4. Para esto, calculamos el P(k) para las galaxias siguiendo el mismo procedimiento que para los grupos, con la diferencia que $P_w(k) = 5000 \ h^{-3} \ Mpc^3$ y el catálogo sintético de puntos aleatorios se construyó de manera de reproducir la densidad númerica del catálogo de galaxias del SDSS DR4. El P(k) resultante para las galaxias puede observarse en la Figura 4.4 (puntos azules). Los barras de error para el espectro de las galaxias surge de



Figura 4.6: Panel superior: Comparación entre el P(k) para los grupos de galaxias del SDSS DR4 (puntos rojos) y los del 2dFGRS Early Data Release (puntos azules). Las barras de error fueron obtenidas a partir de la dispersión cuadrática media obtenida para los catálogos mocks. Panel interior: Comparación entre el P(k) para la muestra total de grupos del SDSS DR4 (puntos rojos) con el obtenido para los grupos en la región Norte del SDSS DR4 (puntos verdes). Panel inferior: La diferencia entre los P(k) de grupos mostrados en el panel superior. Las barras de error fueron obtenidas a través de la fórmula de propagación de errores.

la dispersión cuadrática media de los P(k) obtenidos para los catálogos mocks de galaxias del SDSS DR4. Como era de esperarse (Padilla & Baugh 2002), el P(k) de los grupos de galaxias tiene una forma muy similar al correspondiente a las galaxias pero con una amplitud mayor. Para cuantificar la diferencia en amplitud entre los espectros de potencias se muestra en el panel inferior de la Figura 4.4 la función de bias relativo (en el espacio de redshifts). Esta función está definida como

$$b_{gg} = \sqrt{\frac{P_{gr}(k)}{P_{gal}(k)}} \tag{4.14}$$

Puede verse un comportamiento constante de la función de bias en todo el rango de números de onda con un valor de $b_{gg}^s \sim 1.5$.

Una determinación previa del P(k) para grupos de galaxias fué realizada por Zandivarez et al. 2003 para los grupos de galaxias identificados en el 2dFGRS EDR (Early Data Release). El catálogo de grupos de galaxias del 2dFGRS EDR consta de 2198 objetos y fueron identificados usando un algoritmo modificado de manera que tuviera en cuenta las incompletitudes relacionadas con la cobertura del cielo del 2dF (Merchán & Zandivarez 2002), pero sin incluir en la identificación de los grupos las mejoras mencionadas en este trabajo para grupos ricos. Los P(k) tanto de los grupos como de las galaxias en el 2dFGRS EDR estimados por Zandivarez et al. 2003 se muestran en el panel superior de la Figura 4.5. Los resultados principales obtenidos en ese trabajo están en completo acuerdo con los obtenidos aquí para el SDSS DR4, es decir, un P(k) para los grupos con la misma forma que el de las galaxias pero con una amplitud mayor. Es más, si se observa el panel inferior de la misma Figura, el bias relativo tiene el mismo comportamiento constante ~ 1.5 observado en el SDSS DR4. Para completar la comparación, en el panel superior de la Figura 4.6 se encuentran



Figura 4.7: El P(k) para los grupos de galaxias del SDSS DR4 en diferentes rangos de masa virial.

los P(k) de los grupos de galaxias para el SDSS DR4 (puntos rojos) y el 2dFGRS EDR (puntos azules). En el panel inferior de la Figura 4.6 se muestra la diferencia normalizada entre los dos espectros donde las barras de error fueron estimadas según la fórmula de propagación de errores. Puede observarse que, aun cuando en media el P(k) de grupos obtenido para el SDSS DR4 posee un amplitud un poco mayor que el obtenido para el 2dFGRS EDR en el rango de números de onda $k < 0.1 h Mpc^{-1}$, los espectros son prácticamente comparables dentro de 1σ de intervalo de confianza. Aún así, se observa que, en media, los grupos del SDSS DR4 muestran más potencia para escalas grandes que la observada para los grupos en el 2dFGRS EDR. Podría sugerirse que la particular geometría de franjas del SDSS DR4 podría ser una causal de esta diferencia, introduciendo correlaciones entre objetos de diferentes franjas. Para eliminar esta posibilidad, se calculó el P(k) solo para los grupos que se encuentran en la región Norte del SDSS DR4. La comparación entre ambos espectros de potencias puede observarse en el panel interior de la Figura 4.6. El acuerdo entre ambas determinaciones es muy bueno en todas las escalas consideradas, por lo que no se puede atribuir el exceso de potencia observado en los grupos del SDSS DR4 a la particular geometría del catálogo.

Por último, respecto a los resultados obtenidos hasta aquí , vale recordar que el bias relativo obtenido es el correspondiente al espacio de redshifts y no es el mismo que se mediría en el espacio real (es decir, el de las distancias sin distorsionar). Basándonos en el trabajo de Padilla & Baugh 2002, existe una relación entre el bias relativo en el espacio real b_r respecto del obtenido en el espacio de redshifts b_s del tipo $b_r/b_s = 1.25$. Tomando esta relación como válida para el SDSS DR4, entonces podemos hacer una estima aproximada para el bias relativo en el espacio real, que resulta ser $b_{aq}^r \sim 1.9$.

El aumento de la amplitud del P(k) observado para grupos de galaxias respecto del P(k) de las galaxias también puede observarse dentro de la muestra de grupos simplemente definiendo submuestras de grupos que estén caracterizadas por sobredensidades diferentes; esto puede traducirse en seleccionar submuestras en distintos rangos de masa virial. Por lo tanto, definimos cuatro submuestras con masas viriales mayores que $5 \times 10^{12} (\mathcal{M}_1), 2 \times 10^{13} (\mathcal{M}_2), 5 \times 10^{13} (\mathcal{M}_3) \text{ y } 1 \times 10^{14} (\mathcal{M}_4) h^{-1} M_{\odot} \text{ y}$ calculamos los correspondientes P(k). Los resultados pueden verse en la Figura 4.7. Allí se observa nuevamente el efecto anteriormente mencionado, es decir, la forma de



Figura 4.8: Comparación entre la función de correlación bipuntual en el espacio de redshifts para los grupos de galaxias del SDSS DR4 (puntos rojos) con la obtenida por Zandivarez et al. 2003 para los grupos en el 2dFGRS EDR (puntos azules). Las barras de error fueron obtenidas a partir de la dispersión cuadrática media de las $\xi(s)$ obtenidas para catálogos mocks. La línea a rayas roja muestra el mejor ajuste obtenido con el método de cuadrados mínimos. Los parámetros ajustados se encuentran especificados en la figura (ver ecuación XX).

los P(k) es similar pero la amplitud crece a medida que se toman fluctuaciones en densidad más grandes.

4.5 La Función de Correlación de Grupos

A continuación sumamos otra estadística para cuantificar la estructura en gran escala, la función de correlación bipuntual $\xi(s)$ en el espacio de redshifts. Esta función es, matemáticamente hablando, la transformada de Fourier del espectro de potencias. Por lo que ambas funciones dan la misma información de la estructura en gran escala, pero una lo hace en el espacio de Fourier (P(k)) y otra en el espacio de las distancias comóviles $(\xi(s))$. La función de correlación bipuntual representa el exceso de pares de objetos a una dada distancia respecto a la distribución de pares que se encontraría a esa dada distancia en una muestra aleatoria de objetos. El cálculo de la $\xi(s)$ se llevó a cabo usando el estimador propuesto por Landy & Szalay 1993

$$\xi(s) = \frac{\langle DD \rangle - 2\langle DR \rangle + \langle RR \rangle}{\langle RR \rangle} \tag{4.15}$$

donde $\langle DD \rangle$, $\langle DR \rangle$ y $\langle RR \rangle$ son los números de pares dato-dato, dato-punto aleatorio y punto aleatorio-punto aleatorio respectivamente, separados por una distancia s. El catálogo sintético de puntos aleatorios necesario para el cálculo de la $\xi(s)$ es el mismo que usó para el cálculo del P(k) en la sección anterior. La $\xi(s)$ para los grupos de galaxias del SDSS DR4 puede observarse en la Figura 4.8 (puntos rojos). Las barras de error son la dispersión cuadrática media de las $\xi(s)$ de los catálogos mocks de grupos de galaxias utilizados para el P(k) en la sección anterior. Como puede verse, los puntos describen una relación aproximadamente lineal en el plano log-log, es por eso que es muy común encontrar en la literatura a la $\xi(s)$ parametrizada por una ley de potencia del tipo

$$\xi(s) = \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\gamma} \tag{4.16}$$

donde s_0 es la longitud de correlación en el espacio de redshifts y γ es la pendiente logarítimica de la función de correlación. Al ajustar esta función por medio de un método de cuadrados mínimos encontramos una longitud de correlación de $s_0 =$ 9.2 ± 0.2 y una pendiente $\gamma = 1.6 \pm 0.2$. El resultado obtenido para los grupos en el SDSS DR4 está en muy buen acuerdo con los obtenidos anteriormente para grupos de galaxias por Girardi et al. 2000 ($s_0 = 8 \pm 1$; $\gamma = -1.9 \pm 0.7$) y Merchán et al. 2000 ($s_0 = 9.0 \pm 0.4$; $\gamma = -1.67 \pm 0.09$). A modo de comparación, dibujamos en la Figura 4.8 con puntos azules, $\xi(s)$ para los grupos de galaxias en el 2dFGRS EDR (Zandivarez et al. 2003) así como también su correspondiente ajuste. El acuerdo que se observa entre ambas determinaciones es muy bueno dentro de 1 σ de error en todas las escalas consideradas. Un detalle digno de mención, es que aún cuando las distribuciones de puntos describen una relación prácticamente lineal, en media, ambas determinaciones realizan una pequeña oscilación alrededor alrededor de la recta que mejor los ajusta.

Es importante destacar que la longitud de correlación medida para los grupos de galaxias $(s_0 \sim 9)$ es un valor intermedio entre la que se obtiene para galaxias $(s_0 \sim 6)$ y cúmulos de galaxias $(s_0 \sim 20)$. Como se dijo anteriormente respecto a la amplitud obtenida para el P(k), la diferencia de longitud de correlación para distintos tipos de objetos también se puede realizar dentro de la muestra de grupos. Si realizamos la misma división en función de la masa virial de los grupos como la descripta al final de la sección anterior se obtienen cuatro submuestras caracterizadas por objetos que representan diferentes sobredensidades. Las $\xi(s)$ para cada submuestra se encuentran en la Figura 4.9 (puntos rojos). Como en el caso de la $\xi(s)$ de la muestra total de grupos de galaxias, las bandas de error se corresponden con la dispersión cuadrática media de las $\xi(s)$ de los catálogos mocks. La línea sólida en cada panel muestra el mejor ajuste de la ecuación (4.16) a los puntos. También se incluye en la Figura 4.9, con línea a rayas, la $\xi(s)$ que se obtiene de integrar los P(k) de la Figura 4.7. Esto es posible realizar haciendo uso de la propiedad de que $\xi(s)$ es la transformada de



Figura 4.9: La función de correlación bipuntual en el espacio de redshifts para los grupos de galaxias del SDSS DR4 en diferentes rangos de masas viriales (puntos rojos). Las barras de error fueron obtenidas a partir de la dispersión cuadrática media de las $\xi(s)$ obtenidas para catálogos mocks. Las lineas sólidas muestran los mejores ajustes obtenidos con el método de cuadrados mínimos. Las lineas a rayas muestran las $\xi(s)$ obtenidas para cada rango de masa virial integrando los correspondientes P(k) que se muestran en la Figura 4.9. A modo de comparación, en puntos azules pueden verse las $\xi(s)$ para los grupos de galaxias en el 2dFGRS EDR estimadas por Zandivarez et al. 2003.

Fourier del P(k), es decir

$$\xi(s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 \frac{\sin(ks)}{ks} dk$$
 (4.17)

Un detalle a tener en cuenta es que, los P(k) obtenidos yacen en el rango $k < 0.4 \ h \ Mpc^{-1}$, por lo tanto, para que la integración fuese realista, extendimos el valor del espectro de potencias para números de onda más grandes ajustando una ley del tipo $P(k) \propto k^{-2}$. El ajuste se realizó usando los valores de los P(k) medidos en el rango $0.15 < k < 0.4 \ h \ Mpc^{-1}$. El acuerdo obtenido entre la $\xi(s)$ medida y la resultante del P(k) es bueno para todas las submuestras. Además, en la Figura 4.9, se observa un muy buen acuerdo con $\xi(s)$ obtenidas para las mismas submuestras de grupos de galaxias en el 2dFGRS EDR por Zandivarez et al. 2003 (puntos azules). Por último, se hace notar que la oscilación de los datos observada en la $\xi(s)$ del catálogo completo también se observa aquí para cada submuestra (tanto en el SDSS DR4 como en el 2dFGRS EDR) asentuandose a medida que tomamos masas viriales más grandes.

El resultado principal de la Figura 4.9, es que la longitud de correlación característica s_0 crece a medida que se consideran sistemas más masivos. Este resultado también concuerda con los obtenidos previamente por Merchán et al. 2000, para los grupos del Updated Zwicky Catalogue y por Padilla et al. 2004 y Yang et al. 2004 para grupos en el 2dFGRS Final Release. Esta información puede usarse para estudiar la dependencia del agrupamiento jerárquico, caracterizado por s_0 , con la densidad espacial de las muestras. La densidad espacial está caracterizada por la separación media intergrupo $d_c = n^{-1/3}$. En nuestro caso, la densidad n se calculó a partir de la predicción analítica para la función de masa basada en el colapso elipsoidal



Figura 4.10: Relación entre la longitud de correlación característica en el espacio de redshifts, s_0 , y la distancia media entre objetos, d_c , para diferentes muestras de grupos de galaxias. Los resultados obtenidos para los grupos de galaxias del SDSS DR4 se observan en color negro. Las lineas de puntos delimitan el rango en el que se encuentran todos los resultados observacionales. La línea gruesa a rayas largas muestra la relación empírica $s_0 = 1.67 \ d_c^{0.65}$ obtenida por Padilla et al. (2004), mientras que la línea gruesa a rayas cortas es la relación $s_0 = 1.88 \ d_c^{0.61}$ obtenida por Yang et al. (2004).

de objetos bajo la acción de la gravedad de Sheth & Tormen 1999. Con los valores de d_c obtenidos (8.94- \mathcal{M}_1 , 15- \mathcal{M}_2 , 20.93- \mathcal{M}_3 y 28.93- \mathcal{M}_4) podemos graficar la relación $s_0 - d_c$ para los grupos de galaxias del SDSS DR4. Dicha relación puede observarse en la Figura 4.10 con puntos negros. En esta Figura también se encuentran las determinaciones previas de esta relación realizadas por diversos autores para diferentes muestras de objetos. Puede observarse, que excluyendo la muestra \mathcal{M}_1 , la relación $s_0 - d_c$ está en muy buen acuerdo con las determinaciones previas. El hecho de que las muestras \mathcal{M}_1 tanto para el SDSS DR4 como para el 2dFGRS EDR (Zandivarez et al. 2003) difieran de los resultados obtenidos en ese rango se debe principalmente a que estos catálogos de grupos de galaxias solo poseen sistemas con más de 4 miembros y por lo tanto la falta de los sistemas más chicos produce una sobreestima de la longitud de correlación característica s_0 . Si dejamos de lado las muestras \mathcal{M}_1 , entonces las líneas punteadas en la Figura 4.10 delimitan el rango de valores en el que yacen todos los resultados obtenidos hasta el momento para la relación $s_0 - d_c$. En esta figura, se muestran además las relaciones empíricas $s_0 = 1.67 d_c^{0.65}$ obtenida por Padilla et al. 2004 (línea gruesa a rayas largas) y $s_0 = 1.88 d_c^{0.61}$ obtenida por Yang et al. 2004 (línea gruesa a rayas cortas). Ambas relaciones describen satisfactoriamente el conjunto de puntos encerrados por las líneas punteadas.

Capítulo 5

Los Funcionales de Minkowski para grupos de galaxias

5.1 Breve Reseña

Como mencionamos en el capítulo anterior, un campo aleatorio gaussiano está descripto unívocamente por su espectro de potencia P(k) o su función de correlación bipuntual $\xi(r)$. Esto no se mantiene si el campo no es gaussiano, ya que la $\xi(r)$ no brinda ninguna información sobre la distribución de fases de las componentes de Fourier del campo de densidad. Como consecuencia de esto, patrones espaciales completamente diferentes pueden ser descriptos por la misma función de correlación, es decir, no se pueden inferir conclusiones directas acerca de la morfología de la estructura en gran escala. Por lo tanto, la $\xi(r)$ debe complementarse con otras estadísticas que sean sensibles a la estructura de la materia en escalas grandes. En el modelo estándar de formación de estructuras, una distribución inicial de densidad gaussiana se convierte en no-gaussiana debido a la forma de acoplamiento y al surgimiento de correlaciones en las fases durante el régimen no-lineal. Estas correlaciones entre las fases son producto de la sorprendente diversidad de forma de las estructuras. Esta diversidad es una característica de las distribuciones de materia altamente evolucionadas que son frecuentemente catalogadas como celulares, filamentos, tipo aplanada, red, esponja, etc.

Se han llevado a cabo varios intentos durante los últimos 30 años para describir la forma de la estructura en gran escala del universo. De todos ellos, aquellos que se concentran en los aspectos globales de la distribución de masa usando los descriptores topológicos parecen estar entre los más efectivos para la comparación de teorías cosmológicas y observaciones. Descriptores como el genus (ver Gott et al. 1987), por ejemplo, relacionan la fenomenología de la distribución de la estructura en gran escala de materia que observamos en el universo, con mediciones cuantitativas de conectividad de estas estructuras. Hablando de manera aproximada, el genus de un objeto puede pensarse como el número más grande de cortes que se le pueden hacer a través de él sin dividirlo en dos piezas. Una dona tiene un genus de uno debido a que se puede hacer un corte completo a través de ella dej ándola en una pieza. Una esfera tiene un genus de cero debido a que cualquier corte completo la dividiría en dos piezas. Por extensión, dos esferas tienen un genus de -1 debido a que va están divididas en dos piezas. Para contornos infinitos o repetidos podemos definir al genus de un contorno superficial como el número de huecos menos el número de regiones aisladas, donde hueco significa hueco como el de una dona y donde una región aislada puede encontrarse sobre o por debajo de un límite en densidad. Analizando el genus para niveles



Figura 5.1: Ejemplos de la utilización de la característica de Euler χ según Mecke, Buchert & Wagner 1994.

altos de densidad, las islas aisladas muestran una topología de burbuja o cúmulo; para bajos niveles de densidad las estructuras se conectan con una topología de "panel de abejas" o "queso suizo"; topologías intermedias son denominadas tipo esponja, es decir los huecos y las islas están interconectadas. La topología tipo esponja es particularmente relevante para describir distribuciones de fase aleatorias, ya que en estas distribuciones las regiones de baja y alta densidad son estadísticamente equivalentes y por lo tanto deberían tener una topología equivalente.

La especificación morfológica completa de los patrones espaciales requiere descriptores tanto topológicos como geométricos para caracterizar no solo la conectividad sino también el contenido y la forma de las figuras. La geometría integral provee una familia apropiada de descriptores conocidos como Funcionales de Minkowski. En el espacio d-dimensional existen d+1 de estos funcionales. Estamos interesados principalmente en el caso d=3, donde los funcionales de Minkowski están relacionados con una familia de mediciones: el volumen cubierto, el área superficial, la integral media de curvatura y la característica de Euler.

Hace poco más de una década, Mecke, Buchert & Wagner 1994 propusieron por primera vez a los Funcionales de Minkowski como herramienta para estudios cosmológicos. En su trabajo, plantearon el marco teórico-matemático adecuado para su utilización y lo aplicaron como demostración a una muestra de cúmulos Abell ACO (Abell, Corwin & Orwing) obteniendo un muy buen acuerdo de la característica de Euler con una distribución doble Poisson. Posteriormente, varios autores procedieron a la aplicación de estas funciones bajo distintas condiciones y con algunas mejoras en los algoritmos de cómputo (ver por ejemplo, Kerscher et al. 1996, Sahni et al. 1998,



Figura 5.2: Representación esquemática del principio de funcionamiento del algoritmo de cálculo de los Funcionales de Minkowski. El esquema muestra el número mínimo de vecinos necesarios para poder tener la información completa, así como también, la nomenclatura adoptada para cada una de las celdas involucradas con sus respectivos ejes coordenados.

Schmalzing et al. 1999). Recientemente, Hikage et al. 2003 calculó los funcionales de las galaxias en el SDSS Early Data Release (Stoughton et al. 2002) encontrando un buen acuerdo con lo obtenido para catálogos sintéticos construidos a partir de simulaciones numéricas de N-cuerpos con un modelo ΛCDM .

El propósito de este capítulo es estudiar la forma de la estructura en gran escala del universo a través de los Funcionales de Minkowski aplicados a los grupos de galaxias del SDSS DR4. Esto nos permitirá saber si el modelo más aceptado actualmente para describir la estructura en gran escala del universo, el ΛCDM , es también el indicado para reproducir la intrincada morfología del universo en estas escalas.

5.2 Los Funcionales de Minkowski en la cosmología

Como dijimos anteriormente, el trabajo pionero que aplicó los Funcionales de Minkoski (FM) en la cosmología fué el de Mecke, Buchert & Wagner 1994. Estos autores demostraron como la geometría integral puede utilizarse para obtener una familia de funciones (los FM) que permitan describir la topología de una distribución de objetos. En síntesis, ellos establecieron que para aplicar los FM a un conjunto de puntos que representan la distribución de galaxias se debe asociar cada punto con una esfera. Las características morfológicas de esta cobertura se puede estudiar variando el radio de dichas esferas. A continuación describiremos detalladamente el marco teórico del procedimiento establecido por Mecke, Buchert & Wagner 1994.

Consideremos un conjunto de puntos $\{x_i/i = 1, ..., N\}$ que representan las posiciones de las galaxias una muestra en 3-dimensiones del espacio Euclideo E^3 . Para estudiar el conjunto de puntos, se introduce una esféra centrada en cada punto $B_r(x_i) = \{x \in E^3/|x - x_i| \leq r\}$ para dar una estructura con una forma característica a la distribución. Dado un valor de r, la unión de esféras especifica una muestra de cúmulos. Dos esféras se dicen pertenecen a un mismo cúmulo si están conectadas por una cadena de esféras intersecadas. Los FM se usan para medir el contenido, la forma y la conectividad de la unión de las esferas $\mathcal{B}(r) = U_{i=1}^N B_r(x_i)$ variando r. Los FM derivan de la teoría de conjuntos convexos. Ellos generalizan las integrales de curvatura sobre superficies suaves al caso de superficies con aristas y vértices singulares. Sea \mathcal{K} un cuerpo convexo compacto en E^3 , con límites regulares $d\mathcal{K} \in \mathcal{C}^2$ y radios principales de curvatura R_1 y R_2 . El área F de \mathcal{K} es

$$F = \int_{d\mathcal{K}} df = \int_{S^2} R_1 R_2 d\sigma \tag{5.1}$$

Si consideramos un cuerpo convexo \mathcal{K}_{ϵ} paralelo a \mathcal{K} a una distancia ϵ , entonces el área será

$$F_{\epsilon} = \int_{S^2} (R_1 + \epsilon)(R_2 + \epsilon)d\sigma = F + 2H\epsilon + G\epsilon^2$$
(5.2)

donde

$$H = \frac{1}{2} \int_{d\mathcal{K}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df \quad ; \quad G = \int_{d\mathcal{K}} \frac{1}{R_1 R_2} df \tag{5.3}$$

con H la curvatura media integrada y G la curvatura gaussiana integrada de $d\mathcal{K}$. Si denotamos como V el volumen de \mathcal{K} y V_{ϵ} al de \mathcal{K}_{ϵ} entonces

$$V_{\epsilon} = V + \int_{0}^{\epsilon} F_{\epsilon'} d\epsilon' = V + F\epsilon + H\epsilon^{2} + \frac{4\pi}{3}\epsilon^{3}$$
(5.4)

la cual es conocida como la fórmula de Steiner. La formula general de Steiner ddimensional es

$$V_{\epsilon}(\mathcal{K}) = \sum_{\alpha=0}^{d} {d \choose \alpha} W_{\alpha}(\mathcal{K}) \epsilon^{\alpha}$$
(5.5)



Figura 5.3: Los Funcionales de Minkowski calculados para una simulación numérica de N-cuerpos en un universo del tipo ΛCDM . Los distintos colores muestran las distintas escalas de suavizado del campo de densidad.

donde los W_{α} son los FM. Para d = 3 tenemos

$$W_0 = V ; \ 3W_1 = F ; \ 3W_2 = H ; \ 3W_3 = G = 4\pi\chi$$
 (5.6)

con la constante $\chi = 1$ denotando la característica de Euler de un cuerpo convexo. En su trabajo, Mecke, Buchert & Wagner 1994 también incluyen la correspondiente extensión para cuerpos no-convexos. Como resultado principal ellos observan que los FM son mediciones globales y aditivas. La aditividad permite calcular los FM efectivamente sumando sus contribuciones locales. Además, los funcionales son numéricamente robustos con respecto a irregularidades espaciales de escala pequeña en la cobertura de la distribución, que puede surgir debido a la variación del radio de las esferas. Finalmente, una ventaja importante es que el cálculo de los FM no está basada en suposiciones estadísticas acerca de la distribución de galaxias La Figura 5.1 muestra un ejemplo de la utilización de χ , la característica de Euler. Los ejemplos son en 2 (línea superior) y 3 dimensiones (línea intermedia), así como también un ejemplo de la aditividad de χ (dibujo inferior). En dos dimensiones χ es la diferencia entre componentes y huecos, mientras que en tres dimensiones es la suma de las componentes desconectadas y cavidades menos el número de túneles. Observar que un χ negativo indica una estructura tipo red.

5.3 Nomenclaturas y predicciones

Antes de comenzar a describir el método de cálculo de los FM, unificaremos la notación, adoptando la forma más usada en los últimos trabajos de la literatura, como el de Hikage et al. 2003. Todos los FM pueden expresarse como integrales sobre conjuntos de excursión. Mientras que el primer FM viene dado simplemente por una función escalón de Heaviside, Θ , normalizada al volumen total V_{tot}

$$V_0(\nu) = \frac{1}{V_{tot}} \int_V \Theta(\nu - \nu(x)) d^3x$$
 (5.7)

los otros FM, V_k (k = 1, 2, 3), son calculados por integrales de superficie de los FM locales, v_k^{loc} . La expresión general es

$$V_k(\nu) = \frac{1}{V_{tot}} \int_{d\mathcal{F}_{\nu}} v_k^{loc}(\nu, \mathbf{x}) d^2 S(\mathbf{x})$$
(5.8)



Figura 5.4: Los Funcionales de Minkowski calculados para una simulación numérica de Ncuerpos en un universo del tipo ΛCDM como función del contraste de densidad límite δ del contorno de iso-densidad. Los distintos colores muestran las distintas escalas de suavizado del campo de densidad.

con los FM locales para k = 1, 2, 3 dados por

$$v_1^{loc}(\nu, \mathbf{x}) = \frac{1}{6} \quad ; \quad v_2^{loc}(\nu, \mathbf{x}) = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad ; \quad v_3^{loc}(\nu, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_1 R_2} \tag{5.9}$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de las superficies.

Existen predicciones para los FM en el caso de una distribución gaussiana de puntos aleatorios (Tomita 1986,Schmalzing & Buchert 1997). La fórmula general viene descripta por

$$V_k(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{(k+1)/2}} \frac{w_3}{w_{3-k}w_k} \left(\frac{\sigma_1^2}{3\sigma_0^2}\right)^{k/2} H_{k-1}(\nu) e^{-\nu^2/2}$$
(5.10)

donde k = 0, 1, 2, 3 y el factor w_k es el volumen de una esféra unidad en k-dimensiones,

es decir, $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = \pi$ y $w_3 = 4\pi/3$. Las funciones H_n son los polinomios de Hermite definidos por

$$H_n(\nu) = e^{\nu^2/2} \left(-\frac{d}{d\nu}\right)^n e^{-\nu^2/2}$$
(5.11)

Para k = 0 el polinomio de Hermite ésta definido por (Matsubara 2003)

$$H_{-1}(\nu) = e^{\nu^2/2} \int_{\nu}^{\infty} e^{-\nu^2/2} d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\nu^2/2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right)$$
(5.12)

Finalmente, $\sigma_0^2 = <\delta^2 > y \sigma_1^2 = <(\nabla \delta)^2 >$. En la teoría lineal estas funciones vienen dadas por

$$\sigma_j^2(R) = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} k^{2j} P_{lin}(k) W^2(kR)$$
(5.13)

donde, en el caso de un kernel Gaussiano, $W_R(x) = \pi^{-3/2} R^{-3} \exp(-x^2/2R^2)$ y por lo tanto $W(kR) = e^{-(kR)^2}$, y $P_{lin}(k)$ indica el espectro de potencia en el régimen lineal.

La cantidad ν es calculada a partir del FM volumétrico V_0 . Esencialmente, se usa para forzar un comportamiento exactamente gaussiano del volumen V_0

$$V_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\nu} exp\left(-\frac{{\nu'}^2}{2}\right) d\nu' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right)$$
(5.14)

Por lo tanto las desviaciones de la gaussianidad que son debidas a cambios en la función distribución de probabilidad mono-puntual son eliminadas, y las desviaciones debido a correlaciones de órdenes más altos son privilegiadas.

5.4 Descripción del algoritmo

Un método natural para evaluar los FM de distribuciones puntuales, tales como los catálogos de galaxias, es el presentado por Mecke, Buchert & Wagner 1994, el cual asocia cada punto en la muestra, en el caso más simple, con una esfera; el cuerpo formado por la unión de estas esferas para una dada escala (el radio de las esferas) es medido con los FM. Este método es usualmente preferible a la construcción de campos de densidad suavizando y midiendo la morfología de los contornos superficiales de iso-densidad, debido a que el primero posee solamente un parámetro (el radio) y no requiere un kernel suavizador que descarta información. Sin embargo, el método de las esferas tiene limitaciones cuando se analizan datos en franjas tales como la presente muestra del SDSS; la esfera más grande es aquella que llena la extensión más pequeña de la muestra y por lo tanto el análisis está limitado a ésta escala. En consecuencia en el presente análisis, generaremos contornos de iso-densidad a partir del campo de contraste de densidad tri-dimensional tomando el conjunto de puntos donde el contraste de densidad δ excede el nivel límite ν . Para lograr esto último, es necesario pasar de una distribución puntual de objetos a una distribución de δ suavizada, es decir, realizar la convolución de la distribución original con una función ventana. El procedimiento de suavizado del catálogo de objetos se realiza de la siguiente manera:

- En primer lugar se realiza la transformada de Fourier de la distribución puntual. Esto se logra, embebiendo la distribución en un celdificado cúbico de 128³ celdas mediante el método de asignación de pesos a los nodos denominado "de la celda más cercana a la posición" o NGP (nearest grid point).
- 2. Luego se multiplica la transformada de Fourier obtenida con la transformada de Fourier de un filtro gaussiano con escala de suavizado R

$$W(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$



Figura 5.5: Panel superior: Función T_C de Rauzy para distintos valores de magnitud "aparente" de grupos. La linea vertical muestra la magnitud "aparente" límite de grupos a partir de la cual T_C se encuentra fuera del rango de valores esperados. Panel inferior: Módulo de distancia en función de la magnitud absoluta de los grupos. La zona sombreada (roja) muestra la muestra de grupos resultante que se encuentra dentro del límite en magnitud aparente encontrado con T_C ($m \leq 14.25$) y del límite en redshift ($z \geq 0.055$).

3. Al resultado de la multiplicación se le realiza la anti-transformada de Fourier para volver al espacio real (de las distancias) y por lo tanto tener el campo inicial suavizado con una escala R.

Es importante tener en cuenta que la elección del valor R para el suavizado del campo de densidad no es arbitraria. Es bien sabido que la exactitud con la cual se medirán los FM crece para un volumen dado a medida que elegimos valores bajos de R. Sin embargo este valor no puede ser arbitrariamente pequeño, ya que debe satisfacer las siguientes condiciones:

- 1. R debe ser comparable o mayor que la separación media entre galaxias.
- 2. La desviación cuadrática media de las fluctuaciones en densidad a la escala de suavizado R debe ser mayor que la inversa de la raíz cuadrada del número de galaxias dentro de una esfera con un perfil gaussiano de radio efectivo R.
- 3. *R* debe ser mayor que el doble del lado de una celda, de manera de no tener problemas con la resolución dada por la frecuencia de Nyquist.

Una vez que disponemos del campo suavizado en el celdificado cúbico, procedemos a determinar los FM de los contornos de iso-densidad. Schmalzing & Buchert 1997 mostraron en su trabajo dos métodos para estimar los FM. El primero transforma las integrales de superficie en integrales de volumen. Los FM locales son expresados en termino de invariantes formados a partir de la primera y segunda derivada del campo de contraste de densidad. Este método suele denominarse el de "Invariantes de Koenderink". El otro método está basado en las formulas de Crofton (Crofton 1868) para geometría integral. Este método es apropiado para patrones descriptos por un conjunto de celdas cúbicas ocupadas y vacías. Si el lado de la celda es a, entonces el cálculo de los FM se reduce a contar las celdas que en tres dimensiones están ocupadas por este patrón. Los FM son

$$V_0 = n_3$$
 (5.15)

$$V_1 = \frac{2}{9a}(n_2 - 3n_3) \tag{5.16}$$

$$V_2 = \frac{2}{9a^2}(n_1 - 2n_2 + 3n_3) \tag{5.17}$$

$$V_3 = \frac{1}{a^3}(n_0 - n_1 + n_2 - n_3)$$
(5.18)

donde n_3 , n_2 , n_1 y n_0 son el número de celdas, caras, aristas y vértices que forman el patrón, respectivamente. Recientemente, Hikage et al. 2003 realizó un análisis de los FM estimados usando estos dos métodos y llegó a la conclusión que los resultados obtenidos con ambos son perfectamente comparables. Por lo tanto en este estudio, procederemos al cálculo de los FM usando el método de Crofton.

A la hora de proceder con la estima de los FM hay que tener en cuenta que las cantidades n_3 , n_2 , n_1 y n_0 no admiten repeticiones, es decir, que si tenemos n_3 (el número de celdas) no podemos determinar directamente n_2 , n_1 y n_0 multiplicando n_3 por 6, 12 y 8 respectivamente, (caras, aristas y vértices de una celda) ya que existen celdas en contacto. Por lo tanto, el algoritmo encargado de determinar estas cantidades, en principio, requiere que por cada celda se examinen las 26 celdas vecinas. Este tipo de búsqueda, requiere un alto tiempo de CPU, sobretodo si el número de celdas en las que está embebida la distribución puntual es muy grande, como en nuestra caso ($128^3 = 2097152$ celdas). Un dato muy importante para notar la magnitud del problema es el hecho que si n es el número de celdas a examinar, entonces existen 2^n posibles configuraciones de ocupado-vacío de esas celdas. Es decir, que en

nuestro caso existen 2^{26} (67108864) posibles configuraciones. En consecuencia, no sólo se lentifica el tiempo de ejecución del algoritmo, sino que también es muy laborioso y complicado el proceso de programación. Uno de los algoritmos más conocidos en la literatura para estimar los FM es el de Michielsen & De Raedt 2000. Ellos desarrollaron un conjunto de ecuaciones para determinar las cantidades n_3 , n_2 , n_1 y n_0 cuando se agrega una celda ocupada en la posición (x = i, j, k) a un dado patrón tridimensional. Usando estas ecuaciones es sencillo calcular los FM para un patrón, simplemente agregando celdas ocupadas una por una en un celdificado cúbico inicialmente vacio. Sin embargo, y como dijimos anteriormente, el código necesita examinar los 26 vecinos para resolver las ecuaciones, y además, la cantidad de memoria RAM necesaria para almacenar la información requerida es excesiva, por lo que es un código de lenta ejecución y muy costoso en términos computacionales.

Por lo tanto, se introdujeron un par de modificaciones en el algoritmo de estima de los FM que redujeron considerablemente estos inconvenientes. En primer lugar, dada la geometría del problema y la manera de recorrer el celdificado cúbico, observamos que en realidad, las cantidades n_3 , n_2 , n_1 y n_0 pueden obtenerse por un método acumulativo en el cual no hace falta examinar los 26 vecinos, sino que solo alcanza con observar el patrón de ocupado-vacío de 13 vecinos. En la Figura 5.2 observamos en la región superior izquierda un esquema de las distribución de las 13 celdas vecinas a la celda que agregamos (celda gris). Esta distribución es así ya que, para el sistema de coordenadas x - y - z impuesto, la coordenada z corre primero, luego la y, y por último la x. Los gráficos adyacentes (diferentes proyecciones), muestran que cada celda ha sido identificada con número xyz donde cada uno de ellos corre de 0



Figura 5.6: Distribución de luminosidades de la muestra limitada en magnitud aparente de los grupos del SDSS DR4 en función del redshift. La linea roja marca el limite impuesto por el corte en magnitud "aparente" del catálogo de grupos de acuerdo a lo obtenido con el método de Rauzy. Las lineas a rayas marcan los cortes impuestos para delimitar cada una de las muestra limitadas por volumen. En el gráfico pueden verse aclarados los cortes en magnitud absoluta y redshift así como también, entre paréntesis, el número de grupos resultante en cada muestra.

a 2. A medida que recorremos la matriz en el sentido indicado, vamos acumulado las cantidades deseadas dependiendo de si la nueva celda está ocupada o no. La nueva celda agregará como mínimo (en caso de estar ocupada) 3 caras, 3 aristas y 1 vértice independientemente del valor de los 13 vecinos. Esta modificación es la más importante en lo que a simplificar el problema se refiere, ya que ahora el número de configuraciones posibles se redujo a 2^{13} (8192), es decir, 4 órdenes de magnitud. La segunda modificación, es la confección de una tabla con las 2^{13} posibles configuraciones de manera que cada vez que nos encontramos en una celda, lo único que hay que hacer es identificar que configuración es, y de esa manera obtener inmediatamente (con la tabla) las cantidades $n_3, n_2, n_1 \ge n_0$. Estas modificaciones mejoraron en gran medida el rendimiento del algoritmo y disminuyeron el requerimiento excesivo de recursos computacionales. A modo de ejemplo, realizamos una comparación entre nuestro algoritmo y el de Michielsen & De Raedt 2000. El programa de comparación embebe aproximadamente 1000 partículas en un celdificado cúbico de 128^3 celdas. Como resultado se obtuvo que, en promedio, nuestro algoritmo es 17 veces más rápido que el de Michielsen & De Raedt 2000.

En la Figura 5.3 mostramos los FM para una de las simulaciónes numéricas de N-cuerpos (ΛCDM) descriptas en el Capítulo anterior. Los FM fueron calculados para 4 distintas escalas de suavizado denotados con distintos colores. Observar que el FM V_3 es la conocida estadística Genus, a menos de un signo. En este caso los FM están dibujados en función de la variable ν calculada a partir de la ecuación 5.14. En la Figura 5.4 mostramos los mismos FM en función del contraste de densidad límite δ de los contornos de iso-densidad la cual es otra de las maneras en la que se los suele encontrar en la literatura (por ejemplo, Schmalzing et al. 1999).

5.5 Aplicación a los grupos del SDSS DR4

5.5.1 Muestras de grupos de galaxias limitadas por volumen

Para estimar los FM a un catálogo obtenido a partir de observaciones uno tiene que tener en cuenta que estos catálogos poseen una magnitud aparente límite, es decir que el número promedio de objetos decrece con la distancia. Esto trae aparejado que para distancias lejanas solo estaremos observando los objetos más brillantes. Por lo tanto para eliminar cualquier posible vicio en la determinación de los FM con la densidad númerica o la luminosidad de los objetos construiremos muestras limitadas por volumen. Para su realización es necesario introducir dos cortes: uno en redshift y otro en magnitud absoluta. Ahora, como los objetos bajo consideración son los grupos de galaxias del SDSS DR4, tenemos que poder estimar la magnitud absoluta de estos objetos. En primer lugar es necesario estimar las luminosidades de los grupos que disponemos. Esto lo haremos siguiendo la prescripción de Moore et al. 1993. Para cada grupo la luminosidad total, L_{tot} , es la suma de las luminosidades de cada galaxia miembro (L_{obs}) más la luminosidad integrada correspondiente a las galaxias con magnitudes por debajo de la magnitud límite de la muestra (L_{cor})

$$L_{\rm tot} = L_{\rm obs} + L_{\rm cor}.\tag{5.19}$$

Para el cálculo de L_{cor} asumimos que los miembros de los grupos son independientemente caracterizados por la FL para galaxias en grupos calculada en el capítulo 3. La luminosidad esperada de los miembros más débiles del grupo es

$$L_{\rm cor} = N_{\rm obs} \frac{\int_0^{L_{\rm lim}} L\Phi(L) dL}{\int_{L_{\rm lim}}^\infty \Phi(L) dL},\tag{5.20}$$

donde $L_{\text{lim}} = 10^{0.4(M_{\odot} - M_{\text{lim}})}$, $M_{\text{lim}} = m_{\text{lim}} - 25 - 5 \log(d_L(z))$ y M_{\odot} es la correspondiente magnitud absoluta del sol para la banda r.

Teniendo L_{tot} , es posible inferir la magnitud absoluta de cada grupo. Sin embargo, para que la muestra sea completa por volumen al introducir los cortes, la muestra original debe estar limitada por "magnitud aparente de grupos". En principio no disponemos de esta información, es decir, no se sabe cual sería la "magnitud aparente límite de los grupos" bajo la cual se puede asegurar que tenemos todos los objetos. Entonces es esencial estimar esta magnitud para la muestra de grupos del SDSS DR4. El método para estimar esta magnitud es el desarrollado por Rauzy 2001. Se asume que esta magnitud define una correlación entre la magnitud absoluta y el módulo de distancia Z. Este método se basa en la definición de una variable aleatoria

$$\zeta = \frac{\Psi(M)}{\Psi[M_{lim}(Z)]} \tag{5.21}$$

donde $M_{lim}(Z) = m_{lim} - Z$. ζ debería distribuirse uniformemente entre 0 y 1 y ser estadísticamente independiente de Z y de la función de selección angular. Para cada objeto, una estima imparcial de ζ viene dada por

$$\bar{\zeta}_i = \frac{r_i}{n_i + 1} \tag{5.22}$$

donde r_i es el número de objetos de la muestra con $M \leq M_i$ y $Z \leq Z_i$, y n_i es el número de objetos tales que $M \leq M_{lim}^i(Z_i)$ y $Z \leq Z_i$. El valor medio E_i y la varianza V_i de $\bar{\zeta}_i$ son 1/2 y $(n_i - 1)/[12(n_i + 1)]$, respectivamente. Entonces, Rauzy 2001 define


Figura 5.7: Distribución espacial de los grupos de galaxias en el SDSS DR4 para cada una de las muestras limitadas por volumen en la región Norte. La declinación de los objetos es la coordenada proyectada.

una cantidad

$$T_{C} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(\bar{\zeta}_{i} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} V_{i}\right)}$$
(5.23)

que, siendo función de la función acumulativa de luminosidad, tiene media cero y varianza igual a la unidad. Entonces, el método consiste en calcular esta cantidad (T_C) para varias submuestras de grupos, cada una construída variando la magnitud aparente límite. Cuando esta cantidad se aleja sistemáticamente de 0 y varianza 1, entonces queda definida la magnitud aparente límite. Usando esta herramienta estadística encontramos que la magnitud aparente límite para una grupos con $z \ge 0.055$ es $m_{lim} = 14.25$. Puede verse en la Figura 5.5 el comportamiento de la función T_C (panel superior) y la relación entre la magnitud absoluta y el módulo de distancia para los grupos del SDSS DR4. En el panel superior puede verse, sombreada con líneas rojas, la región en la cual yacen los grupos que cumplen con los cortes en redshift y magnitud aparente límite. Es importante aclarar que el corte en redshift fue moviéndose hasta encontrar la muestra de grupos con corte en magnitud aparente más alto posible y de esta manera conseguir la muestra con mayor número de grupos. Como resultado, obtuvimos una muestra limitada por magnitud aparente con 4513 grupos de galaxias.

Lo único que resta es definir las muestras limitadas por volumen para el cálculo de los FM. Nuestra elección puede verse claramente en la Figura 5.6, donde se observa la distribución de magnitudes absolutas de la muestra de grupos limitada por magnitud aparente como función del redshift. La líneas rojas delimitan la muestra de grupos limitada por magnitud aparente, mientras que las líneas a rayas muestran las cuatro muestras limitadas por volumen en las que dividimos la muestra principal. Entre paréntesis también puede observarse el número de grupos con los que cuenta cada una de las muestras limitadas por volumen.

5.5.2 Los FM y su comparación con el ΛCDM

Antes de proceder con la aplicación de los FM a las muestras limitadas por volumen definidas en la sección anterior vamos a realizar una división más, relacionada



Figura 5.8: Contornos de iso-densidad para el campo suavizado de densidades de grupos de galaxias en el SDSS DR4 para la región Norte (panel superior) y la región Sur (panel inferior). La escala de suavizado es de 10 h^{-1} Mpc.

con la geometría del catálogo de grupos. Si recordamos la Figura 2.1, el catálogo de galaxias (y por ende el de grupos) se encuentra dividido en 3 regiones separadas en el cielo: una región Norte, una Sur y una de 3 Franjas. Si tuviéramos que embeber esta distribución en un celdificado cúbico, existiría mucho espacio vacio, es decir muchas celdas sin grupos en ellas, y esto podría disminuir la señal existente y provocar estimas ruidosas además de ser un desperdicio de memoria RAM. Para disminuir este efecto se adoptó dividir cada una de las muestras de grupos limitadas por volumen en 3 regiones denominadas Norte, Sur y Franjas. A modo de ejemplo, vemos en la Figura 5.7 la distribución espacial de grupos en la región Norte para las 4 submuestras limitadas por volumen. Con estas divisiones el procedimiento a seguir será estimar los 4 FM para las 4 muestras limitadas por volumen en las 3 regiones del cielo, es decir 12 estimas estadísticamente diferentes de los 4 FM. También se decidió adoptar como escala de suavizado $R = 10h^{-1}$ Mpc para todas las estimas de los FM siendo ésta una medida que cumple con los criterios mencionados en la sección 5.4 y además preserva algún detalle de las escalas pequeñas.

En lo que respecta al cálculo de los FM, se adoptó analizar el campo de densidad suavizado en 20 contornos de iso-densidad. Se observó que la elección particular de este parámetro no influye en el ruido resultante en la determinación de los FM. En la Figura 5.8 puede verse una franja del campo de densidad suavizado con R = $10h^{-1}$ Mpc para las regiones Norte (panel superior) y Sur (panel inferior) con sus respectivos contornos de iso-densidad.

Habiendo establecido las condiciones necesarias, se procedió a la estima de los FM para los grupos en el SDSS DR4. En la Figura 5.9 mostramos los FM, V_0 (volumen),



Figura 5.9: Los Funcionales de Minkowski para la muestra limitada por volumen B de grupos de galaxias del SDSS DR4, región Norte (linea y puntos negros). Los puntos rojos muestran los Funcionales de Minkowski promedio obtenido a partir de 10 catálogos mock de grupos. Las bandas de error son la dispersión cuadrática media calculada para un dado bin. La escala de suavizado es de 10 h^{-1} Mpc.

 V_1 (área), V_2 (curvatura media) y V_3 (característica de Euler) para la muestra B de la región Norte con líneas y puntos negros. Una característica a destacar de estas determinaciones es que ninguna de ellas se encuentra en el rango de ν obtenido para la simulación numérica de la Figura 5.3 sino en uno más acotado. La muestra de grupos de la que disponemos no nos permite muestrear correctamente toda el rango de densidad que se puede observar en una simulación numérica con más de 2 millones de partículas, por lo que es obvio que solo estamos capacitados para observar los FM en un rango más reducido. Por otro lado, la geometría del catálogo aun puede influir en el ruido de las determinaciones ya que, aun cuando dividimos el catálogo en 3 regiones, el celdificado cúbico no cubre perfectamente estas regiones, que en principio serían mejor descriptas por una caja de 3 lados desiguales, por lo que aun existen varias celdas cubicas vacías en el campo de densidad suavizado. Aun así , los FM estimados están bien determinados en el rango que poseemos y nos permitirán realizar una comparación con el modelo cosmológico más aceptado en la actualidad, el ΛCDM .

Para comparar con el modelo ΛCDM utilizamos los 10 catálogos sintéticos (mocks) de grupos de galaxias descriptos en el Capítulo anterior. A cada uno de estos catálogos les realizamos el corte en magnitud "aparente" límite y los dividimos por región y muestra limitada por volumen según lo establecido previamente. Luego se aplicó el algoritmo para la estima de los FM a las 120 muestras de grupos mocks. Para cada una de las muestras se promediaron los 10 FM y se les asoció como error en cada punto la dispersión cuadrática media. En la Figura 5.9 mostramos con puntos rojos los FM promedio para los catálogos mocks para una cosmología ΛCDM . Puede verse que el resultado obtenido está en muy buen acuerdo con los 4 FM de los grupos de galaxias en el SDSS DR4. En este momento es importante destacar la importancia de este resultado. Si recordamos lo dicho con anterioridad, que dos distribuciones tengan la misma función de correlación bipuntual (o lo que es lo mismo, el mismo espectro de potencia), no significa que la forma de las estructuras en las dos distribuciones sea la misma. Los FM describen el volumen, el área, la integral de curvatura media y la conectividad entre las estructuras de una distribución. Por lo tanto, el hecho de que el modelo cosmológico bajo estudio, el ΛCDM , se una buena descripción de las observaciones en cada uno de estos aspectos, relacionados con la forma de las estructuras, es un resultado muy notorio y fortalece la importancia de este modelo cosmológico a la hora de describir el universo observado. Pero éste es el resultado obtenido para una de las muestras de grupos y deberíamos ver que tan bien describe el modelo cosmológico el conjunto completo de muestras. Para cuantificar las diferencias entre observaciones y modelos mediremos para todas las muestras en todas las regiones, la siguiente cantidad

$$\Delta = \frac{V_i^{obs} - V_i^{mock}}{V_i^{obs}} \tag{5.24}$$

donde V_i^{obs} y V_i^{mock} son los FM para los grupos observados y sintéticos respectivamente, con i = 0, 1,2 y 3. El resultado de esta cantidad es el error porcentual del modelo cosmológico respecto del valor del FM observado. En las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 mostramos estas cantidades para cada una de las muestras limitadas por volumen y para las regiones Norte, Sur y Franjas, respectivamente. De todas estas figuras puede observarse que los resultados obtenidos muestran muy buen acuerdo, dentro del 20% de error en promedio para todas las muestras bajo análisis. Es importante destacar que las distintas muestras se corresponden con rangos de magnitudes absolutas diferentes, por lo tanto, los objetos bajo análisis son f ísicamente distintos. De aquí se desprende otro resultado interesante y es que el modelo cosmológico es lo suficientemente bueno como para lograr obtener FM similares a los de las observaciones para distintas muestras limitadas por volumen, es decir, para objetos con distintas características intrínsecas.



Figura 5.10: La diferencia entre los FM de los grupos del SDSS DR4 (observados) y de los grupos de los catálogos mock, normalizados al valor de los FM observados, para todas las muestras limitadas por volumen en la región Norte. La escala de suavizado es de 10 h^{-1} Mpc.



Figura 5.11: La diferencia entre los FM de los grupos del SDSS DR4 (observados) y de los grupos de los catálogos mock, normalizados al valor de los FM observados, para todas las muestras limitadas por volumen en la región Sur. La escala de suavizado es de 10 h^{-1} Mpc.



Figura 5.12: La diferencia entre los FM de los grupos del SDSS DR4 (observados) y de los grupos de los catálogos mock, normalizados al valor de los FM observados, para todas las muestras limitadas por volumen en la región Franjas La escala de suavizado es de 10 h^{-1} Mpc.

Capítulo 6

Sumario y Conclusiones

Dentro de las estructuras que se encuentran en el universo, los grupos de galaxias son el laboratorio ideal para estudiar tanto la evolución de las galaxias que los componen, a través de los procesos que se dan en su interior, como la distribución de materia del universo, analizando los grupos como entidades. A lo largo de esta tesis se procuró realizar un estudio detallado de los grupos de galaxias para lograr entender estos dos aspectos.

Para lograr este objetivo, en primer lugar fué necesario reconocerlos y extraerlos de un catálogo de galaxias. Para ello se utilizó un método de identificación de grupos realizándole al mismo ciertas modificaciones de manera de obtener una muestra final de grupos mejorada para aumentar así la confiabilidad de los resultados. Las modificaciones introducidas en el algoritmo de identificación involucraron a los sistemas más ricos y fueron realizadas para eliminar posibles fusiones ficticias de grupos debido a la identificación en el espacio de redshifts y además para proporcionar una mejor determinación del centro de estos sistemas.

La estructura interna de los grupos de galaxias

Una vez que se dispuso de una muestra confiable de grupos de galaxias, se procedió a estudiar el primero de los aspectos: la estructura interna de estos sistemas. Elegimos realizar este análisis a través de las luminosidades de las galaxias que componen estos sistemas. La estadística elegida es la función de luminosidad (FL), en este caso, de galaxias en grupos. Los resultados obtenidos de calcular las FL para diferentes submuestras fueron los siguientes:

- En primer lugar, al calcular las FLs de galaxias en grupos en diferentes bandas del SDSS, se obtuvieron magnitudes características, M^{*}, ~ 0.5 más brillantes que las obtenidas para las FLs de galaxias en el campo por Blanton et al. 2003b. Las pendientes del extremo débil, α, sólo mostraron un leve decrecimiento en grupos respecto de lo observado en el campo.
- Haciendo uso de la distribución bimodal del color ^{0.1}(u r), se dividióla muestra de galaxias en grupos en una población Roja y otra Azul. Las FLs para la submuestra Roja resultó muy similar a las correspondientes para galaxias Rojas de campo obtenida por Baldry et al. 2004, mientras que se observó un abrillantamiento de M* para la población de galaxias Azules en grupos respecto a las Azules de campo.
- Luego se analizó la dependencia de la FL (en diferentes bandas) con la masa virial de los grupos. Los resultados obtenidos arrojaron dos claras tendencias: un abrillantamiento de la magnitud característica (ΔM* ~ 0.75) y un empinamiento de la pendiente del extremo débil (Δα ~ 0.4) a medida que crece la masa virial de los grupos. Además, cuando se dividió cada submuestra de

acuerdo a su población de galaxias Rojas y Azules se observó que la FL de la población Roja es la que presenta cambios más fuertes con la masa, tanto en M^* como en α , mientras que la FL de la población de galaxias Azules permanece casi invariante con respecto a la masa virial de los sistemas considerados.

 Finalmente, se observó que aquellos grupos con su galaxia más luminosa considerablemente más brillante que la segunda en orden de luminosidad poseen una M* más brillante y un α más empinado que el resto de los grupos.

El escenario más probable para explicar el abrillantamiento de la magnitud característica es aquel en el cual las fusiones juegan un papel fundamental en la evolución de galaxias en grupos. Es bien sabido de la literatura, que las fusiones de galaxias son más frecuentes en sistemas de baja masa ya que las bajas dispersiones de velocidades provocan tasas de encuentros más altas (Merritt 1985). Entonces, las fusiones pueden ser los responsables del abrillantamiento de M^* con la masa virial y el enrojecimiento de los colores de las galaxias, ya que estos procesos podrían consumir el gas en una explosión de formación estelar y, en un tiempo posterior, inducir tasas de formación estelar más bajas. Los resultados están de acuerdo con el escenario propuesto por Baldry et al. 2004 donde las fusiones son la causa de la bimodalidad en la distribución de colores, con una población Roja resultante de las fusiones y una Azul que forma estrellas a una tasa determinada por sus propiedades físicas internas. El hecho de que la FL de la población Azul en grupos permanece casi sin cambio con la masa, favorece la idea de una población que evoluciona independientemente del medio que la rodea, mientras que el comportamiento observado en la FL de las galaxias Rojas indica que estos objetos han sufrido fusiones importantes debido a los efectos del medio circundante.

Otro resultado que puede interpretarse es el decrecimiento de la pendiente del extremo débil con la masa virial de los grupos. Este parámetro es uno de los que describe la forma de la función de Schechter y está determinado tanto por el comportamiento en el extremo débil como en el extremo brillante de la FL. Por lo tanto, cualquier variación significativa en estas regiones, debería cambiar el valor de α . Una distribución de galaxias brillantes más aplanada puede generar un valor más empinado de α sin necesidad de variar el número de galaxias débiles. Entonces, el escenario de fusiones también puede explicar el comportamiento observado de α con la masa virial ya que podría aumentar el número de galaxias brillantes. Esto no excluye una posible incidencia de los procesos debidos al medio intra-grupo tales como el acosamiento de galaxias (galaxy harassment), presión de compresión (ram pressure), etc., los cuales pueden aumentar el número de galaxias débiles. Sin embargo, debe recordarse que la magnitud aparente límite de la muestra principal de galaxias no permite medir el extremo muy débil de la FL, por lo tanto, el cambio observado en α con la masa virial del grupo no puede asociarse inequívocamente con un aumento de la población de galaxias enanas.

Los grupos de galaxias y la estructura en gran escala

En segundo lugar nos interesamos en analizar como se distribuyen los grupos de galaxias en el universo. Para ello hacemos uso de dos de las herramientas estadísticas más comunes en la literatura científica: el espectro de potencias (P(k)) y la función de correlación bipuntual $(\xi(s))$ ambos determinados en el espacio de redshifts. De su aplicación a los grupos de galaxias identificados en el SDSS DR4 obtuvimos los siguientes resultados:

- El P(k) obtenido resultó en muy buen acuerdo, prácticamente en todas las escalas consideradas, con el obtenido para catálogos mocks construidos a partir de simulaciones numéricas de N-cuerpos para un modelo cosmológico ΛCDM .
- Realizando una comparación entre los espectros de potencias para los grupos y las galaxias del SDSS DR4 observamos que la forma es muy similar y sólo se diferencian en la amplitud. Este hecho se encuentra cuantificado por el bias relativo grupo-galaxias, el cual es constante con la escala y vale ~ 1.5.
- Estos resultados están en completo acuerdo con los obtenidos por Zandivarez et al. 2003 para grupos de galaxias identificados en el 2dFGRS EDR, obteniéndose el mismo comportamiento y valor para el bias relativo grupo-galaxia. Comparando los P(k) para estas dos muestras, observamos que son estadísticamente iguales dentro de los errores, pero en media el P(k) obtenido para el SDSS DR4 posee más potencia en escalas grandes ($k < 0.1 h Mpc^{-1}$).
- La $\xi(s)$ obtenida para los grupos fue parametrizada usando una relación lineal el espacio log-log, con una longitud de correlación en el espacio de redshifts $s_0 = 9.2 \pm 0.2 h^{-1} Mpc$ y una pendiente $\gamma = 1.5 \pm 0.2$. El resultado es muy similar al obtenido previamente para el 2dFGRS EDR por Zandivarez et al. 2003.
- Por último, se analizó la dependencia de la longitud de correlación en el espacio de redshifts, s_0 , con la separación media entre objetos, d_c , definiendo cuatro

submuestras en distintos rangos de masa viriales de grupos. Primero, se observó que s_0 crece a medida que la masa virial crece. Además comparando la relación $s_0 - d_c$ con resultados previos, encontramos un muy buen acuerdo para las 3 submuestras de masas viriales más grandes. El valor obtenido para masas más bajas difiere de lo obtenido por Padilla et al. 2004 y Yang et al. 2004. Esto se debe principalmente a que, a diferencia de los catálogos usados por estos autores, la muestra de grupos del SDSS DR4 bajo consideración esta restringida a grupos de galaxias con más de 3 miembros.

Recordemos que la perturbaciones en densidad pueden describirse matemáticamente como suma de ondas planas con una dada amplitud y fase. Entonces el análisis previo nos permitió estudiar la distribución espacial de los grupos de galaxias a través de la distribución de las amplitudes de las fluctuaciones en densidad. Pero estas estadísticas no nos brindan ninguna información acerca de como están distribuidas las fases de esas ondas. El efecto producido por fases distribuidas de manera diferente puede generar que dos distribuciones, con espectros de potencias iguales, posean estructuras con formas diferentes. Por lo tanto, para caracterizar completamente la estructura en gran escala del universo, se usaron los Funcionales de Minkowski. Esta estadística es una familia de descriptores topológicos (4 funcionales en el espacio tridimensional) que permiten analizar la conectividad, contenido y forma de una distribución. Para poder aplicarlos a la muestra de grupos de galaxias se siguieron los siguientes pasos:

Se adoptó como método más adecuado para el cálculo de los Funcionales de Minkowski, teniendo en cuenta la geometría de la muestra de grupos de galaxias, el que analiza los contornos de isodensidad en el campo de densidad suavizado con una dada longitud característica.

- Se desarrolló un algoritmo para la estima de los Funcionales de Minkowski de manera de optimizar el tiempo de computo. El algoritmo resultante es 17 veces más rápido que las versiones previas realizadas por otros autores.
- Se construyeron muestras de grupos de galaxias limitadas por volumen. Para lograr esto, se usó el método de Rauzy 2001 para determinar la magnitud aparente límite hasta la cual, una submuestra de grupos de galaxias es completa.
- Se dividió el catálogo de grupos en 3 regiones: Norte, Sur y Franjas. Por lo tanto, se definieron 4 submuestras limitadas por volumen para cada una de las regiones, es decir, 12 determinaciones diferentes para los 4 funcionales.
- Se utilizaron los 10 catálogos mocks de los grupos del SDSS DR4 para poder compararlos con los resultados observacionales. Para cada uno de estos catálogos se realizó la misma subdivisión que para el catálogo observacional.

De la comparación entre los Funcionales de Minkowski para los grupos del SDSS DR4 y los obtenidos para los catálogos mocks se encuentra un muy buen acuerdo. Al cuantificar las diferencias entre las determinaciones para todas las submuestra y las correspondientes para catálogos mocks se obtuvo, que en media, existe un discrepancia de ~ 20%. En otras palabras, el modelo cosmológico ΛCDM es capaz de describir la topología de la materia en el universo. Es importante destacar que el acuerdo es con la totalidad de los Funcionales de Minkowski, es decir, los que caracterizan el volumen, el área, la integral de curvatura media y la conectividad de la distribución de grupos de galaxias. Además, este acuerdo se mantiene para diferentes muestras limitadas por volumen, es decir, muestras caracterizadas por objetos con distintas luminosidades. En un trabajo previo, Hikage et al. 2003 había demostrado que los Funcionales de Minkowski para las galaxias del SDSS Early Data Release estaban muy bien descriptos por el modelo ΛCDM también analizando muestras limitadas por volumen. Con el análisis realizado en este trabajo, hemos extendido la validez de los resultados obtenidos por Hikage et al. 2003, ya que las muestras limitadas por volumen para los grupos de galaxias permiten analizar objetos en un rango de luminosidades mucho más brillante que el que se puede obtener a partir de una muestra de galaxias.

Por lo tanto, de la totalidad del análisis de los grupos de galaxias como trazadores de la estructura en gran escala de universo concluimos que el modelo cosmológico ΛCDM no sólo describe muy bien la distribución espacial de la materia en el universo sino que también reproduce fehacientemente la morfología de dicha distribución.

Bibliografía

Abadi M., Lambas D., Muriel H., 1998, ApJ, 507, 526

Adelman-McCarthy J.K., et al. (The SDSS Collaboration), 2005, ApJS, in press (astro-ph/0507711).

Baldry, I. K., Glazebrook, K., Brinkmann, J., Ivezić, Ž., Lupton, R. H., Nichol,R. C., & Szalay, A. S. 2004, ApJ, 600, 681

Beers C.T., Flynn K., Gebhardt K., 1990, AJ, 100, 32

Blanton, M. R., et al. 2001, AJ, 121, 2358

Blanton, M. R., et al. 2003a, AJ, 125, 2348

Blanton, M. R., et al. 2003b, ApJ, 592, 819

Blanton, M. R., Lupton, R. H., Schlegel, D. J., Strauss, M. A., Brinkmann, J., Fukugita, M., & Loveday, J. 2005, ApJ, 631, 208

Choloniewski J., 1987, MNRAS, 226, 273

Christlein D., Zabludoff A.I., 2003, ApJ, 591, 764

Colless, M., et al. 2001, MNRAS, 328, 1039

Croft R., Dalton G., Efstathiou G., Sutherland W., Maddox S., 1997, MNRAS, 291, 305

Crofton M.W. 1868, Philos. Trans. R. Soc. London, A, 158, 181

Dalton G., Efstathiou G., Maddox S., Sutherland W., 1994, MNRAS, 269, 151

Díaz E., Zandivarez A., Merchán M., Muriel H., 2005, ApJ, in press

Dubinski, J. 1998, ApJ, 502, 141

Edge, A. C. 1991, MNRAS, 250, 103

Eke, V. R., et al. 2004a, MNRAS, 348, 866

Eke, V. R., et al. 2004b, MNRAS, 355, 769

Feldman H., Kaiser N., Peacock J., 1994, ApJ, 426, 23

Frederic J.J., 1995, ApJS, 97, 259

Giuricin G., Marinoni C., Ceriani L., Pisani A., 2000, ApJ, 543, 178

Girardi M., Boschin W., da Costa L.N., 2000, A&A, 353, 57

González R.E., Lares M., Lambas D.G., Valotto C., 2005, AAP submitted, astro-ph/0507144

Gott III J.R., Weinberg D., Melott A., 1987, ApJ, 319, 1

Hawkins E., Maddox S., Branchini E., Saunders W., 2001, MNRAS, 325, 589

Hawkins E., and et al., 2003, MNRAS, 346, 78

- Hikage C., et al. 2003, PASJ, 55, 911
- Hoyle F., Baugh C., Shanks T., Ratcliffe A., 1999, MNRAS, 309, 659
- Huchra J.P., Geller M.J., 1982, ApJ, 257, 423
- Kerscher M., Schmalzing J., Buchert T., 1996, ASP Conference Series, 94, 247
- Landy S.D., Szalay A.Z., 1993, ApJ, 412, 64
- Limber D.N., Mathews W.G., 1960, ApJ, 132, 286
- Lin H., Kishner R.P., Schectman S.A., Landy S.D., Oemler A., Tucker D.L., Schechter P.L., 1996, ApJ, 464, 60
- Lin, Y.-T., & Mohr, J. J. 2004, ApJ, 617, 879
- Lin H., Kirshner R., Shectman S., Landy S., Oemler A., Tucker D., Schechter P., 1996, ApJ, 471, 617
- López-Cruz O., Yee H.K.C., Brown J.P., Jones C., Forman W., 1997, ApJ, 475, 97 Lynden-Bell D., 1971, MNRAS, 155, 95
- Madgwick, D. S., et al. 2002, MNRAS, 333, 133
- Martínez, H. J., Zandivarez, A., Domínguez, M., Merchán, M. E., & Lambas, D. G. 2002a, MNRAS, 333, L31
- Martínez, H. J., Zandivarez, A., Merchán, M. E., & Domínguez, M. J. L. 2002b, MNRAS, 337, 1441

- Marzke R.O., Huchra J.P. & Geller M.J., 1994, ApJ, 428, 43
- Matsubara T., 2003, ApJ, 584, 1
- Mecke K., Buchert T., Wagner H., 1994, AA, 288, 697
- Merchán M., Zandivarez A., 2002, MNRAS, 335, 216
- Merchán M, Maia M.A.G., Lambas D.G., 2000, ApJ, 545, 26
- Merritt, D. 1985, ApJ, 289, 18
- Michielsen K., De Raedt H. 2000, Computer Physics Comunications, 132, 94
- Moore B., Frenk C., White S., 1993, MNRAS, 261, 827
- Muriel H., Valotto C. & Lambas D.G., 1998, ApJ, 506, 540
- Nolthenius R., White S.D.M., 1987, MNRAS, 225, 505
- Norberg P., et al., 2002, MNRAS, 336, 907
- Padilla N. and Baugh C., 2002, MNRAS, 329, 431
- Padilla N. and Baugh C., 2003, MNRAS, 343, 796
- Padilla N., et al., 2004, MNRAS, XXX, XX
- Peacock J. and West M., 1992, MNRAS, 259, 494
- Popesso, P., Böhringer, H., Romaniello, M., & Voges, W. 2005, AAP, 433, 415
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.S. & Vettrling W.T., Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1986.

- Ramella M., Geller M., Huchra J., 1990, ApJ, 353, 51
- Ramella M., Geller M.J., Pisani A., da Costa L.N., 2002, AJ, 123, 2976
- Ratcliffe A., Shanks T., Parker Q.A., Fong R., 1998, MNRAS, 294, 147
- Rauzy S., Adami C. & Mazure A., 1998, AAP, 337, 31
- Rauzy S., 2001, MNRAS, 324, 51
- Sahni V., Sathyaprakash B., Shandarin S., 1998, ApJ, 495, L5
- Sandage A., Tammann G.A., Yahil A., 1979, ApJ, 352, 82
- Schechter P., 1976, ApJ, 203, 297
- Schlegel, D. J., Finkbeiner, D. P., & Davis, M. 1998, ApJ, 500, 525
- Schmalzing J, Buchert T. 1997, ApJ, 482, L1
- Schmalzing J, Buchert T., Melott A., Sahni V., Sathyaprakash B., Shandarin S., 1999, ApJ, 526, 568
- Springel et al 2001, New Astronomy, 6, 79
- Stoughton I., et al., 2002, AJ, 123, 485
- Strateva I., et al., 2001, AJ, 122, 1861
- Sheth R., Tormen G., 1999, MNRAS, 308, 119
- Tadros H., Efstathiou G., Dalton G., 1998, MNRAS, 296, 995
- Tegmark M., and et al., 2004, ApJ, 606, 702

Trasarti-Battistoni R., Invernizzi G., Bonometto S., 1997, ApJ, 475, 1

- Tomita H., 1986, Prog. Theor. Phys, 76, 952
- Trentham N., 1998, MNRAS, 295, 360
- Trentham N., Tully R.B., 2002, MNRAS, 335, 712
- Tucker D.L. et al., 2000, ApJS, 130, 237
- Valotto C.A., Nicotra M.A., Muriel H., Lambas D.G., 1997, ApJ, 479, 90
- Valotto, C. A., Moore, B., & Lambas, D. G. 2001, ApJ, 546, 157
- Willmer C.N.A, 1997, AJ, 114, 898
- Yang X., Mo H.J., van den Bosch F., Jing Y.P., 2004, MNRAS, XXX, XXX
- York, D. G., et al. 2000, AJ, 120, 1579
- Zandivarez A., Abadi M., Lambas D., 2001, MNRAS, 326, 147
- Zandivarez A., Merchán M., Padilla N., 2003, MNRAS, 344, 247
- Zucca E., et al., 1997, AAP, 326, 477