

ÓRBITAS DE TRANSFERENCIA ENTRE LA TIERRA Y LA LUNA

por

LEIVA, Alejandro Martín

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctor en Astronomía de la Universidad Nacional de Córdoba

Mayo, 2008

©FaMAF-UNC 2008

Director de Tesis: Dr. BRIOZZO Carlos Bruno

Resumen

A partir de la identificación y clasificación de familias de órbitas periódicas (OPs) de transferencia rápida en el problema circular de tres cuerpos restringido Tierra-Luna ¹ (PC3CR), se presenta un método sistemático que permite extender algunas trayectorias a los modelos Bicircular Sol-Tierra-Luna (PBC), Cuasibicircular Sol-Tierra-Luna (PCBC) que resultan más realistas. Este método se aplica sin restricciones a cualquier tipo de OP en el PC3CR sin necesidad de recurrir a condiciones especiales, simetrías, etc. Algunas de las trayectorias determinadas son de baja energía y presentan gran proximidad a la superficie lunar. Aplicando pequeñas perturbaciones se consiguen órbitas capturadas alrededor de la Luna. Analizando las diferencias entre el PCBC y el Sistema solar Real (SSR) y, mediante la implementación de las efemérides proporcionadas por el *Jet Propulsion Laboratory* (JPL) de la N.A.S.A., se determinan 10 arcos de transferencia rápida Tierra-Luna en el SSR para el ao 2008. Así, las órbitas en el PCBC se convierten verdaderos puntos de partida para determinar trayectorias de transferencia reales en alguna época particular.

Por otra parte, hemos desarrollado un algoritmo de control lineal que permite estabilizar OPs inestables en el PCBC. La estabilización requiere de la aplicación de mínimas perturbaciones y se aplica de manera general, a cualquier tipo de OP existente en el PCBC.

Durante más de 40 años las OPs de transferencia en el PC3CR Tierra-Luna fueron consideradas sólo con interés académico debido a su inestabilidad y sensibilidad a pequeñas perturbaciones. Al respecto, en este trabajo, hemos logrado quebrar esta barrera abriendo la posibilidad de implementar estas trayectorias en el diseño misiones espaciales realistas de larga duración y bajo costo.

¹Con este trabajo se adjunta un atlas de 80 familias de órbitas periódicas de baja energía que realizan transferencias rápidas entre la Tierra y la Luna.

Índice general

1. Modelos dinámicos utilizados.	12
1.1. Introducción.	12
1.2. Problema circular de tres cuerpos restringido.	12
1.3. Problema Bicircular Sol-Tierra-Luna.	14
1.4. Problema Cuasibicircular Sol-Tierra-Luna.	15
1.4.1. PCBC para la masa infinitesimal.	16
2. OPs de transferencia rápida en el PC3CR.	18
2.1. Introducción.	18
2.2. OPs y familias de OPs en el PC3CR.	21
2.3. OPs de transferencia rápida de baja energía.	23
2.3.1. Búsqueda numérica de OPs de Transferencia.	23
2.3.2. Reconstrucción de familias: continuación en h	25
2.3.3. Uso de simetrías.	27
2.3.4. Nuevas familias: continuación en μ .	29
2.3.5. Atlas de familias de 80 familias.	31
2.3.6. Algunos Resultados Numéricos.	34
2.4. OPs de transferencia rápida de alta energía.	46
2.4.1. Familia $T222$.	47
2.5. Discusión y comentarios finales.	49
3. OPs de Transferencia Rápida en el PCBC.	52
3.1. Órbitas Periódicas en el PBC y PCBC.	52
3.2. Extensión usando simetrías. OPs $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$.	54
3.2.1. Continuación numérica.	54
3.3. Condición de fase solar a primer orden.	57
3.4. Extensión usando la condición de fase.	62
3.4.1. Resultados Numéricos. OPs y arcos en el PCBC.	66
3.5. Discusión y comentarios finales.	74
4. Control de Órbitas Periódicas Inestables.	77
4.1. Introducción.	77
4.1.1. Puntos Periódicos Inestables.	79
4.2. Control de OPIs en el PC3CR	81
4.2.1. Control de OPIs manteniendo h constante.	81
4.3. Ejerciendo Control en el PCBC.	85
4.4. Método de control para el PCBC.	86

4.4.1.	Control con un solo impulso	86
4.4.2.	Múltiples impulsos de control	89
4.5.	Procedimientos utilizados y resultados.	91
4.5.1.	Discusión.	95
4.5.2.	Comentarios Finales y Conclusiones.	98
5.	Trayectorias en el Sistema Solar Real.	101
5.1.	Introducción.	101
5.2.	Efemérides utilizada. JPL2.	102
5.3.	Extensión al SSR.	106
5.3.1.	Continuación numérica.	107
5.4.	Resultados. Arcos en el SSR.	110
5.5.	Discusión.	117
A.		121
A.1.	Coefficientes de las funciones auxiliares del PCBC.	121
B.		124
B.1.	Puntos de referencia de 80 familias de OPs.	124
C.		129
C.1.	Bifurcación de soluciones periódicas	129
C.2.	Otras Órbitas arco y OPs de Transferencia en el PCBC.	131
D.		137
D.1.	Método OGY.	137
D.2.	PCBC sin restricciones.	139
D.3.	Matriz de Monodromía en el PCBC.	139
D.4.	Autovalores y autovectores de M.	141
D.5.	Algoritmo de control: un ejemplo.	144
D.6.	Puntos de control utilizados.	147
E.		155
E.1.	Sistemas de coordenadas baricéntrico y sinódico.	155
E.1.1.	Factores de conversión.	155
E.1.2.	Posiciones	157
E.1.3.	Velocidades	157
E.1.4.	Aceleraciones	157

Índice de figuras

1.1.	Sistemas de coordenadas sinódicos.	13
1.2.	Sistema de coordenadas sinódico (PBC).	14
1.3.	Formulación Jacobiana PCBC.	16
2.1.	Mapa de Poincaré correspondiente a una energía $h = -1,5887$	20
2.2.	Casos posibles para los autovalores de \mathbf{M}	23
2.3.	Curvas de velocidad cero.	24
2.4.	Diagrama período-energía de 287 OPs.	25
2.5.	Segmentos de una familia.	28
2.6.	OPs de las familias 026 y 027	28
2.7.	Familias biparamétricas de OPs.	30
2.8.	Curvas características de todas las familias del Atlas.	33
2.9.	Curvas características de las familias 357, 037, 043 y 056.	37
2.10.	OPs de las familias 357, 037, 043 y 056.	38
2.11.	Órbitas de la familia 357 en la región circunlunar.	39
2.12.	Órbitas de la familia 037 en la región circunlunar.	40
2.13.	Órbitas de la familia 043 en la región circunlunar.	41
2.14.	Órbitas de la familia 056 en la región circunlunar.	42
2.15.	Curvas características de las familias 146A-B-C-D.	44
2.16.	Órbitas de las familias 146A-B-C-D en la región circunlunar.	45
2.17.	OP de la familia 146A.	46
2.18.	Curvas características de la familia $T222$	47
2.19.	OPs de la familia $T222$	48
2.20.	Mapas dinámicos de 783209 de trayectorias.	50
3.1.	Curvas características de la OP $T222_{t_2}$	55
3.2.	Evolución de las trayectorias $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$	57
3.3.	Diagrama $T^*(h)$ y curvas $T/T^\odot = p/q$	62
3.4.	Curvas η_i de OPs que divergen o dejan de existir.	64
3.5.	Curvas η_i obtenidas en la extensión de OPs.	65
3.6.	Algunas órbitas arco en el PCBC.	71
3.7.	Algunas órbitas periódicas en el PCBC.	72
3.8.	Evolución de las órbitas arco $5/2 T^\odot$ y $7/2 T^\odot$ en la región circunlunar.	73
3.9.	Evolución de las OPs en la región circunlunar.	74
3.10.	Captura balística a partir de la OP 013- t_3	75
4.1.	Transferencia Tierra-Luna obtenida por Bollt y Meiss	77

4.2.	Trayectorias alrededor de un punto fijo.	80
4.3.	Algoritmo de control - h constante.	83
4.4.	Control de una OPI en el PC3CR.	84
4.5.	Algoritmo con más puntos de control.	90
4.6.	Curvas de consumo obtenidas con n puntos de control.	93
4.7.	Evolución de trayectorias alrededor de \vec{r}_0^*	94
4.8.	Evolución de trayectorias alrededor de \vec{r}_0^*	95
4.9.	OP 146A- t_3 . Curvas de consumo en el PCBC perturbado.	98
5.1.	Interpolación utilizada.	103
5.2.	Espaciamientos Δt_i en JPL2.	103
5.3.	Variación de s , v , Ω y $ r_s $ con el tiempo sinódico t	104
5.4.	Variación de las coordenadas sinódicas del Sol.	105
5.5.	Esquema utilizado para la extensión.	107
5.6.	Curvas características del arco 013- t_3	108
5.7.	Curvas características de los arcos 357- t_3 y 020- t_1	109
5.8.	Arcos de baja energía 053-1- t_3 y 180A-1- t_1 en el SSR.	112
5.9.	Arcos de baja energía 357- t_3 y 018A- t_1 en el SSR.	113
5.10.	Arcos de baja energía 187A- t_1 y 020- t_1 en el SSR.	114
5.11.	Arcos T045- t_2 y T225- t_1 en el SSR.	115
5.12.	Arcos T108- t_1 y T132- t_1 en el SSR.	116
5.13.	Captura alrededor de la Luna a partir del arco 020- t_1	119
C.1.	Órbitas de transferencia rápida T045- t_1 y T045- t_2	132
C.2.	Órbita de transferencia rápida T225- t_1	133
C.3.	Órbitas de transferencia rápida T001- t_1 y OPs T001- t_2	134
C.4.	Órbita de transferencia rápida T108- t_1	135
C.5.	Órbita de transferencia rápida T132- t_1	136

Índice de Tablas

2.1.	Familias de Copenhagen	19
2.2.	Simetrías y período mínimo T_{\min} de cada familia del Atlas.	35
2.3.	Características de las familias 357, 037, 043, y 056.	36
2.4.	Características de las familias 146A-B-C-D	43
2.5.	Puntos de bifurcación de las familias 146A-B-C-D.	43
3.1.	Condiciones iniciales de las OPs $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$	56
3.2.	Características de las OPs determinadas en el PCBC.	56
3.3.	OPs seleccionadas para la extensión al PCBC	63
3.4.	Condiciones iniciales de órbitas arco con $T = 5/2 T^\odot$	67
3.5.	Condiciones iniciales de órbitas arco con $T = 7/2 T^\odot$	68
3.6.	Condiciones iniciales de órbitas periódicas $3T^\odot$, $4T^\odot$ y $5T^\odot$	69
3.7.	Distancias mínimas y parámetros de estabilidad de las órbitas en el PCBC.	70
4.1.	Resultados obtenidos al aplicar el método de control.	96
4.2.	Tiempos estimados para ejercer control.	97
5.1.	Valores del SSR en τ_0	102
5.2.	Condiciones iniciales de arcos determinados en el SSR.	110
5.3.	Distancias mínimas de las órbitas en el SSR.	111
A.1.	Funciones auxiliares $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(t)$	121
A.2.	Funciones auxiliares $\alpha_3(t)$ y $\alpha_4(t)$	122
A.3.	Funciones auxiliares $\alpha_5(t)$ y $\alpha_6(t)$	122
A.4.	Funciones auxiliares $\alpha_7(t)$ y $\alpha_8(t)$	123
B.1.	OPs de Referencia.	125
B.2.	OPs de Referencia.	126
B.3.	OPs de Referencia.	127
B.4.	OPs de Referencia.	128
C.1.	Nuevas órbitas de transferencia en el PCBC.	131
C.2.	Distancias mínimas y parámetros de estabilidad.	131
D.1.	Puntos de control y direcciones estables, OPI $T045_{t_1}$	147
D.2.	Puntos de control y direcciones estables, OPI $T222_{t_1}$	148
D.3.	Puntos de control y direcciones estables, OPI $T225_{t_1}$	149
D.4.	Puntos de control y direcciones estables, OPI $T001_{t_1}$	150
D.5.	Puntos de control y direcciones estables, OPI 146A- t_3	151

D.6. Puntos de control y direcciones estables, OPI 013- t_3	152
D.7. Puntos de control y direcciones estables, OPI 020- t_1	153
D.8. Puntos de control y direcciones estables, OPI 171-2- t_3	154
D.9. Puntos de control y direcciones estables, OPI 053 ^d -2- t_3	154

A Isabel, Florencia y Agustín... mis amores...

”Inmerso en lugares donde la mente juega, me entrego a
placeres virtuales y no dependo de nada. Confortable
sentimiento en colores, que a veces acaricia mi cuerpo,
a veces descubre mi alma y a veces, sacude mi rabia...”
El Sueño. Guanaco Lonco.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Carlos Briozzo, director de este trabajo, por su gran disposición, dedicación, paciencia y apoyo. Él, es mi profesor desde el año 2000 (t_0), pero desde la fecha $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t \ll 10^{-9}$) se convirtió en mi amigo. Por darme libertad para *calcular compulsivamente*, muchas gracias...

A mis amores, Isabel, Florencia y Agustín que han tenido la paciencia de aguantar mis noches en vela, los ruidos de la computadora de casa y mis momentos de preocupación cuando las cuentas no salían.

A mi mamá Irene y a mis hermanos Bárbara, Javier y Juliana, por haberme apoyado siempre.

A Guanaco Lonco, José Ferreyra (El Negro), Rodolfo Dans (Fito) y Hernán Berlay (La Bestia) por ser los mejores amigos que uno puede tener.

A mi comisión de doctorado, Dr. Cristian Beaugé, Dra. Silvia Fernández y Dr. Carlos Briozzo.

Al tribunal evaluador de esta Tesis, Dr. Cristian Beaugé, Dr. Carlos Budde y Dr. Pablo Cincotta.

A la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba y a la Agencia Córdoba Ciencia S.E. por creer en este proyecto.

A todos mis profesores de la licenciatura y del doctorado, por todo lo que me han entregado.

A María José y Cristina por ser mis madres postizas, a Francisco por su buena onda y a todo el personal de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física.

Al Dr. Gustavo Carranza por preocuparse siempre por mi familia y por mi persona.

Al Dr. Diego García Lambas por ser como és, y por dejarme compartir la superaventura de Capilla del Monte 2006.

A todos mis amigos, compañeros y colegas del Observatorio Astronómico de Córdoba.

A las personas que me dijeron que no pierda tiempo y que deje de buscar cosas que no existen. Ésto, fue un gran estímulo que me permitió sortear grandes obstáculos.

A ellas les dedico los resultados de la Tabla 5.2.

A todos MUCHAS GRACIAS....

Prefacio

A través de escudriñar en el mundo de la dinámica No-Lineal y de analizar sus posibles aplicaciones en el campo aeroespacial surgió la idea de determinar posibles trayectorias de baja energía que realicen transferencias rápidas entre la Tierra y la Luna que puedan estabilizarse e implementarse en la práctica. Así, junto al Dr. Carlos Briozzo, he recorrido un largo camino entre modelos, algoritmos e integraciones numéricas. Lo que quizás empezó como un juego, hoy finaliza con este trabajo.

Extendiendo los resultados obtenidos en mi trabajo especial de la licenciatura en Astronomía [1]², y como un primer paso, se decidió determinar la mayor cantidad posible de órbitas periódicas (OPs) de transferencia rápida de baja energía en el problema circular de tres cuerpos restringido Tierra-Luna (PC3CR)[2]. En el PC3CR, las OPs integran familias monoparamétricas [3]. Se reconstruyeron numéricamente 80 familias de OPs de transferencia rápida de baja energía [4] en el PC3CR y se confeccionó un Atlas, cuyas características principales y algunos de sus resultados son presentados en el Capítulo 2.³

Cuando usamos los resultados obtenidos en el PC3CR para intentar determinar órbitas de transferencia de baja energía en modelos que incluyen la acción del Sol o la excentricidad de la órbita lunar, las cosas se complican. En este trabajo utilizamos los modelos de cuatro cuerpos simplificados Bicircular Sol-Tierra-Luna (PBC) y Cuasibicircular Sol-Tierra-Luna (PCBC) como paso intermedio para desarrollar un método sistemático que permita extender nuestros resultados al Sistema Solar real (SSR). En el Capítulo 3 se deduce una condición de fase a primer orden que permite determinar la posición solar para intentar la continuación numérica de las trayectorias del PC3CR. Esta condición se aplica con éxito y se determinan OPs y órbitas *arco* de transferencia rápida en el PCBC [5]. Las similitudes entre el PCBC y el Sistema Solar real y la determinación de arcos de referencia que puedan utilizarse en aplicaciones prácticas se discuten en el Capítulo 5.

Por otra parte, en el Capítulo 4, desarrollamos un algoritmo de control que permite estabilizar OPs inestables en el PCBC. La estabilización requiere de la aplicación de mínimas perturbaciones y se aplica a cualquier tipo de OP existente en el PCBC [6].

²Leiva, A. M.: 2002, *Órbitas Rápidas de Transferencia Tierra-Luna en el Problema Planar Circular de Tres Cuerpos Restringido*, Trabajo Especial, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C., Argentina.

³Con este trabajo se adjunta una copia completa del Atlas.

Así, en este trabajo se presentan trayectorias de transferencia de baja energía y herramientas realistas efectivas que permiten avanzar en el diseño de misiones espaciales de larga duración a bajo costo en el Sistema Solar real.

Capítulo 1

Modelos dinámicos utilizados.

1.1. Introducción.

En general, cuando intentamos resolver un problema complejo, utilizamos como paso intermedio los resultados obtenidos en modelos simplificados. Muchas veces, estas aproximaciones no son suficientes, pero en algunos casos, es sorprendente el grado de precisión con el que se logran conocer las soluciones buscadas del problema original. En particular, el modelo simplificado de tres cuerpos restringido (PC3CR), ha permitido desarrollar extensos tratados acerca de órbitas periódicas y familias de órbitas periódicas [2, 3], y sus resultados han contribuído de manera significativa en el campo de la Mecánica Celeste (ver Cap. 2).

Sin embargo, cuando consideramos trayectorias que realizan transferencias entre la Tierra y la Luna, los resultados predichos con este modelo no coinciden con los observados en la realidad y necesariamente debemos recurrir a nuevos modelos. En el caso especial de órbitas de transferencia rápida de baja energía, no se pueden despreciar las perturbaciones producidas por las acciones gravitatorias del Sol, la excentricidad de la órbita lunar, etc. [2]. Así, en este trabajo utilizaremos como paso intermedio los modelos de cuatro cuerpos problema BiCircular (PBC) y problema CuasiBiCircular (PCBC) para extender los resultados al Sistema Solar real.

En la Sección 1.2 se detallan las características del PC3CR. En las Secciones 1.3 y 1.4 se describen los modelos PBC y PCBC.

1.2. Problema circular de tres cuerpos restringido.

El problema planar circular de tres cuerpos restringido (PC3CR) es un caso especial del problema general de tres cuerpos. Dos masas primarias m_T y m_L describen órbitas coplanares circulares alrededor de su centro de masa y una tercera masa infinitesimal m , que no afecta el movimiento de las masas primarias, se mueve en el plano orbital de éstas. Las órbitas de las masas primarias yacen en el plano xy con su centro de masa en el origen. Se normalizan las unidades de masa y de distancia, $m_T = 1 - \mu$ con $m_L = \mu \simeq 0,0121505$; $d_{TL} = 1$ y se adopta para la constante de gravitación de Newton el valor

$k^2 = 1$. Se elige un sistema de coordenadas rotante con velocidad angular $n = 1$ (sistema sinódico) con origen en el centro de masa, de manera tal que las masas primarias queden fijas en el eje de las abscisas. En este trabajo se utilizan dos orientaciones (Fig. 1.1):

1. *Orientación 1:* $(x_T, y_T) = (-\mu, 0)$ y $(x_L, y_L) = (1 - \mu, 0)$. Se utiliza en el Capítulo 2 para la determinación, clasificación y análisis de familias de órbitas periódicas.
2. *Orientación 2:* $(x_T, y_T) = (\mu, 0)$ y $(x_L, y_L) = (-1 + \mu, 0)$. Se utiliza en los Capítulos 3, 4 y 5 cuando se trabaja con trayectorias en el PCBC.

Los valores unitarios de distancia, velocidad y tiempo resultan equivalentes a ~ 384400 km, ~ 1024 m/s y ~ 104 hs (un mes sidéreo/ 2π).

El Hamiltoniano de la masa infinitesimal m es autónomo y en el sistema de coordenadas sinódico queda expresado según [2]:

$$H_{PC3CR} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (1.1)$$

donde $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$, $r_1^2 = (x - x_T)^2 + y^2$ y $r_2^2 = (x - x_L)^2 + y^2$.

En este sistema de coordenadas existe una integral de movimiento C conocida como *integral de Jacobi*; en este trabajo utilizaremos la constante $h = H_{PC3CR} = -C/2$ que representa el valor de la energía de la masa infinitesimal en el sistema sinódico. La energía h es la variable canónica conjugada del tiempo t y no debe ser interpretada como la suma de la energía cinética y la energía potencial de m .

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x - x_T}{r_1^3} - \mu\frac{x - x_L}{r_2^3}, \quad (1.2)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3}. \quad (1.3)$$

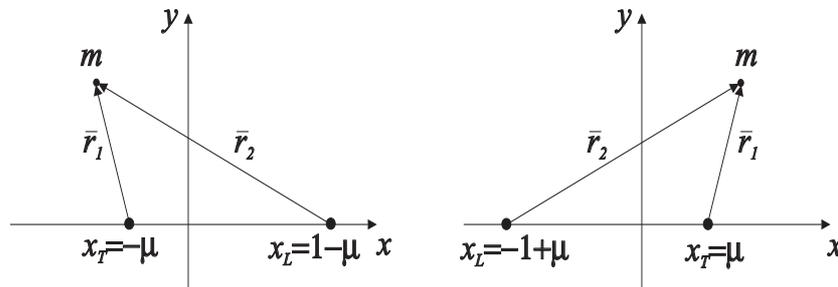


Figura 1.1: Sistemas de coordenadas sinódicos.

1.3. Problema Bicircular Sol-Tierra-Luna.

El problema Bicircular (PBC) es un problema de cuatro cuerpos. Considera tres masas primarias m_T , m_L , m_s (en este caso, la Tierra, la Luna y el Sol) y una cuarta masa infinitesimal m que no afecta el movimiento de las mismas. Las trayectorias de las masas primarias yacen en un plano; m_T y m_L se mueven en órbitas circulares alrededor de su baricentro B_{TL} y a su vez, el baricentro B_{TL} y m_s se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas del sistema B .

A partir de un marco de referencia inercial, se realiza un cambio de variables para expresar las ecuaciones de movimiento de m en coordenadas sinódicas Tierra-Luna. Estas ecuaciones quedan expresadas en una forma similar a las ecuaciones obtenidas en el PC3CR y así, podemos considerar al PBC como una perturbación (que no es pequeña) del PC3CR.

Sean a_s , n_s y ω_s , la distancia entre el baricentro Tierra-Luna B_{TL} y m_s , y las velocidades angulares medias en los sistemas de coordenadas inercial y sinódico respectivamente. Estos parámetros cumplen las siguientes relaciones [7]:

$\omega_s = 1 - n_s$ es la velocidad angular media del Sol en el sistema sinódico.
En el sistema inercial, la velocidad angular de la Luna es 1.

$a_s^3 n_s^2 = 1 + m_s$ es consecuencia de la tercera ley de Kepler.

$\theta = \omega_s t + \phi$ θ es el ángulo entre la dirección Tierra-Luna y el Sol.
 ϕ es la fase solar inicial ($t = 0$) en el sistema sinódico.

Debido a que la velocidad angular de la Luna es mayor que la velocidad angular del Sol, en el sistema sinódico, el Sol realiza un movimiento retrógrado.

Para el PBC se utiliza la *Orientación 2*; $(x_T, y_T) = (\mu, 0)$ y $(x_L, y_L) = (-1 + \mu, 0)$ (Sec. 1.2). Usando las mismas unidades del PC3CR (Sec. 1.2) obtenemos:

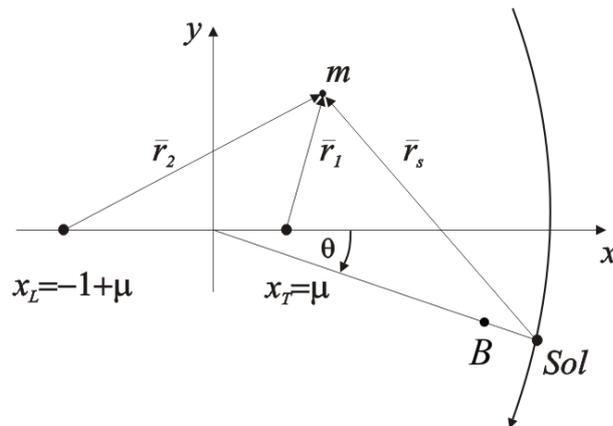


Figura 1.2: Sistema de coordenadas sinódico (PBC).

$$a_s = 388,81114$$

$$\omega_s = 0,925195985520347$$

$$m_s = a_s^3 n_s^2 - 1 \simeq 328900,54$$

El Hamiltoniano de la masa infinitesimal m es no-autónomo y 2π -periódico en θ :

$$H_{PBC} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y + \frac{m_s}{a_s^2}(x \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{m_s}{r_s}, \quad (1.4)$$

donde $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$, $r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2$, $r_s^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2$; $x_s = a_s \cos \theta$ y $y_s = -a_s \sin \theta$ representan las coordenadas del Sol (ver Fig. 1.2).

En este trabajo no analizamos trayectorias en el PBC, pero empleamos este modelo como paso intermedio para determinar órbitas periódicas en el problema Cuasibicircular a partir de trayectorias determinadas en el PC3CR (ver Sec. 3.3).

1.4. Problema Cuasibicircular Sol-Tierra-Luna.

A partir del problema general de tres cuerpos se deriva una solución cerrada para el sistema Sol-Tierra-Luna llamada solución Cuasibicircular, asumiendo que el movimiento de las tres masas se desarrolla en un plano. Para ésto, es conveniente usar la formulación de coordenadas Jacobianas (ver Fig. 1.3). Esta descomposición es realizada en un marco de referencia inercial utilizando los vectores \vec{r} desde la Tierra a la Luna y \vec{R} desde el baricentro Tierra-Luna B_{TL} al Sol. Mediante el uso de las variables complejas $\vec{r} \rightarrow z$ y $\vec{R} \rightarrow Z$, las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\ddot{z} = -G(m_T + m_L)\frac{z}{r^3} + Gm_s \left(\frac{Z - \alpha z}{r_{LS}^3} - \frac{Z + \beta z}{r_{TS}^3} \right), \quad (1.5)$$

$$\ddot{Z} = -GM \left(\alpha \frac{Z + \beta z}{r_{TS}^3} + \beta \frac{Z - \alpha z}{r_{LS}^3} \right), \quad (1.6)$$

donde $\alpha = m_T/(m_T + m_L)$, $\beta = m_L/(m_T + m_L)$, $M = m_s + m_T + m_L$, $r = |z|$, $r_{TS} = |Z + \beta z|$, $r_{LS} = |Z - \alpha z|$, y G es la constante de gravitación de Newton.

Para las Ecs.(1.5) y (1.6) se buscan soluciones que cumplan $r \simeq a_i$ y $R \simeq a_e$, las cuales, según la tercera ley de Kepler, corresponden a los siguientes movimientos medios:

$$n_i^2 = G \frac{m_T + m_L}{a_i^3}, \quad n_e^2 = G \frac{M}{a_e^3}. \quad (1.7)$$

Asumiendo que los tres cuerpos yacen sobre el eje real en $t = 0$ e introduciendo un pequeño parámetro $\varepsilon = a_i/a_e \simeq 1/389$, se proponen soluciones en series de potencias de ε . Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento, las soluciones pueden finalmente escribirse como series complejas de Fourier:

$$z = a_i \exp(in_i t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \exp(ijn t), \quad (1.8)$$

$$Z = a_e \exp(in_e t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(ijn t), \quad (1.9)$$

donde $n = n_i - n_e$ representa el movimiento angular relativo en el sistema externo (inercial). Como paso final, se expresan las soluciones en unidades del PC3CR, las cuales son: $G = 1$, $m_T + m_L = 1$, $m_s = 328900,54$, $\alpha = \mu$, $\beta = 1 - \mu$, $a_i = 1$, $a_e = 388,81114$, $n_i = 1$, y $n = 1 - n_e = 0,9251959855$.

Los valores de los coeficientes b_j y c_j pueden consultarse en el trabajo de tesis doctoral de M. A. Andreu, *The Quasi-bicircular Problem* [7].

1.4.1. PCBC para la masa infinitesimal.

El problema Cuasibicircular (PCBC) es un problema de cuatro cuerpos, en el cuál, una masa infinitesimal m se mueve bajo la influencia gravitatoria de tres masas primarias que se encuentran en movimiento Cuasibicircular.

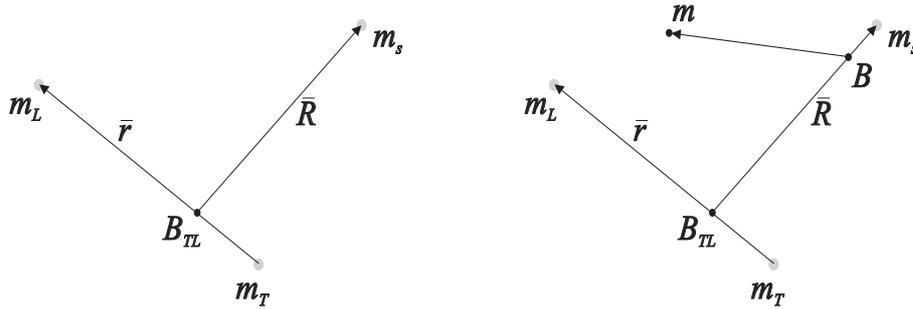


Figura 1.3: Formulación Jacobiana. Izk.: para solución Cuasibicircular. Der.: para el PCBC de la masa infinitesimal m .

Se utiliza la formulación de Jacobi mostrada en la Figura 1.3, se realiza una traslación a un sistema de coordenadas con origen en el baricentro Tierra-Luna B_{TL} que rota con velocidad angular constante y, mediante una transformación homotética, se mantiene fija la distancia Tierra-Luna. Nuevamente, estas transformaciones encuadran el problema de manera similar a la utilizada en el PC3CR.

Si el movimiento de m se desarrolla en el plano xy y se asumen las unidades de masa, distancia y velocidad del PC3CR, mediante las funciones auxiliares [7]:

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \alpha_{k0} + \sum_{j \geq 1} \alpha_{kj} \cos(jnt), & k = 1, 3, 4, 6, 7, \\ \sum_{j \geq 1} \alpha_{kj} \sin(jnt), & k = 2, 5, 8, \end{cases} \quad (1.10)$$

el Hamiltoniano en el sistema de coordenadas sinódico resulta:

$$\begin{aligned}
 H_{PCBC} = & \frac{1}{2}\alpha_1(p_x^2 + p_y^2) + \alpha_2(xp_x + yp_y) + \alpha_3(yp_x - xp_y) \\
 & + \alpha_4x + \alpha_5y - \alpha_6 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{m_s}{r_s} \right), \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

donde $p_x = (\dot{x} - \alpha_2x - \alpha_3y)/\alpha_1$, $p_y = (\dot{y} - \alpha_2y + \alpha_3x)/\alpha_1$, $r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x + 1 - \mu)^2 + y^2$ y $r_s^2 = (x - \alpha_7)^2 + (y - \alpha_8)^2$.

Los valores de los coeficientes α_{kj} para las funciones auxiliares $\alpha_k(t)$ son mostrados en el Apéndice A.1. Para más detalles consultar el trabajo original de Andreu [7].

El movimiento del Sol en el sistema sinódico es retrógrado. En $t = 0$ las masas primarias son colineales según la secuencia L - T - S . El Hamiltoniano es T^\odot -periódico con $T^\odot = 6,7911939$ (un mes solar en unidades del PC3CR) así, en el PCBC las órbitas periódicas son necesariamente kT^\odot -periódicas con k entero (ver Sec. 3.1).

En este caso, las ecuaciones de movimiento para m resultan:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} = & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1}\dot{x} + 2\alpha_3\dot{y} + xp(t) + yq(t) - \alpha_1\alpha_4 - \\
 & - \alpha_1\alpha_6 \left[(1-\mu)\frac{x-\mu}{r_1^3} + \mu\frac{x+1-\mu}{r_2^3} + m_s\frac{x-\alpha_7}{r_s^3} \right], \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} = & \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1}\dot{y} - 2\alpha_3\dot{x} + yp(t) - xq(t) - \alpha_1\alpha_5 - \\
 & - \alpha_1\alpha_6 \left[(1-\mu)\frac{y}{r_1^3} + \mu\frac{y}{r_2^3} + m_s\frac{y-\alpha_8}{r_s^3} \right], \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

con $p(t) = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dot{\alpha}_2 - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1}\alpha_2$ y $q(t) = \dot{\alpha}_3 - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1}\alpha_3$.

En el Apéndice D.2 se muestran las expresiones completas del Hamiltoniano y de las ecuaciones de movimiento para m cuando no se consideran restricciones (caso tridimensional).

El Hamiltoniano del PBC (Sec. 1.3) puede obtenerse a partir del Hamiltoniano del PCBC utilizando las siguientes expresiones $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = \frac{m_s}{a_s^2} \cos \theta$, $\alpha_5 = -\frac{m_s}{a_s^2} \sin \theta$, $\alpha_7 = a_s \cos \theta$ y $\alpha_8 = -a_s \sin \theta$.

Capítulo 2

Órbitas periódicas de transferencia rápida en el PC3CR.

2.1. Introducción.

La identificación y análisis de órbitas periódicas (OPs) y familias de OPs en el PC3CR tiene una larga historia. En ella, aparecen trabajos de Moulton, Broucke, Strömgren, Egorov, Szevehely, Hénon, Deprit, Henrard, y tantos otros... [8, 9], que resultaría imposible mencionarlos a todos aquí. Un resumen de los trabajos y resultados más importantes realizados hasta ~ 1970 , ordenados cronológicamente puede encontrarse en el libro de Victor Szebehely, *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three bodies* [2].

Relacionado con este trabajo, mencionamos la primera clasificación de familias de OPs realizada por el observatorio de Copenhagen. En general, esta clasificación fué basada en los resultados encontrados en el PC3CR para el valor del parámetro de masa $\mu = 1/2$ teniendo en cuenta familias de OPs generadas a partir de considerar órbitas periódicas infinitesimales alrededor de los puntos lagrangeanos y a partir de órbitas alrededor de las masas primarias en el problema de dos cuerpos (*familias generatrices*) [3]. En esta clasificación (ver Tabla 2.1) se utilizan *clases* que se identifican con letras minúsculas a, b, c, \dots , teniendo en cuenta las distintas familias generadas a partir de órbitas periódicas directas o retrógradas ¹. Existen órbitas especiales: la clase n contempla OPs que no son derivadas a partir de órbitas infinitesimales alrededor del punto Lagrangeano L2, y las clases o y r , incluyen familias de OPs asimétricas y simétricas que se encuentran limitadas por dos OPs que son asintóticas a los puntos lagrangeanos L4 y L5 [3, 9].

Las OPs que realizan transferencias entre las masas primarias están contenidas en las clases k, l y m .

En este trabajo utilizaremos el término *transferencia* para identificar trayectorias que se desarrollan entre la Tierra y la Luna ².

¹El movimiento directo se identifica con el sentido de rotación del sistema de coordenadas sinódico respecto del sistema de coordenadas fijo (Cap. 1)[2].

²No es necesario que las trayectorias tengan encuentros cercanos con las masas primarias.

Tabla 2.1: Clasificación de las distintas familias de OPs en el PC3CR dada por el observatorio de Copenhagen.

Clase	Descripción
<i>a</i>	OPs retrógradas alrededor de $L3$ (OPs directas no existen)
<i>b</i>	OPs retrógradas alrededor de $L1$ (OPs directas no existen)
<i>c</i>	OPs retrógradas alrededor de $L2$ (OPs directas no existen)
<i>d</i>	OPs alrededor de $L4$ (No existen para $\mu = 1/2$)
<i>e</i>	OPs alrededor de $L5$ (No existen para $\mu = 1/2$)
<i>f</i>	OPs retrógradas alrededor de m_1
<i>g</i>	OPs directas alrededor de m_1
<i>h</i>	OPs retrógradas alrededor de m_2
<i>i</i>	OPs directas alrededor de m_2
<i>k</i>	OPs alrededor de m_1 y m_2
	Movimiento directo en el sist. sinódico e inercial
<i>l</i>	OPs alrededor de m_1 y m_2
	Movimiento retrógrado en el sist. sinódico y directo en el inercial
<i>m</i>	OPs alrededor de m_1 y m_2
	Movimiento retrógrado en el sist. sinódico e inercial
<i>n</i>	OPs retrógradas, asimétricas respecto del eje y
<i>o</i>	OPs retrógradas, asimétricas respecto del eje y
	Familia limitada por 2 OPs asintóticas
<i>r</i>	OPs retrógradas, simétricas respecto del eje y
	Familia limitada por 2 OPs asintóticas

Por otro lado, en el trabajo actual de Hénon [3], se establecen definiciones más rigurosas y criterios más específicos para clasificar familias de OPs y *familias generatrices*, muchos de los cuales, se han utilizado para clasificar las familias de OPs de transferencia rápida presentadas en la Sección 2.3.2.

A partir de 1950 gran parte de los estudios se focalizaron en tratar de determinar trayectorias que puedan utilizarse en misiones espaciales Tierra-Luna. En los primeros trabajos, se identificaron algunas escasas familias de OPs simétricas y familias de arcos que realizaban *transferencias* entre las masas primarias [2, 8, 10]. Las trayectorias de transferencia y en particular, las familias de OPs de transferencia rápida de baja energía yacen en la región caótica del PC3CR. La extrema sensibilidad a pequeñas perturbaciones hizo que la comunidad científica las considerara sólo con interés académico por más de 40 años [2]. Como ejemplo de este comportamiento, en la Figura 2.1 se muestra el mapa de Poincaré [11, 12] de las intersecciones de todas las trayectorias en el PC3CR Tierra-Luna ($\mu = 0,0121505$), sobre una superficie de sección $\Sigma = \{x, y = 0, \dot{x}, y > 0\}$ correspondientes a una energía $h = -1,5887$. En rojo se aprecia la región caótica donde yacen las trayectorias de transferencia para este valor de h .

En los trabajos de Ott, Grebogy y Yorke (1990) [13] se desarrollaron las bases de una gran diversidad de técnicas de control del Caos que permitieron estabilizar trayectorias caóticas en un sin fin de sistemas dinámicos [14](ver Cap. 4). Así, en los últimos años, las

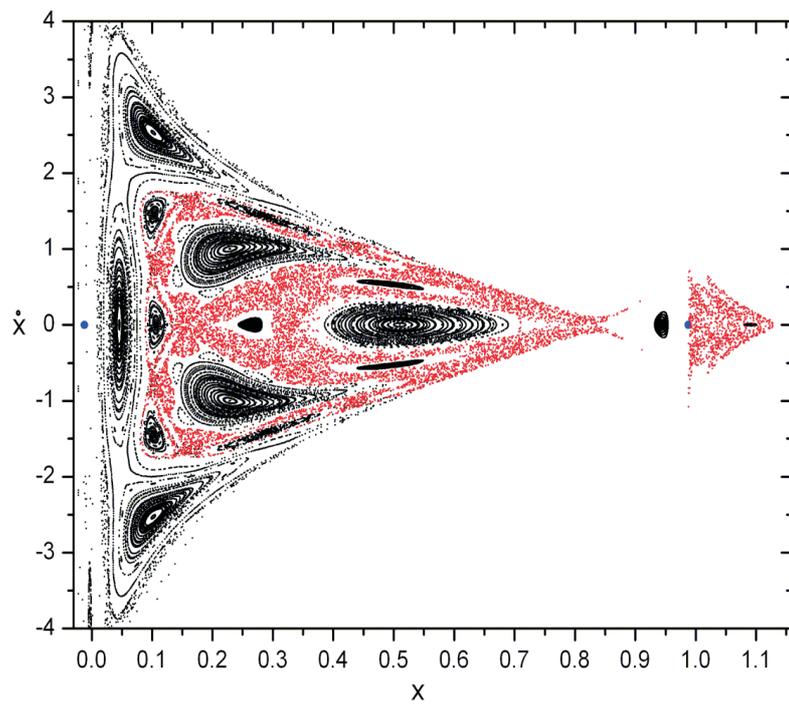


Figura 2.1: Mapa de Poincaré correspondiente a una energía $h = -1,5887$ sobre una superficie de sección $\Sigma = \{x, y = 0, \dot{x}, y > 0\}$. En la región mostrada, los puntos en rojo corresponden a trayectorias de baja energía que realizan transferencias entre las masas primarias (región caótica). Los puntos en azul representan a La Tierra (Izq.) y la Luna (Der.).

familias de OPs de baja energía han vuelto a ganar protagonismo en misiones espaciales de bajo consumo y de larga duración [15, 16, 17, 18].

La extensión de los resultados del PC3CR a modelos dinámicos más realistas no constituye en absoluto un problema trivial y resulta extremadamente complejo cuando se analizan trayectorias de transferencia. Este problema será abordado en el Capítulo 3.

Como primer paso, nuestra investigación se orientó a determinar la mayor cantidad de OPs de transferencia entre la Tierra y la Luna. Con estos resultados se confeccionó un Atlas que contiene 80 familias de OPs de transferencia rápida de baja energía en el PC3CR. En la Sección 2.3.5, se describen las características principales del Atlas y en la Sección 2.3.6, presentamos algunas de las familias determinadas. Con este trabajo se anexa una versión completa del Atlas.

En la Sección 2.4.1, presentamos una familia de OPs de transferencia de *alta energía* que será utilizada en los Capítulos siguientes.

Antes de continuar, quiero expresar mi admiración ante los resultados numéricos conseguidos por Davidson (1964)[10]. Con una desventaja computacional extrema respecto de las computadoras utilizadas en este trabajo, determina numéricamente familias de OPs clasificadas en el Atlas³.

2.2. Órbitas periódicas y familias de órbitas periódicas en el PC3CR.

A continuación, se describen brevemente algunas de las propiedades más importantes que poseen las órbitas periódicas en el PC3CR, las cuales, ayudarán a comprender las técnicas que se utilizan para determinarlas y analizarlas.

Las ecuaciones de movimiento del PC3CR pueden representarse mediante sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

donde $x \in U \subset \mathbb{R}^6$.

Diremos que una solución $\phi_t(x_0)$ de (2.1) con la condición inicial $\phi_{t_0}(x_0) = x_0$ es una solución T -periódica si, después de un intervalo de tiempo T , cumple con la condición

$$\phi_{t_0+T}(x_0) = x_0. \quad (2.2)$$

Esta solución describirá una curva cerrada en el espacio de fases ⁴.

Para una solución periódica en el PC3CR planar, la Ec. (2.2) representa cuatro ecuaciones para las cinco incógnitas x_0 y T . Estas cuatro ecuaciones no son independientes. Debido a la integral de Jacobi (1.1), si tres ecuaciones se cumplen, la cuarta también se

³En su trabajo utiliza un parámetro de masa ligeramente distinto $\mu = 0,0122774$. Aún así, claramente se identifican OPs del Atlas (ej. la familia 081A).

⁴La solución será periódica en el sistema de coordenadas rotante (sist. sinódico). En el sistema fijo (sist. inercial), en general, no lo será.

cumple. Así, las soluciones periódicas son dadas como un sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas y uno podría esperar que, para un valor fijo del parámetro de masa μ , una solución periódica sea miembro de una familia biparamétrica [3].

Por otra parte, debido al carácter autónomo del sistema, $\phi_{t+t_i}(x_0)$ también es una solución de la Ec.(2.1) para todo t_i (traslación temporal) [11, 12].

El conjunto infinito monoparamétrico formado por todas las soluciones T -periódicas que originan los infinitos valores de parámetro t_i se denomina órbita T -periódica [3]. Todas las soluciones periódicas correspondientes a una órbita periódica están representadas por la misma curva cerrada en el espacio de fases. De lo expuesto podemos concluir que en el PC3CR, las *órbitas periódicas* integran una familia monoparamétrica según algún parámetro ξ . En una familia, el período T y las condiciones iniciales x_0 de cada OP variarán suavemente con ξ [3], así, una familia de OPs quedará completamente caracterizada por una función vectorial $\Phi(t, \xi) = \phi_t(x_0, \xi)$ y una función analítica $T^*(\xi)$. La función $T^*(\xi)$ se denomina *período-en-la-familia* ⁵.

A diferencia del parámetro t_i , la elección de ξ no es trivial. En este trabajo, para un valor fijo μ , utilizaremos como parámetro el valor de la *energía* h (Sec. 1.2) y las familias quedarán determinadas por las funciones $\Phi(t, h)$ y $T^*(h)$.

Determinar una órbita T -periódica resulta equivalente a determinar una raíz de la función

$$G(x_0) = \phi_{t_0+T}(x_0) - \phi_{t_0}(x_0) = \phi_{t_0+T}(x_0) - x_0. \quad (2.3)$$

pero desde un punto de vista práctico, es mejor no fijar el valor del período y utilizar una superficie de Poincaré Σ transversal al flujo de la dinámica y reducir el problema a determinar puntos fijos del correspondiente mapa de Poincaré [19]. A partir de la localización de una OP, podemos realizar una continuación numérica a lo largo de la familia variando el parámetro ξ , hasta localizar una nueva OP que tenga el período deseado.

La estabilidad de una OP puede ser analizada directamente sobre la superficie de Sección Σ , a través de la linealización del correspondiente mapa de Poincaré alrededor de un punto fijo r^* asociado con la OP.

En el PC3CR planar, Σ es bidimensional [3]. El mapa linealizado alrededor de r^* está representado por una matriz \mathbf{M} , 2×2 . Esta matriz es simpléctica y sus autovalores λ_i y λ_e satisfacen las siguientes condiciones:

$$\lambda_i + \lambda_e \in \mathbf{R} \quad ; \quad \lambda_i \cdot \lambda_e = 1.$$

El polinomio característico puede ser expresado como

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - s\lambda + 1), \quad (2.4)$$

donde $s = \lambda_i + \lambda_e = \lambda_i + 1/\lambda_i$ se define como *parámetro de estabilidad*.

Los autovalores caracterizarán la evolución de las trayectorias en una vecindad de r^* según los siguientes casos [11, 12]:

1. λ_i y λ_e son reales, con $\lambda_i < -1 < \lambda_e < 0$.
 r^* es un *punto hiperbólico de reflexión*. El autovector del mapa linealizado correspondiente a λ_i (re. λ_e) es tangente a la variedad inestable (re. estable) del punto

⁵En el trabajo de Hénon [3], $T^*(\xi)$ se identifica como *period-in-family*.

fijo. Las iteraciones del mapa seguirán trayectorias hiperbólicas alternantes alrededor de r^* . La OP es *linealmente inestable*.

2. λ_i y λ_e son reales, con $0 < \lambda_e < 1 < \lambda_i$.
 r^* es un *punto hiperbólico ordinario*. Las iteraciones del mapa seguirán trayectorias hiperbólicas alrededor de r^* . La OP es *linealmente inestable*.
3. λ_i y λ_e son complejos, con $\lambda_i = e^{i\phi}$, $\lambda_e = e^{-i\phi}$, $0 < \phi < \pi$.
El punto fijo es un *punto elíptico*. Los autovectores son complejos conjugados y el mapa linealizado es caracterizado por una matriz rotación 2×2 . La OP es *orbitalmente estable* [11].
4. $\lambda_i = \lambda_e = 1$, o $\lambda_i = \lambda_e = -1$.
La estabilidad del punto fijo no puede ser caracterizada por el análisis lineal. En este caso estamos sobre la variedad central del mapa. Ambos casos pueden corresponderse con valores extremos según el parámetro ξ de las curvas características en Σ de las funciones $\Phi(t, \xi)$ y $T^*(\xi)$ o, en el primer caso (re. segundo), a intersecciones (re. bifurcaciones) de familias de OPs [3].

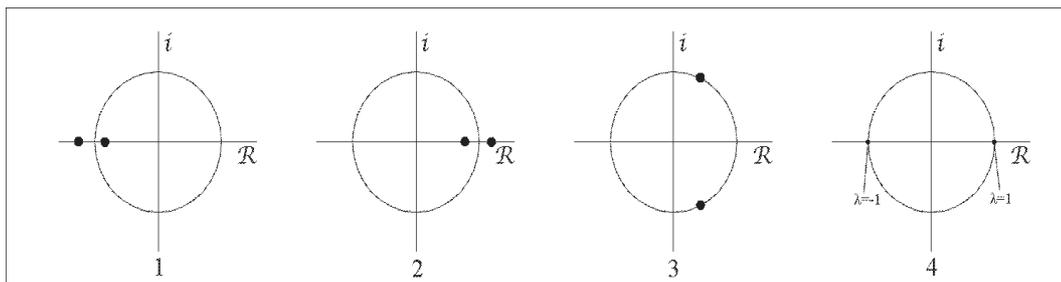


Figura 2.2: Casos posibles para los autovalores de M .

2.3. OPs de transferencia rápida de baja energía.

2.3.1. Búsqueda numérica de OPs de Transferencia.

Para realizar una búsqueda numérica de OPs de transferencia rápida de baja energía debemos elegir una región adecuada en el espacio de parámetros. Esta búsqueda y sus resultados fueron publicados en un trabajo anterior (Leiva y Briozzo, 2006) [1] y serán descritos brevemente en esta Sección.

En el PC3CR planar, los conjuntos de nivel a distintas energías h (curvas de velocidad cero) dividen al plano xy en regiones posibles y prohibidas para el movimiento. Para $h < h_1 \simeq -1,59407$ las regiones permitidas alrededor de la Tierra y la Luna están separadas y no existen trayectorias de transferencia. Las trayectorias sólo se desarrollan alrededor de alguna de las masas primarias. Para $h > h_2 \simeq -1,58617$ las regiones interiores y exteriores del sistema Tierra-Luna están conectadas. En este caso, las órbitas

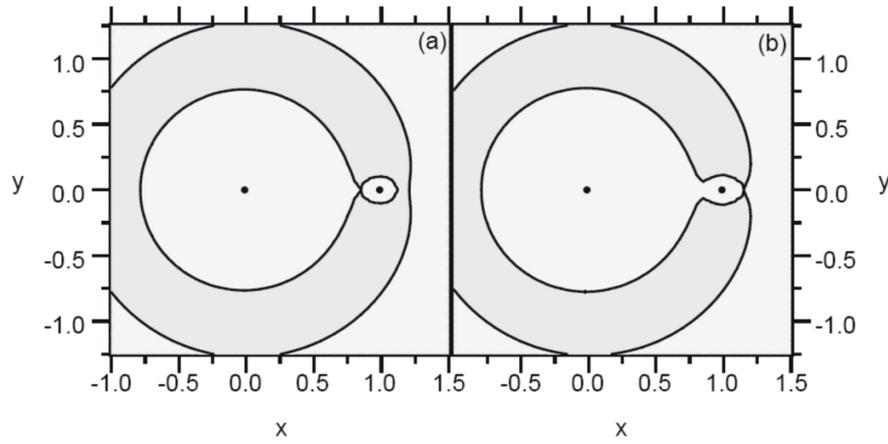


Figura 2.3: Curvas de velocidad cero para el sistema Tierra-Luna. Las regiones permitidas están sombreadas más claras y las prohibidas más oscuras. Los puntos a la izquierda y derecha representan a la Tierra y la Luna respectivamente. (a) $h \simeq -1,5941$. (b) $h \simeq -1,5862$.

de transferencia pueden escapar del sistema. La Figura 2.3 muestra las regiones de movimiento permitido en el plano xy para los casos especiales $h = h_1$ y $h = h_2$.

La búsqueda numérica inicial se realizó utilizando valores de energía comprendidos entre $h_1 < h < h_2$. Se adoptó un sistema de coordenadas sinódico con la *Orientación 1* (Sec. 1.2) y para cada valor de h se utilizó una superficie de Poincaré con las siguientes características:

$$\Sigma_1 = \{x = x_{L1}, y, \dot{x} > 0, \dot{y}\},$$

donde $x_{L1} = 0,836915310$ corresponde a la abscisa del punto Lagrangeano colineal L1. Para estos valores de energía, cualquier órbita de transferencia necesariamente debe atravesar esta superficie. La condición h constante, define sobre Σ_1 una región convexa permitida en el plano (y, \dot{y}) inscripta en un rectángulo $[-y_{\max}, y_{\max}] \times [-\dot{y}_{\max}, \dot{y}_{\max}]$. Así, para cada valor de h en el rango $h_1 < h < h_2$ con incrementos $\Delta h = 10^{-4}$ se generó una grilla de condiciones iniciales

$$(y_n, \dot{y}_m) = (-y_{\max} + n\Delta y, -\dot{y}_{\max} + m\Delta \dot{y}), \quad (n, m \in \mathbf{N}_0),$$

con $-y_{\max} < y_n < y_{\max}$, $-\dot{y}_{\max} < \dot{y}_m < \dot{y}_{\max}$, $\Delta y = 10^{-2}y_{\max}$ y $\Delta \dot{y} = 10^{-2}\dot{y}_{\max}$, determinando los correspondientes valores \dot{x}_{nm} a través del Hamiltoniano H_{PC3CR} (Sec. 1.1) y descartando aquellas condiciones iniciales que no se corresponden con órbitas permitidas. Se integraron todas las trayectorias utilizando un integrador de paso variable Bulirsch-Stoer [20] de precisión 10^{-14} y sólo se retuvieron órbitas que se desarrollaron entre la Tierra y la Luna y que retornaron a Σ_1 en tiempos $T < 40$ (~ 170 días), con una distancia de retorno δ :

$$\delta = \sqrt{(y(T) - y_n)^2 + (\dot{y}(T) - \dot{y}_m)^2} < 2 \times 10^{-3}.$$

Las trayectorias seleccionadas se utilizaron como semillas para intentar la convergencia a través de la implementación del algoritmo Newton-Raphson [20]. El conjunto de condi-

ciones iniciales que logró la convergencia fue refinado extrayendo órbitas repetidas.⁶ Como resultado final de la búsqueda, se lograron determinar 287 condiciones iniciales en Σ_1 correspondientes a OPs de transferencia rápida ($T < 40$). Las trayectorias están determinadas con un error $< 10^{-12}$. La Figura 2.4 muestra la distribución período-energía (h, T) de las OPs determinadas. En este diagrama se alcanzan a distinguir algunas estructuras de familias de OPs.

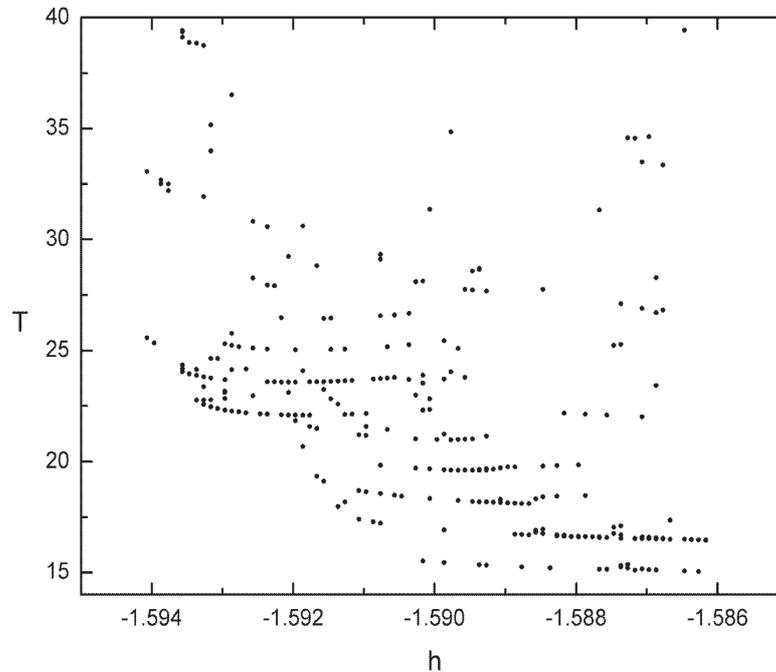


Figura 2.4: Diagrama período-energía de las 287 OPs identificadas.

2.3.2. Reconstrucción de familias de OPs: continuación en h .

Se reconstruyeron numéricamente las familias monoparamétricas correspondientes a cada una de las 287 OPs encontradas. Cada OP se continuó numéricamente variando el parámetro h en las dos direcciones posibles.

Como primer paso, se utilizó un punto fijo en Σ_1 como semilla inicial de un algoritmo de Newton-Raphson y se incrementó el valor de h en $\Delta h = 10^{-8}$. Se aplicó el algoritmo hasta lograr la convergencia a un nuevo punto fijo en Σ_1 con un error $< 10^{-9}$. Este proceso se realizó acumulando unos pocos puntos a lo largo de un segmento de la familia y luego se aceleró la continuación implementando una extrapolación polinomial para obtener una nueva semilla inicial a partir de los últimos puntos calculados [20]. Ésto permitió realizar mayores incrementos en h , con valores típicos de 10^{-5} . Todas las integraciones fueron realizadas con una rutina en Fortran90 y con un integrador Bulirsch-Stoer de paso variable de precisión 10^{-14} .

⁶A través del algoritmo de Newton-Raphson muchas condiciones iniciales convergen a un mismo punto fijo. En otros casos, se obtienen nuevos puntos fijos que representan la misma OP (órbita k -periódica en Σ_1) y órbitas que presentan multiplicidad de períodos respecto de otras OPs.

En todos los casos la continuación fué interrumpida cuando no se logró la convergencia después de 200 pasos. El algoritmo de Newton-Raphson deja de ser efectivo cuando las OPs colisionan con la Luna o cuando los valores absolutos de los autovalores inestables del mapa linealizado son grandes. La gran inestabilidad de las órbitas produce una gran acumulación de errores numéricos que impiden la convergencia.

Según el parámetro ξ (en nuestro caso h), una familia de OPs puede clasificarse como [2, 3]:

- *Familia cerrada*: la familia se cierra sobre sí misma. Al variar ξ , las curvas características $\Phi(t, \xi)$ y $T^*(\xi)$ describen curvas cerradas.
- *Familia abierta*: en cada una de las direcciones posibles del parámetro ξ la familia alcanza una *terminación natural*⁷, en la cual, una de las tres cantidades siguientes crece sin límites
 1. La dimensión de la órbita, ésto es, la distancia máxima de la órbita al origen.
 2. El valor de la constante de Jacobi ($C = -2h$).
 3. El período T .

En el caso de una colisión, las singularidades en las ecuaciones de movimiento pueden evitarse utilizando variables regulares (ej. regularización de Birkhoff [2]). En particular, algunos experimentos numéricos realizados mostraron que, las OPs de transferencia obtenidas después de la colisión sufren nuevas colisiones y se hacen extremadamente inestables (gran cambio en los autovalores con pequeños cambios del parámetro h). En este trabajo, la identificación de OPs periódicas transferencia en el PC3CR se utiliza como punto de partida para facilitar la determinación de trayectorias de transferencia en el PCBC y el SSR. Los métodos que desarrollamos en los capítulos siguientes, permiten la extensión de algunos resultados y se aplican a OPs de inestabilidad *moderada*, por este motivo, en las familias utilizadas en este trabajo, NO se alcanza la terminación natural.

En algunos casos, la continuación numérica alcanza un punto de la familia correspondiente a una órbita de bifurcación [3]. Consideremos que $\phi_T(x_0, h_0)$ representa una OP en Σ_1 que bifurca para el valor $h = h_0$. Para encontrar todas las direcciones emergentes de las familias de OPs involucradas debemos considerar los cambios que se deben realizar en el parámetro h_0 y en las condiciones iniciales x_0 en Σ_1 . Sean estos cambios Δh y Δx respectivamente. Expandiendo la Ecuación (2.1) alrededor de la órbita T -periódica obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \phi_T(x_0 + \Delta x, h_0 + \Delta h) &= \phi_T(x_0, h_0) + \frac{\partial \phi_T}{\partial x}(x_0, h_0)\Delta x + \frac{\partial \phi_T}{\partial h}(x_0, h_0)\Delta h + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial x^2}(x_0, h_0)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial x \partial h}(x_0, h_0)\Delta x \Delta h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial h^2}(x_0, h_0)(\Delta h)^2 + \dots \end{aligned}$$

la cual, debe ser igual a $x_0 + \Delta x$. Para simplificar el análisis, se realiza un cambio lineal de coordenadas $\Delta x = Ry$, de manera tal que la matriz de monodromía $M = \frac{\partial \phi_T}{\partial x}(x_0, h_0)$,

⁷El principio de terminación de una familia fue demostrado por Wintner (1931) y Birkhoff (1936) [2, 3].

quede expresada en la forma diagonal de Jordan. En estas nuevas coordenadas se obtiene una ecuación de la forma

$$0 = (M - I) y + P_1 \Delta h + y^T Q y + C y \Delta h + P_2 (\Delta h)^2 \quad (2.5)$$

donde $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ y Q, C son matrices 2×2 ⁸. Las soluciones de (2.5) permiten determinar las nuevas familias [11, 12].

Por otra parte, en muchas familias se obtienen valores extremos para algún valor de h (*puntos de retorno*). En estos casos se realizó, como paso intermedio, la continuación numérica utilizando como parámetro la coordenada y , hasta salvar la singularidad (ver Sec. 2.3.3).

Muchas de las OPs utilizadas son parte de una misma familia. Para iniciar la continuación se seleccionó arbitrariamente una de las órbitas y con las restantes, se reconstruyeron pequeños segmentos. A través de la comparación directa de los resultados se descartaron las familias repetidas.

2.3.3. Uso de simetrías.

El PC3CR posee una simetría fundamental, definida por la siguiente transformación [2, 3]:

$$S : (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, t). \quad (2.6)$$

Si aplicamos S a una solución obtendremos otra solución. Siguiendo el trabajo de Hénon [3], dos definiciones de simetría serán usadas, las cuales deben ser interpretados correctamente.

A través de S , una OP será *simétrica* cuando se obtiene la misma OP⁹ y *asimétrica* cuando se obtiene una órbita distinta. Las OPs relacionadas por S , serán órbitas *simetrizadas*¹⁰.

Diremos que una familia es *simétrica* cuando, al aplicar S sobre alguna OP de la familia se obtiene otra órbita de la misma familia. Las familias que no cumplan esta condición serán *asimétricas*. Los siguientes casos son posibles:

- Una familia simétrica de órbitas simétricas (abreviado Ss),
- Una familia simétrica de órbitas asimétricas (abreviado Sa),
- Una familia asimétrica de órbitas asimétricas (abreviado Aa).

La Figura 2.5 se presenta la curva característica $y(h)$ correspondiente a una familia simétrica de OPs asimétricas. En el punto de retorno ($h \simeq -1,5894$) existe una OP simétrica.

La función $\Phi(t, h)$ que caracteriza una familia, es en sí misma, una familia monoparamétrica de curvas $\phi_h(t)$ en el espacio de fases parametrizada por la energía h . En general, en

⁸En Σ_1 , $x = x_{L1}$ y sólo deberemos determinar los valores (y, \dot{y}) ; mediante la integral de Jacobi obtenemos el correspondiente valor de \dot{x} .

⁹La OP está formada por la misma curva pero, en general, está temporalmente trasladada respecto de la OP original.

¹⁰En el trabajo de Hénon [3], se utilizan los términos *symmetric* y *asymmetric* en el primer caso y *symmetrical* en el segundo.

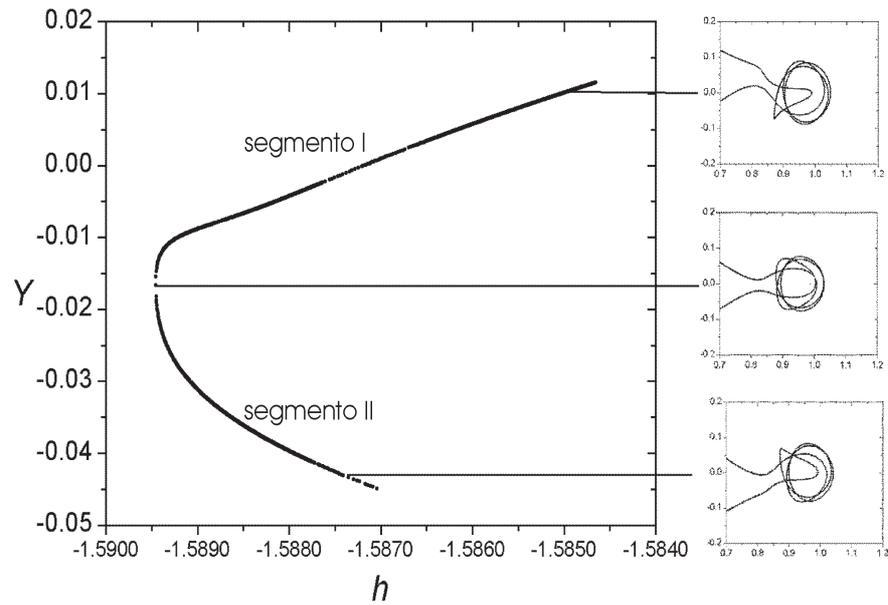


Figura 2.5: Segmentos de una familia. La Figura muestra la curva característica $y(h)$ en Σ_1 de una familia simétrica de OPs asimétricas (Sa) y la evolución de tres OPs en la región circunlunar.

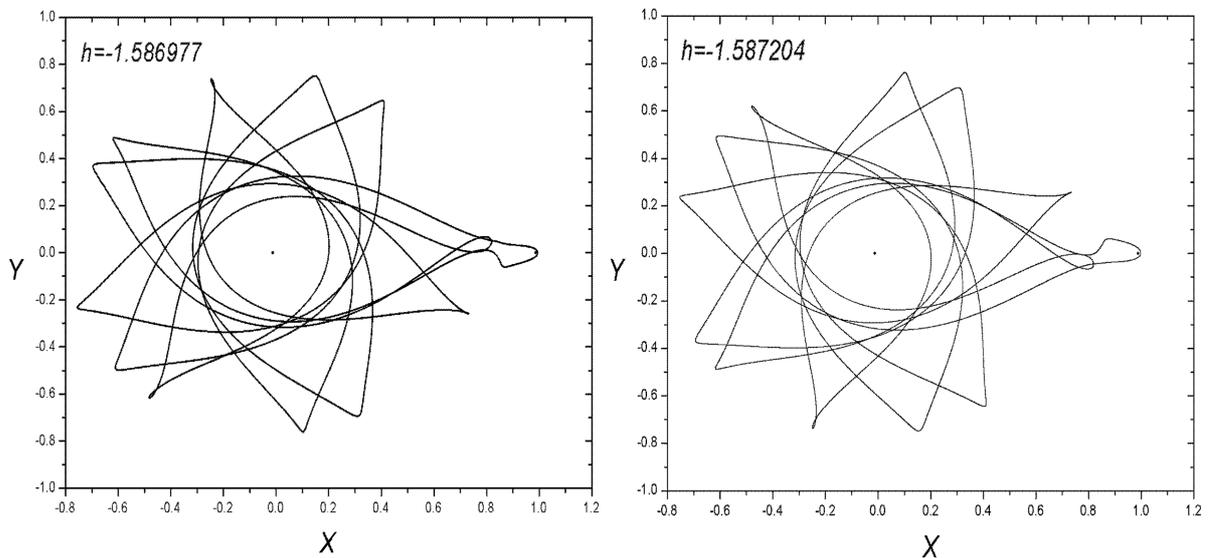


Figura 2.6: Evolución de dos OPs en el plano xy (sistema sinódico) de las familias 026 (Izq.) y 027 (Der.). Los valores de los períodos son $T = 34,64974$ y $T = 34,53796$ respectivamente. Ambas son familias asimétricas de OPs asimétricas (Aa).

una familia existe más de una OP para un dado valor de h . Los tramos de una familia en los cuales, las curvas $\phi_h(t)$ varían suavemente con h , serán los *segmentos* de la familia ¹¹ y diremos que las OPs pertenecen a distintos *segmentos* [3] (ver Fig. 2.5).

En la reconstrucción numérica de familias, las propiedades de simetría fueron utilizadas de dos maneras:

- Para una familia asimétrica de órbitas asimétricas, aplicando S a la familia completa se obtuvo una nueva familia asimétrica de órbitas asimétricas.
- Para una familia simétrica de órbitas asimétricas, aplicando S a un segmento de la familia se obtuvo otro segmento de la misma familia.

Como ejemplo mencionamos a la familia 027, obtenida por aplicar S a la familia 026 ¹² (Fig. 2.6). S puede ser interpretada como una simetría respecto del eje x considerando una evolución reversa en el tiempo [3].

2.3.4. Nuevas familias: continuación en μ .

Como se mencionó en la Sección 2.2, para un valor fijo del parámetro de masa μ , una OP integra una familia monoparamétrica de parámetro h (h -familia). Pero, para un valor fijo de h se puede analizar la variación de una OP a través de la familia de sistemas dinámicos parametrizados por μ (μ -familia). En el trabajo de Hénon, *Generating Families in the Restricted Three Body Problem* [3], se determinan familias de OPs en el PC3CR a partir de familias generadoras de OPs en el problema de dos cuerpos considerando la condición de límite $\mu \rightarrow 0$. Así, podemos extender las definiciones de las secciones anteriores asumiendo que una OP es miembro de una familia *biparamétrica* de OPs parametrizada por los parámetros h y μ [3]. Esta familia con estructura más compleja quedará caracterizada por una función vectorial $\Phi(t, h, \mu)$ y una función analítica $T^*(h, \mu)$.

En un trabajo reciente [21], se estudió el comportamiento de tres familias de OPs (familias 037, 043 y 056) para valores decrecientes del parámetro de masa μ , partiendo de los resultados obtenidos en el PC3CR Tierra-Luna ($\mu_0 = 0,0121505$). Las familias 037, 043 y 056 son Aa , Aa y Ss respectivamente. La familia 043 se obtiene de aplicar la condición de simetría (2.6) a la familia 037. La similitud existente entre el período, la energía y la morfología de las OPs sugirió la existencia de alguna relación entre ellas.

Las integraciones mostraron que las familias forman parte de una estructura compleja que presenta varias bifurcaciones, intersecciones y reconexiones a medida que h y μ varían.

El análisis realizado permitió determinar una nueva h -familia simétrica de OPs simétricas (Ss) para un valor $\mu < \mu_0$, la cual, fue continuada para valores crecientes hasta alcanzar el valor μ_0 (Sistema Tierra-Luna). Esta familia se clasificó como familia 357 y está compuesta por OPs de transferencia de baja energía. Respecto de todas las OPs de baja energía presentadas en este trabajo (Sec. 2.3.5), la familia 357 contiene las OPs que realizan las transferencias más rápidas.

Cuatro vistas de las curvas características $y(h, \mu)$ de la estructura biparamétrica de las

¹¹En un *segmento* de la familia existe una única curva $\phi_h(t)$ para cada valor de h .

¹²La clasificación utilizada para identificar a cada familia se detalla en la Sección 2.3.5.

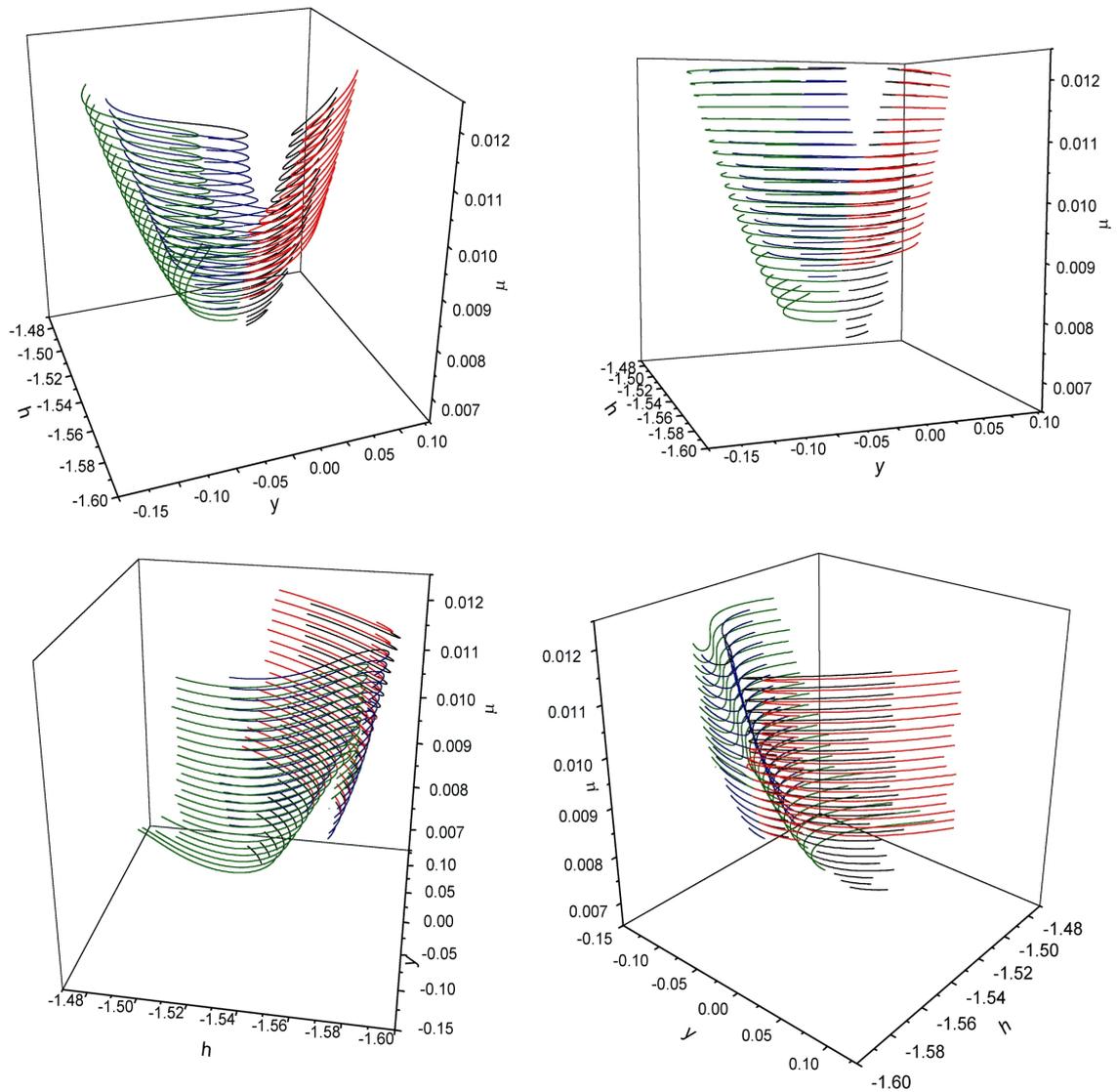


Figura 2.7: Curvas de nivel $(y, h)_\mu$ en Σ_1 de las familia biparamétrica de OPs para distintos valores de μ . Familias 037 (en azul), 043 (en rojo), 056 (en negro) y 357 (en verde).

familias 037, 043, 056 y 357 pueden apreciarse en la Figura 2.7. La continuación numérica se extendió desde el valor en μ_0 hasta $\mu \simeq 0,0089$ [21]. Para $\mu \gtrsim 0,010505$ las cuatro familias h -familias están bien diferenciadas y no presentan intersecciones. En el valor $\mu = 0,0107505$ las h -familias 037 y 043 se encuentran reconectadas en h -familias diferentes, que presentan sendas bifurcaciones a partir de la h -familia 056. En el sentido de μ creciente estas bifurcaciones van acercándose hasta que colapsan en una intersección múltiple de tres h -familias en $\mu \simeq 0,01085$. Luego de este valor, las tres h familias (037, 043 y 056) son independientes y no se intersectan. De manera similar, en $\mu = 0,0103105$ las h -familias 056 y 357 comienzan a intersectarse. Para el valor $\mu = 0,0102905$ están reconectadas y ocurren bifurcaciones que se mezclan con las h -familias reconectadas originadas por las h -familias 037 y 043.

En el sentido de μ creciente tenemos dos h -familias con sendos puntos de retorno en h que se acercan progresivamente hasta colapsar en una intersección para $\mu \simeq 0,01030$. después de la cual, aparecen dos h -familias que presentan puntos de retorno en y .

En la Sección 2.3.6 se muestra en detalle cada una las h -familias para el valor μ_0 correspondiente al sistema Tierra-Luna.

El ejemplo mostrado aquí, permite ver que, el análisis de familias biparamétricas de OPs constituye un nuevo camino para determinar nuevas familias OPs de transferencia en el PC3CR. En particular, en este caso, a partir de las familias 037, 043 y 056 se determinamos la familia 357.

2.3.5. Atlas de familias de OPs de transferencia rápida y de baja energía en el PC3CR.

En esta sección se describen las características principales de los resultados obtenidos al reconstruir numéricamente 80 familias de OPs de transferencia en el PC3CR Tierra-Luna. Con estos resultados se confeccionó un Atlas de familias de OPs que fué publicado en forma electrónica [4].

Por completitud y por ser fundamental en el desarrollo de esta Tesis, con este trabajo se adjunta una copia completa del Atlas.

En el Apéndice B.1 se listan los valores de las condiciones iniciales en Σ_1 de algunas OPs de cada familia.

Estructura del atlas

Número de una Familia: Para identificar una familia se utiliza un número arbitrario de tres dígitos (familia 037, familia 056, etc.). En general, este número se corresponde con el asignado a la OP seleccionada para iniciar la reconstrucción a partir de las 287 condiciones iniciales encontradas en la búsqueda numérica original (Sec. 2.3.2). En algunos casos, se utilizaron números consecutivos para familias obtenidas a través de la condición de simetría (2.6). Los números mayores a 287 se reservaron para las familias determinadas mediante las técnicas descriptas en las Secciones 2.3.3, 2.3.4 y 2.5.

Ramas de una Familia: En una bifurcación, dos o más familias comparten una misma OP. En estos casos, consideramos que todas las familias son ramas de una única

familia. Así, para la clasificación se asigna un mismo número pero se utilizan letras mayúsculas para distinguir cada una de las ramas (familias 146A, 146B, ...). La referencia A indica la rama principal de la familia que, en general, es una familia segmento simétrica compuesta por OPs simétricas (ver Sec. 2.3.6).

Puntos de Bifurcación: Sobre la superficie de Poincaré Σ_1 , los puntos correspondientes a OPs de bifurcación son identificados como P_1, P_2, \dots . Para cada punto se muestran los valores de la energía, el período y las condiciones iniciales (y, \dot{x}, \dot{y}) en Σ_1 de la correspondiente OP de bifurcación.

Valores de Energía y Período: Para cada familia y cada rama se muestran los valores mínimos y máximos alcanzados por la energía y el período; $h_{\min}, h_{\max}, T_{\min}$ y T_{\max} respectivamente.

Es importante remarcar que en la reconstrucción numérica no se alcanzó la terminación natural de las familias (Sec. 2.3.2), por lo tanto, estos valores deben considerarse sólo como representativos los segmentos determinados.

En el Atlas, las familias se presentan teniendo en cuenta el valor T_{\min} , en orden creciente.

Curvas Características: Para cada familia y cada rama se incluyen los siguientes gráficos:

- Diagrama período-energía $T^*(h)$.
- Curvas características $y(h), \dot{y}(h),$ y $\dot{x}(h)$ sobre Σ_1 .
- variación del *índice de estabilidad* $s = \text{sign}(\lambda) \log \|\lambda\|$ con la energía h .
- Curvas características $h(x_i)$ sobre Σ_2 .

Como indicador de estabilidad, resulta más apropiado utilizar el siguiente *índice de estabilidad*: $s = \text{sign}(\lambda) \log \|\lambda\|$. Este parámetro está definido a partir del autovalor inestable $\lambda = \lambda_i$ de la linealización del mapa de Poincaré alrededor del punto fijo. El *índice de estabilidad* es positivo para puntos hiperbólicos ordinarios, negativo para puntos hiperbólicos de reflexión y se anula en puntos elípticos y en puntos correspondientes a intersecciones y bifurcaciones de familias.

Las curvas características $h(x_i)$ están determinadas sobre una nueva superficie de Poincaré

$$\Sigma_2 = \{x, y = 0, \dot{x}, \dot{y} > 0\}, \quad (2.7)$$

y muestran las intersecciones x_i de las OPs para $x_i > 0,7$. Estas curvas características son similares a las utilizadas por otros autores [2] y resultan útiles para analizar la evolución de la geometría de las órbitas en la región circunlunar.

Cuando ocurre una bifurcación, se muestran gráficos adicionales de $T^*(h), y(h),$ y $h(x_i)$ de todas las ramas, se identifican los puntos de bifurcación y se detalla la estructura completa de la familia.

Trayectorias: Para todas las familias se muestran los gráficos de algunas órbitas completas en el plano xy y la variación de la forma general de las trayectorias en

la región circunlunar con la energía. Para familias que presentan bifurcaciones se muestran algunas trayectorias de cada rama.

Puntos de Referencia: El Atlas se completa con los valores de las condiciones iniciales en Σ_1 de OPs pertenecientes a cada familia, cada rama y cada familia segmento. Estos puntos de referencia permiten reproducir los resultados obtenidos en este trabajo (Apéndice B.1).

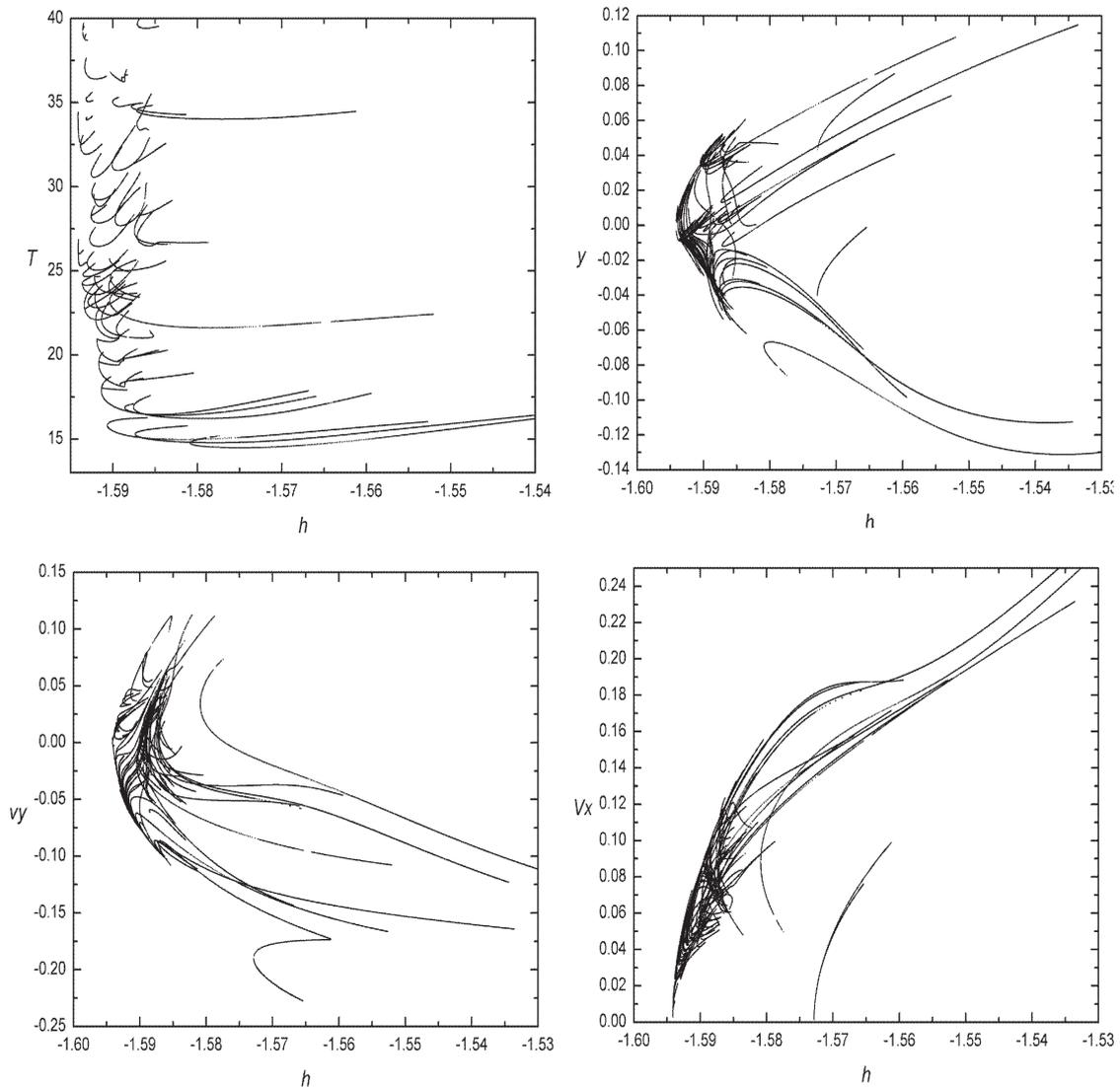


Figura 2.8: Curvas características $T^*(h)$, $y(h)$, $\dot{y}(h)$ y $\dot{x}(h)$ en Σ_1 de todas las familias del Atlas.

La Figura 2.8 presenta las curvas características en Σ_1 de todas las familias de OPs que integran el Atlas. Es interesante comparar la gráfica $T^*(h)$ con la Figura 2.4, correspondiente a las primeras 287 OPs determinadas. Notar que, en muchos casos, se han logrado reconstruir familias de OPs para valores de energía mayores a los considerados en

la búsqueda inicial ($h > -1,58617$). Para estos valores, existen trayectorias que pueden escapar del sistema (Sec. 2.3.1).

2.3.6. Algunos Resultados Numéricos.

A continuación se muestran algunos de los resultados del Atlas de familias de OPs. Muchos serán utilizados en los próximos Capítulos.

Por brevedad, en la Tabla 2.2 sólo se listan las propiedades de simetría (Sec. 2.3.3) y los valores de período T_{\min} , en orden creciente, de las 80 familias de OPs de transferencia rápida que integran el Atlas. En el Apéndice B.1 se detallan los puntos de referencia de cada familia.

Tabla 2.2: Simetrías y período mínimo T_{\min} de cada familia del Atlas.

Familia	Simetría	T_{\min}	Familia	Simetría	T_{\min}
357	S_s	14,487454	286B	S_a	26,022460
037	A_a	14,786812	171	S_s	26,459669
043	A_a	14,786812	020	A_a	26,483357
056	S_s	14,975518	021	A_a	26,483355
053	S_s	16,220757	013	S_s	26,574839
084	A_a	16,409829	222A	S_s	27,850288
077	A_a	16,409829	222B	S_a	28,271856
180A	S_s	16,459140	081A	S_s	27,684763
180B	A_a	17,915057	081B	S_a	28,274740
197A	S_s	18,122697	081C	S_a	28,637522
197B	S_a	18,450933	200	S_s	28,827241
197C	S_a	18,148249	172	S_s	29,220943
197D	S_a	19,401657	209	A_a	30,572004
146A	S_s	19,607828	232	A_a	30,572004
146B	S_a	19,608057	058A	S_s	30,966292
146C	S_a	19,755857	058B	S_a	31,347506
146D	S_a	20,788368	263A	S_s	31,933083
178	S_s	20,992907	263B	S_a	32,489625
136A	S_s	21,010742	287	S_s	32,562769
136B	S_a	21,115366	032A	S_s	33,370152
144A	S_s	21,614173	032B	S_a	33,891167
144B	S_a	23,636883	254	A_a	33,984921
187A	S_s	22,099407	255	A_a	33,984922
187B	S_a	22,743109	026	A_a	34,017748
147	S_s	22,350225	027	A_a	34,017748
194	A_a	22,812098	044	A_a	34,285575
244	A_a	22,812096	045	A_a	34,289797
305	S_s	23,268005	132	A_a	34,758144
018A	S_s	23,425287	133	A_a	34,758144
018B	S_a	25,007851	256A	S_s	35,055198
188A	S_s	23,585381	256B	S_a	35,263374
188B	S_a	24,137851	300A	S_s	36,245398
157A	S_s	23,706160	300B	S_a	36,506826
157B	S_a	24,653557	300C	S_s	36,260612
250	A_a	24,659896	300D	S_s	36,625264
251	A_a	24,659896	238	S_s	36,403708
302	A_a	24,955219	262A	S_s	38,707003
301	A_a	25,033123	262B	S_a	39,357787
192	S_s	25,039939	262C	S_a	38,815998
286A	S_s	25,304381	008	S_s	39,423500

Familias 357, 037, 043, y 056. Las más Rápidas.

A continuación se presentan las características principales de las cuatro familias de OPs más rápidas del Atlas. Estas familias integran una compleja estructura en el espacio de parámetros (h, μ) (Sec. 2.3.4).

La Tabla 2.3 muestra las simetrías y los valores mínimos y máximos alcanzados por la energía y el período en estas familias. Las curvas características correspondientes se muestran en la Figura 2.9. Las Figuras 2.10 a 2.14, muestran las formas generales que presentan las OPs en el plano xy y la evolución de algunas trayectorias en la región circunlunar.

La familia 357 contiene la OP que realiza la transferencia más rápida respecto de todas las trayectorias del Atlas, con un valor de período $T = 14,487454$ (~ 62 días).

La evolución de las trayectorias en la región circunlunar permite ver que todas las familias sufren una colisión con la Luna.

Las familias 037 y 043 están relacionadas por la condición de simetría (2.6). Las Figuras 2.12 y 2.13 muestran claramente la reflexión geométrica de la forma de las trayectorias respecto del eje x que existe entre estas familias. Por otro lado, ambas familias presentan las mismas curvas características $T^*(h)$, $h(x_i)$ y $(h, \text{sign}(\lambda)\log(|\lambda|))$.

En las cuatro familias se observa sólo una OP *linealmente estable*. A partir de esta órbita se obtienen órbitas hiperbólicas ordinarias y órbitas hiperbólicas de reflexión en cada una (Fig. 2.9).

Tabla 2.3: Características principales de las familias 357, 037, 043, y 056.

Familia	Simetría	h_{\min}	h_{\max}	T_{\min}	T_{\max}
357	Ss	-1,580898	-1,516112	14,487454	17,812637
037	Aa	-1,587380	-1,534414	14,786812	16,716217
043	Aa	-1,587380	-1,533589	14,786812	16,760541
056	Ss	-1,590666	-1,552698	14,975518	16,268286

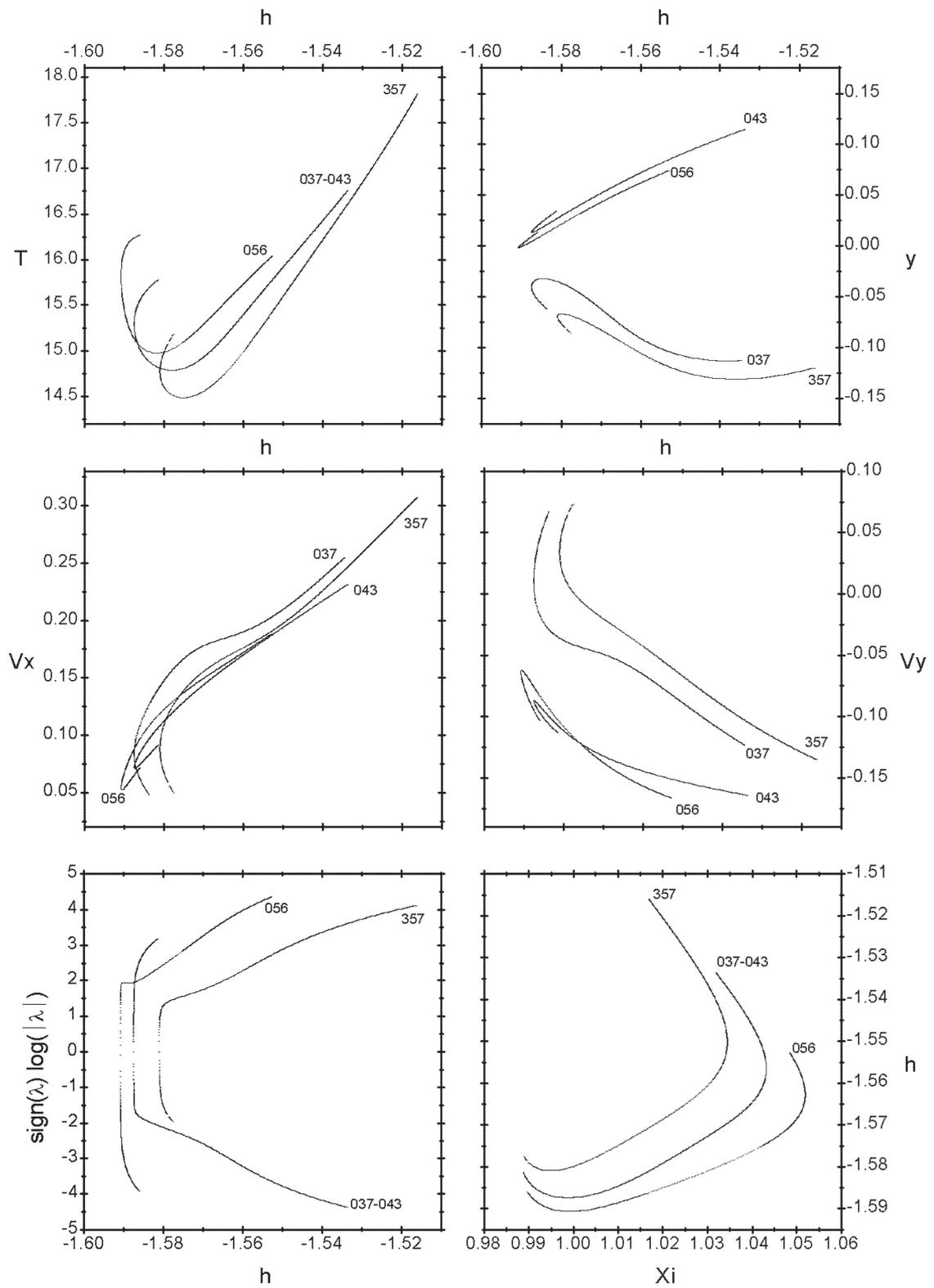


Figura 2.9: Curvas características de las familias 357, 037, 043 y 056.

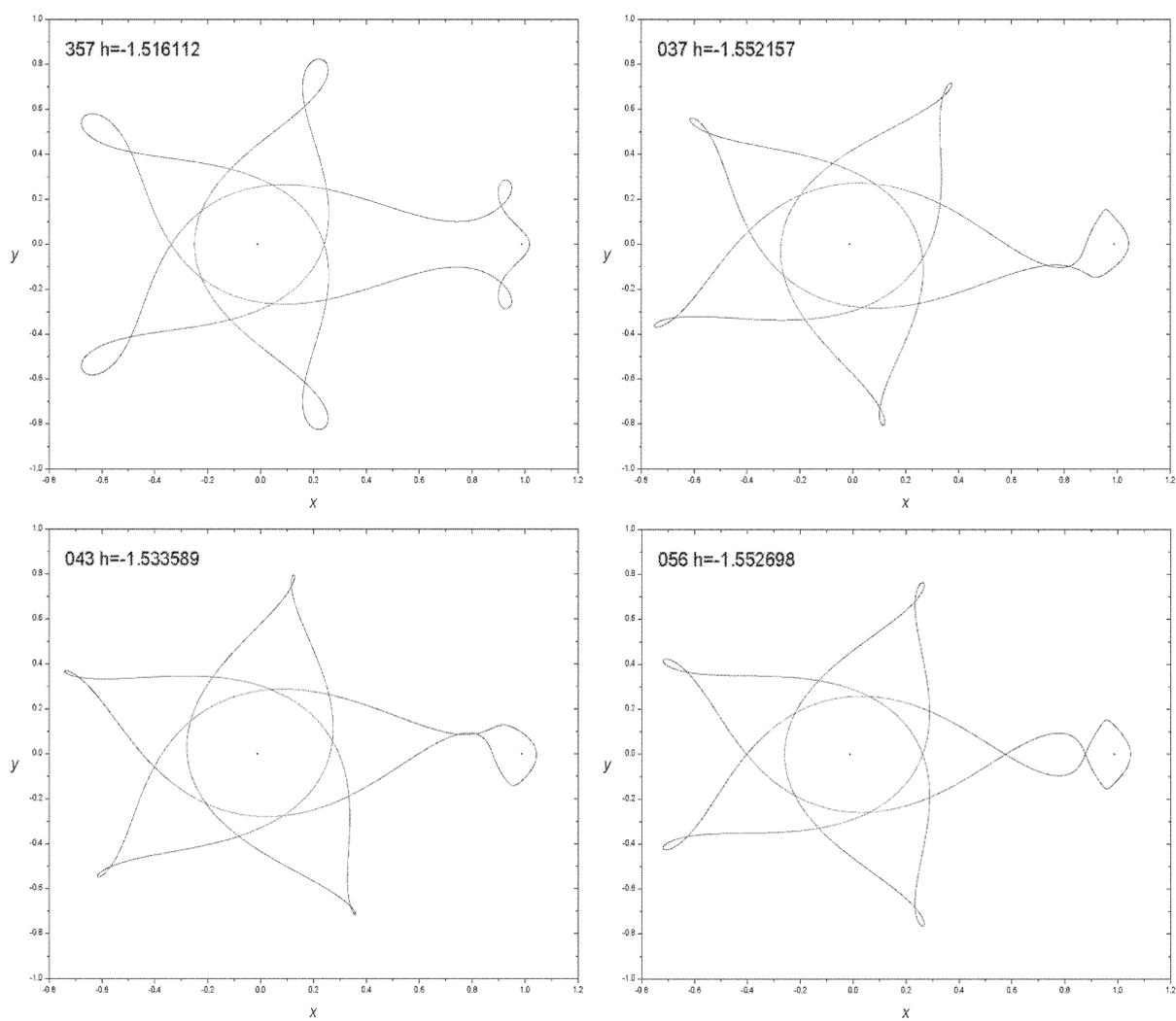


Figura 2.10: OPs de las familias 357, 037, 043 y 056.

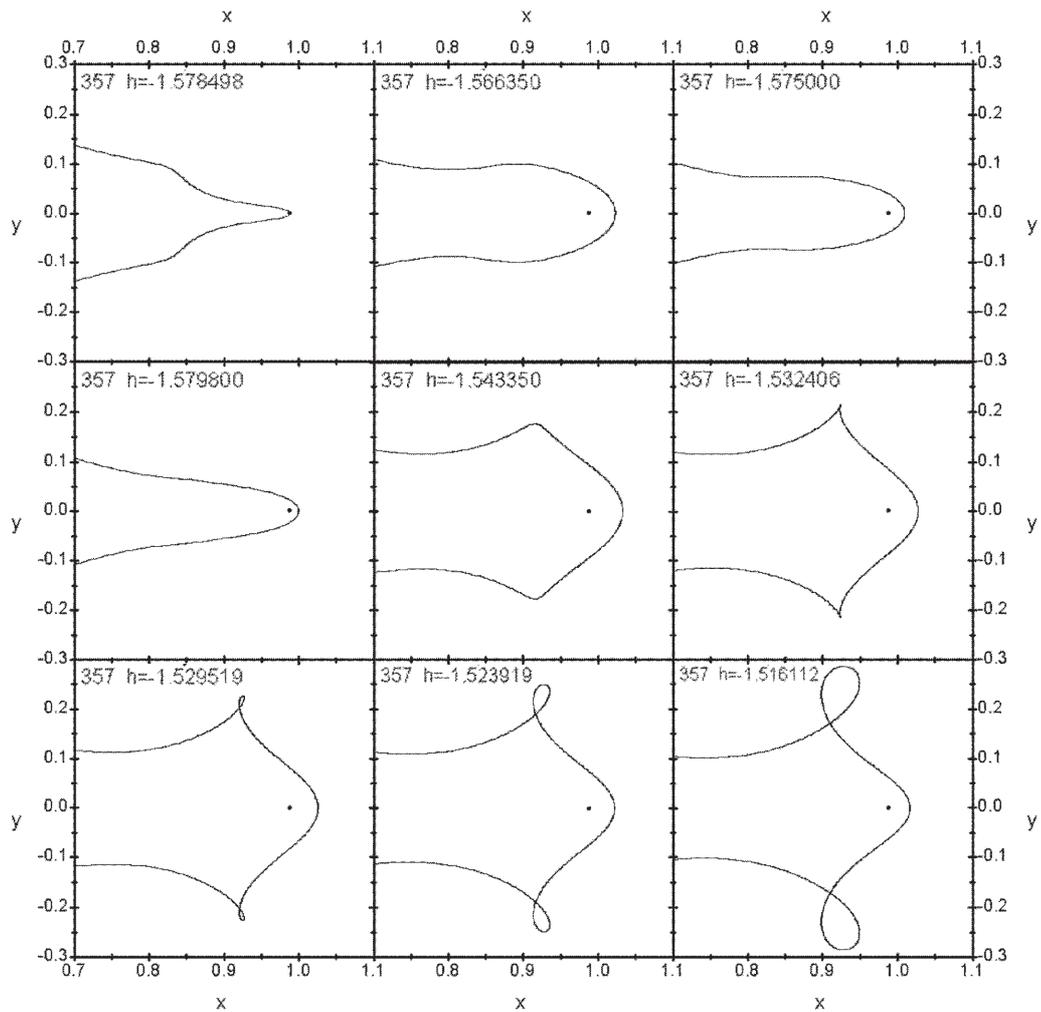


Figura 2.11: Órbitas de la familia 357 en la región circunlunar.

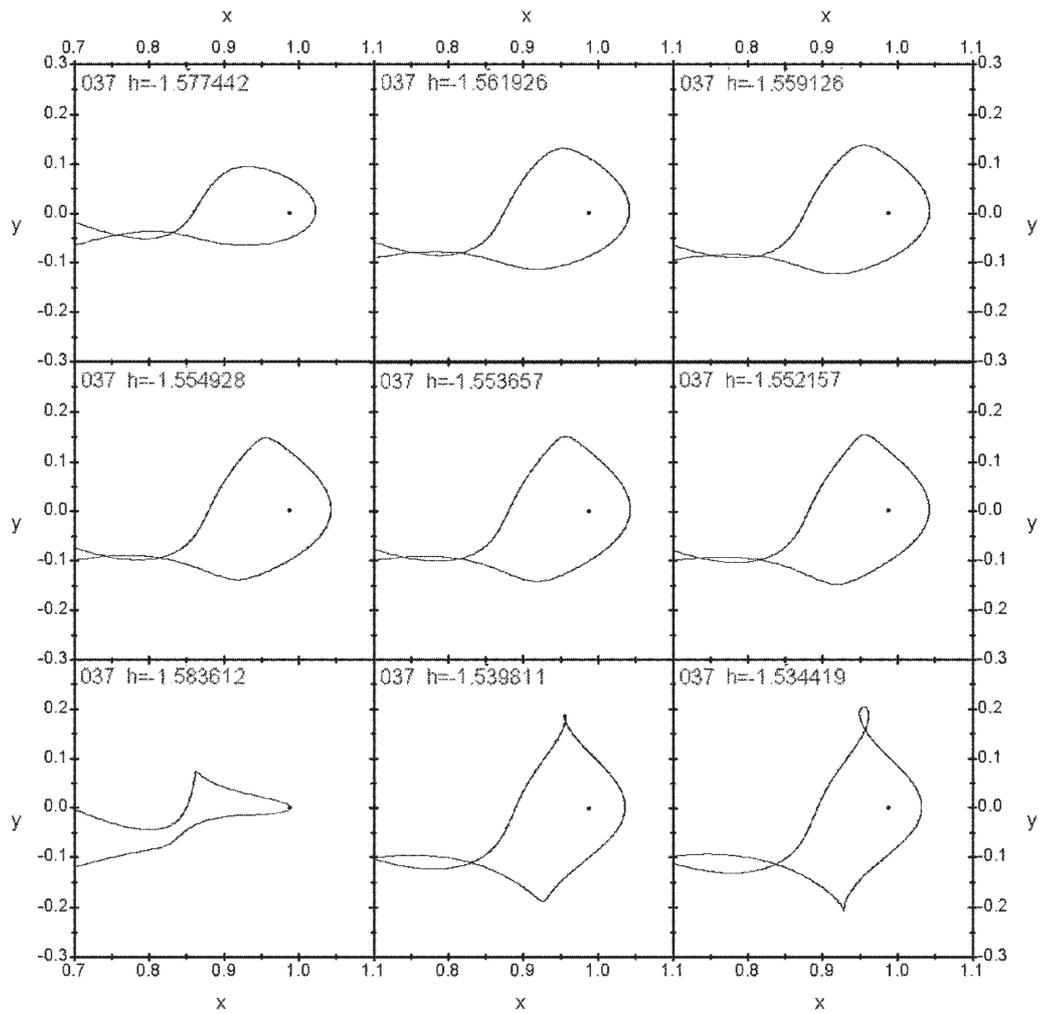


Figura 2.12: Órbitas de la familia 037 en la región circunlunar.

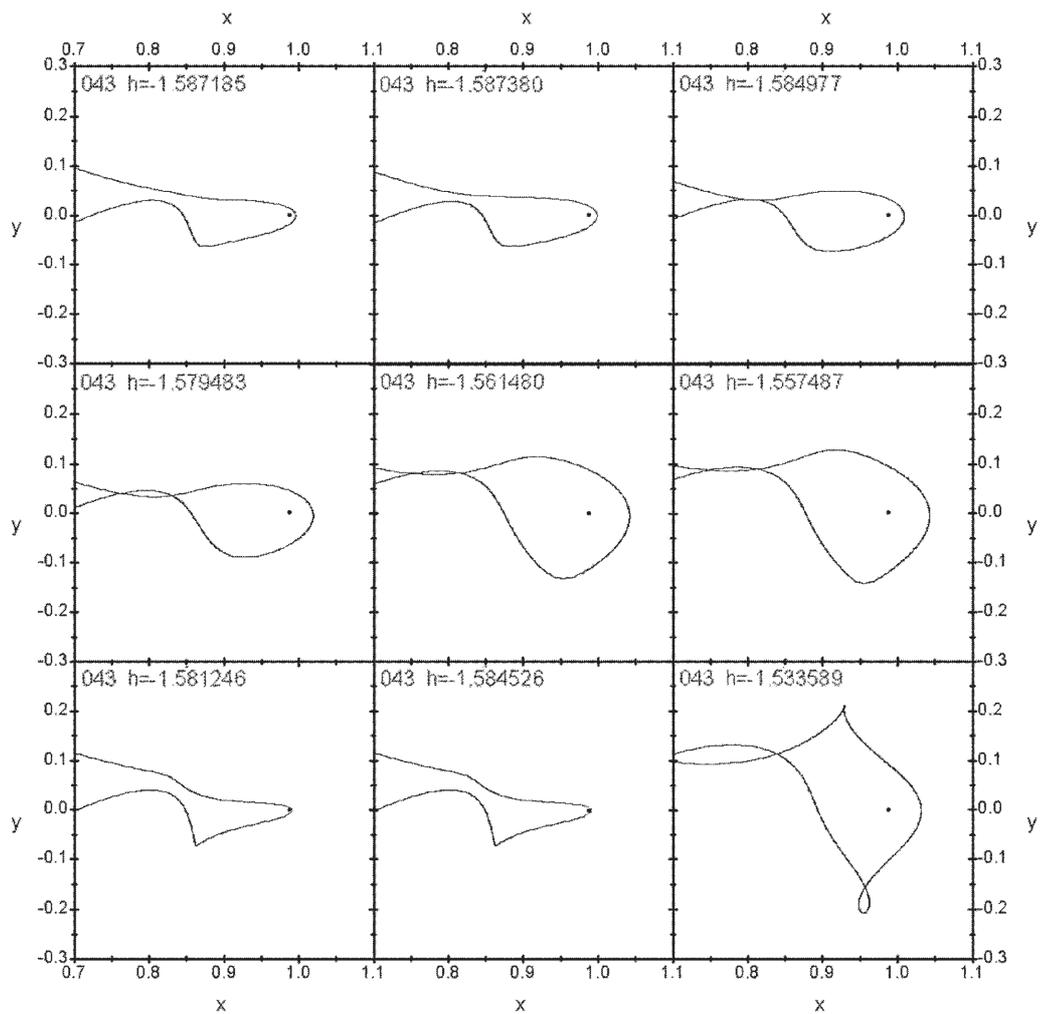


Figura 2.13: Órbitas de la familia 043 en la región circunlunar.

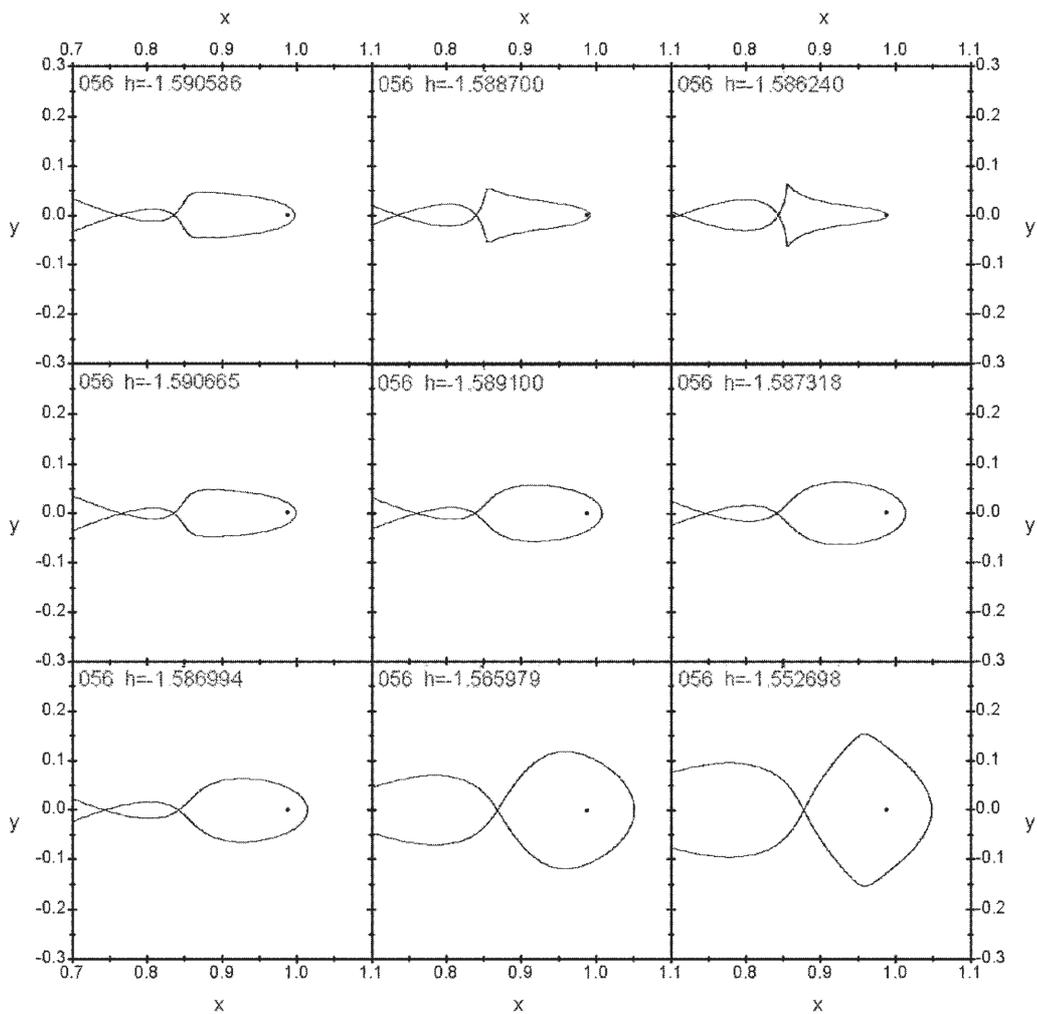


Figura 2.14: Órbitas de la familia 056 en la región circunlunar.

Familias 146A-B-C-D

Como ejemplo típico de familias que bifurcan se muestran los resultados de las cuatro familias 146A-B-C-D. La Tabla 2.4 muestra las simetrías y los valores mínimos y máximos alcanzados por la energía y el período en estas familias. La energía, período y condiciones iniciales de las órbitas de bifurcación se muestran en la Tabla 2.5. Las curvas características se muestran en la Fig. 2.15. La geometría de una órbita de la familia 146A y detalles de las regiones circunlunares para varias energías para cada una de las familias 146A-B-C-D son mostradas en las Figuras 2.16 y 2.17.

Tabla 2.4: Características principales de las familias 146A-B-C-D.

Familia	Simetría	h_{\min}	h_{\max}	T_{\min}	T_{\max}
146A	S_s	-1,591896	-1,587133	19,607828	20,949069
146B	S_a	-1,589455	-1,584655	19,608057	20,290378
146C	S_a	-1,588976	-1,583528	19,755857	20,286207
146D	S_a	-1,591891	-1,589277	20,788368	20,988249

Tabla 2.5: Energía h , período T , y condiciones iniciales $(y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ en Σ_1 de las órbitas de bifurcación de las familias 146A-B-C-D.

Punto de bifurcación	h	T	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0
P_1	-1,589430	19,608724	-0,016899	0,089130	-0,018996
P_2	-1,588979	19,754793	-0,025445	0,087992	0,001567
P_3	-1,591891	20,948216	-0,005529	0,047764	-0,046382

Las familias 146B-C-D están compuestas por dos segmentos. Cada uno de estos segmentos muestra la misma curva característica $T^*(h)$. Lo mismo ocurre con el índice de estabilidad. A través de la continuación en h , cada una de las familias alcanza una sola OP *linealmente estable* y luego sufre una *inversión*, de manera tal que las órbitas de cada segmento siguen conservando el signo del índice de estabilidad. Esta órbita estable se corresponde con una OP de bifurcación de cada rama con la familia 146A.

De la Figura 2.15 se deduce que las OPs inestables de las familias 146B-D son hiperbólicas de reflexión y las correspondientes a la familia 146C, hiperbólicas ordinarias.

En la familia 146A se encuentran OPs inestables de los dos tipos.

En las familias 146B-C-D, si aplicamos la condición de simetría (2.6) a una OP de un segmento obtenemos otra OP correspondiente al otro segmento (familia simétrica). La Figura 2.16 muestra la reflexión geométrica de la forma de las trayectorias respecto del eje x entre cada segmento de cada rama.

En las cuatro familias se observan colisiones con la Luna.

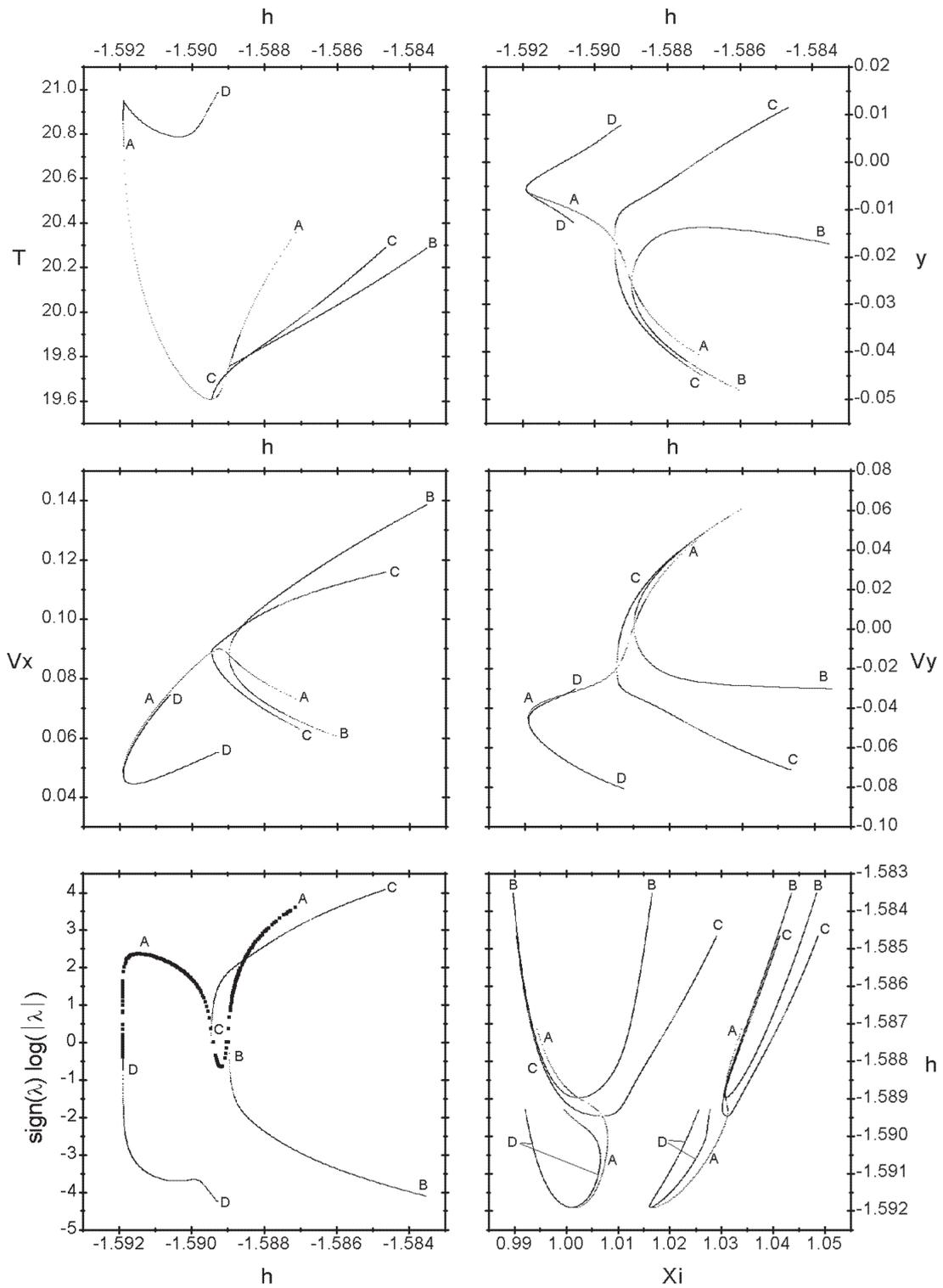


Figura 2.15: Curvas características de las familias 146A-B-C-D. En cada gráfico se indican los puntos de bifurcación.

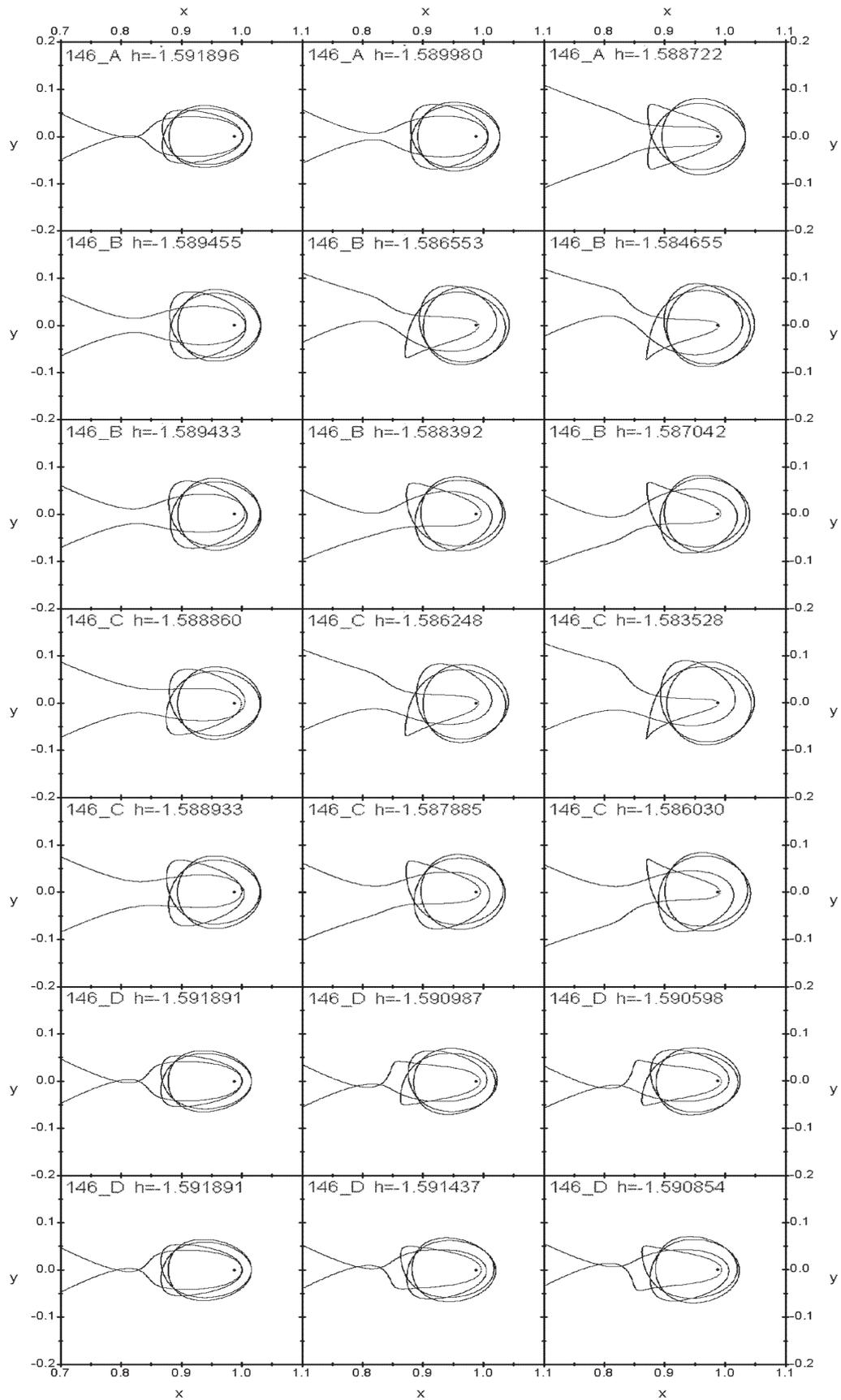


Figura 2.16: Órbitas de de las familias 146A-B-C-D en la región circunlunar.

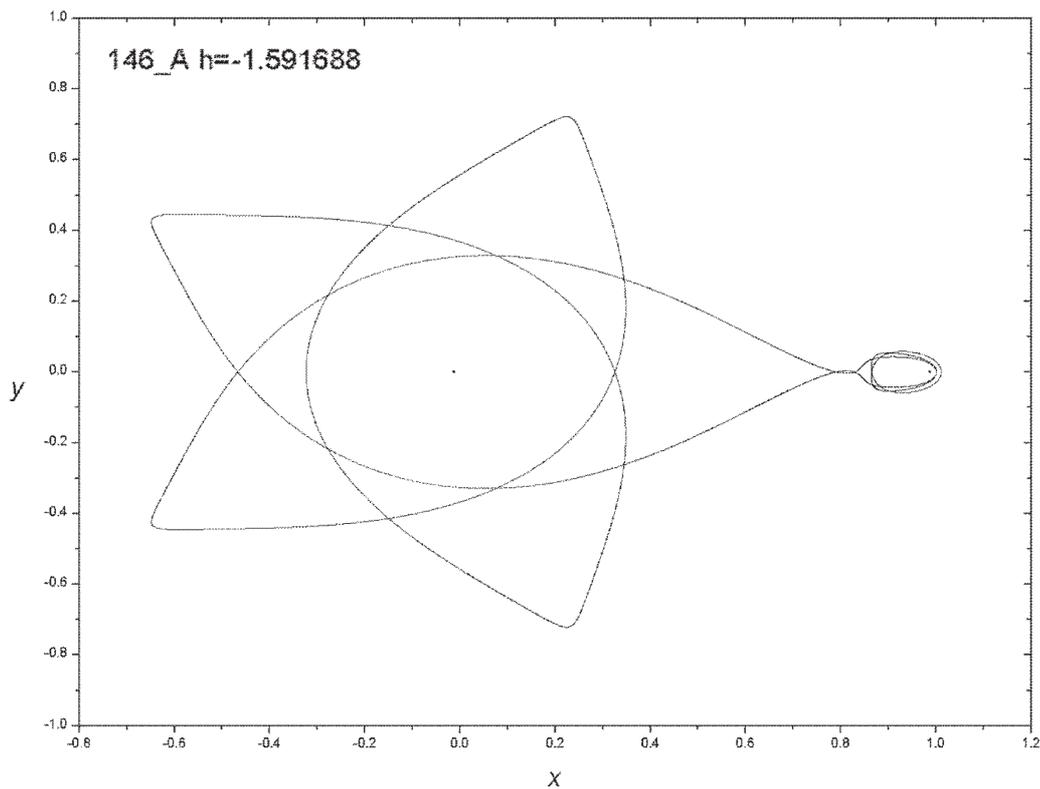


Figura 2.17: OP de la familia 146A.

2.4. OPs de transferencia rápida de alta energía.

En esta Sección presentamos una familia de OPs de transferencia rápida de alta energía que fue determinada en un trabajo anterior [22] con el fin de encontrar OPs extremadamente rápidas que puedan ser extendidas al PCBC utilizando condiciones de simetría (Sec. 3.2). Las OPs en el PCBC necesariamente deberán tener valores de períodos que sean múltiplos del período del sistema (ver Sec. 3.1). En particular, estábamos interesados en encontrar una OP *simétrica* con período $T = T^\odot$. Así, se realizó una búsqueda numérica para valores de energía mayores a los utilizados en la Sección 2.3, y mediante las técnicas descritas en la Sección 2.3.1 pero, adoptando una superficie de Poincaré $\Sigma_3 = \{x, y = 0, \dot{x}, \dot{y} < 0\}$, y restringiendo los tiempos de retorno de las trayectorias a los valores $5 < T < 8$ ¹³ se logró determinar una OP de transferencia, simétrica, retrógrada, con un período $T = 6,372441$ (~ 28 días), energía $h = -0,240536$ y de condiciones iniciales $x_0 = 1,107569$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ y $\dot{y}_0 = -1,644251$.

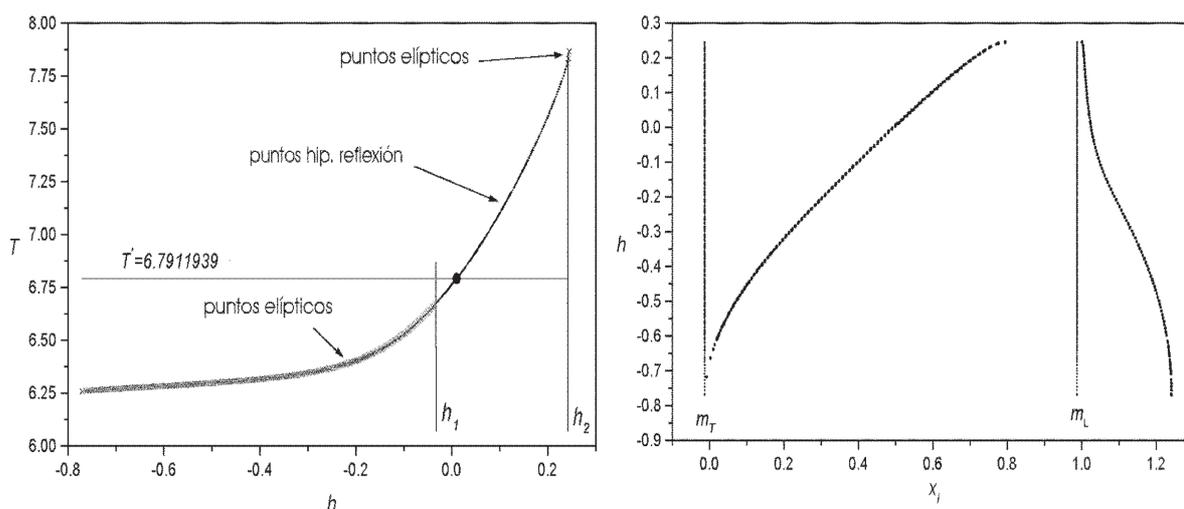


Figura 2.18: Curvas características $T^*(h)$ y $h(x_i)$ de la familia $T222$.

2.4.1. Familia $T222$.

A partir de la OP determinada, se reconstruyó la familia $T222$ ¹⁴ en las dos direcciones posibles de h ¹⁵, en el rango de valores de $-0,770396 \leq h \leq 0,244529$.

En este intervalo, la función $T^*(h)$ se incrementa monótonamente desde $T_1 = 6,259060$ hasta $T_2 = 7,867283$ y existe una única OP con período $T = T^\odot$.

La familia es simétrica y está compuesta por OPs simétricas (S_s). En el valor de energía más bajo, la familia sufre una colisión con la Tierra y, a medida que h se incrementa, las trayectorias aumentan su amplitud y la distancia entre la órbita y Luna disminuye hasta que ocurre una segunda colisión. Las Figuras 2.18 y 2.19 muestran las curvas características $T^*(h)$ y $h(x_i)$ y la evolución de algunas OPs de la familia para distintos valores de h .

La linealización alrededor de cada punto fijo muestra que la estabilidad de las órbitas cambia en los valores $h_1 = -0,034536$ y $h_2 = 0,244514$. En los valores $h_1 < h < h_2$ se obtienen puntos hiperbólicos de reflexión, fuera de este intervalo, los puntos son elípticos.

¹³Para los valores de energía utilizados en la Sección 2.3.1 no existen OPs de transferencia con estos valores de período.

¹⁴La letra T fue utilizada en el trabajo original para indicar que la familia está compuesta por OPs de Transferencia.

¹⁵La reconstrucción de la familia no alcanza una terminación natural. El segmento reconstruido comienza y finaliza con una colisión (ver Sec. 2.3.2).

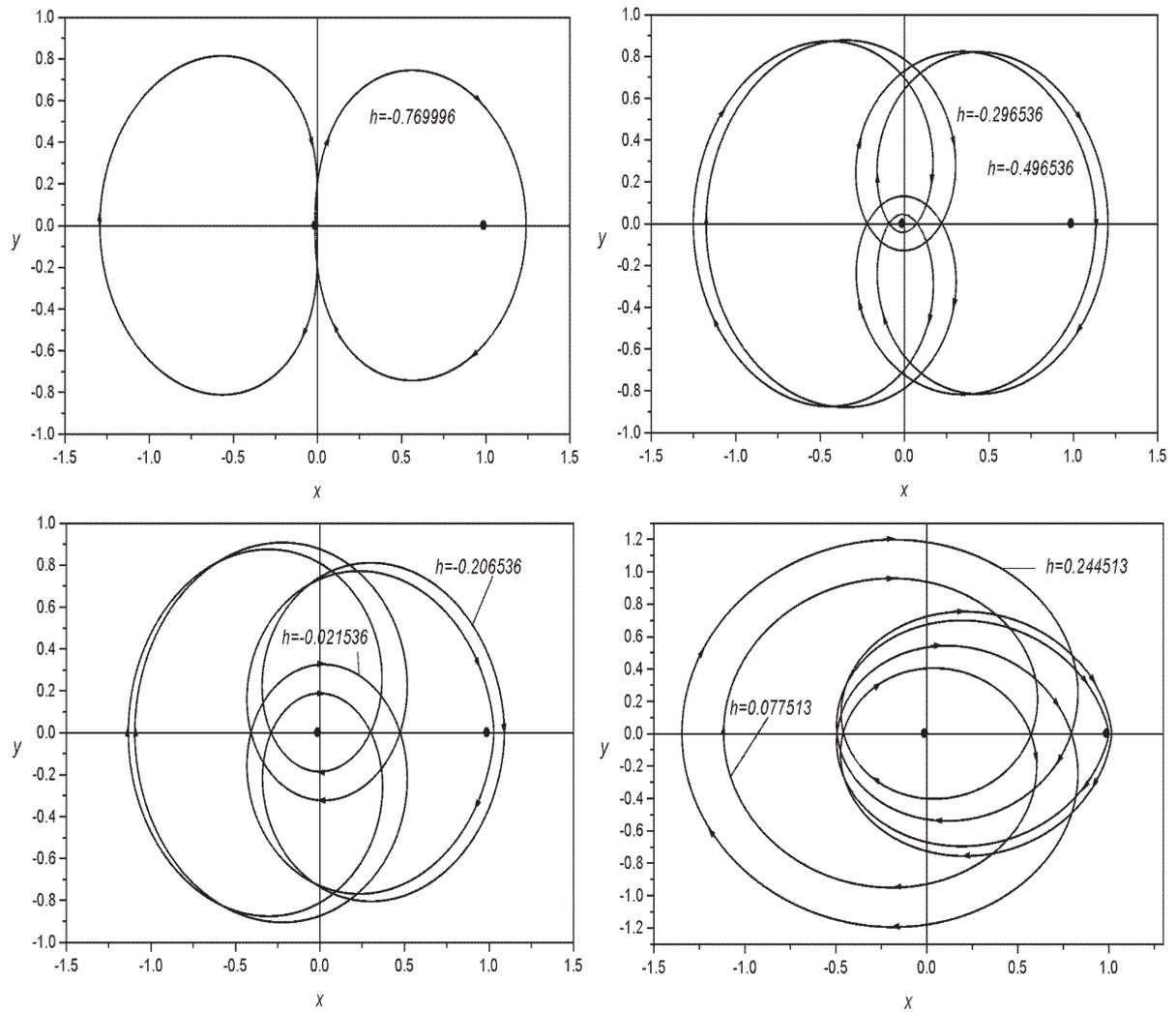


Figura 2.19: Evolución de algunas OPs de la familia $T222$.

2.5. Discusión y comentarios finales.

Completitud del Atlas

Resulta fundamental discutir acerca de la completitud del Atlas presentado. A partir de la búsqueda de OPs (Sec. 2.3.1), se realizaron nuevas exploraciones numéricas en el rango $-1,59407 < h < -1,58617$ con tiempos de retorno $T < 40$, utilizando un espaciado de grilla $(\Delta y, \Delta j)$ más fino. Las nuevas OPs encontradas formaban parte de alguna de las familias del Atlas.

Por otro lado, a través de la construcción de mapas dinámicos y para algunas energías en el rango $-1,59407 < h < -1,58617$, se analizó el comportamiento global de las trayectorias y las posibles regiones en Σ_1 capaces de conterner OPs de transferencia. En particular [23], para el valor $h = -1,5887$ se confeccionó una grilla de condiciones iniciales en Σ_1 con incrementos $\Delta y = \Delta j = 10^{-4}$. Todas las trayectorias correspondientes a este conjunto de condiciones iniciales se integraron hasta obtener su retorno a Σ_1 o hasta superar un tiempo $t > 50$ (~ 287 días). En total, se integraron 1736649 trayectorias. Para las trayectorias que retornaron a Σ_1 se determinaron los valores del tiempo de retorno t_0 y la distancia entre la condición inicial y el valor del punto de retorno d_{min} . Los mapas dinámicos obtenidos se muestran en la Figura 2.20.

El 40% de las trayectorias integradas retorna a Σ_1 en un tiempo $t_0 < 26$ (~ 126 días). Existen comportamientos muy rápidos que se corresponden con trayectorias que se desarrollan alrededor de la Luna y que no realizan transferencias ($t_0 < 14$). Sólo para valores $t_0 > 14$ aparecen transferencias y para $t_0 > 20$ aumenta significativamente la cantidad y la variedad de trayectorias posibles que combinan distintos desarrollos alrededor de las masas primarias. Este análisis es consistente con los valores de los períodos $T^*(h)$ de las OPs de las familias determinadas para $h = -1,5887$ (ver Fig. 2.8).

El mapa correspondiente a la distancia de retorno d_{min} presenta valores mínimos en pequeñas regiones alrededor de los puntos fijos en Σ_1 correspondientes a OPs ya clasificadas.

Así, podemos expresar con alto grado de confianza, que los resultados presentados en el Atlas son esencialmente completos en los valores $-1,59407 < h < -1,58617$ y $T < 40$.

Para otros valores de h debemos considerar que:

- La reconstrucción de las familias fue detenida cuando ocurría una colisión, o cuando la inestabilidad de las órbitas no permitía la convergencia del algoritmo de Newton-Raphson. En el primer caso, la incompletitud del Atlas radica en la indeterminación de los segmentos de las familias después de la colisión. En el segundo caso, se podrían extender los cálculos a una precisión aritmética mayor, lo cual se reflejaría en un aumento significativo del tiempo que demandan las integraciones numéricas. Remarcamos que, la continuación numérica utilizando una superficie de Poincaré diferente no mejora la convergencia, puesto que, los autovalores del mapa son independientes de la sección utilizada y sólo dependen de la trayectoria [12]. Algunas de las familias fueron continuadas para energías $h > -1,58617$ (ver Fig. 2.8), pero no se ha realizado una búsqueda sistemática en esta región. En este rango de valores, el Atlas no está completo.

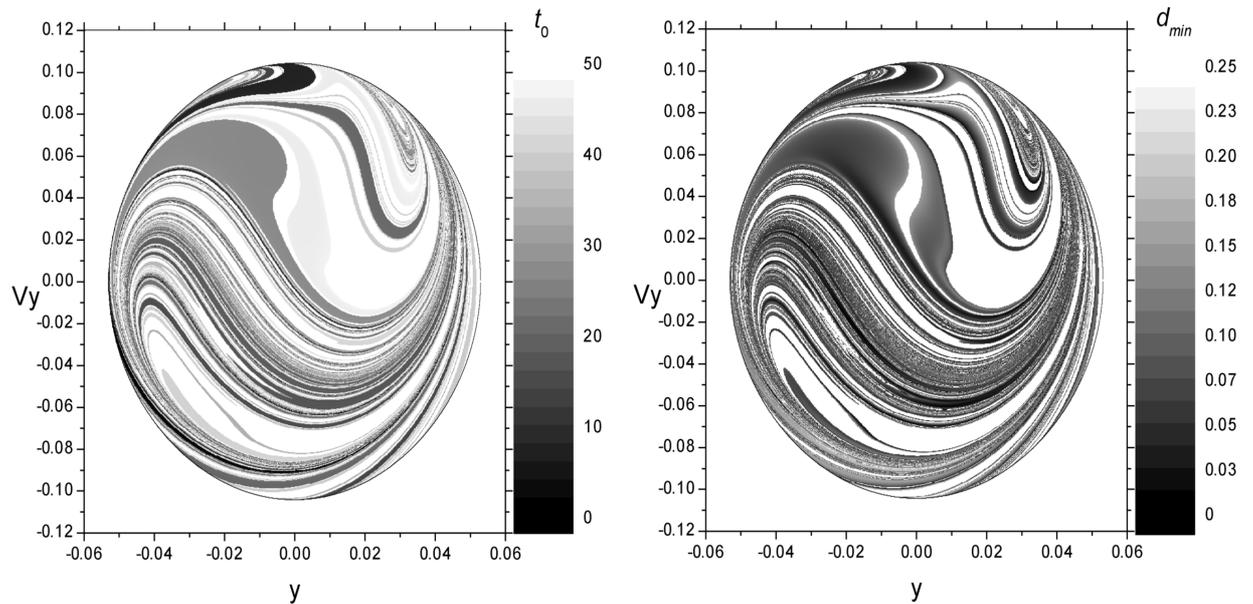


Figura 2.20: Mapas dinámicos de 783209 de trayectorias originadas por una grilla de condiciones iniciales en Σ_1 para $h = -1,5887$. Izq.: Tiempo de retorno t_0 . Las regiones de color blanco corresponden a condiciones iniciales de trayectorias que retornan a Σ_1 en tiempos $t_0 > 50$ [23]. Der.: Distancia de retorno d_{min} a Σ_1 .

- La propiedades de simetría (Sec. 2.3.3) fueron utilizadas para completar familias, ramas y segmentos de familias que no se detectaron en la búsqueda numérica inicial. Este procedimiento fue aplicado sobre todas las familias. Con respecto a la condición de simetría (2.6) el Atlas está completo.
- Se pueden construir nuevas familias a partir de las familias identificadas considerando multiplicidad de períodos. En el Atlas sólo se incluye el caso especial de la familia 300A, que se obtiene por duplicación del período de las OPs de la familia 197A¹⁶. Candidatos adicionales para generar nuevas familias por duplicación de períodos con la condición $T \leq 40$ son las familias 357, 037, 043, 056, 053, 084, 077, 180A-B, 197B-C-D, y 146A-B-C.
- La continuación en μ y el análisis biparamétrico (h, μ) podría utilizarse para determinar relaciones y conexiones entre familias. Como se mostró en la Sección 2.3.4, a partir del estudio de las familias 037, 043, y 056, se determinó la nueva familia 357. Las familias son similares en período, energía y morfología. Existen otros grupos de familias en el Atlas que muestran estas características: las familias 077 y 084, 146A y 146B, 194 y 244, 250 y 251, 301 y 302, 020 y 021, 209 y 232, 254 y 255, 026 y 027, 044 y 045, 132 y 133, entre otras.

Según el análisis biparamétrico el Atlas no está completo. En un trabajo reciente

¹⁶Debido a la limitación adoptada para los valores de los períodos $T \leq 40$, casi todas las OPs de las familias del Atlas son 1-periódica sobre Σ_1 . Casos excepcionales son las familias 026, 027, y 300A-B-C-D, las cuales son 2-periódicas sobre Σ_1 .

realizado por Bruno y Varin [24], se utilizó la continuación de OPs simétricas en μ . En nuestro trabajo contemplamos gran cantidad de OPs asimétricas. La superposición de resultados es parcial y resulta interesante comparar ambos trabajos.

Aplicaciones

Sería interesante explotar la posibilidad de utilizar algunas de estas órbitas en aplicaciones prácticas que involucren misiones espaciales de larga duración. Sin embargo, en el PC3CR Tierra-Luna estas trayectorias constituyen una débil aproximación para ser utilizadas como órbitas de referencia cuando se considera la influencia gravitatoria del Sol [2]. Ésto, es particularmente cierto para las órbitas que se presentan en el Atlas, las cuales evolucionan *lentamente* cerca del punto Lagrangeano L1, donde las acciones de la Tierra y la Luna se cancelan y la influencia del Sol es dominante. En estos casos, es imposible pensar en el Sol sólo utilizando técnicas perturbativas y resulta necesario utilizar modelos dinámicos más elaborados como los modelos PBC y PCBC Sol-Tierra-Luna [7].

Por otro lado, existen varios trabajos sobre órbitas de transferencia rápida y de baja energía para el sistema Tierra-Luna [15, 16, 17, 25, 26], pero ellos, están orientados a determinar una trayectoria *arco* que realice una única transferencia entre la Tierra y la Luna con mínimo gasto de combustible. En casi todos los trabajos se considera sólo el PC3CR y en el trabajo reciente de Yagasaki [17] se utiliza el PCB. Estos modelos no son consistentes con este tipo de trayectorias.

Por último remarcamos que todas las familias del Atlas presentan gran acercamiento a la Luna y en muchos casos colisionan. Respecto de la Tierra, las trayectorias son lejanas con distancias mínimas típicas de ~ 60000 km. Esta característica es consecuencia de haber exigido que las OPs sean de baja energía.

En el siguiente Capítulo consideraremos la extensión de nuestros resultados al PCBC.

Capítulo 3

OPs de Transferencia Rápida en el PCBC.

3.1. Órbitas Periódicas en el PBC y PCBC.

Los modelos PBC y PCBC son sistemas dinámicos no-autónomos. Las ecuaciones de movimiento pueden representarse por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3.1)$$

donde $x \in U \subset \mathbb{R}^6$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ y f es una función T^\odot -periódica en t .

Consideremos una solución $\phi_t(x_0)$ de la Ecuación (3.1) con la condición inicial $\phi_{t_0}(x_0) = x_0$. Las soluciones periódicas, si éstas existen, necesariamente deberán tener períodos $T = kT^\odot$ con k entero [7, 11]. Extendiendo las ideas expuestas en la Sección 2.2, para determinar una solución kT^\odot -periódica podemos intentar encontrar una raíz de la ecuación

$$G(x_0) = \phi_{t_0+kT^\odot}(x_0) - x_0. \quad (3.2)$$

Pero ahora enfrentamos las siguientes complicaciones [12, 19]:

- En sistemas dinámicos no-autónomos, no todos los puntos de una OP pueden ser tomados como condición inicial para $t = t_0$,
- En general, las OPs son aisladas (no forman familias).

Realizando búsquedas numéricas que satisfagan la Ec. (3.2), no siempre se encontrarán trayectorias que cumplan con los objetivos requeridos en alguna aplicación específica predeterminada, en particular, ésta no es la forma más práctica para determinar OPs de transferencia rápida de baja energía en el PCBC; estas trayectorias describen grandes arcos y son extremadamente inestables (ver Sec. 3.5).

Una manera más natural será intentar extender los resultados encontrados en el PC3CR. Para este fin, resulta adecuado considerar la extensión de las soluciones a través de una familia monoparamétrica de sistemas dinámicos correspondiente a la familia de Hamiltonianos [7]

$$H = H_{PC3CR} + \varepsilon(H_{PCBC} - H_{PC3CR}) \quad (3.3)$$

variando el parámetro ε en el rango $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Para $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 1$ se obtienen los Hamiltonianos del PC3CR y PCBC respectivamente ¹.

Las ecuaciones de movimiento derivadas de la Ec.(3.3) quedan expresadas como:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad (3.4)$$

donde g es T^\odot -periódica en t .

Consideremos una solución periódica $\phi_t(x, \varepsilon)$ de la Ec.(3.4) que coincida para $\varepsilon = 0$ con una solución conocida $\phi_t(x_0)$ en el PC3CR. Determinar los valores posibles de x_0 ² para los cuales $\phi_t(x_0)$ bifurca a la solución $\phi_t(x, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ puede ser atacado mediante el procedimiento descrito en el Apéndice C.1 [7], pero si la solución posee algunas simetrías, en algunos casos podremos sacar ventaja y reducir la complejidad del problema. En la Sección 3.2, se determinan dos OPs de transferencia rápida de *alta energía* en el PCBC utilizando las propiedades de simetría de la OP de transferencia $T222$ determinada en el PC3CR (Sec.2.4.1).

Por otro lado, en la Sección 3.3 proponemos una manera distinta de abordar este problema, determinando una condición necesaria, pero no suficiente, para intentar la extensión de los resultados del PC3CR al PCBC sin utilizar propiedades específicas de las OPs.

La estabilidad de una OP en los modelos PBC y PCBC puede analizarse directamente a través de la linealización del mapa de Poincaré $x_n = f(x_0, t_0 + nkT^\odot)$ ($n \in \mathbb{Z}$) alrededor del punto fijo asociado a ésta, correspondiente al muestreo del espacio de fases en los instantes $t_n = t_0 + nkT^\odot$ [11, 12].

Cuando consideramos que el movimiento de m sólo se desarrolla en el plano xy , las sucesivas iteraciones x_n están contenidas en una variedad 4-dimensional, la linealización está representada por la matriz de monodromía M , 4×4 :

$$x_{n+1} - x_0 = M(x_n - x_0). \quad (3.5)$$

Esta matriz es simpléctica [7, 12, 27]; si λ es un autovalor, también lo es λ^{-1} y el polinomio característico queda expresado como

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - s_1\lambda + 1)(\lambda^2 - s_2\lambda + 1), \quad (3.6)$$

donde $s_k = \lambda_k + \lambda_k^{-1}$, $k = 1, 2$ son los parámetros de estabilidad. Una OP será linealmente estable si ambos parámetros de estabilidad son reales y sus valores absolutos $|s_k| \leq 2$ [12, 27].

En este trabajo utilizamos las expresiones *órbita arco* y *arco T -periódico* para identificar una órbita *cerrada* que NO es periódica, pero que, después de evolucionar un tiempo $T \neq nT^\odot$, vuelve a recuperar los valores de las condiciones iniciales, ésto es:

$$\phi_{t_0+T \neq t_0+nT^\odot}(x_0) = x_0.$$

En el caso de *órbitas arco*, podemos analizar la evolución lineal de las trayectorias en una vecindad integrando las ecuaciones variacionales correspondientes en el intervalo

¹Este método es utilizado en el trabajo de Andreu [7] para determinar OPs en el PCBC a partir de familias de OPs Lagrangeanas en el PC3CR.

²El problema es equivalente a determinar el valor adecuado de las condiciones iniciales x_1 a un tiempo dado t_1 .

$t_0 \leq t \leq t_0 + T$ [12]. En estos casos, seguiremos utilizando la definición adoptada para los parámetros de estabilidad s_k , pero éstos se deben interpretar sólo como indicadores de la evolución de las trayectorias vecinas alrededor de la órbita considerada, nada más (ver Ap. D.2).

Por otro lado, en los modelos PBC y PCBC se utiliza un sistema de coordenadas con la *Orientación 2* (Sec. 1.2). En lo que sigue, utilizaremos esta convención para extender los resultados del PC3CR.

3.2. Extensión usando simetrías. OPs $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$.

La familia $T222$ está compuesta de OPs simétricas respecto al eje x (Sec. 2.4.1). La curva característica $T^*(h)$ crece monótonamente con la energía h (ver Fig. 2.18), y sólo existe un único miembro con período $T = T^\odot$.

Para realizar la extensión asumimos las condiciones iniciales $x_0 = -1,02379270$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 1,91110553$ en $\varepsilon = 0$ correspondientes a una de las intersecciones de la trayectoria con el eje x .

Para mantener la simetría de OP seleccionada para valores $\varepsilon > 0$, la trayectoria debe ser invariante ante la siguiente condición [7, 11]:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t). \quad (3.7)$$

La familia de Hamiltonianos (3.3) será invariante sobre esta simetría, sólo para los tiempos iniciales $t_0 = 0$ y $t_0 = T^\odot/2$ ³. Estos tiempos iniciales serán identificados como t_1 y t_2 respectivamente.

3.2.1. Continuación numérica.

A partir de las condiciones iniciales seleccionadas y a través de la familia de Hamiltonianos (3.3) se realizaron las dos extensiones posibles asumiendo como tiempos iniciales $t_0 = t_1$ en un caso, y $t_0 = t_2$ en el otro.

Los valores de ε fueron incrementados en pasos $\Delta\varepsilon = 3,5 \times 10^{-5}$. En cada paso, las nuevas coordenadas y velocidades iniciales fueron obtenidas por extrapolación polinomial a partir de los últimos 6 puntos calculados. Las integraciones numéricas se realizaron con un integrador Bulirsch-Stoer de paso variable de precisión 10^{-14} . Cada punto en la continuación numérica fue obtenido implementando un algoritmo de Newton-Raphson hasta lograr la convergencia con un error $< 10^{-8}$ [20]. Las órbitas finales ($\varepsilon = 1$) fueron refinadas hasta obtener un error $< 10^{-11}$.

La simetría de las órbitas periódicas a lo largo de la familia (3.3) puede apreciarse en las curvas características de las condiciones iniciales de la OP $T222_{t_2}$ en la Figura 3.1.

³Para la condición inicial seleccionada, los tiempos iniciales posibles corresponden a los casos en que las tres masas primarias yacen sobre el eje x según S-L-T o L-T-S.

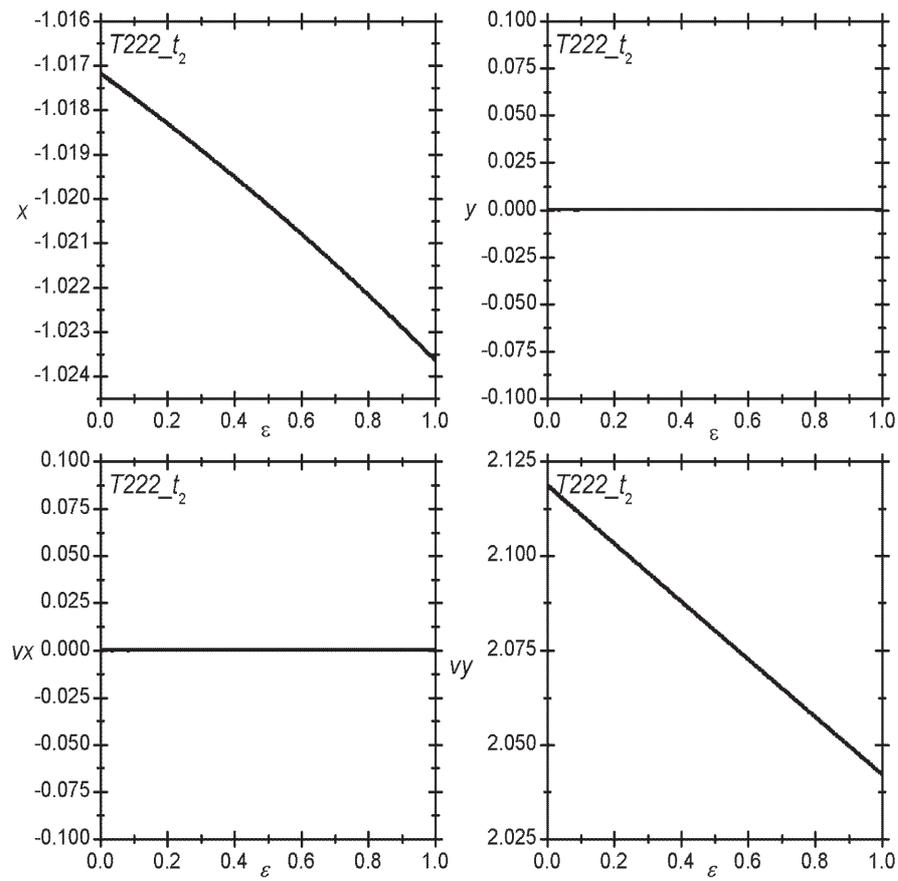


Figura 3.1: Curvas características de las condiciones iniciales $x(\epsilon)$, $y(\epsilon)$, $\dot{x}(\epsilon)$ y $\dot{y}(\epsilon)$ de la OP $T222_t_2$.

En toda la extensión se obtiene $y(\varepsilon) = \dot{x}(\varepsilon) = 0$. Respecto de las condiciones iniciales del PC3CR se obtienen variaciones

$$x_{\varepsilon=1} - x_{\varepsilon=0} \simeq 6,5 \times 10^{-3} (\sim 2500\text{km})$$

$$\dot{y}_{\varepsilon=1} - \dot{y}_{\varepsilon=0} \simeq 7,5 \times 10^{-2} (\sim 77 \text{ m/s}).$$

Las dos órbitas determinadas en el PCBC son extremadamente similares y presentan una doble inestabilidad ⁴. En los dos instantes t_1 y t_2 las condiciones iniciales difieren sólo en $\Delta x \simeq 10^{-4}$ ($\sim 39 \text{ km}$) y $\Delta \dot{y} \simeq 2 \times 10^{-3}$ ($\sim 2 \text{ m/s}$).

Las siguientes Tablas muestran las condiciones iniciales y las características más importantes de las OPs $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$ en el PCBC. La Figura 3.2 muestra la evolución de las dos trayectorias sobre un período completo.

Tabla 3.1: Condiciones iniciales de las OPs $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$.

OP	t_i	x	y	\dot{x}	\dot{y}
$T222_{t_1}$	0	-1,01950751115	0	0	1,97782573253
$T222_{t_2}$	$T^\odot/2$	-1,01940558303	0	0	1,97615899365

Tabla 3.2: Distancias y velocidades en los puntos de máximo acercamiento a la Tierra y a la Luna y parámetros de estabilidad de las OPs determinadas en el PCBC.

OP	$d_{min}(\text{km})$	$v_{min}(\text{m/s})$	$d_{min}(\text{km})$	$v_{min}(\text{m/s})$	$ s_1 $	$ s_2 $
	Tierra	Tierra	Luna	Luna		
$T222_{t_1}$	134588	2443	12171	2023	5,496	2,069
$T222_{t_2}$	134381	2446	12140	2024	5,531	2,070

⁴Estos resultados fueron publicados por Leiva y Briozzo en [22].

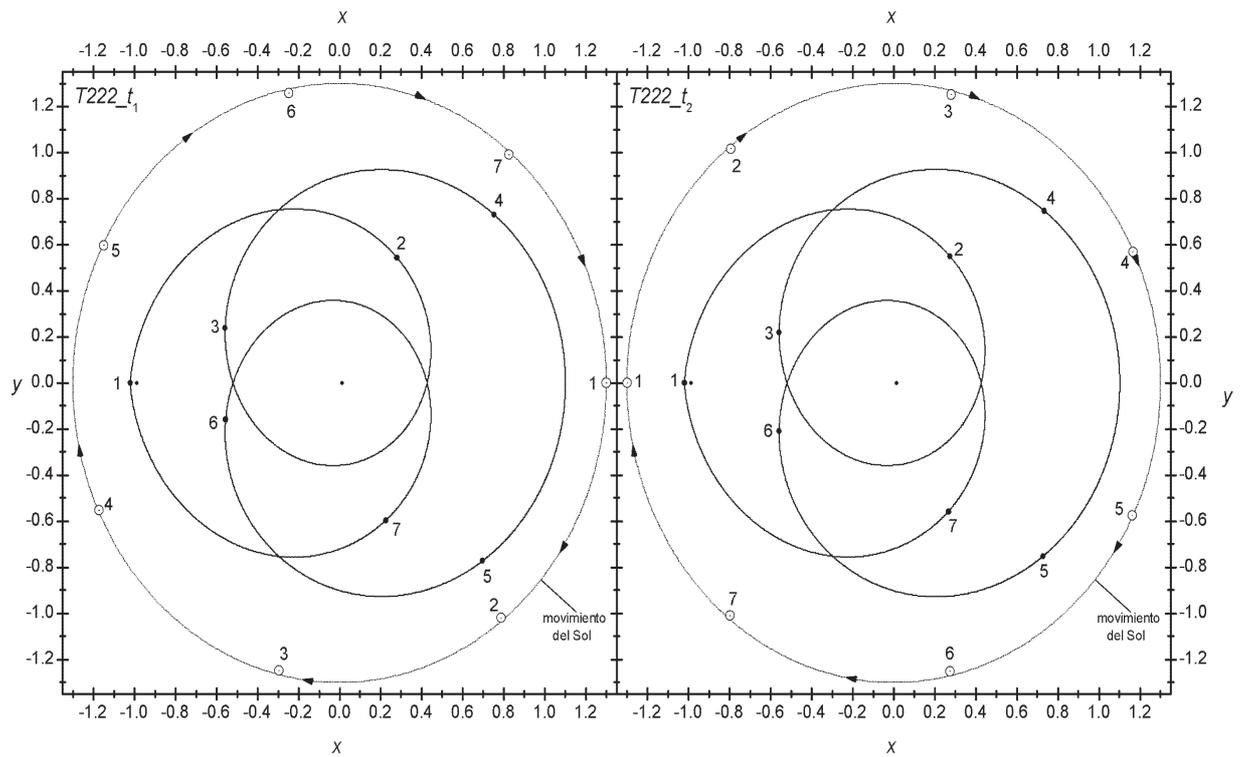


Figura 3.2: Evolución de las trayectorias $T222_{t_1}$ y $T222_{t_2}$ en un período. Los puntos a la derecha y a la izquierda representan la Tierra y la Luna respectivamente. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal. La trayectoria del Sol no está a escala.

3.3. Condición de fase solar a primer orden.

En esta Sección, presentamos un nuevo método que permite determinar los valores iniciales de la fase solar para intentar la extensión numérica de OPs desde el PC3CR al PCBC. Este método utiliza como paso intermedio, resultados en el PBC, asumiendo que el PCBC es una perturbación del PBC; se aplica de manera general a cualquier tipo de OP en el PC3CR, sin necesidad de recurrir a condiciones de simetría. Los resultados mostrados a continuación fueron aceptados recientemente para su publicación [5].

El Hamiltoniano del problema bicircular (1.4) puede expresarse como:

$$H_{PBC}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = H_{PC3CR}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + U_{\odot}(x, y, t), \quad (3.8)$$

con

$$U_{\odot}(x, y, t) = \frac{m_s}{a_s^2} (x \cos(\Omega t + \phi) - y \sin(\Omega t + \phi)) - \frac{m_s}{[(x - a_s \cos(\Omega t + \phi))^2 + (y + a_s \sin(\Omega t + \phi))^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.9)$$

donde $\Omega = 2\pi/T^{\odot}$ representa la velocidad angular del Sol en el sistema sinódico. La fase ϕ es la posición angular inicial del Sol y es equivalente a fijar el origen del tiempo en el valor $t_0 = -\frac{\phi}{2\pi} T^{\odot}$.

Para trayectorias que no se alejan significativamente del sistema, tal que sus funciones de movimiento satisfacen

$$x^2 + y^2 \ll a_s^2,$$

podemos expandir la Ecuación (3.9) en una serie de Taylor alrededor del origen:

$$U_{\odot} \simeq \frac{m_s}{a_s} \left[-1 + \frac{x^2 + y^2}{4a_s^2} + \frac{3}{4a_s^2} \left[(y^2 - x^2) \cos(2\Omega t + 2\phi) + 2xy \sin(2\Omega t + 2\phi) \right] + \dots \right]. \quad (3.10)$$

Por otro lado, consideremos la familia monoparamétrica de Hamiltonianos

$$H(\bar{x}, t, \varepsilon) = H_{PC3CR}(\bar{x}) + \varepsilon U_{\odot}(x, y, t), \quad (3.11)$$

donde $\bar{x} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$.⁵

Sea $\bar{x}(t)$ una solución de la Ec.(3.11). En un pequeño intervalo de tiempo Δt , la variación del Hamiltoniano podrá ser aproximada por la diferencial

$$\Delta H \simeq dh = \frac{dH}{dt} \Delta t = \varepsilon \frac{dU_{\odot}}{dt} \Delta t = \varepsilon \left[\frac{\partial U_{\odot}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} + \frac{\partial U_{\odot}}{\partial t} \right] \Delta t.$$

Para una solución periódica, la variación total de H a lo largo de un período completo de la órbita será nula. Obtenemos así, la siguiente *condición de periodicidad*:

$$\Delta H = \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{\partial U_{\odot}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} + \frac{\partial U_{\odot}}{\partial t} \right] dt = \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial U_{\odot}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} dt = 0. \quad (3.12)$$

No siempre una solución T -periódica del sistema autónomo podrá ser extendida a una solución T -periódica a través de la familia de Hamiltonianos (3.11), pero de ser posible, deberemos determinar los nuevos valores adecuados de las condiciones iniciales en t_0 para realizar la continuación numérica⁶ [7].

Sea $\bar{x}_1(t)$ una solución T -periódica del PC3CR ($\varepsilon = 0$) con condiciones iniciales $\bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_{10}$. Para $0 < \varepsilon \ll 1$, el teorema de desarrollo de Poincaré [11] permite expresar una nueva solución T -periódica $\bar{x}_2(t)$ como un desarrollo en serie de potencias de la forma:

$$\bar{x}_2(t) = \bar{x}_1(t) + \varepsilon \bar{y}_1(t) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(t) + \varepsilon^3 \bar{y}_3(t) + \dots, \quad (3.13)$$

⁵Esta familia satisface $H(\bar{x}, t, 0) = H_{PC3CR}(\bar{x})$ y $H(\bar{x}, t, 1) = H_{PCB}(\bar{x}, t)$.

⁶En el Apéndice C.1 se detallan las condiciones generales para que una OP de un sistema dinámico autónomo bifurque a una OP de un sistema no-autónomo.

con la condición inicial $\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_1 + \bar{a}$. Reemplazando las Ecuaciones (3.10) y (3.13) en la condición de periodicidad (3.12) obtenemos a primer orden en ε , la siguiente expresión:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} [x\dot{x} + y\dot{y} + 3[(y\dot{y} - x\dot{x}) \cos(2(\Omega t + \phi)) + (x\dot{y} + y\dot{x}) \sin(2(\Omega t + \phi))]] dt = 0, \quad (3.14)$$

donde $\bar{x}_1 = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$ y $\phi = -2\pi \frac{t_0}{T} \bmod(2\pi)$ ⁷.

En el cálculo de la integral, los dos primeros términos se anularán debido a la periodicidad de la solución. Desarrollando las funciones trigonométricas e integrando por partes, la Ec.(3.14) se reduce a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos(2\phi) [(y^2 - x^2) \cos(2\Omega t) + 2xy \sin(2\Omega t)] \Big|_{t_0}^{t_0+T} - \\ & - \frac{1}{2} \sin(2\phi) [(y^2 - x^2) \sin(2\Omega t) - 2xy \cos(2\Omega t)] \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \\ & + \Omega \int_{t_0}^{t_0+T} [\cos(2\phi) [(y^2 - x^2) \sin(2\Omega t) - 2xy \cos(2\Omega t)]] dt + \\ & + \Omega \int_{t_0}^{t_0+T} [\sin(2\phi) [(y^2 - x^2) \cos(2\Omega t) + 2xy \sin(2\Omega t)]] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Asumamos que el período de la solución \bar{x}_1 es $T = 2\pi/\omega$ y desarrollemos sus funciones de movimiento en series exponenciales complejas de Fourier:

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \exp(ij\omega t) \quad ; \quad y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \exp(ij\omega t).$$

Para un tratamiento más sencillo es conveniente definir las variable complejas z y Θ :

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (f_j + i g_j) \exp(ij\omega t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j \exp(ij\omega t), \quad (3.16) \\ \Theta &= \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j \exp(it(j\omega + \Omega)) \right]^2, \end{aligned}$$

así, la condición de periodicidad a primer orden en ε (3.15) queda expresada como:

$$\begin{aligned} & [-\cos(2\phi) \operatorname{Re}(\Theta) + \sin(2\phi) \operatorname{Im}(\Theta)] \Big|_{t_0}^{t_0+T} - \\ & - 2\Omega \int_{t_0}^{t_0+T} [\cos(2\phi) \operatorname{Im}(\Theta) + \sin(2\phi) \operatorname{Re}(\Theta)] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

⁷Este razonamiento también es válido si consideramos las soluciones T -periódicas \bar{x}_1 y \bar{x}_2 para los valores $\varepsilon_0 > 0$ y $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ respectivamente.

Para una solución T -periódica en el PC3CR, esta condición, permite determinar una aproximación a $O(\varepsilon)$ del valor la fase solar inicial ϕ ⁸ para realizar su extensión al PBC.

La familia de Hamiltonianos (3.11) es T^\odot -periódica. Las posibles OPs del PC3CR que podrán ser extendidas a OPs del PBC deberán tener períodos $T = kT^\odot$ con k entero. Para otros valores de T , las OPs del PC3CR serán candidatos a ser extendidas a *órbitas arco* y no serán OPs.

Una órbita p/q T^\odot -periódica (p y q coprimos), podrá ser considerada pT^\odot -periódica si tomamos como nuevo período al valor qT , pero ésto, en general, aumenta la complejidad del problema cuando se trabaja con OPs inestables. En el PC3CR, la linealización del mapa de Poincaré alrededor de un punto fijo (Sec. 2.2) permite determinar como será la evolución la distancia δ de un punto que inicialmente se encuentre a una distancia pequeña δ_0 del punto fijo. En la n -iteración del mapa, la distancia incrementará su valor según $\delta_n \sim |\lambda_i|^n \delta_0$, donde λ_i es el autovalor correspondiente a la variedad inestable de la aproximación lineal [11, 28]. Si aumentamos el valor del período en un factor q , la distancia aumentará según $\delta_n \sim |\lambda_i|^{qn} \delta_0$.

Por amplificación de períodos y para valores $p = 1$ y $q = 2, 3, 4$, Andreu [7], selecciona OPs en el PC3CR alrededor de los puntos lagrangeanos colineales L1, L2 y L3 y logra determinar OPs en los modelos PBC y PCBC. En nuestro caso, las OPs de transferencia rápida de baja energía que determinamos en el PC3CR, poseen períodos superiores a T^\odot ($p > q$).

En la condición de periodicidad (3.17), la fase solar inicial ϕ está *desacoplada* y resulta sencillo determinarla conociendo los desarrollos de Fourier de la OP en el PC3CR. En particular, para $q \leq 2$, la ecuación (3.17) se simplifica porque los términos fuera de la integral se anulan

$$[-\cos(2\phi)Re(\Theta) + \sin(2\phi)Im(\Theta)] \Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0.$$

En este trabajo sólo analizamos OPs ($q = 1$) y órbitas arco con $q = 2$. Las OPs en el PC3CR con $q > 2$ presentan una gran inestabilidad y se dificulta su tratamiento.

Consideremos una órbita de período $T = 2\pi/\omega = p/q T^\odot$. Teniendo en cuenta que $T^\odot = 2\pi/\Omega$, obtenemos para las frecuencias angulares la relación

$$\Omega = p/q \omega. \quad (3.18)$$

Mediante los números auxiliares $M = j + \frac{p}{q}$ y $N = j + k + 2\frac{p}{q}$ expandimos la variable auxiliar Θ de la Ecuación (3.16) en dos términos:

⁸Equivalente a determinar t_0 .

$$\Theta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j^2 \exp(2i\omega t M) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ k \neq j}}^{\infty} Q_j Q_k \exp(i\omega t N). \quad (3.19)$$

Integrando la Ec. (3.17) sobre un período completo de la órbita, sólo sobrevivirán los términos con M y N nulos. Notar que $M = 0 \rightarrow N \neq 0$ y $N = 0 \rightarrow M \neq 0$.

Para las órbitas seleccionadas en el PC3CR ($\varepsilon = 0$), analicemos los siguientes casos:

- Órbitas pT^\odot -periódicas, $q = 1$.

Si $M = 0$, el único término que sobrevivirá en la integral es el que cumpla la condición $j = -p$. En este caso, obtenemos:

$$\tan(2\phi) = -\frac{Im(Q_{-p}^2)}{Re(Q_{-p}^2)}. \quad (3.20)$$

Si $N = 0$, sobrevivirán todos los términos con $k = -j - 2p$ ($k \neq j$) y las condiciones para la fase solar serán:

$$\tan(2\phi) = -Im \left[\sum_{j=-\infty; j \neq -p}^{\infty} Q_j Q_{-j-2p} \right] / Re \left[\sum_{j=-\infty; j \neq -p}^{\infty} Q_j Q_{-j-2p} \right]. \quad (3.21)$$

Así, para este valor de $q = 1$ obtenemos ocho *candidatos* para la fase solar inicial para intentar la extensión.

- Órbitas *arco* con $2T = pT^\odot$, $q = 2$.

Solo $N = 0$ dará condiciones para la fase, pero ahora, sobrevivirán todos los términos con $k = -j - p$ sin restricciones y obtendremos cuatro posibles candidatos:

$$\tan(2\phi) = -Im \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j Q_{-j-p} \right] / Re \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j Q_{-j-p} \right] \quad (3.22)$$

Los valores de fase obtenidos en las Ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22) cumplen la condición de periodicidad a $O(\varepsilon)$. Estos valores no garantizan el éxito de la continuación numérica a través de la familia de Hamiltonianos (3.11), pero son excelentes candidatos para intentarla.

En la Sección 3.4 se determinan OPs y órbitas arco en el PCBC a partir de OPs en el PC3CR utilizando una nueva familia monoparamétrica de Hamiltonianos

$$H(\bar{x}, t, \varepsilon) = H_{PC3CR}(\bar{x}) + \varepsilon [H_{PCBC}(\bar{x}, t) - H_{PC3CR}(\bar{x}, t)], \quad (3.23)$$

y los valores de fase encontrados en el PBC, asumiendo fuertemente que el PCBC representa una pequeña perturbación del PBC.

Los dos Hamiltonianos son T^\odot -periódicos y cumplen

$$|H_{PCBC} - H_{PBC}| \simeq |\beta [H_{PBC} + O(f(\beta))]| \leq 0,03 |H_{PBC}| \quad |\beta| \ll 1.$$

3.4. Extensión usando la condición de fase.

Entre las 80 familias de OPs de transferencia rápida determinadas en el PC3CR (Sec. 2.3.5), se seleccionaron 34 candidatos con períodos $T = p/q T^\odot$ con $q \leq 2$. La Tabla 3.3 muestra las condiciones iniciales de estas OPs sobre la superficie de Poincaré Σ_1 utilizando un sistema de coordenadas sinódico con la *Orientación 2* (Sec. 1.2).

Las OPs están identificadas con el nombre de la familia a la que pertenecen. Cuando

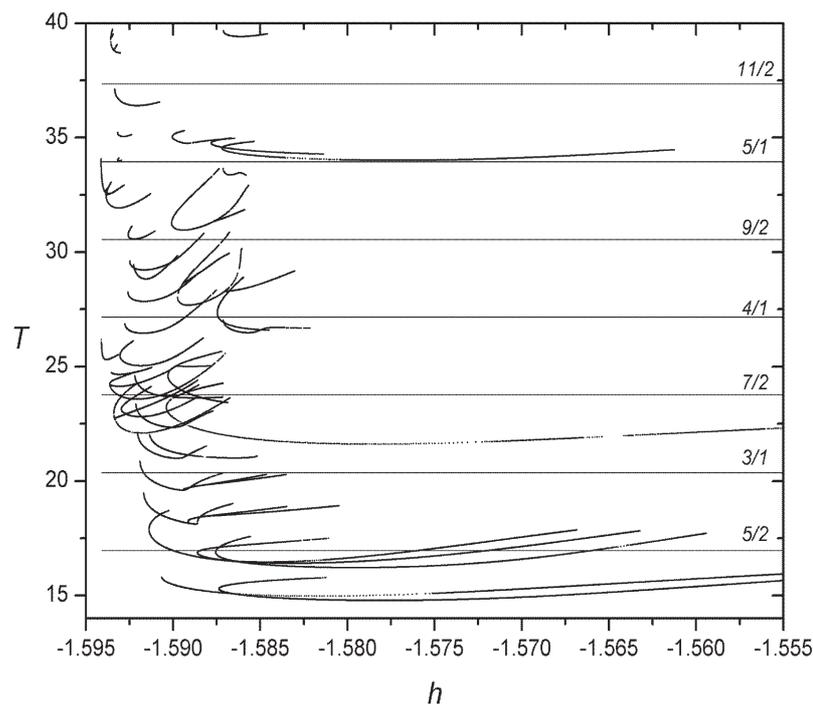


Figura 3.3: Diagrama $T^*(h)$ de las 80 familias de OPs de transferencia rápida de baja energía en el PC3CR. Las líneas horizontales representan valores de períodos que satisfacen $T/T^\odot = p/q$ para $q \leq 2$.

existe más de un candidato por familia, se utilizan números para diferenciarlas (ej. OPs 180A_1, 180A_2, etc.). En la Figura 3.3 se representan las curvas $T = p/2 T^\odot$ sobre el diagrama $T^*(h)$ de las familias de OPs del PC3CR.

Tabla 3.3: OPs seleccionadas para realizar la extensión al PCBC. Las condiciones iniciales yacen sobre Σ_1 utilizando la *Orientación 2* con $x = -0,836915310$ y $\dot{x} < 0$.

OP	h	y	\dot{y}	T/T^\odot
053_1	-1,565878460068	0,074623709930	0,038232831477	5/2
053_2	-1,587535370064	0,034872595196	-0,014958317256	5/2
077_1	-1,588402131642	-0,004134462913	0,061988219226	5/2
077_2	-1,571833235201	-0,044602564473	0,125546117808	5/2
084_1	-1,571833235198	0,048523819602	0,051661507087	5/2
084_2	-1,588402131637	0,035783695274	-0,015077915036	5/2
180A_1	-1,590051981046	0,005203420016	0,047931829832	5/2
180A_2	-1,575838311573	-0,028328334001	0,117872064632	5/2
357	-1,527912676149	0,129037154871	0,115396081605	5/2
146A	-1,591700725696	0,006846867370	0,038909150211	3
018A	-1,588903594199	-0,034819979863	0,029921950585	7/2
144A	-1,589632997244	-0,041449806946	-0,003724421601	7/2
147	-1,591963326996	0,005345381429	0,049164764081	7/2
157A_1	-1,590967524288	0,011149398614	0,026024794470	7/2
157A_2	-1,589602176366	0,020708463197	0,006870766264	7/2
187A	-1,592880096778	-0,015974142679	-0,021581395503	7/2
187B_1	-1,590037214034	0,022034930724	-0,020275302919	7/2
187B_2	-1,590037214032	-0,035908433314	-0,035086012943	7/2
188A_1	-1,590648110920	0,020994518108	-0,010353229193	7/2
188A_2	-1,593166029173	0,008922128675	0,006161091218	7/2
194	-1,592034081594	-0,020804483111	-0,032723352668	7/2
244	-1,592034081387	0,000196827658	0,054991376789	7/2
305	-1,590297961884	-0,034797442148	0,028101182793	7/2
013	-1,587405706181	-0,039974662386	-0,044162238255	4
020	-1,587103232860	-0,036926617274	-0,009066358156	4
021	-1,587103232860	-0,044665574995	-0,047043596243	4
171_1	-1,589304263042	0,027586904389	-0,015304281662	4
171_2	-1,592622274785	0,007197824894	0,038510297573	4
081A	-1,587087643413	-0,049457708743	-0,032381159659	9/2
172	-1,588573799041	0,032545945555	-0,026412399331	9/2
032B_1	-1,587032193015	-0,028077587567	0,007199549606	5
032B_2	-1,587032192996	-0,019184470816	-0,004872933707	5
287	-1,594135743317	0,003447582013	-0,000982857301	5
238	-1,593311223148	-0,007745295707	-0,019614320993	11/2

Continuación numérica

Para cada OP se calcularon los coeficientes de Fourier (ver Ec.(3.16)) y las fases solares iniciales correspondientes a las Ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22). Así, se realizaron las extensiones desde el PC3CR al PCBC a través de la familia de Hamiltonianos (3.23) variando ε con incrementos $\Delta\varepsilon < 10^{-2}$, según cada caso, a partir de un valor inicial $\varepsilon_0 = 10^{-4}$. Las trayectorias se integraron con un algoritmo de paso variable Bulirsch-Stoer de precisión 10^{-14} y se implementó el método de Newton-Raphson para determinar una nueva OP con un error $< 6 \times 10^{-8}$. En cada paso, se realizó una extrapolación polinomial cada 6 puntos, hasta lograr la convergencia [20].

Cada valor de fase solar inicial calculado ϕ_1, ϕ_2, \dots se corresponde con los tiempos iniciales t_1, t_2, \dots ; para identificar las órbitas extendidas se utilizó la misma notación adoptada para la correspondiente OP del PC3CR y se agregó el índice t_i correspondiente al tiempo inicial con el que se intentó realizar la continuación.

Las Figuras 3.4 y 3.5 muestran las curvas características $\eta_1(\varepsilon) = x(\varepsilon)/x_0$, $\eta_2(\varepsilon) = y(\varepsilon)/y_0$, $\eta_3(\varepsilon) = \dot{x}(\varepsilon)/\dot{x}_0$ y $\eta_4(\varepsilon) = \dot{y}(\varepsilon)/\dot{y}_0$ de la variación relativa de las condiciones iniciales de algunas de la OPs para $\varepsilon > 0$ respecto de las condiciones iniciales de la OP *origen* en el PC3CR ($\varepsilon = 0$).

Los *saltos* que presentan las curvas características cuando $\varepsilon \sim 0$ se corresponden con los valores del vector \bar{a} que representa el cambio en las condiciones iniciales que hay que realizar cuando queremos determinar $\bar{x}_2(t)$ como un desarrollo en serie de potencias de ε a partir de la solución conocida $\bar{x}_1(t)$ (ver Ec.(3.13)). En $\varepsilon = 0$ todas las curvas características tienen el valor $\eta_i = 1$ pero por razones de escala, en algunas figuras, ésto no se aprecia. En algunos casos, la extensión se hace extremadamente lenta debido a la

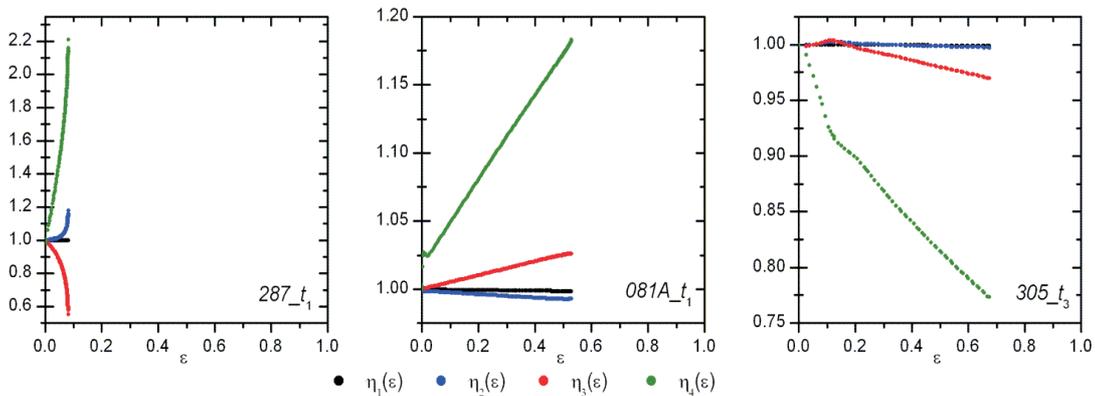


Figura 3.4: Curvas características η_1, η_2, η_3 y η_4 para tres soluciones continuadas numéricamente. Estas trayectorias divergen o dejan de existir para un cierto ε .

inestabilidad de las trayectorias; en otros, la órbita deja de existir, alguna de las curvas características η_i diverge ($\partial\eta_i/\partial\varepsilon \rightarrow \infty$) o el algoritmo empleado no logra la convergencia. En este trabajo fijamos como objetivo demostrar que, a través de los valores de la fase solar propuestos, es posible extender OPs al PCBC. Así, el análisis de bifurcaciones, puntos de retorno y otros comportamientos dentro de la familia de Hamiltonianos utilizada no se contemplan aquí.

Es importante recordar que el valor de la fase solar inicial calculado a partir de aprox-

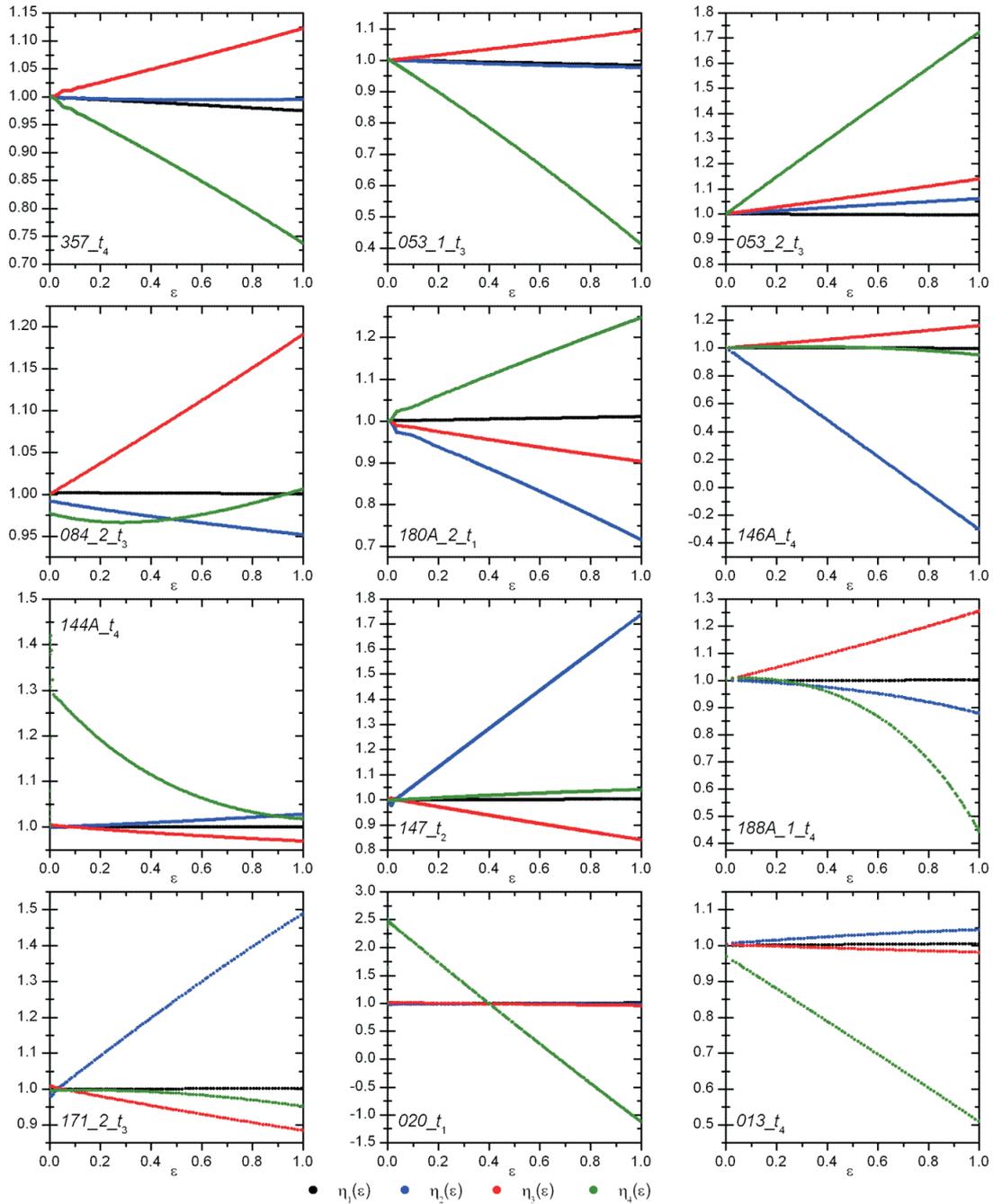


Figura 3.5: Curvas características η_1 , η_2 , η_3 y η_4 para algunas de las soluciones continuadas numéricamente. $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 1$) corresponde a una órbita en el PC3CR (PCBC).

imar la condición de periodicidad a $O(\varepsilon)$ constituye una condición necesaria, pero no suficiente, para realizar la extensión de OPs desde el PC3CR al PBC, y además, estamos asumiendo fuertemente que, esta condición, se cumple cuando reemplazamos el Hamiltoniano H_{PBC} por H_{PCBC} (ver Ec. (3.23)).

3.4.1. Resultados Numéricos. OPs y arcos en el PCBC.

A partir de las OPs seleccionadas en el PC3CR (Tabla 3.3) se lograron extender y determinar un total de 25 órbitas arco y 11 OPs de transferencia rápida de baja energía. Las Tablas 3.4, 3.5 y 3.6, muestran las condiciones iniciales correspondientes a cada trayectoria en el PCBC. Cada órbita está determinada con un error $< 10^{-9}$. El índice d se utiliza para identificar OPs obtenidas a partir de la duplicación del período de la correspondiente OP en el PC3CR.

La trayectoria 032B_1 pudo extenderse sólo para un valor de fase. La correspondiente órbita 032B_1_1 en el PCBC, sufre una colisión con la Luna. Las demás OPs pudieron extenderse a dos trayectorias con características extremadamente similares. Ésto se vé reflejado en los valores de las distancias mínimas a la Tierra, a la Luna y en los parámetros de estabilidad s_k de la Tabla 3.7.

Salvo el caso particular de la órbita $5T^\ominus$ -periódica 032B_1_1, las OPs restantes (10 en total) presentan una doble inestabilidad $|s_k| > 2$.

Sólo las seis órbitas 020_1_1, 077_1_1 y 084_2_1 son asimétricas respecto del eje x . Las Figuras 3.6 a 3.9 muestran la evolución de algunas de las OPs y órbitas arco determinadas en el PCBC. En estas figuras movimiento del Sol no está a escala.

Tabla 3.4: Condiciones iniciales correspondientes a las órbitas arco con $T = 5/2 T^\odot$ en el PCBC determinadas por continuación numérica.

órbita arco $5/2 T^\odot$	t_i	x y	\dot{x} \dot{y}
053_1_3	2,9437226346869	-0,8232912827573 0,0729037632914	-0,2049671886363 0,0157937233298
053_1_4	6,3393195706408	-0,8229401338364 0,0728395205750	-0,2055542192325 0,0160284109816
053_2_3	3,2879979857458	-0,8326383127723 0,0369785749622	-0,1029701564274 -0,0257859571446
053_2_4	6,6835949216998	-0,8327377374139 0,0368880646231	-0,1031235060268 -0,0248040354066
077_1_1	1,1301247115203	-0,8073384112986 -0,0090364694254	-0,1418178582823 -0,0051112236119
077_1_2	4,8278124188227	-0,8392698240486 0,0005098721759	-0,0853997094356 0,0631047326582
084_2_3	3,3419076185034	-0,8371849649055 0,0340469055782	-0,0936535575622 -0,0151707186404
084_2_4	6,7375045544573	-0,8371042092814 0,0341170567462	-0,0935333913502 -0,0146415891146
180A_1_1	1,5198632674924	-0,8382731805885 0,0103226184577	-0,0700359357134 0,0420907706187
180A_1_2	4,9154602034464	-0,8377102987224 0,0097846537118	-0,0705053126444 0,0414271551138
180A_2_1	1,1784913190347	-0,8457047017738 -0,0202900216655	-0,1261980275158 0,1469953222356
357_3	2,8279231794973	-0,8164616406762 0,1291141406148	-0,2969402422526 0,0853142742699
357_4	6,2235201154512	-0,8158473209269 0,1284459460921	-0,2986591685886 0,0850832278113

Tabla 3.5: Condiciones iniciales correspondientes a las órbitas arco con $T = 7/2 T^\odot$ en el PCBC determinadas por continuación numérica.

órbita arco $7/2 T^\odot$	t_i	x y	\dot{x} \dot{y}
018A_1t ₁	1,3640073992519	-0,8382838911312 -0,0327661088797	-0,0626291135350 0,0319939391991
018A_2t ₂	4,7596043352058	-0,8375608357858 -0,0331814868750	-0,0634742121687 0,0289125536294
144A_3t ₃	1,8911563260716	-0,8376048527992 -0,0426290387072	-0,0458798745076 -0,0033545539698
144A_4t ₄	5,2867532620256	-0,8374853339207 -0,0426245640048	-0,0461119947249 -0,0037900167702
147_1t ₁	1,6599216699889	-0,8385880242452 0,0097916641098	-0,0358277014411 0,0511566375935
147_2t ₂	5,0555186059428	-0,8383348299740 0,0092854548056	-0,0364152987695 0,0511342219943
187A_1t ₁	0,7312170875323	-0,8378802149936 -0,0371102304819	-0,0371102304818 -0,0156566364640
187A_2t ₂	4,1268140234862	-0,8381377005345 -0,0175746564442	-0,0374160755309 -0,0143312618879
188A_1_1t ₃	3,3881673904578	-0,8391171393756 0,0174832263558	-0,0908157085427 -0,0018680254815
188A_1_1t ₄	6,7837643264118	-0,8383503094853 0,0184230777404	-0,0899598374190 -0,0045806978632
188A_2_1t ₁	0,1571042580241	-0,8342162579068 0,0027269111486	-0,0478467375487 0,0018969258240
188A_2_2t ₂	3,5527011939780	-0,8340271981207 0,0022934018257	-0,0473041023293 0,0014417378050

Tabla 3.6: Condiciones iniciales de órbitas periódicas $3T^\odot$, $4T^\odot$ y $5T^\odot$ en el PCBC determinadas por continuación numérica. Las órbitas $053^d_2.t_3$ y $053^d_2.t_4$ se obtuvieron duplicando el período de la correspondiente OP del PC3CR.

órbita T -periódica	t_i	x y	\dot{x} \dot{y}
$T = 3T^\odot$			
146A. t_3	3,3265795724338	-0,8338810683556 -0,0017627724758	-0,0658016572113 0,0366759998961
146A. t_4	6,7221765083877	-0,8339120814446 -0,0020718453812	-0,0658968551314 0,0369412533906
$T = 4T^\odot$			
013. t_3	1,9270867350723	-0,8410584318857 -0,0415648661348	-0,0710601802358 -0,0231934953466
013. t_4	5,3226836710262	-0,8412555812986 -0,0417347403985	-0,0709901229219 -0,0224675394701
020. t_1	1,3792936481329	-0,8408617622409 -0,0359687313255	-0,0890884586101 0,0101908035731
020. t_2	4,7748905840869	-0,8417782361030 -0,0358040150188	-0,0889071283960 0,0138070650544
171.2. t_3	1,7315858533210	-0,8379758516359 0,0107192583296	-0,0330903803647 0,0366443350708
171.2. t_4	5,1271827892749	-0,8382920902740 0,0111104983745	-0,0322885877106 0,0373817317118
$T = 5T^\odot$			
032B.1. t_4	6,3535783515811	-0,8240495810597 -0,0276354645833	-0,1128395408242 -0,0392670698867
053 ^d .2. t_3	3,2879979857458	-0,8330408746485 0,0365770176348	-0,1033586359464 -0,0240383642956
053 ^d .2. t_4	6,6835949216998	-0,8323390569491 0,0372962615200	-0,1027397533852 -0,0265393586907

Tabla 3.7: Distancias mínimas a la Tierra y a la Luna y parámetros de estabilidad de las órbitas determinadas en el PCBC.

órbita T -periódica	$d_{min}(\text{km})$		$ s_1 $	$ s_2 $
	Tierra	Luna		
053_1_ t_3	111191	18702	5,9	1957,8
053_1_ t_4	111038	18728	5,9	1959,1
053_2_ t_3	121705	4593	62,6	6,1
053_2_ t_4	121558	4610	61,8	6,1
077_1_ t_1	118266	3110	220,8	0,3
077_1_ t_2	118325	3150	216,4	0,3
084_2_ t_3	119167	4683	29,5	33,1
084_2_ t_4	119052	4705	32,7	29,9
180A_1_ t_1	118458	7371	49,9	12,4
180A_1_ t_2	118471	7365	49,5	12,4
180A_2_ t_1	106956	23966	5153,0	5,2
357_ t_3	96931	14713	5365,7	5,2
357_ t_4	96755	14716	5377,8	5,2
146A_ t_3	121237	7311	336,6	29,1
146A_ t_4	121361	7346	341,1	29,3
018A_ t_1	133112	12440	371,2	34,3
018A_ t_2	133120	12448	368,8	34,4
144A_ t_3	137294	10432	8423,6	6,3
144A_ t_4	137295	10442	8344,1	19,2
147_ t_1	118788	3701	796,2	591,8
147_ t_2	118786	3696	859,6	603,3
187A_ t_1	126512	6669	4061,2	17,4
187A_ t_2	126668	6684	3809,2	19,8
188A_1_ t_3	122518	5908	25,6	7,9
188A_1_ t_4	122431	5816	29,1	8,0
188A_2_ t_1	124181	6473	94,7	9,2
188A_2_ t_2	124332	6519	97,4	9,1
013_ t_3	137125	2729	155,8	35,9
013_ t_4	137126	2733	155,8	35,9
020_ t_1	134724	3253	766,4	8,3
020_ t_2	134709	3250	767,7	8,3
171_2_ t_3	119714	4199	1330,9	28,6
171_2_ t_4	119714	4197	1339,6	29,7
032B_1_ t_4	129841	725	278,1	1,1
053 ^d _2_ t_3	121518	4542	4031,9	32,4
053 ^d _2_ t_4	121518	4542	3923,3	35,4

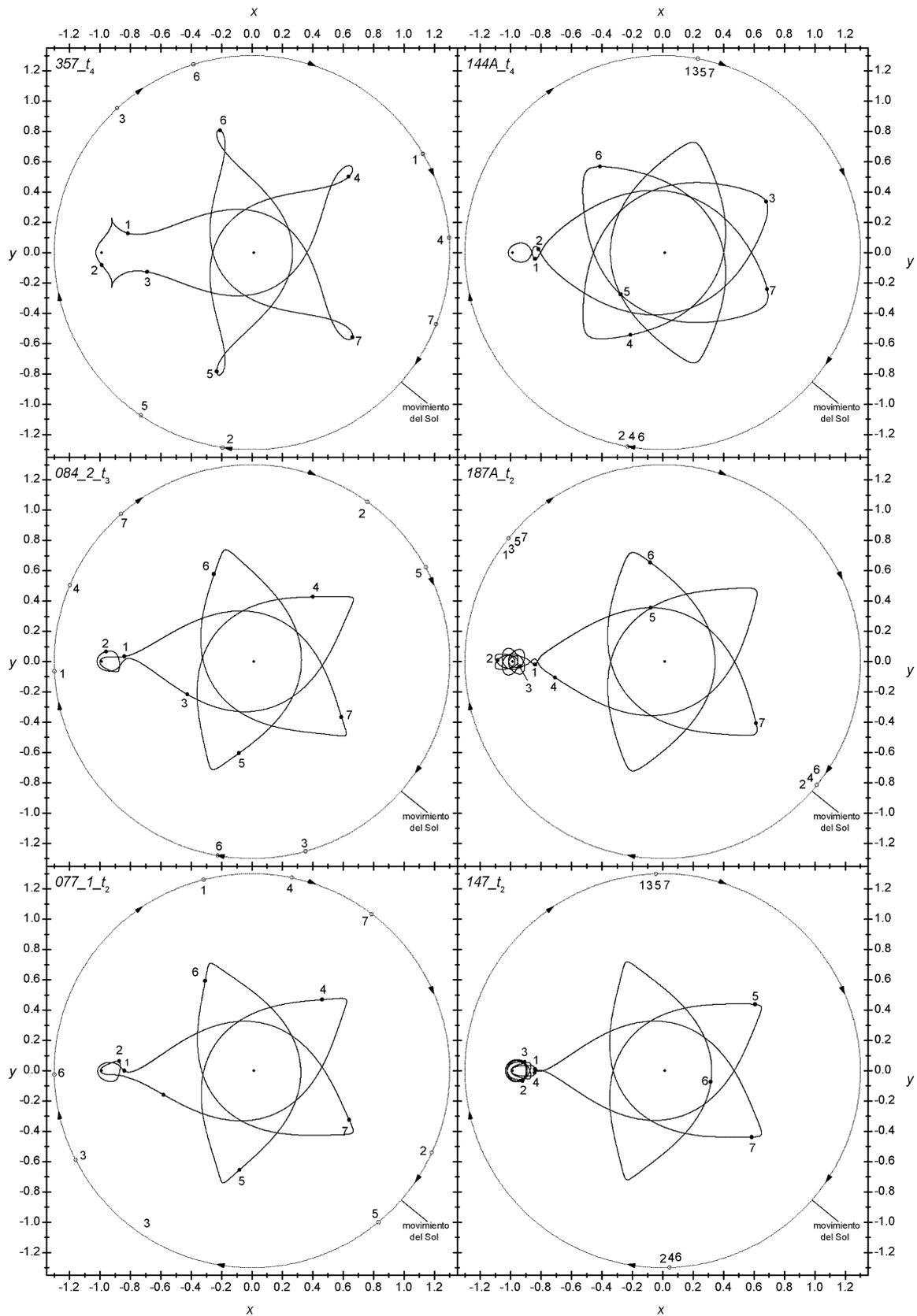


Figura 3.6: Trayectorias en el plano xy de algunas órbitas arco determinadas en el PCBC. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

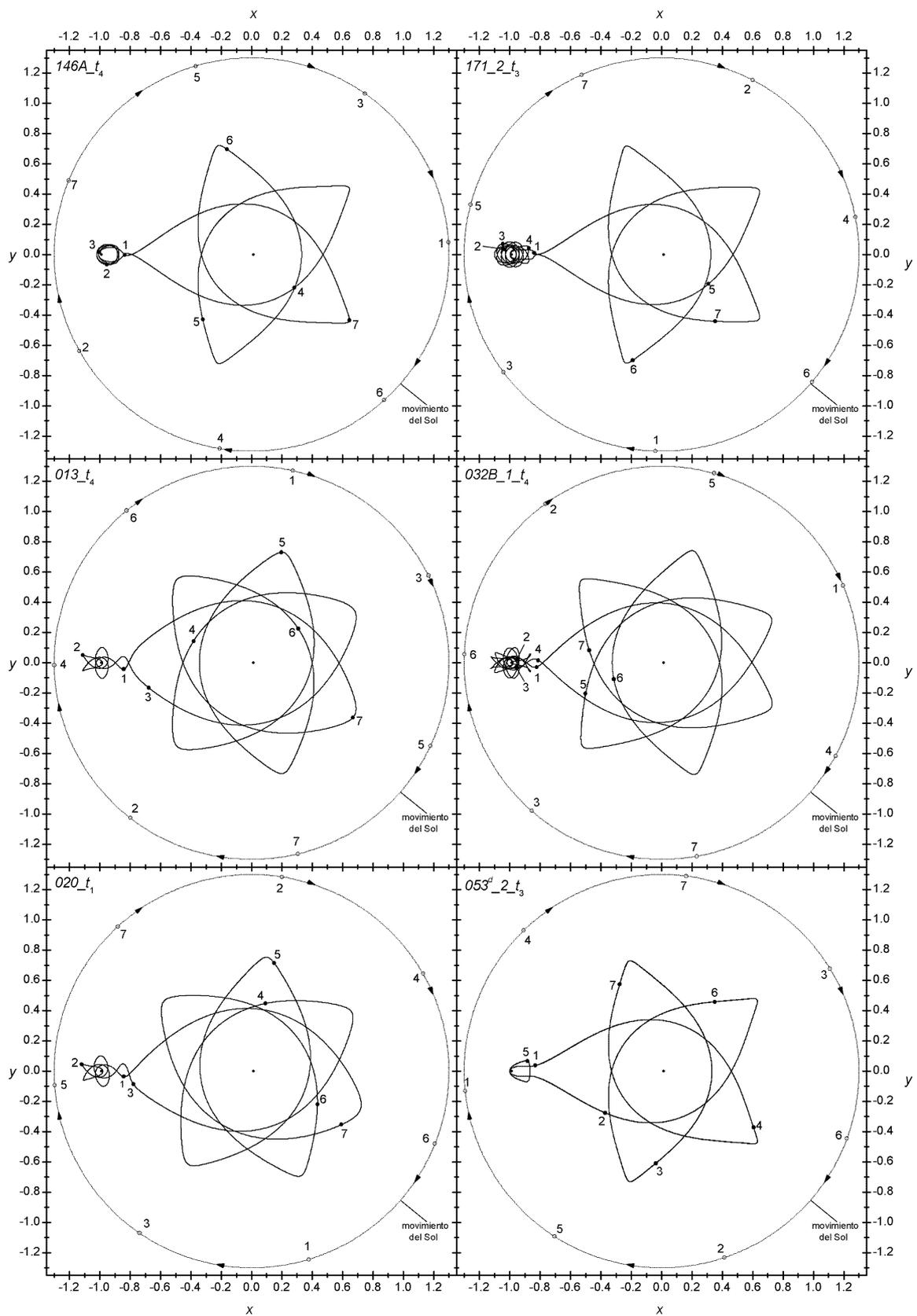


Figura 3.7: Trayectorias en el plano xy de algunas OPs determinadas en el PCBC. Los números indican distintos instantes de la posición del Sol y de la masa infinitesimal.

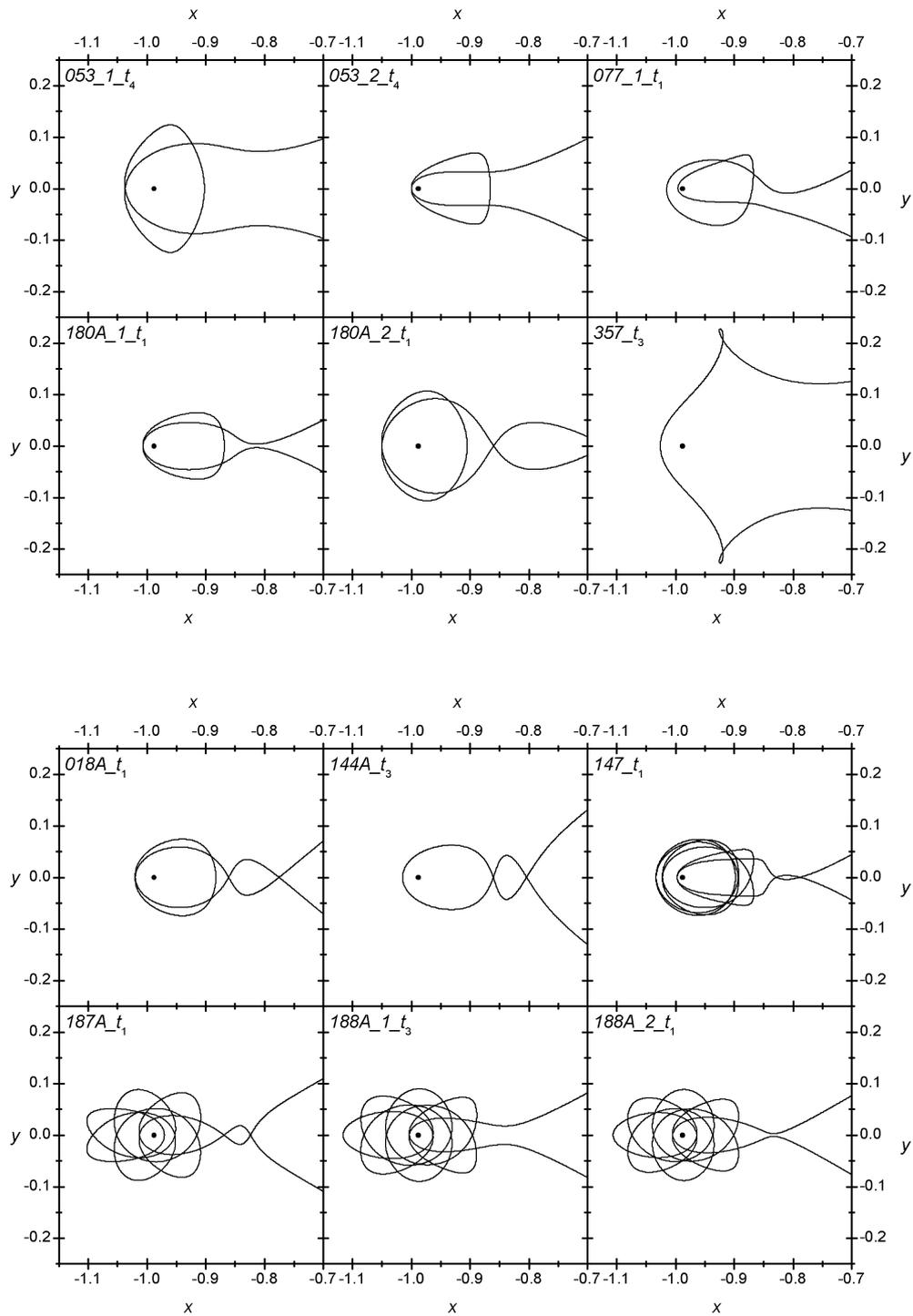


Figura 3.8: Evolución de algunas órbitas arco $5/2 T^\odot$ (Sup.) y $7/2 T^\odot$ (Inf.) en la región circunlunar.

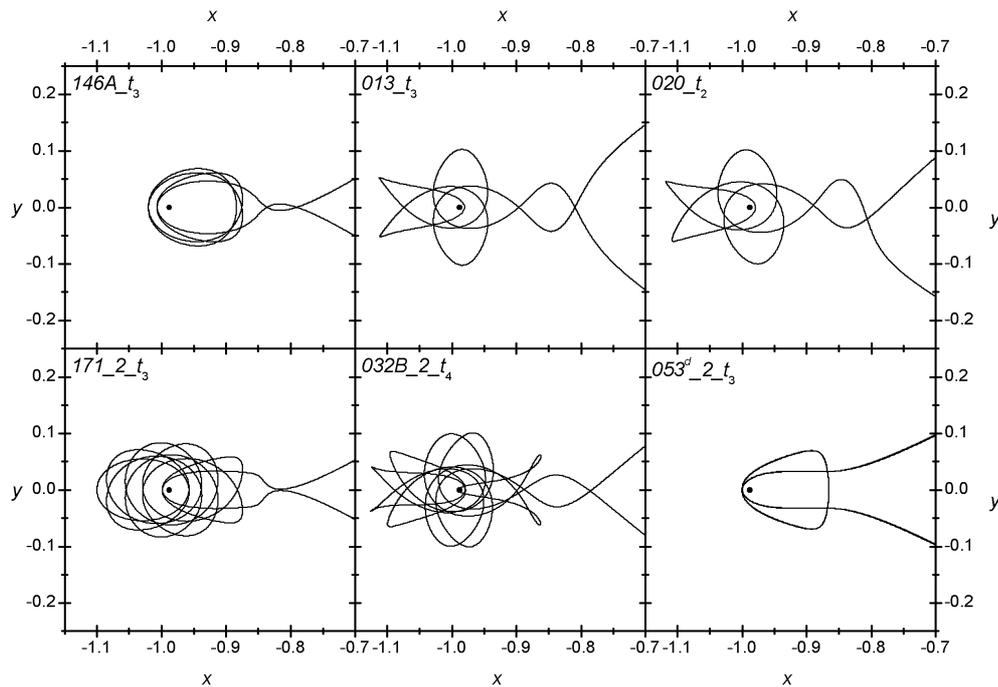


Figura 3.9: Evolución de algunas OPs $3 T^\odot$, $4 T^\odot$ y $5 T^\odot$ en la región circunlunar.

3.5. Discusión y comentarios finales.

En este capítulo se determinaron OPs y órbitas *arco* en el PCBC que realizan transferencias rápidas entre la Tierra y la Luna mediante la continuación numérica de soluciones periódicas determinadas en el PC3CR a través de la familia de Hamiltonianos (3.23). En la Sección 3.2 se utilizaron las propiedades de simetría de la OP $T222$ y del modelo PCBC y se determinaron dos OPs retrógradas extremadamente rápidas ($T = T^\odot$ con características geométricas similares).

Mediante el análisis del Hamiltoniano del PBC, en la Sección 3.3 se determinó una condición para el valor inicial de la fase solar que permite intentar la continuación numérica de soluciones $p/q T^\odot$ -periódicas del PC3CR al PCBC sin necesidad de recurrir a simetrías. Es importante remarcar que las fases iniciales obtenidas para realizar la extensión satisfacen la condición de periodicidad sólo a primer orden en ε . Además, esta condición es necesaria pero no suficiente para garantizar la continuación de una trayectoria; la órbita puede no existir, puede bifurcar o puede dejar de existir para algún valor particular ε_0 . En el caso de bifurcaciones, es necesario aplicar otras técnicas y métodos que escapan a los fines de este trabajo, pero un análisis general de los procedimientos que se utilizan en estos casos se muestra en el Apéndice C ⁹.

⁹Para más detalles aplicados al caso particular de bifurcación de OPs desde el PC3CR al PCBC, consultar el trabajo de Andreu [7]

Órbitas de baja energía

Las órbitas determinadas en el PCBC no se aproximan significativamente a la Tierra pero poseen gran acercamiento a la Luna (ver Tabla 3.7). Existen 27 trayectorias que se acercan a una distancia menor de ~ 5630 km de la superficie lunar ¹⁰, en particular, la órbita 032B_1.t₄ colisiona. Los mínimos acercamientos a la Tierra se encuentran entre 95000 km y 120000 km. Nuevamente, ésto es consecuencia directa de haber exigido que las OPs realicen transferencias de baja energía.

Analizando los parámetros de estabilidad, vemos que, en la mayoría de los casos, los

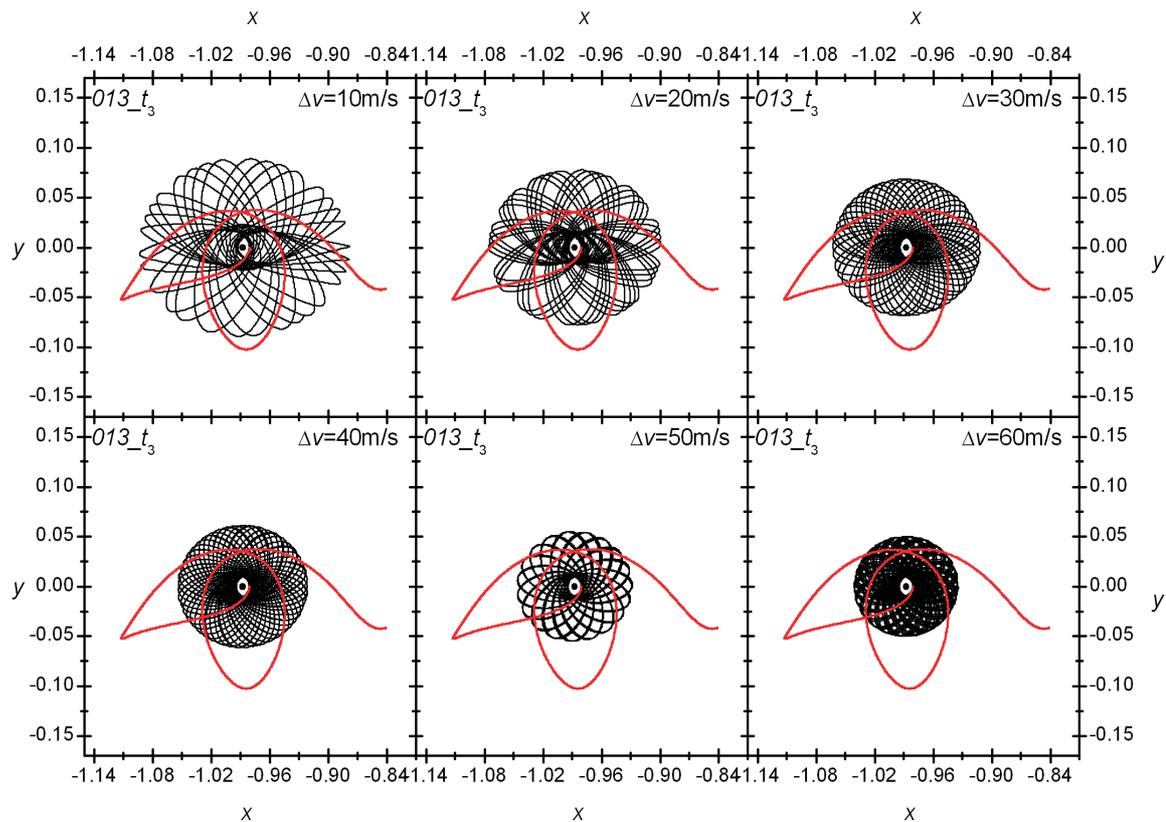


Figura 3.10: Captura balística alrededor de la Luna a partir de la OP 013.t₃. En rojo se muestra la OP original. La trayectoria en color negro muestra la evolución durante ~ 109 días después de aplicar un impulso de frenado Δv contrario a la dirección de movimiento en el punto más cercano.

valores son relativamente pequeños; así, se obtiene una inestabilidad *moderada* ¹¹. Ésto, sumado al hecho de que son órbitas de baja energía aumenta el interés para que sean explotadas en el diseño de misiones espaciales de larga duración aplicando algún método

¹⁰Radio lunar ~ 1740 km.

¹¹En el trabajo de Andreu, existe algunas trayectorias de pequeña amplitud que presentan parámetros de estabilidad $|s_k| > 10^5$ [7].

que permita controlarlas. En particular, resulta interesante analizar las OPs 013_ t_3 y 013_ t_4 . Ellas se acercan a ~ 990 km de la superficie lunar con una velocidad de ~ 1814 m/s. En este punto, si aplicamos un impulso de frenado Δv de sólo 10 m/s, logramos la captura balística alrededor de la Luna. La Figura 3.10 muestra la evolución durante 109 días de la trayectoria 013_ t_3 cuando se aplican distintos impulsos de frenado Δv en el punto de máximo acercamiento (Fig. 3.10).

Las mismas técnicas que presentamos en este trabajo pueden ser aplicadas sobre alguna órbita periódica conocida del PC3CR. Existen varios trabajos que utilizan trayectorias de transferencia de baja energía, pero en todos ellos, se construye una trayectoria *arco* que realiza sólo una transferencia entre la Tierra y la Luna minimizando el gasto de combustible necesario para las maniobras. En contraste, en este trabajo se determinan órbitas *periódicas* que son relativamente rápidas y que realizan repetidos pasajes alrededor de las primarias. Más aún, en los trabajos de Bollt y Meiss y Yagasaki [15, 16] solamente se consideran trayectorias en el marco del PC3CR, y en otro trabajo de Yagasaki [17], se introduce la perturbación solar a través del PBC. A diferencia de estos trabajos, hemos utilizado el modelo PCBC que, para este tipo de trayectorias resulta más realista.

Durante más de 40 años [2, 3], las OPs de transferencia en el PC3CR Tierra-Luna fueron consideradas sólo con interés académico debido a su inestabilidad y sensibilidad a pequeñas perturbaciones. En este Capítulo mostramos que es posible extenderlas a modelos más realistas. En el siguiente Capítulo, presentamos un algoritmo de control que permite estabilizarlas con mínimos impulsos.

En otros trabajos, hemos determinado nuevas OPs de transferencia como resultado de realizar pequeñas búsquedas numéricas en el PCBC [6]. Estas búsquedas, en general, permiten determinar OPs más sencillas y que resultan menos atractivas que las presentadas aquí. Estas trayectorias se muestran en el Apéndice C.1 y también serán utilizadas en el próximo Capítulo.

En el Capítulo 5 discutimos la extensión de los resultados al Sistema Solar real.

Capítulo 4

Control de Órbitas Periódicas Inestables.

4.1. Introducción.

El caos es usualmente visto como una limitación cuando se diseñan misiones espaciales. La extrema sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales complica en extremo la predicción de la trayectoria futura y requiere de la aplicación de frecuentes impulsos de control para seguir una trayectoria predeterminada [11, 12, 19]. Sin embargo, en trabajos recientes Bollt y Meiss [15], muestran la posibilidad de sacar ventaja del caos en órbitas de transferencia de baja energía entre la Tierra y la Luna. Seleccionando arcos de distintas trayectorias caóticas en el PC3CR, logran transferir una nave espacial desde una órbita circular alrededor de la Tierra hacia la Luna, y logran su captura balística con un consumo total que resulta un 38 % menor que el requerido para realizar la misma maniobra a través de una transferencia clásica tipo Hohmann. La gran desventaja de esta aproximación es que se requieren gran cantidad de arcos, gran cantidad de impulsos para construir la trayectoria final y como resultado se obtiene una transferencia lenta que emplea un tiempo aproximado de 2 años (ver Fig. 4.1).

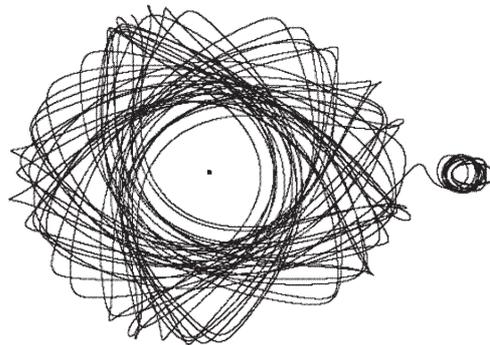


Figura 4.1: Órbita de transferencia Tierra-Luna en el PC3CR obtenida por Bollt y Meiss [15].

El atractivo de aplicar técnicas de control para estabilizar desarrollos caóticos radica

en la posibilidad de producir una gran cantidad de comportamientos diferentes para un mismo sistema con sólo modificar ligeramente el valor de algún parámetro de control [19]. En 1989 Edward Ott, Celso Grebogi y James A. Yorke (OGY) introducen un método general para controlar sistemas caóticos [13] que fue utilizado por primera vez para estabilizar un sistema caótico disipativo utilizando una variación del mapa de Hénon [11, 12, 27]. Este trabajo tuvo gran repercusión en la comunidad científica y originó gran variedad de aplicaciones en todas las ramas de la ciencia. [14]

En particular, en el PC3CR existen interesantes aplicaciones. Albert E. Macau [29] considera una nave espacial y un satélite natural que se mueven inicialmente en órbitas coplanares circulares muy próximas entre sí, alrededor de un planeta masivo. Mediante una aproximación del modelo e implementado el método OGY [13] sobre trayectorias caóticas, logra desarrollos regulares para la nave espacial alrededor del satélite natural. Es importante considerar que en los últimos años, las OPIs de transferencia en el PC3CR han cobrado gran importancia gracias a los trabajos de Howell, Lo, y otros [30, 31, 32, 33, 34]. Mediante la teoría de variedades invariantes se determinaron órbitas periódicas, principalmente órbitas Halo en el PC3CR Sol-Tierra, algunas de las cuales fueron utilizadas en el diseño de misiones actuales (misión Génesis).

En el caso general, todos los métodos de control que se utilizan para estabilizar trayectorias se basan en las siguientes propiedades de los sistemas caóticos [12, 19]:

1. El caos en sistemas Hamiltonianos usualmente envuelve la presencia de un conjunto denso de órbitas periódicas inestables (OPIs); una trayectoria vecina, será atraída por las variedades estables de la OPI y repelida por las variedades inestables (Sec. 4.1.1).
2. La extrema sensibilidad a las condiciones iniciales permite aplicar pequeños impulsos controlados para posicionar a una trayectoria vecina sobre las variedades estables de la OPI (ver Sec. 4.2 y 4.4.1).

Así, ejercer control en sistemas caóticos significa eliminar ciertos dominios de atracción, estabilizar órbitas periódicas inestables o puntos fijos de una sección de Poincaré. Los métodos de control constituyen una herramienta esencial para diseñar misiones espaciales económicas. El potencial que ellos ofrecen es enorme y en la actualidad, recién se están desarrollando y aplicando con éxito [18, 35].

Podemos distinguir cuatro maneras de ejercer control:

1. *Control de baja energía*: se logra estabilizar el sistema aplicando pequeños cambios en algún parámetro de control.
2. *Control de alta energía*: en algunos sistemas es necesario introducir grandes cambios en algún parámetro de control que en general, van acompañados de gran gasto de energía.
3. *Feedback*: el control se debe ejercer durante todo el proceso. El sistema constantemente debe ser perturbado.
4. *Non feedback*: sólo se ejercen perturbaciones cuando el sistema entra en ciertas regiones de control.

En particular, en alguna misión espacial, es imprescindible que se puedan ejercer controles de baja energía para minimizar el gasto de combustible utilizado. Así, en una misión específica, necesitamos determinar una OPI que resulte de interés con nuestros objetivos y debemos diseñar un algoritmo de control adecuado y efectivo que permita utilizar esta trayectoria como referencia.

En un trabajo anterior [1], diseñamos un método de control que permite estabilizar OPIs en el PC3CR planar. Como una introducción y complemento de este trabajo se describirá este método en la Sección 4.2. Por completitud, en el Apéndice D.1 se describe brevemente el método de control OGY [13]. En la Sección 4.4, extendemos nuestros resultados desarrollando un nuevo método general de control lineal que permite estabilizar todo tipo de OPIs existentes en los modelos PBC y el PCBC.

Pero antes es necesario revisar algunos conceptos...

4.1.1. Puntos Periódicos Inestables.

En una superficie de Poincaré Σ , una órbita periódica quedará representada por k puntos fijos y diremos que la órbita en esta superficie de sección es k -periódica. Si la órbita es inestable (re. estable), cada uno de estos puntos será un punto periódico inestable (PPI) (re. punto periódico estable PPE). La estabilidad de cada punto fijo puede ser analizada mediante la linealización de la dinámica en Σ [12] (ver Secs. 2.2 y 3.1). Analicemos como se comportan las trayectorias en una vecindad de un PPI.

Mapas bidimensionales

Sea ξ_F un punto fijo en Σ correspondiente a una órbita k -periódica y sea (ξ_i, ξ_{i+k}) una colección de pares de puntos pertenecientes a un entorno de radio ε centrado en ξ_F . La linealización de la dinámica permite aproximar la acción del correspondiente mapa de Poincaré P en Σ que actúa sobre ξ_i por medio de la matriz Jacobiana M , $d \times d$, evaluada en ξ_F [12]:

$$\delta\xi_{i+k} = M \delta\xi_i, \quad (4.1)$$

con $\delta\xi_{i+k} = \xi_{i+k} - \xi_F$ y $\delta\xi_i = \xi_i - \xi_F$.

En particular, la preservación de volumen en sistemas Hamiltonianos autónomos implica $\det(M) = 1$. Así, en un mapeo bidimensional ($d = 2$), los valores posibles de los autovalores λ de la matriz M se corresponderán con los cuatro casos descritos en la Sección 2.2 .

Consideremos la matriz M , 2×2 :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

la evolución de un punto $\xi_i = (x_1, x_2)$ alrededor de un punto fijo, quedará determinada por la forma cuadrática [27]

$$m_{12}x_1^2 + (m_{11} - m_{22})x_1x_2 - m_{21}x_2^2 = Q, \quad (4.2)$$

las iteraciones del mapa seguirán trayectorias cónicas [27, 28] centradas en ξ_F rotadas en un ángulo χ dado por

$$\tan(2\chi) = \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{12} + m_{21}}. \quad (4.3)$$

Según los valores de los autovalores distinguimos tres tipos de estructuras:

1. *Estructura Elíptica (E)*:
 $|\lambda_i| < 1$ y obtenemos trayectorias elípticas estables alrededor del punto fijo. El punto fijo se denomina *punto elíptico*.
2. *Estructura Hiperbólica (H)*:
 En esta estructura $\lambda_i > 1$ o $\lambda_i < -1$ y obtenemos trayectorias hiperbólicas. En el primer caso, las iteraciones evolucionan únicamente sobre alguna de las ramas hiperbólicas (*punto hiperbólico ordinario*); en el segundo caso, las trayectorias evolucionan alternándose en cada iteración, entre las dos ramas (*punto hiperbólico de reflexión*). (Fig. 4.2).
3. *Estructura Lineal (L)*:
 Los autovalores son reales y $|\lambda_i| = 1$. Las trayectorias degeneran en líneas rectas. Este caso especial corresponde a la transición entre los casos estable e inestable.

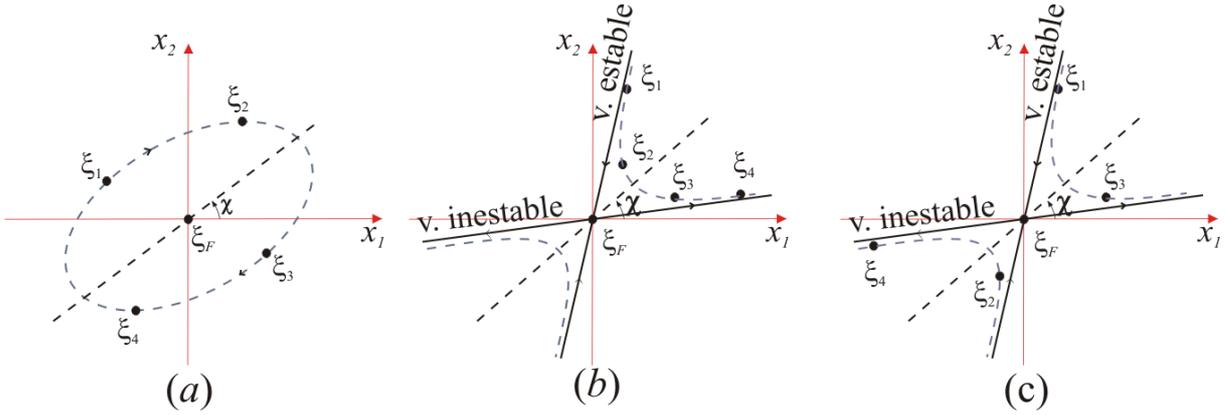


Figura 4.2: Trayectorias de los puntos ξ_i alrededor de un punto fijo en Σ . (a) trayectoria elíptica; (b) trayectoria hiperbólica ordinaria; (c) trayectoria hiperbólica de reflexión.

Para un PPI, los autovectores del mapa linealizado \vec{e}_s and \vec{e}_u asociados con los autovalores λ_s y $\lambda_u = \lambda_s^{-1}$, definen dos direcciones de carácter estable e inestable denominadas *variedades estable* e *inestable* respectivamente. Para el sistema linealizado, un punto ξ_i que inicialmente se encuentre exactamente sobre la variedad estable (re. inestable) del punto fijo evolucionará de manera tal que su distancia al PPI disminuya (re. aumente) en cada iteración. Las variedades del sistema linealizado son tangentes a las variedades del sistema dinámico no-lineal en el PPI [11, 12].

Con estas ideas, si reconstruimos la dinámica local alrededor de un PPI y, si el sistema lo permite, podremos estabilizar trayectorias inestables realizando pequeñas perturbaciones sobre algún parámetro de control. Además, tendremos la libertad de aumentar la cantidad de puntos de control si consideramos otras superficies de Poincaré.