UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tesis de licenciatura

ÁLGEBRAS FACIALES Y BIÁLGEBRAS DÉBILES

Agustín García Iglesias

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch

2006

Índice

1. Introducción.

Este trabajo está dividido en dos partes, una primera, en la que desarrollamos un trabajo de T. Hayashi [14], en el que se introduce el concepto de álgebra facial (face algebra) y se realiza una versión "facial" de la biálgebra FRT A_R asociada a una solución constante R de la ecuación de Yang-Baxter, y donde también se construye un funtor Hc, llamado la clausura de Hopf, que envía esta biálgebra al álgebra de Hopf H_R asociada a esta solución, introducida en [10] por L. Fadeev, L. Takhtadzhyan y N. Reshetikin bajo ciertas restricciones para R. En la segunda parte, luego de comprobar que el concepto de álgebra facial está unido a otros existentes en la literatura como los de biálgebra débil y $\times_R-$biálgebra, por ser unos casos particulares o generalizaciones de otros, escribimos un resultado de P. Schauenburg [26] que presenta una equivalencia monoidal entre las categorías de bimódulos de álgebras Morita equivalentes, lo que finalmente determina una propiedad de suficiencia entre las álgebras faciales en el estudio de las categorías de módulos sobre biálgebras débiles.
La sección 2, en la que se desarrolla el paper "Quantum groups and quantum semigroups" de Hayashi [14] está organizada como el trabajo citado. En la sección 2.1 damos los conceptos y resultados básicos de álgebras faciales y, entre estos, la noción de s-pareo inversible (invertible skew pairing), que juega un papel importante en el paper. En la sección 2.2, introducimos la noción de biálgebra (o álgebra facial) coquasitriangular cerradiza (CCQT), que puede ser vista como el paso intermedio entre una biálgebra CQT y un álgebra de Hopf CQT. Una biálgebra CQT es cerradiza si tanto su trenza y su inversa $\mathfrak{R}^{\pm 1}$ son inversibles en el álgebra dual $(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^{cop})^*$. Mostramos que $\mathfrak{H}$ es cerradiza si y sólo si existe un mapa $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ de biálgebras CQT tal que $\mathfrak{K}$ tiene una antípoda. En la sección 2.3, damos una versión facial del doble producto cruz asociado con s-pareos inversibles, el cual usamos para construir la clausura de Hopf. En la sección 2.4 definimos la clausura de Hopf $Hc(\mathfrak{H})$ para cada álgebra facial CCQT $\mathfrak{H}$ y sentamos alguno de los resultados principales del paper. En la sección 2.5 construimos la trenza de $Hc(\mathfrak{H})$. En la sección 2.6, generalizamos resultados de Drinfeld [7] en álgebras de Hopf CQT sin asumir la existencia de la antípoda. Usando esto y desarrollando una idea de Reshetikhin, mostramos la existencia de la antípoda en las clausuras de Hopf. En la sección 2.7 discutimos la relación entre $Hc(\mathfrak{H})$ y la localización $\mathfrak{H}[G^{-1}]$. En la sección 2.8 damos algunas relaciones entre los elementos group-like y los s-pareos inversibles y construimos $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ para álgebras faciales $\mathfrak{H}$.
En la sección 3, luego de revisar en 3.1 algunos conceptos conocidos acerca de álgebras separables, introducimos el concepto de grupoide cuántico según el trabajo "Finite quantum groups and their applications", de D. Nykshych y L. Vainerman [21]. Aquí damos las definiciones básicas y ejemplos de grupoides cuánticos y biálgebras débiles, así como también discutimos sus propiedades fundamentales, entre las que se destacan ciertas subálgebras, conocidas como subálgebras counitales, que resultan ser álgebras separables. En la sección 3.3 mostramos que las álgebras faciales definidas antes son un caso particular de biálgebras débiles, identificándose con aquellas en las que subálgebras counitales son conmutativas. Además, realizamos una versión "sin coordenadas" del análogo facial de la construcción FRT que presentamos en la sección 2.
En la sección 4, tras recordar conceptos relacionados con categorías monoidales, damos los análogos de álgebra y coálgebra en ese contexto, junto con la construc-

ción universal del álgebra tensorial.
La sección 5.1 está destinada a la presentación de las $\times_R-$biálgebras, tal como aparecen en una serie de papers de P. Schauenburg, como "Bialgebras over noncommutative rings and a structure theorem for Hopf bimodules", [24]. Las $\times_R-$biálgebras fueron introducidas por M. Takeuchi [34] generalizando una definición de M. Sweedler [30]. Las aplicaciones en [34], [30] son generalizaciones de grupos de Brauer y cohomología de álgebras de Hopf. La noción de una $\times_R-$biálgebra es también un debilitamiento de la de k-biálgebra, pero de manera distinta. La definición está hecha con referencia a una k-álgebra fija R, que no necesita ser conmutativa ni separable. Se requiere que la comultiplicación y la counidad de una $\times_R-$biálgebra H sean mapas de álgebras y compatibles con un mapa de álgebras $R \otimes R^o \to H$ (donde R^o denota el álgebra opuesta de R). No obstante, aquí la comultiplicación y la counidad no hacen de H una coálgebra; más que en $H \otimes H$, la comultiplicación toma valores en un espacio diferente, a saber, el centralizador de R en un cierto R-bimódulo $H \otimes_R H$, donde las dos copias de H en esta última expresión tienen estructuras de R-bimódulos diferentes. La counidad toma valores en $End(R)$ en lugar de k. Se requiere una propiedad de coasociatividad y counidad. En este trabajo también destacamos un teorema (Teorema 5.6), que generaliza una conocida correspondencia entre estructuras de biálgebra y categorías monoidales de módulos al caso de módulos sobre $\times_R-$biálgebras. Un álgebra sobre $R \otimes R^o$ es una $\times_R-$biálgebra si y sólo si su categoría de módulos es una categoría monoidal de forma tal que el funtor subyacente de la categoría de módulos sobre $R \otimes R^o$ es monoidal. En la sección 5.2 discutimos la noción de $\times_R-$álgebra de Hopf y ciertas definiciones equivalentes, tal como es desarrollado en el paper de Schauenburg "Duals and doubles of quantum groupoids ($\times_R-$Hopf algebras)" [28]. Mostraremos que una estructura de $\times_R-$álgebra de Hopf en una $\times_R-$biálgebra L puede ser reconstruida a partir de una propiedad apropiada en la categoría monoidal de L-módulos. Una versión de ello es conocida para H-comódulos sobre una k-biálgebra H si k es un cuerpo. La categoría de H-comódulos a derecha de dimensión finita sobre una k-biálgebra H es rígida si y sólo si H es un álgebra de Hopf [35]. Donde H se dice rígida si se tiene una buena noción de objetos duales en la categoría. Esta caracterización de álgebras de Hopf no puede ser generalizada al contexto de $\times_R-$biálgebras, aún para biálgebras convencionales sobre un anillo k y no sobre un cuerpo, no podemos extraer suficiente información de los comódulos proyectivos finitamente generados (o los módulos proyectivos finitamente generados), y un comódulo (o módulo) que no es finitamente generado y proyectivo sobre el anillo de base k no puede tener un dual en el sentido de la definición de categoría monoidal rígida. No obstante, si H es un álgebra de Hopf sobre un anillo conmutativo k, entonces para dos H-módulos cualesquiera V, W, podemos dotar al módulo $Hom_k(V, W)$ de mapas k-lineales con una buena estructura de H-módulo. En particular, la categoría de H-módulos es (como cada categoría rígida) cerrada en el sentido de Mac Lane: tenemos, dentro de la categoría, los así llamados objetos hom internos $hom(V, W)$ para todo V, W, satisfaciendo un análogo formal de la conocida adjunción entre el producto tensorial y los hom-funtores para bimódulos. Ahora, mientras la rigidez era demasiado fuerte para estos propósitos, requerir hom-funtores internos es demasiado débil. Resulta que la categoría de L-módulos es siempre cerrada para cualquier $\times_R-$biálgebra L. Pero el teorema de reconstrucción para $\times_R-$álgebras de Hopf dirá que una $\times_R-$biálgebra L es una $\times_R-$álgebra de Hopf si y sólo si el funtor subyacente de la categoría de ${}_L\mathcal{M}$ a la categoría de R-bimódulos es compatible con los hom-funtores internos.

En el caso de una k-biálgebra, ésta es precisamente la observación de que los hom-funtores internos en ${}_H\mathcal{M}$ están modelados en los módulos de mapas k-lineales y no en otro objeto. En la sección 5.3, tal como hicimos en la sección 3.3, comparamos en detalle las nociones de biálgebras débiles y $\times_R-$biálgebras. Resulta que una biálgebra débil es una $\times_R-$biálgebra en la cual R es Frobenius separable. El hecho de que un álgebra de Hopf débil es una $\times_R-$biálgebra ha sido mostrado por Etingof y Nykshych, [9], quienes también mostraron que la subálgebra counital target es separable. Esto es gran parte del Teorema 5.14. No obstante, mientras que en [9] la antípoda es utilizada, su existencia no es asumida en el Teorema 5.14. La parte de la antípoda relevante para la prueba (su restricción a las subálgebras counitales source y target) está presente en cualquier biálgebra débil, aún en el caso en que ésta no poseyera una antípoda. Esto fue probado por Nill [22], junto con el hecho de que las subálgebras counitales son Frobenius separables. Así, probamos que cualquier biálgebra débil H es una $\times_R-$biálgebra y, recíprocamente, que cualquier $\times_R-$biálgebra con R Frobenius separable es una biálgebra débil. Luego, para ver cuándo una biálgebra débil es un álgebra de Hopf débil vemos que un álgebra de Hopf débil puede caracterizarse como una biálgebra débil H para la cual cierto mapa canónico $H \otimes_{H_t} H \to \Delta(1)(H \otimes H)$ es una biyección, lo que es análogo a una conocida caracterización de álgebras de Hopf. Esto también prueba que una biálgebra débil es un álgebra de Hopf débil si y sólo si la $\times_R-$biálgebra asociada es una $\times_R-$álgebra de Hopf. Finalmente, dedicamos las secciones 5.4-5.6 a la noción de cambio de base Morita, cuyo resultado principal será la suficiencia mencionada de las álgebras faciales en el contexto de categorías de módulos. En estas secciones se discutirá una construcción que nos permitirá reemplazar el álgebra R en una $\times_R-$biálgebra L por un álgebra S Morita equivalente para obtener una $\times_S-$biálgebra con una categoría monoidal de representaciones equivalente a la de L. De hecho, podemos, más generalmente, reemplazar R por cualquier álgebra S $\sqrt{\text{Morita}}$ equivalente. Dos álgebras R, S son $\sqrt{\text{Morita}}$ equivalentes si tenemos una equivalencia de categorías monoidales k-lineales ${}_R\mathcal{M}_R \cong {}_S\mathcal{M}_S$. La definición está íntimamente relacionada con nuestra aplicación: una $\times_R-$biálgebra puede caracterizarse como poseedora de una categoría de representaciones con producto tensorial basado en el producto tensorial de ${}_R\mathcal{M}_R$.
A través de este trabajo, usaremos la conocida notación de Sweedler [29], como $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, donde Δ denota el coproducto de una coálgebra dada.

2. Grupos y semigrupos cuánticos

2.1. Álgebras faciales

Definición 2.1. *Sea $\mathfrak{H}$ un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ equipada con una estructura de coálgebra $(\mathfrak{H}, \Delta, \varepsilon)$. Sea $\mathcal{V}$ un conjunto finito no vacío y sean $e_{\mathfrak{H},i} = e_i$ y $e^o_{\mathfrak{H},i} = e^o_i$ $(i \in \mathcal{V})$ elementos de $\mathfrak{H}$. Decimos que $(\mathfrak{H}, e_i, e^o_i)$ es una $\mathcal{V}$-*álgebra facial *($\mathcal{V}$-*face algebra*) si las siguientes condiciones son satisfechas:*

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \tag{1}$$

$$e_ie_j = \delta_{ij}e_i, \;\; e^o_ie^o_j = \delta_{ij}e^o_i, \;\; e_ie^o_j = e^o_je_i \tag{2}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{V}} e_k = 1 = \sum_{k\in\mathcal{V}} e^o_k \tag{3}$$

$$\Delta(e^o_ie_j) = \sum_{k\in\mathcal{V}} e^o_ie_k \otimes e^o_ke_j, \;\; \varepsilon(e^o_ie_j) = \delta_{ij} \tag{4}$$

$$\varepsilon(ab) = \sum_{k\in\mathcal{V}} \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e^o_kb) \tag{5}$$

para cada $a, b \in \mathfrak{H}$ e $i, j \in \mathcal{V}$.
Llamamos a los elementos e_i y e^o_i idempotentes faciales *de $\mathfrak{H}$.*

Es claro que una biálgebra es una noción equivalente a la de $\mathcal{V}$-álgebra facial con $\#\mathcal{V} = 1$.

Proposición 2.2. *Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial, tenemos las fórmulas:*

$$\Delta(1) = \sum_{k\in\mathcal{V}} e_k \otimes e^o_k, \tag{6}$$

$$\Delta(e_j) = \sum_{k\in\mathcal{V}} e_k \otimes e^o_ke_j, \;\; \Delta(e^o_i) = \sum_{k\in\mathcal{V}} e^o_ie_k \otimes e^o_k, \tag{7}$$

$$\varepsilon(e^o_ia) = \varepsilon(e_ia), \;\; \varepsilon(ae^o_i) = \varepsilon(ae_i), \tag{8}$$

$$\varepsilon(e_j) = \varepsilon(e^o_i) = 1, \tag{9}$$

$$a_1\varepsilon(e_ia_2e_j) = e_iae_j, \tag{10}$$

$$\varepsilon(e_ia_1e_j)a_2 = e^o_iae^o_j, \tag{11}$$

$$a_1\varepsilon(e_ia_2) = e_ia, \;\; a_1\varepsilon(a_2e_j) = ae_j, \;\; \varepsilon(e^o_ia_1)a_2 = e^o_ia, \;\; \varepsilon(a_1e^o_j)a_2 = ae^o_j. \tag{12}$$

$$\Delta(a) = \sum_{k,l} e_ka_1e_l \otimes e^o_ka_2e^o_l, \tag{13}$$

$$e_ia_1e_j \otimes a_2 = a_1 \otimes e^o_ia_2e^o_j \tag{14}$$

$$\Delta(e^o_ie_jae_{i'}e_{j'}) = e^o_ia_1e^o_{i'} \otimes e_ja_2e_{j'}, \tag{15}$$

para cada $a \in \mathfrak{H}$ e $i, j, i', j' \in \mathcal{V}$.

Demostración. Tenemos, según los axiomas (1)-(5),

$$\Delta(1) = \Delta(\sum_{i,j\in\mathcal{V}} e_i^o e_j) = \sum_{i,j\in\mathcal{V}} \sum_{k\in\mathcal{V}} e_i^o e_k \otimes e_k^o e_j = \sum_{k\in\mathcal{V}} e_k \otimes e_k^o,$$

lo que determina (6), vemos también (7):

$$\Delta(e_j) = \sum_{i\in\mathcal{V}} \Delta(e_i^o e_j) = \sum_{i\in\mathcal{V}} \sum_{k\in\mathcal{V}} e_i^o e_k \otimes e_k^o e_j = \sum_{k\in\mathcal{V}} e_k \otimes e_k^o e_j,$$

$$\Delta(e_i^o) = \sum_{j\in\mathcal{V}} \Delta(e_i^o e_j) = \sum_{j\in\mathcal{V}} \sum_{k\in\mathcal{V}} e_i^o e_k \otimes e_k^o e_j = \sum_{k\in\mathcal{V}} e_i^o e_k \otimes e_k^o.$$

Utilizando nuevamente la lista de axiomas (1)-(5),

$$\varepsilon(e_i a) = \sum_j \varepsilon(e_i e_j^o a) = \sum_j \sum_k \varepsilon(e_i e_j^o e_k)\varepsilon(e_k^o a) = \sum_{j,k} \delta_{i,k}\varepsilon(e_i e_j^o)\varepsilon(e_k^o a) =$$

$$\sum_j \delta_{i,j}\varepsilon(e_i^o a) = \varepsilon(e_i^o a).$$

Por (3), (5), (2), (4), respectivamente, lo que prueba la primera de las igualdades de (8). La otra surge de manera análoga. Esto determina (9), ya que

$$\varepsilon(e_j) = \varepsilon(e_j e_j) = \varepsilon(e_j^o e_j) = 1,\ \varepsilon(e_i^o) = \varepsilon(e_i^o e_i^o) = \varepsilon(e_i^o e_i) = 1.$$

Ahora, notemos que

$$\Delta(e_i a e_j) = \sum_{k,l} e_k a_1 e_l \otimes e_k^o e_i a_2 e_l^o e_j = \sum_{k,l} (e_k a_1 e_l) \otimes e_i(e_k^o a_2 e_l^o) e_j =$$

$$(1 \otimes e_i)\Delta(a)(1 \otimes e_j) = a_1 \otimes e_i a_2 e_j$$

ya que, como veremos más abajo, es inmediato que

$$\Delta(1) = \sum_k e_k \otimes e_k^o,\ \Delta(e_i) = (1 \otimes e_i)\Delta(1),$$

con lo que obtenemos (10). Análogamente obtenemos (11). (13) se obtiene de la igualdad $\Delta(a) = \Delta(1)\Delta(a)\Delta(1)$. Por (10) y (11),

$$e_i a_1 e_j \otimes a_2 = a_1 \varepsilon(e_i a_2 e_j) \otimes a_3 = a_1 \otimes \varepsilon(e_i a_2 e_j) a_3 = a_1 \otimes e_i^o a_2 e_j^o.$$

y así vale (14). De esta última propiedad y de (4) también se deduce

$$\Delta(e_i^o e_j a e_{i'}^o e_{j'}) = \sum_{k,l} e_i^o e_k a_1 e_{i'}^o e_l \otimes e_k^o e_j a_2 e_{j'} e_l^o =$$

$$\sum_{k,l} e_i^o e_k a_1 e_l e_{i'}^o \otimes e_j a_2 e_{j'} = e_i^o a_1 e_{i'}^o \otimes e_j a_2 e_{j'}.$$

Sumando sobre i o j en (10), (11) y utilizando (8) obtenemos (12). □

Definición 2.3. *Un mapa $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ entre $\mathcal{V}$-álgebras faciales se dice un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales si es un morfismo de álgebras y coálgebras tal que $f(e_i) = e_i$, $f(e_i^o) = e_i^o$ para cada $i \in \mathcal{V}$. Denotamos por ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ al conjunto de todos los mapas de $\mathcal{V}$-álgebras faciales de $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{K}$.*

Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{H}$, sea $\mathfrak{H}^{op}$ (resp. $\mathfrak{H}^{cop}$) el álgebra opuesta (resp. la coálgebra opuesta) de $\mathfrak{H}$ equipada con la misma estructura de coálgebra (resp. álgebra) de $\mathfrak{H}$. Entonces $\mathfrak{H}^{op} := (\mathfrak{H}^{op}, e_i, e_i^o)$ (resp. $\mathfrak{H}^{cop} := (\mathfrak{H}^{cop}, e_i^o, e_i)$) es una $\mathcal{V}$-álgebra facial. En particular, $\mathfrak{H}^{bop} := (\mathfrak{H}^{op})^{cop}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial vía:

$$e_{\mathfrak{H}^{bop},i} = e^o_{\mathfrak{H},i}, \quad e^o_{\mathfrak{H}^{bop},i} = e_{\mathfrak{H},i}.$$

En este último caso, por ejemplo, vemos que

$$\Delta^{bop}(1) = \tau(\Delta(1)) = 1_{(2)} \otimes 1_{(1)} = \sum_k e_i^o \otimes e_i = \sum_k e_{\mathfrak{H}^{bop},i} \otimes e^o_{\mathfrak{H}^{bop},i} = 1^{cop}_{(1)} \otimes 1^{cop}_{(2)},$$

donde τ denota la trasposición usual.
Recordemos que dada un álgebra (A, m, u) de dimensión finita, podemos dotar de una estructura de coálgebra a A^*, su dual lineal, (A^*, m^*, u^*), identificando $(A \otimes A)^*$ con $A^* \otimes A^*$. Si A no es de dimensión finita, su *coálgebra dual* está dada por

$$A^o = \{f \in A^* : f(I) = 0, \text{ para algún ideal } I \text{ de } A \text{ tal que } \dim(A/I) < \infty\}.$$

con comultiplicación m^* y counidad u^*. Los ideales I para los cuales vale la condición $\dim(A/I) < \infty$ se dicen de *codimensión finita*. Existen caracterizaciones adicionales de A^o, que enunciamos en la siguiente proposición y cuya prueba puede verse en [23].

Proposición 2.4. *Sea (A, m, u) un álgebra y $f \in A^*$. Entonces son equivalentes:*

(i) f se anula en un ideal a derecha de A de codimensión finita,

(ii) f se anula en un ideal a izquierda de A de codimensión finita,

(iii) f se anula en un ideal de A de codimensión finita,

(iv) dim$(A \rightharpoonup f) < \infty$,

(v) dim$(f \leftharpoonup A) < \infty$,

(vi) dim$(A \rightharpoonup f \leftharpoonup A) < \infty$,

(vii) $m^*(f) \in A^* \otimes A^*$.

En consecuencia, $f \in A^o$ si se cumple alguna de las condiciones (i)-(vii).

En el enunciado de la proposición anterior, hemos utilizado la notación de flechas de Sweedler. Dada un álgebra A, tenemos acciones a izquierda y derecha $\rightharpoonup$ y $\leftharpoonup$ de A en A^*, dadas por, para $h, k \in A$ y $f \in A^*$

$$(h \rightharpoonup f)(k) = f(kh), \; (f \leftharpoonup k)(h) = f(kh).$$

Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{H}$, su *álgebra dual* $\mathfrak{H}^o$ se define como la coálgebra dual de $\mathfrak{H}$ equipada con producto y idempotentes faciales dados por

$$\langle XY, a\rangle = \langle X, a_1\rangle \langle Y, a_2\rangle \;\; (X, Y \in \mathfrak{H}^o, a \in \mathfrak{H})$$

y

$$\langle e_{\mathfrak{H}^o,i}, a\rangle = \varepsilon(a e_{\mathfrak{H},i}), \; \langle e^o_{\mathfrak{H}^o,i}, a\rangle = \varepsilon(e_{\mathfrak{H},i} a) \; (a \in \mathfrak{H}, i \in \mathcal{V}).$$

Definición 2.5. *Sean x^+, x^-, e^+, e^- elementos de un álgebra A dada. Decimos que x^- es una (e^+, e^-)-inversa generalizada de x^+ si se satisfacen las siguientes cuatro relaciones:*

$$x^{\mp}x^{\pm} = e^{\pm}, \ x^{\pm}x^{\mp}x^{\pm} = x^{\pm}.$$

Observación 2.6. Notamos que la (e^+, e^-)-inversa generalizada de x^+ es única si existe: si y^- es otra (e^+, e^-)-inversa generalizada de x^+, entonces

$$x^- = x^-x^+x^- = x^-e^- = x^-x^+y^- = e^+y^- = y^-x^+y^- = y^-.$$

Definición 2.7. *Decimos que un mapa lineal $S : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ es una antípoda de $\mathfrak{H}$ si*

$$S(a_1)a_2 = E^+(a), \ a_1S(a_2) = E^-(a),$$

$$S(a_1)a_2S(a_3) = S(a)$$

para cada $a \in \mathfrak{H}$, donde E^+ y E^- denotan endomorfismos en $\mathfrak{H}$ definidos por

$$E^+(a) = \sum_k \varepsilon(ae_k)e_k, \ E^-(a) = \sum_k \varepsilon(e_k^o a)e_k^o. \tag{16}$$

Un álgebra facial que admite una antípoda $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf.

Proposición 2.8. *Una antípoda de una $\mathcal{V}$-álgebra facial es un antimorfismo de álgebras y coálgebras, que satisface*

$$S(e_i^o e_j) = e_j^o e_i \ (i, j \in \mathcal{V})$$

Para otra Hopf $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{K}$ y un mapa $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{R}$, tenemos $f(S(a)) = S(f(a))$, $a \in \mathfrak{H}$.

Demostración. Notemos que $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(e_i^o e_j) = \sum_{k,l} e_i^o e_k \otimes e_k^o e_l \otimes e_l^o e_j$. Entonces

$$S(e_i^o e_j) = \sum_{k,l} S(e_i^o e_k)e_k^o e_l S(e_l^o e_j) = (S \otimes \mathrm{id})\Delta(e_i^o)(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(e_j) = E^+(e_i^o)E^-(e_j) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_i^o e_k)e_k \sum_l \varepsilon(e_l e_j)\varepsilon(e_l^o) = \sum_{k,l} \delta_{i,k}\delta_{l,j} e_k e_l^o = e_i e_j^o = e_j^o e_i.$$

Veamos que es un antimorfismo de álgebras. Consideramos el álgebra $L = \mathrm{Hom}(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ con el producto de convolución y $m, \phi, \psi, e^+, e^- \in L$ dados por $m(a \otimes b) = ab, \psi(a \otimes b) = S(b)S(a), \phi(a \otimes b) = S(ab), e^+(a \otimes b) = E^+(ab), e^-(a \otimes b) = E^-(ab)$ entonces podemos ver que ϕ, ψ son (e^+, e^-)-inversas generalizadas de m y por lo tanto coinciden. En efecto,

$$(m * \phi)(a \otimes b) = a_1b_1S(a_2b_2) = E^-(ab) = e^-(a \otimes b),$$

$$(\phi * m)(a \otimes b) = S(a_1b_1)a_2b_2 = E^+(ab) = e^+(a \otimes b),$$

$$(m * \phi * m)(a \otimes b) = a_1b_1S(a_2b_2)a_3b_3 = a_1b_1E^+(a_2b_2) =$$

$$\sum_k a_1b_1\varepsilon(a_2b_2e_k)e_k = \sum_k \sum_k a_1b_1e_k\varepsilon(a_2b_2e_k^o) = a_1b_11_{(1)}\varepsilon(a_2b_21_{(2)}) = ab = m(a \otimes b)$$

y

$$(\phi * m * \phi)(a \otimes b) = S(a_1b_1)a_2b_2S(a_3b_3) = S(ab) = \phi(a \otimes b).$$

Análogamente vemos que ψ es inversa generalizada, por ejemplo,

$$(m * \psi)(a \otimes b) = a_1 b_1 S(b_2) S(a_2) = a_1 E^-(b) S(a_2) = \sum_k a_1 \varepsilon(e_k b) e_k^o S(a_2) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_k b) a_1 e_k^o S(a_2) = \sum_{k,l} \varepsilon(e_k b) a_1 e_l e_k^o e_l S(a_2) = \sum_{k,l} \varepsilon(e_k b) a_1 e_k^o e_l S(a_2 e_l^o) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_k b) E^-(a e_k^o) = \sum_{k,l} \varepsilon(e_k b) \varepsilon(e_l a e_k^o) e_l^o = \sum_l \varepsilon(e_l ab) e_l^o = E^-(ab),$$

por (5). De manera similar vemos que S es un antimorfismo de coálgebras, definiendo en $K = \mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H})$, $\phi(a) = S(a_2) \otimes S(a_1)$, $\psi(a) = S(a)_1 \otimes S(a)_2$ y viendo que ambas son $(\Delta(1)E^+, E^-\Delta(1))$-inversas generalizadas del coproducto Δ.

$$\psi * \Delta(a) = \psi(a_1)\Delta(a_2) = S(a_2)a_3 \otimes S(a_1)a_4 = E^+(a_2) \otimes S(a_1)a_3 =$$

$$\sum_k e_k \otimes \varepsilon(a_2 e_k) S(a_1) a_3 = \sum_k e_k \otimes S(a_1) a_2 e_k^o = \sum_k e_k \otimes E^+(a) e_k^o = \Delta(1) E^+(a).$$

$$(\psi * \Delta)(a) = \Delta(a_1)\psi(a_2) = a_1 S(a_4) \otimes a_2 S(a_3) = a_1 S(a_3) \otimes E^-(a_2) =$$

$$\sum_k a_1 \varepsilon(e_k a_2) S(a_3) \otimes e_k^o = \sum_k e_k a_1 S(a_2) \otimes e_k^o = E^-(a)\Delta(1).$$

También,

$$(\Delta * \psi * \Delta)(a) = a_1 S(a_4) a_5 \otimes a_2 S(a_3) a_6 = a_1 E^+(a_3) \otimes E^-(a_2) a_4 =$$

$$\sum_{k,l} a_1 \varepsilon(e_l a_2) e_k \otimes \varepsilon(a_3 e_k^o) e_l a_4 = \sum_{k,l} e_l a_1 e_k \otimes e_l^o a_2 e_k^o = \Delta(a).$$

$$(\psi * \Delta * \psi)(a) = S(a_2) a_3 S(a_6) \otimes S(a_1) a_4 S(a_5) = E^+(a_2) S(a_4) \otimes S(a_1) E^-(a_3) =$$

$$\sum_{k,l} e_k S(a_4) \varepsilon(e_l a_3) \otimes S(a_1) \varepsilon(a_2 e_k) e_l^o = \sum_{k,l} e_k S(e_l^o a_2) \otimes S(a_1 e_k) e_l^o =$$

$$\sum_{k,l} S(e_l^o a_2 e_k^o) \otimes S(e_l a_1 e_k) = S(a_2) \otimes S(a_1) = \psi(a).$$

donde usamos que S es un antimorfismo de álgebras. Por lo tanto ψ es una inversa generalizada, como lo es ϕ, por ejemplo

$$(\Delta * \phi)(a) = \Delta(a_1)\phi(a_2) = a_1 S(a_3)_1 \otimes a_2 S(a_3)_2 = \Delta(a_1 S(a_2)) = \Delta(E^-(a)) =$$

$$\sum_{k,l} \varepsilon(e_k a) e_l e_k^o \otimes e_l^o = E^-(a)\Delta(1).$$

Por último, si $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ es un morfismo, podemos ver que $f \circ S$ es la $(f \circ E^+, f \circ E^-)$-inversa generalizada de f, como lo es también $S \circ f$, lo que veremos en un lema a continuación, y por lo tanto, son iguales.

$$(f \circ S * f)(a) = f(S(a_1)) f(a_2) = f(S(a_1) a_2) = (f \circ E^+)(a),$$

$$(f * f \circ S)(a) = f(a_1) F(S(a_2)) = F(a_1 S(a_2)) = (f \circ E^-)(a),$$

$$(f \circ S * f * f \circ S)(a) = f(S(a_1)) f(a_2) f(S(a_3)) = f(S(a_1) a_2 S(a_3)) = (f \circ S)(a)$$

y

$$(f * f \circ S * f)(a) = f(a_1 S(a_2) a_3) = f(a),$$

donde aquí usamos $a_1 S(a_2) a_3 = \sum_k \varepsilon(e_k a_1) e_k^o a_2 = \sum_k e_k^o e_k^o a = a$. □

Definición 2.9. *Sean A un álgebra y $f^+ : \mathfrak{H} \to A$ un mapa de álgebras. Decimos que un mapa lineal $f^- : \mathfrak{H} \to A$ es una antípoda de f^+ si f^- es la $(f^+ \circ E^+, f^+ \circ E^-)$-inversa generalizada de f^+ con respecto al producto de convolución en $Hom_k(\mathfrak{H}, A)$.*

Lema 2.10. *Son válidas las siguientes proposiciones:*

(i) Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{H}$, $S \in End_k(\mathfrak{H})$ es una antípoda de $\mathfrak{H}$ si y sólo si S es la antípoda de $id_{\mathfrak{H}}$.

(ii) Sea $f^+ : \mathfrak{H} \to \mathfrak{R}$ una mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales tal que $\mathfrak{R}$ es una Hopf $\mathcal{V}$-álgebra facial. Entonces $S \circ f^+$ da una antípoda de f^+.

Demostración. Es inmediato de la definición de S que $S * \mathrm{id} = (\mathrm{id} \circ E^+)(a)$, $id * S = (\mathrm{id} \circ E^-)(a)$, $S * \mathrm{id} * S = S$ y vemos que

$$(\mathrm{id} * S * \mathrm{id})(a) = a_1 S(a_2) a_3 = E^-(a_1) a_2 = \sum_k \varepsilon(e_k a_1) e_k^o a_2 = \varepsilon(1_{(1)} a_1) 1_{(2)} a_2 = a.$$

Por lo tanto si S es una antípoda de $\mathfrak{H}$, S es la antípoda de $\mathrm{id}_{\mathfrak{H}}$ y recíprocamente, con lo que tenemos (i). Para (ii), vemos que

$$(f^+ * S \circ f^+)(a) = f^+(a_1) S(f^+(a_2)) = f^+(a_1) f^+(S(a_2)) =$$

$$f^+(a_1 S(a_2)) = (f^+ \circ E^-)(a),$$

$$(S \circ f^+ * f^+)(a) = S(f^+(a_1)) f^+(a_2) = f^+(S(a_1) a_2) = (f^+ \circ E^+)(a),$$

y las otras propiedades se siguen de la misma manera. □

Lema 2.11. *Como para la antípoda usual, tenemos:*

(i) Sea $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial y $f^+ : \mathfrak{H} \to A$ un mapa de álgebras con antípoda f^-. Entonces f^- es antimorfismo de álgebras que satisface $f^-(e_i^o e_j) = f^+(e_j^o e_i)$, $(i, j \in \mathcal{V})$.

(ii) Si, además, $A = \mathfrak{R}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial y $f^+ \in {}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H}, \mathfrak{R})$, entonces $f^- \in {}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}^{bop})$.

Demostración. (i) surge de comprobar como antes que tanto $a \otimes b \mapsto f^-(ab)$ como $a \otimes b \mapsto f^-(b) f^-(a)$ son $(f^+ \circ E^+ \circ m, f^+ \circ E^+ \circ m)$-inversas generalizadas de $f^+ \circ m$ y de notar que, usando que f^+ es un morfismo de álgebras,

$$(f^- * f^+ * f^-)(e_i^o e_j) = \sum_{k,l} f^-(e_i^o e_k) f^+(e_k^o) f^+(e_l) f^-(e_l^o e_j) =$$

$$f^+(E^+(e_i^o)) f^+(E^-(e_j)) = f^+(e_i e_j^o) = f^+(e_j^o e_i).$$

En (ii), resulta $f^- = S \circ f^+$ por unicidad de la inversa generalizada, y por lo tanto es un antimorfismo de álgebras y coálgebras, i. e. $f^- \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}^{bop})$. Pero además tenemos que $f^-(e_i^o) = f^+(e_i) = e_i = e^o_{\mathfrak{H}^{bop}, i}$ y $f^-(e_i) = f^+(e_i^o) = e_i^o = e_{\mathfrak{H}^{bop}, i}$, de donde $f^- \in {}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}^{bop})$. □

Definición 2.12. *Sean $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{K}$ $\mathcal{V}$-álgebras faciales y sea $\mathfrak{F}^+ : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K} \to \mathbb{K}$ un pareo bilineal con $(\mathfrak{E}^+, \mathfrak{E}^-)$-inversa generalizada $\mathfrak{F}^-$ en el álgebra dual $(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})^*$, donde los $\mathfrak{E}^\pm$ están dados por:*

$$\mathfrak{E}^+(a, x) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k x), \quad \mathfrak{E}^-(a, x) = \sum_k \varepsilon(e_k a)\varepsilon(xe_k)$$

para cada $a \in \mathfrak{H}$ y $x \in \mathfrak{K}$. Decimos que $\mathfrak{F}^+$ (o $(\mathfrak{F}^+, \mathfrak{F}^-)$) es un s-pareo inversible (invertible skew pairing) en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ si satisface:

$$\mathfrak{F}^+(ab, x) = \mathfrak{F}^+(a, x_1)\mathfrak{F}^+(b, x_2) \tag{17}$$

$$\mathfrak{F}^+(a, xy) = \mathfrak{F}^+(a_1, y)\mathfrak{F}^+(a_2, x) \tag{18}$$

junto con $\mathfrak{F}^+(a, 1) = \varepsilon(a)$ y $\mathfrak{F}(1, x) = \varepsilon(x)$ para cada $a, b \in \mathfrak{H}$ y $x, y \in \mathfrak{K}$. Llamamos a $\mathfrak{F}^-$ la inversa generalizada de $\mathfrak{F}^+$.

Proposición 2.13. *Para un s-pareo inversible $\mathfrak{F}^+$, tenemos las fórmulas:*

$$\mathfrak{F}^-(ab, x) = \mathfrak{F}^-(b, x_1)\mathfrak{F}^-(a, x_2), \tag{19}$$

$$\mathfrak{F}^-(a, xy) = \mathfrak{F}^-(a_1, x)\mathfrak{F}^-(a_2, y), \tag{20}$$

$$\mathfrak{F}^+(e_i^o e_j a e_k^o e_l, x) = \mathfrak{F}^+(a, e_j^o e_l x e_i^o e_k), \tag{21}$$

$$\mathfrak{F}^-(e_i^o e_j a e_k^o e_l, x) = \mathfrak{F}^-(a, e_k^o e_i x e_l^o e_j), \tag{22}$$

$$\mathfrak{F}^+(e_i^o e_j, x) = \varepsilon(e_j x e_i), \;\; \mathfrak{F}^+(a, e_i^o e_j) = \varepsilon(e_i a e_j), \tag{23}$$

$$\mathfrak{F}^-(e_i^o e_j, x) = \varepsilon(e_i x e_j), \;\; \mathfrak{F}^-(a, e_i^o e_j) = \varepsilon(e_j a e_i) \tag{24}$$

para cada $a, b \in \mathfrak{H}, x, y \in \mathfrak{K}$ e $i, j, k, l \in \mathcal{V}$.

Demostración. Probamos primero (21) y lo vemos caso por caso. Primero vemos que

$$\mathfrak{F}^+(e_j a, x) \overset{(10)}{=} \mathfrak{F}^+(a_1, x)\varepsilon(e_j a_2) = \mathfrak{F}^+(a_1, x)\mathfrak{E}^-(a_2, e_j^o) =$$

$$\sum_k \mathfrak{F}^+(a_1, x)\mathfrak{F}^+(a_2, e_j^o e_k)\mathfrak{F}^-(a_3, e_j e_k^o) = \sum_k \mathfrak{F}^+(a_1, e_j^o e_k x)\mathfrak{F}^-(a_2, e_k^o) =$$

$$\sum_k \mathfrak{F}^+(a_1, e_j^o x)\mathfrak{F}^+(a_2, e_k)\mathfrak{F}^-(a_3, e_k^o) = \mathfrak{F}^+(a_1, e_j^o x)\mathfrak{F}^+\mathfrak{F}^-(a_2, 1) =$$

$$\mathfrak{F}^+(a_1, e_j^o) \sum_l \varepsilon(e_l a_2)\varepsilon(e_l) = \mathfrak{F}^+(a_1, e_j^o x)\varepsilon(a_2) = \mathfrak{F}^+(a_1, e_j^o x).$$

Luego, tenemos

$$\mathfrak{F}^+(a e_k^o, x) = \mathfrak{F}^+(a_2, x)\varepsilon(a_1 e_k^o) = \mathfrak{F}^+(a_2, x)\mathfrak{E}^+(a_1, e_k^o) =$$

$$\sum_l \mathfrak{F}^+(a_3, x)\mathfrak{F}^-(a_1, e_l)\mathfrak{F}^+(a_2, e_k e_l^o) = \sum_l \mathfrak{F}^+(a_2, x e_k e_l^o)\mathfrak{F}^-(a_1, e_l) =$$

$$\sum_l \mathfrak{F}^+(a_2, e_l^o)\mathfrak{F}^+(a_3, x e_k)\mathfrak{F}^-(a_1, e_l) = \mathfrak{F}^+(a_2, x e_k)\mathfrak{F}^+\mathfrak{F}^-(a_1, 1) = \mathfrak{F} + (a, x e_k).$$

También,

$$\mathfrak{F}^+(e_i^o a, x) = \mathfrak{F}^+(e_i^o, x_1)\mathfrak{F}^+(a, x_2) = \mathfrak{F}^+(1, x_1 e_i)\mathfrak{F}^+(a, x_2) =$$

$$\varepsilon(x_1e_i)\mathfrak{F}^+(a,x_2)=\mathfrak{F}^+(a,x_1e_i^o).$$

Y finalmente

$$\mathfrak{F}^+(ae_j,x)=\mathfrak{F}^+(a,x_1)\mathfrak{F}^+(e_j,x_2)=\mathfrak{F}^+(a,x_1)\mathfrak{F}^+(1,e_j^ox_2)=$$
$$\mathfrak{F}^+(a,x_1)\varepsilon(e_j^ox_2)=\mathfrak{F}^+(a,e_jx).$$

Así, tenemos (21). Veremos ahora que $a\otimes b\otimes x\mapsto\mathfrak{F}^-(b,x_1)\mathfrak{F}^-(a,x_2)$ es la inversa generalizada de $a\otimes b\otimes x\mapsto\mathfrak{F}^+(ab,x)$ y por lo tanto coincide con $a\otimes b\otimes x\mapsto\mathfrak{F}^-(ab,x)$. En efecto,

$$\mathfrak{F}^+(a_1b_1,x_1)\mathfrak{F}^-(b_2,x_2)\mathfrak{F}^-(a_2,x_3)=\mathfrak{F}^+(a_1,x_1)\mathfrak{F}^+(b_1,x_2)\mathfrak{F}^-(b_2,x_2)\mathfrak{F}^-(a_2,x_3)=$$
$$\mathfrak{F}^+(a_1,x_1)\mathfrak{E}^-(b,x_2)\mathfrak{F}^-(a_2,x_3)=\mathfrak{F}^+(a_1,x_1)\mathfrak{F}^-(a_2,x_3)\sum_k\varepsilon(e_kb)\varepsilon(x_2e_k)=$$
$$\sum_k\mathfrak{F}^+(a_1,x_1e_k)\mathfrak{F}^-(a_2,x_2)\varepsilon(e_kb)=\sum_k\mathfrak{F}^+(a_1e_k^o,x_1)\mathfrak{F}^-(a_2,x_2)\varepsilon(e_kb)=$$
$$\sum_k\mathfrak{F}^+(a_2,x_1)\mathfrak{F}^-(a_3,x_2)\varepsilon(a_1e_k)\varepsilon(e_kb)=\mathfrak{E}^-(a_2,x)\varepsilon(a_1e_k)=$$
$$\sum_l\varepsilon(e_la_2)\varepsilon(xe_l)\varepsilon(a_1b)=\sum_l\varepsilon(xe_l)\varepsilon(e_lab)=\mathfrak{E}^-(ab,x),$$

y además:

$$\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^-(a_1,x_2)\mathfrak{F}^+(a_2b_2,x_3)=\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^-(a_1,x_2)\mathfrak{F}^+(a_2,x_3)\mathfrak{F}^+(b_2,x_4)=$$
$$\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^+(b_2,x_3)\sum_k\varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_kx_2)=\sum_k\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^+(b_2,e_k^ox_2)\varepsilon(ae_k)=$$
$$\sum_k\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^+(e_kb_2,x_2)\varepsilon(ae_k)=\sum_k\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^+(b_2,x_2)\varepsilon(e_kb_3)\varepsilon(ae_k)=$$
$$\sum_{k,l}\varepsilon(b_1e_l)\varepsilon(e_lx)\varepsilon(e_kb_2)\varepsilon(ae_k)=\sum_{k,l}\varepsilon(e_kbe_l)\varepsilon(e_lx)\varepsilon(ae_k)=$$
$$\sum_l\varepsilon(abe_l)\varepsilon(e_lx)=\mathfrak{E}^+(ab,x).$$

Análogamente probamos los otros dos axiomas de inversa generalizada, obteniendo (19). Similarmente vemos (20):

$$\mathfrak{F}^+(a_1,x_1,y_1)\mathfrak{F}^-(a_2,x_2)\mathfrak{F}^-(a_3,y_2)=\mathfrak{F}^+(a_1,y_1)\mathfrak{F}^+(a_2,x_1)\mathfrak{F}^-(a_3,x_2)\mathfrak{F}^-(a_4,y_2)=$$
$$\mathfrak{F}^+(e_ka_1,y_1)\mathfrak{F}^-(a_2,y_2)\varepsilon(xe_k)=\sum_k\mathfrak{F}^+(e_k,y_1)\mathfrak{F}^+(a_1,y_2)\mathfrak{F}^-(a_2,y_3)\varepsilon(xe_k)=$$
$$\sum_k\varepsilon(e_ky_1)\sum_l\varepsilon(e_la)\varepsilon(y_2e_l)\varepsilon(xe_k)=\sum_l\varepsilon(e_la)\sum_k\varepsilon(xe_k)\varepsilon(e_ky_2e_l)=$$
$$\sum_l\varepsilon(e_la)\varepsilon(xye_l)=\mathfrak{E}^-(a,xy).$$

Y con estos resultados podemos ver (22) como hemos hecho con (21). (23) se sigue de (21):

$$\mathfrak{F}^+(e_i^oe_j,x)=\mathfrak{F}^+(1,e_jxe_i)=\varepsilon(e_jxe_i)$$

y la otra igualdad es análoga. De la misma forma deducimos (24) de (22). $\square$

Como consecuencia de estas fórmulas, tenemos los siguientes lemas.

Lema 2.14. *Para un s-pareo inversible* $(\mathfrak{F}^+, \mathfrak{F}^-)$ *en* $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$*,* $\mathfrak{F}^-_{21} : x \otimes a \mapsto \mathfrak{F}^-(a, x)$ *da un s-pareo bilineal en* $(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ *con inversa generalizada* $\mathfrak{F}^+_{21} : x \otimes a \mapsto \mathfrak{F}^+(a, x)$*.*

Demostración. Esto es inmediato:

$$\mathfrak{F}^-_{21}\mathfrak{F}^+_{21}(x, a) = \mathfrak{F}^-_{21}(x_1, a_1)\mathfrak{F}^+_{21}(x_2, a_2) = \mathfrak{F}^-(a_1, x_1)\mathfrak{F}^+(a_2, x_2) = (\mathfrak{F}^-\mathfrak{F}^+)(a, x).$$

Y esta última expresión es igual a $\mathfrak{E}^+(a, x) = \mathfrak{E}^+_{21}(x, a) = \mathfrak{E}^-_{\mathfrak{K}\otimes\mathfrak{H}}$. □

Definición 2.15. *Decimos que un pareo bilineal* $\mathfrak{F}^+ : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K} \to \mathbb{K}$ *es un s-pareo si las relaciones* (17)*,* (18) *y* (23) *son satisfechas. Para cada pareo bilineal* $\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K} \to \mathbb{K}$*, tomamos* $\mathfrak{F}_L(a) = \mathfrak{F}(a, -)$*, y* $\mathfrak{F}_R(x) = \mathfrak{F}(-, x)$ *(*$a \in \mathfrak{H}, x \in \mathfrak{K}$*).*

Notar que en la definición de s-pareo no se requiere que $\mathfrak{F}^+$ sea inversible.

Lema 2.16. *La correspondencia* $\mathfrak{F}^+ \mapsto \mathfrak{F}^+_L$ *(resp.* $\mathfrak{F}^+ \mapsto \mathfrak{F}^+_R$*) da una biyección entre el conjunto de s-pareos en* $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ *y* ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H}, (\mathfrak{K}^o)^{cop})$ *(resp.* ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{K}^{op}, \mathfrak{K}^o)$*). El s-pareo* $\mathfrak{F}^+$ *es inversible si y sólo si* $\mathfrak{F}^+_L$ *(resp.* $\mathfrak{F}^+_L$*) tiene una antípoda. En este caso, la antípoda de* $\mathfrak{F}^+_L$ *(resp.* $\mathfrak{F}^+_L$*) es* $\mathfrak{F}^-_L$ *(resp.* $\mathfrak{F}^-_R$*).*

Demostración. Por (18), tenemos

$$m^*\left(\mathfrak{F}^+_l(a)\right) = \mathfrak{F}^+_L(a_2) \otimes \mathfrak{F}^+_L(a_1) \in \ \mathfrak{H}^* \otimes \mathfrak{H}^*,$$

de donde, por la definición de la coálgebra dual dada antes, $\mathfrak{F}^+_L$ determina un mapa de $\mathfrak{H}$ a $(\mathfrak{K}^o)^{cop}$. Además, tenemos $\mathfrak{F}^+_L(e^o_i e_j)(x) = \mathfrak{F}^+(e^o_i e_j, x) = \varepsilon(e_j x e_i)$ por (23), de donde podemos concluir que

$$\mathfrak{F}^+_L(e^o_i e_j) = e^o_{(K^o)^{cop},i} e_{(K^o)^{cop},j},$$

ya que

$$e^o_{(K^o)^{cop},i} e_{(K^o)^{cop},j}(x) = e^o_{(K^o)^{cop},i}(x_1) e_{(K^o)^{cop},j}(x_2) = e_{\mathfrak{K}^o,i}(x_1) e^o_{\mathfrak{K}^o,j}(x_2) =$$

$$\varepsilon(x_1 e_i)\varepsilon(e_j x_2) = \varepsilon(x_1 \varepsilon(e_j x_2) e_i) = \varepsilon(e_j x e_i),$$

y por lo tanto $\mathfrak{F}^+_L \in {}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H}, (\mathfrak{K}^o)^{cop})$ por (17), que muestra que es también un mapa de álgebras. Ahora, si $\mathfrak{F}^+_L$ tiene una antípoda $\mathfrak{F}^\#$, definimos $\mathfrak{F}^-(a, x) = (\mathfrak{F}^\#(a))(x)$ y vemos que

$$\mathfrak{F}^+\mathfrak{F}^-(a, x) = \mathfrak{F}^+_L(a_1)(x_1)\mathfrak{F}^\#(a_2)(x_2) = ((\mathfrak{F}^+_L * \mathfrak{F}^\#)(a))(x) = (\mathfrak{F}^+_L \circ E^-(a))(x) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_k a)\mathfrak{F}^+_L(e^o_k)(x) = \sum_k \varepsilon(e_k a)\mathfrak{F}^+(e^o_k, x) = \sum_x \varepsilon(e_k a)\varepsilon(x e_k) = \mathfrak{E}^-(a, x),$$

y así probamos también las demás relaciones. Recíprocamente, si $\mathfrak{F}^-$ es una inversa generalizada de $\mathfrak{F}^+$, definimos la antípoda $\mathfrak{F}^\#$ de $\mathfrak{F}^+_L$ dada por $\mathfrak{F}^\#(a) = \mathfrak{F}^-_L(a)$. El resto de las afirmaciones surge de consideraciones análogas. □

Definición 2.17. *Sea $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial y sea $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{H}}$ un elemento de $(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H})^*$ con $(m^*(1), (m^{op})^*(1))$-inversa generalizada $\mathfrak{R}^- = \mathfrak{R}^-_{\mathfrak{H}}$, donde $m : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ es el producto en $\mathfrak{H}$. Decimos que $(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}^{\pm})$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial* coquasitriangular *(o CQT) si las siguientes relaciones se satisfacen:*

$$\mathfrak{R}^+ m^*(X) \mathfrak{R}^- = (m^{op})^*(X) \ (X \in \mathfrak{H}^*) \tag{25}$$

$$(m \otimes \mathrm{id})^*(\mathfrak{R}^+) = \mathfrak{R}^+_{13}\mathfrak{R}^+_{23}, \ (\mathrm{id} \otimes m)^*(\mathfrak{R}^+) = \mathfrak{R}^+_{13}\mathfrak{R}^+_{12}. \tag{26}$$

Aquí por $Z \in (\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H})^*$ y $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, definimos $Z_{ij} \in (\mathfrak{H}^{\otimes 3})^*$ por

$$Z_{ij}(a_1, a_2, a_3) = Z(a_i, a_j)\varepsilon(a_k), \ (a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{H}).$$

Proposición 2.18. *Como en el caso en que $\mathfrak{H}$ es una biálgebra $\mathfrak{R}^{\pm}$ satisface las relaciones de Yang-Baxter,*

$$\mathfrak{R}^{\pm}_{12}\mathfrak{R}^{\pm}_{13}\mathfrak{R}^{\pm}_{23} = \mathfrak{R}^{\pm}_{23}\mathfrak{R}^{\pm}_{13}\mathfrak{R}^{\pm}_{12}, \tag{27}$$

$$\mathfrak{R}^{\mp}_{23}\mathfrak{R}^{\pm}_{12}\mathfrak{R}^{\pm}_{13} = \mathfrak{R}^{\pm}_{13}\mathfrak{R}^{\pm}_{12}\mathfrak{R}^{\mp}_{23}, \ \mathfrak{R}^{\mp}_{13}\mathfrak{R}^{\mp}_{23}\mathfrak{R}^{\pm}_{12} = \mathfrak{R}^{\pm}_{12}\mathfrak{R}^{\mp}_{23}\mathfrak{R}^{\mp}_{13} \tag{28}$$

y también, $\mathfrak{R}^+(a, 1) = \varepsilon(a) = \mathfrak{R}^+(1, a)$, $(a \in \mathfrak{H})$.

Demostración. Veamos que se cumple $(27)^+$. Dado $a \otimes b \otimes c \in \mathfrak{H}^{\otimes 3}$, tomamos $\mathfrak{R}^+_R(c) \in \mathfrak{H}^*$ como antes y computamos:

$$\mathfrak{R}^+_{12}\mathfrak{R}^+_{13}\mathfrak{R}^+_{23}(a, b, c) = \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)(m \otimes \mathrm{id})^*(\mathfrak{R}^+)(a_2, b_2, c) = \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2, c) =$$
$$\mathfrak{R}^+ m^*(\mathfrak{R}^+_R)(c)(a, b) = (m^{op})^*\mathfrak{R}^+_R(c)\mathfrak{R}^+_R(c)(b_1a_1)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2) =$$
$$\mathfrak{R}^+(b_1a_1, c)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2), \tag{29}$$

donde usamos

$$\mathfrak{R}^+ m^*(\mathfrak{R}^+_R(c))(a, b) = \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)\mathfrak{R}^+_R(c)(a_2b_2)\varepsilon(a_3b_3) =$$
$$\mathfrak{R}^+ m^*(\mathfrak{R}^+_R(c))\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^+(a, b) = (m^{op})^*(\mathfrak{R}^+_R(c))\mathfrak{R}^+(a, b)$$

y, continuando en (29),

$$\mathfrak{R}^+(b_1a_1, c_1)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2)\varepsilon(c_2) = (m^{op} \otimes \mathrm{id})^*\mathfrak{R}^+_{12}(a, b, c) = \mathfrak{R}^+_{23}\mathfrak{R}^+_{13}\mathfrak{R}^+_{12}(a, b, c).$$

Las demás igualdades se obtienen con cuentas similares. □

Observación 2.19. Notemos que por (5) y (8), tenemos que

$$(\mathfrak{E}^+, \mathfrak{E}^-) = (m^*(1), (m^{op})^*(1)),$$

de donde, por (26), $\mathfrak{R}^+$ es un s-pareo inversible en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ con inversa generalizada $\mathfrak{R}^-$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}^{\pm} = \mathfrak{R}^{\pm}$ satisface las relaciones (17)-(24). Podemos ver también que la relación (25) es equivalente a

$$\mathfrak{R}^+(a_1, b_1)a_2b_2 = b_1a_1\mathfrak{R}^+(a_2, b_2) \ (a, b \in \mathfrak{H}). \tag{30}$$

ya que, si multiplicamos en (25) a izquierda ambos lados de la igualdad, y evaluamos en $a \otimes b$, obtenemos que

$$\mathfrak{R}^+(a_1, b_1)m^*(X)(a_2, b_2)m^*(1)(a_3, b_3) = (m^{op})^*(X)(a_1, b_1)\mathfrak{R}^-(a_2, b_2),$$

esto es, $\mathfrak{R}^+(a_1, b_1)X(a_2, b_2) = X(b_1a_1)\mathfrak{R}^-(a_2, b_2)$ para todo $X \in \mathfrak{H}^*$, de donde se sigue la afirmación.

Definición 2.20. *Sea $(\mathfrak{K},\mathfrak{R}^{\pm}_{\mathfrak{K}})$ otra $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT y $f:\mathfrak{H}\to\mathfrak{K}$ un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales. Entonces f es un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT si*

$$(f\otimes f)^*(\mathfrak{R}^{+}_{\mathfrak{K}})=\mathfrak{R}^{+}_{\mathfrak{H}} \tag{31}$$

Observación 2.21. Si $\mathfrak{H}$ es una Hopf $\mathcal{V}$-álgebra facial, entonces tenemos

$$(S\otimes \mathrm{id})^*(\mathfrak{R}^{+})=\mathfrak{R}^{-},\ (\mathrm{id}\otimes S)^*(\mathfrak{R}^{-})=\mathfrak{R}^{+}. \tag{32}$$

Esto se deduce de la unicidad de la inversa generalizada, ya que, por (17) y (23)

$$\mathfrak{R}^{+}(S\otimes \mathrm{id})^*(\mathfrak{R}^{+})(a,b)=\mathfrak{R}^{+}(a_1,b_1)\mathfrak{R}^{+}(S(a_2),b_2)=\mathfrak{R}^{+}(a_1S(a_2),b)=$$

$$\mathfrak{R}^{+}(E^{-}(a),b)=\sum_k\varepsilon(e_ka)\mathfrak{R}^{+}(e_k^o,b)=\sum_{k,j}\varepsilon(e_ka)\varepsilon(be_k^o)\varepsilon(ba)=(m^{op})^*(1)(a,b).$$

y de la misma forma probamos el resto de las igualdades que definen a $\mathfrak{R}^{-}$ para $(S\otimes \mathrm{id})^*$, con lo que coinciden. Siguiendo argumentos similares, probamos también la segunda igualdad en (32).

Definición 2.22. *Un ideal $\mathfrak{J}$ de una $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{H}$ es un* bi-ideal *si es un coideal de la coálgebra subyacente $\mathfrak{H}$. Si además $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf (resp $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT) y $\mathfrak{J}$ satisface $S(\mathfrak{J})\subset\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{R}^{\pm}(\mathfrak{J},\mathfrak{H})=\mathfrak{R}^{\pm}(\mathfrak{H},\mathfrak{J})=0$), entonces $\mathfrak{J}$ es llamado un ideal de Hopf (resp. bi-ideal CQT). Un bi-ideal $\mathfrak{J}$ es un ideal de Hopf CQT si es un ideal de Hopf y un CQT bi-ideal de $\mathfrak{H}$. Para cada $\mathcal{V}$-álgebra facial (resp. $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT, $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT de Hopf) $\mathfrak{H}$ y su bi-ideal (resp. bi-ideal CQT, ideal CQT de Hopf) $\mathfrak{J}$, el cociente $\mathfrak{H}/\mathfrak{J}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial (resp. $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT, $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT de Hopf) de manera obvia.*

2.2. Álgebras faciales CQT cerradizas

Definición 2.23. *Sea $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^{\pm})$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT. Decimos que $\mathfrak{H}$ es cerradiza (closable) (o $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT) si existen una $(\mathfrak{F}^{+},\mathfrak{F}^{-})$-inversa generalizada $\mathfrak{Q}^{-}$ de $\mathfrak{R}^{+}$ y una $(\mathfrak{F}^{-},\mathfrak{F}^{+})$-inversa generalizada $\mathfrak{Q}^{+}$ de $\mathfrak{R}^{-}$ en el álgebra $(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}^{cop})^*$, donde las $\mathfrak{F}^{\pm}$ denotan formas bilineales en $\mathfrak{H}$ definidas por*

$$\mathfrak{F}^{+}(a,b)=\sum_k\varepsilon(e_ka)\varepsilon(e_kb),$$

$$\mathfrak{F}^{-}(a,b)=\sum_k\varepsilon(ae_k)\varepsilon(be_k),\ \ (a,b\in\mathfrak{H})$$

LLamamos a $\mathfrak{Q}^{\pm}$ las formas de Lyubashenko de $\mathfrak{H}$.

Proposición 2.24. *Explícitamente, las $\mathfrak{Q}^{\pm}$ son formas de Lyubashenko de $\mathfrak{H}$ si y sólo si satisfacen:*

$$\mathfrak{R}^{\pm}(a_1,b_2)\mathfrak{Q}^{\mp}(a_2,b_1)=\mathfrak{F}^{\mp}(a,b) \tag{33}$$

$$\mathfrak{Q}^{\mp}(a_1,b_2)\mathfrak{R}^{\pm}(a_2,b_1)=\mathfrak{F}^{\pm}(a,b) \tag{34}$$

$$\mathfrak{Q}^{+}(e_iae_j^o,b)=\mathfrak{Q}^{+}(a,e_i^obe_j),\ \mathfrak{Q}^{-}(e_i^oae_j,b)=\mathfrak{Q}^{+}(a,e_ibe_j^o) \tag{35}$$

para cada $a,b\in\mathfrak{H}$ e $i,j\in\mathcal{V}$.

Demostración. De la definición, tenemos que si $\mathfrak{L}^-$ es la $(\mathfrak{F}^+, \mathfrak{F}^-)$ inversa generalizada de $\mathfrak{R}^+$, se cumplen (33) y (34) para $\mathfrak{R}^+$. Veamos que además se cumple (35), por ejemplo para $\mathfrak{L}^-$ y e_j:

$$\mathfrak{L}^-(ae_j, b) = \mathfrak{L}^-\mathfrak{R}^+\mathfrak{L}^-(ae_j, b) = \sum_{k,l} \mathfrak{L}^-(a_1e_k, b_3)\mathfrak{R}^+(a_2e_k^oe_l, b_2)\mathfrak{L}^-(a_3e_je_l^o, b_1) =$$

$$\sum_{k,l} \mathfrak{L}^-(a_1e_k, b_2)\mathfrak{F}^-(a_2e_k^oe_j, b_1) = \sum_{k,l} \mathfrak{L}^-(a_1e_k, b_2)\varepsilon(a_2e_k^oe_je_l)\varepsilon(b_1e_l) =$$

$$\sum_k \mathfrak{L}^-(a_1e_k, b_2)\varepsilon(a_2e_k^oe_j)\varepsilon(b_1e_j) = \mathfrak{L}^-(a_1e_j, b_2)\varepsilon(a_2e_j)\varepsilon(b_1e_j) = \mathfrak{L}^-(ae_j, be_j^o),$$

expresión a la que también llegamos si computamos

$$\mathfrak{L}^-(a, be_j^o) = \mathfrak{L}^-\mathfrak{R}^+\mathfrak{L}^-(a, be_j^o) \sum_{k,l} \mathfrak{L}^-(a_1, b_3e_l^o)\mathfrak{F}^-(a_2, b_1e_le_j^o) =$$

$$\sum_k \mathfrak{L}^-(a_1, b_2e_l^o)\varepsilon(a_2e_k)\varepsilon(b_1e_j^oe_k)\mathfrak{L}^-(a_1, b_2e_j^o)\varepsilon(a_2e_j)\varepsilon(b_1, e_j^o) = \mathfrak{L}^-(ae_j, be_j^o).$$

Recíprocamente, si $\mathfrak{R}^+$ y $\mathfrak{L}^-$ cumplen (33)-(35), cumplen los dos primeros axiomas de la definición de inversa generalizada por (33) y (34) y, además, por (21)

$$\mathfrak{R}^+\mathfrak{L}^-\mathfrak{R}^+(a, b) = \mathfrak{R}^+(a_1, b_2)\mathfrak{F}^+(a_2, b_1) = \sum_k \mathfrak{R}^+(a_1, b_2)\varepsilon(e_ka_2)\varepsilon(e_kb_1) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^+(e_ka, e_k^ob) = \sum_k \mathfrak{R}^+(a, e_k^ob) = \mathfrak{R}^+(a, b).$$

Y finalmente, por (35)

$$\mathfrak{L}^-\mathfrak{R}^+\mathfrak{L}^-(a, b) = \mathfrak{L}^-(a_1, b_2)\mathfrak{F}^-(a_2, b_1) = \sum_k \mathfrak{L}^-(a_1, b_2)\varepsilon(a_2e_k)\varepsilon(b_1e_k) =$$

$$\sum_k \mathfrak{L}^-(ae_k, be_k^o) = \sum_k \mathfrak{L}^-(a, be_k^o) = \mathfrak{L}^-(a, b).$$

Por lo tanto $\mathfrak{L}^-$ es la $(\mathfrak{F}^+, \mathfrak{F}^-)-$inversa generalizada de $\mathfrak{R}^+$. Las igualdades restantes se siguen de manera análoga. $\square$

Si $\sigma : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^{bop}$ denota el anti-isomorfismo canónico, que satisface

$$\sigma(e_{\mathfrak{H},i}) = e^o_{\mathfrak{H}^{bop},i}, \ \sigma(e^o_{\mathfrak{H},i}) = e_{\mathfrak{H}^{bop},i},$$

definimos, para las formas de Lyubashenko $\mathfrak{L}^\pm$, cuatro pareos bilineales $\mathfrak{P}_1^\pm, \mathfrak{P}_2^\pm$: $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^{bop} \to \mathbb{K}$ tomando

$$\mathfrak{P}_1^+(a, \sigma(b)) = \mathfrak{L}^+(b, a), \ \mathfrak{P}_1^-(a, \sigma(b)) = \mathfrak{R}^-(b, a) \tag{36}$$

$$\mathfrak{P}_2^+(a, \sigma(b)) = \mathfrak{R}^+(b, a), \ \mathfrak{P}_2^-(a, \sigma(b)) = \mathfrak{L}^-(b, a) \tag{37}$$

para cada $a, b \in \mathfrak{H}$. Entonces, usando (17)-(24) para $\mathfrak{F}^\pm = \mathfrak{R}^\pm$, (8) y el Lema 2.14, vemos que $\mathfrak{P}_1^\pm$ y $\mathfrak{P}_2^\pm$ dan s-pareos inversibles en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^{bop})$. Por ejemplo

$$\mathfrak{P}_1^-\mathfrak{P}_1^+(a, \sigma(b)) = \mathfrak{P}_1^-(a_1, \sigma(b_2))\mathfrak{P}_1^+(a_2, \sigma(b_1)) = \mathfrak{R}^-(b_2, a_1)\mathfrak{L}^+(b_1, a_2) =$$

$$\mathfrak{F}^-(b,a) = \sum_k \varepsilon(be_k)\varepsilon(ae_k) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(\sigma(e_k)\sigma(b)) = \mathfrak{E}^+(a,\sigma(b))$$

y

$$\mathfrak{P}_1^-(ab,\sigma(c)) = \mathfrak{R}^-(c,ab) = \mathfrak{R}^-(c_1,a)\mathfrak{R}^-(c_2,b) = \mathfrak{P}_1^-(a,\sigma(c_1))\mathfrak{P}_1^-(b,\sigma(c_2)).$$

Se sigue de esto que $\mathfrak{F}^\pm = \mathfrak{Q}^\pm$ satisface las relaciones (17)-(24) para cada $a,b,x,y \in \mathfrak{H}$ e $i,j,k,l \in \mathcal{V}$.

Teorema 2.25. *Sea $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^\pm)$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT. Entonces existe una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT $\mathfrak{K}$ y un mapa $f:\mathfrak{H}\to\mathfrak{K}$ de $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT si y sólo si $\mathfrak{H}$ es cerradiza. En particular toda $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT es cerradiza.*

Demostración. La suficiencia será demostrada construyendo el funtor H_c, en el Teorema 2.42.
Damos aquí una demostración de la necesidad. Usando el mapa f, definimos formas bilineales $\mathfrak{Q}^\pm$ en $\mathfrak{H}$ tomando

$$\mathfrak{Q}^+(a,b) = \mathfrak{R}^-_{\mathfrak{K}}(S(f(a)),f(b)),\ \mathfrak{Q}^-(a,b) = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),S(f(b)))$$

para cada $a,b\in\mathfrak{H}$. Por (26) y (18) para $\mathfrak{F}^+ = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}$ el lado izquierdo de $(33)^+$ es igual a $\mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),S(f(b)_1)f(b)_2)$:

$$\mathfrak{R}^+(a_1,b_2)\mathfrak{Q}^-(a_2,b_1) = \mathfrak{R}^+(a_1,b_2)\mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a_2),S(f(b_1))) =$$

$$\mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a)_1,f(b)_2)\mathfrak{R}^+(f(a)_2,S(f(b)_1)) = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),S(f(b)_1)f(b_2)).$$

De donde $(33)^+$ se sigue de la definición de antípoda y (23), ya que este último término es igual a:

$$\mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),E^+(f(b))) = \sum_k \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),e_k)\varepsilon(f(b)e_k) = \sum_{k,j}\varepsilon(e_jf(a)e_k)\varepsilon(f(b)e_k) =$$

$$\sum_k \varepsilon(f(ae_k))\varepsilon(f(be_k)) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(be_k) = \mathfrak{F}^-(a,b),$$

ya que f es un morfismo de $\mathcal{V}$-álgebras faciales. La prueba de $(33)^-$ y (34) es similar. La relación (35) se sigue de la proposición 2.8, del hecho de que $S(e_ie_j^o) = e_je_i^o$ y (21), (22) para $\mathfrak{F}^\pm = \mathfrak{R}^\pm_{\mathfrak{K}}$:

$$\mathfrak{Q}^+(e_iae_j^o,b) = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(e_iae_j^o),S(f(b))) = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(e_if(a)e_j^o,S(f(b))) =$$

$$\mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),e_j^oS(f(b))e_i) = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{K}}(f(a),S(f(e_i^obe_j))) = \mathfrak{Q}^+(a,e_i^obe_j).$$

□

Proposición 2.26. *Son válidas las siguientes afirmaciones:*

(i) Las formas de Lyubashenko de una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT son únicas si existen.

(ii) Sea $f:\mathfrak{H}\to\mathfrak{K}$ un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT. Si $\mathfrak{K}$ tiene formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}^\pm_{\mathfrak{K}}$, entonces $\mathfrak{H}$ también tiene formas de Lyubashenko, dadas por $\mathfrak{Q}^\pm_{\mathfrak{H}} := (f\otimes f)^*(\mathfrak{Q}^\pm_{\mathfrak{K}})$.

Demostración. (i) se sigue de la unicidad de la inversa generalizada y (ii) es claro, ya que esta es también la forma de $\mathfrak{R}^{\pm}_{\mathfrak{H}}$. $\square$

La siguiente proposición es inmediata.

Proposición 2.27. *Para cada $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^{\pm})$; $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^{\mp}_{21})$, $(\mathfrak{H}^{op},\mathfrak{R}^{\mp})$, $(\mathfrak{H}^{cop},\mathfrak{R}^{\mp}_{21})$ son también coquasitriangulares. Si $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^{\pm})$ es cerradiza con formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}^{\pm}$ entonces estas tres álgebras son también cerradizas con formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}^{\mp}_{21}$, $\mathfrak{Q}^{\mp}$, y $\mathfrak{Q}^{\mp}$ respectivamente.*

En lo que resta de esta sección, retomamos (una versión facial de) la construcción $\mathfrak{U}(w)$ de Faddeev-Reshetikhin-Takhtadzhyan (FRT) [10], y daremos un criterio para ver cuándo $\mathfrak{U}(w)$ es cerradiza en términos de una condición sobre la solución w de la ecuación de Yang Baxter, que fue introducida por Lyubashenko [20] para modelos de vértice.
Sea $\mathcal{G}$ un grafo finito orientado con un conjunto de vértices $\mathcal{V}=\mathcal{G}^0$. Para una arista $\mathbf{p}$, denotamos por $\mathfrak{s}(\mathbf{p})$ y $\mathfrak{r}(\mathbf{p})$ su *comienzo (start)* y *fin (range)*. Para cada $m\geq 1$, denotamos por $\mathcal{G}^m=\coprod_{i,j\in\mathcal{V}}\mathcal{V}^m_{ij}$ el conjunto de *caminos* de *longitud* m, i. e., $\mathbf{p}\in\mathcal{G}^m_{ij}$ si $\mathbf{p}$ es una secuencia $(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m)$ de aristas de $\mathcal{G}$ tal que $\mathfrak{s}(\mathbf{p}):=\mathfrak{s}(\mathbf{p}_1)=i,\mathfrak{r}(\mathbf{p}):=\mathfrak{r}(\mathbf{p}_m)=j$ y $\mathfrak{r}(\mathbf{p}_n)=\mathfrak{s}(\mathbf{p}_{n+1}),(1\leq n<m)$. También, tomamos $\mathfrak{s}(i)=i=\mathfrak{r}(i)$, $\mathcal{G}^0_{ii}=\{i\}$, y $\mathcal{G}^0_{ij}=\emptyset$ para cada $i\in\mathcal{V}$ y $j\neq i$. Sea $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ el espacio linealmente generado por los símbolos $e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}$ $(\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^m,m\geq 0)$. Entonces $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ se convierte en una $\mathcal{V}$-álgebra facial tomando

$$e^o_i=\sum_{j\in\mathcal{V}}e\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix},\ e_j=\sum_{i\in\mathcal{V}}e\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix},\tag{38}$$

$$e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\\mathbf{s}\end{pmatrix}=\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{r})}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q})\mathfrak{s}(\mathbf{s})}e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\\\mathbf{q}\cdot\mathbf{s}\end{pmatrix}\tag{39}$$

$$\Delta\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}\right)=\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{G}^m}e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{t}\end{pmatrix}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\\mathbf{q}\end{pmatrix},\ \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}\right)=\delta_{\mathbf{pq}},\tag{40}$$

para cada $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^m$ y $\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^n$ $(m,n\geq 0)$. Aquí para caminos $\mathbf{p}=(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m)$ y $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)$, tomamos $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}=(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m,\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)$ si $\mathfrak{r}(\mathbf{p})=\mathfrak{s}(\mathbf{r})$ y $m,n\geq 1$ y, también, tomamos $\mathfrak{s}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{p}=\mathbf{p}=\mathbf{p}\cdot\mathfrak{r}(\mathbf{p})$ para cada $\mathbf{p}\in\mathcal{G}^m$ $(m\geq 0)$. Sea $\mathbb{K}\mathcal{G}^m$ el espacio vectorial de base $\mathcal{G}^m$. Identificamos $(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m)\in\mathbb{K}\mathcal{G}^m$ con $\mathbf{p}_1\otimes\ldots\otimes\mathbf{p}_m\in(\mathbb{K}\mathcal{G}^1)^{\otimes m}$.

Observación 2.28. $\mathbb{K}\mathcal{G}^m$ es un $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$-comódulo a derecha, vía

$$\mathbf{q}\mapsto\sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{G}^m}\mathbf{p}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}$$

En efecto, si llamamos a este mapa δ,

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\delta(\mathbf{q})=\sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{G}^m}\mathbf{p}\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}\right)=\sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{G}^m}\mathbf{p}\delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}=\mathbf{q}.$$

Además

$$(\delta\otimes\mathrm{id})\delta(\mathbf{q})=\sum_{\mathbf{p},\mathbf{r}\in\mathcal{G}^m}\mathbf{p}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{r}\end{pmatrix}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}$$

y

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\delta(\mathbf{q})=\sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{G}^m}\mathbf{p}\otimes\Delta\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right)=$$

$$\sum_{\mathbf{p},\mathbf{r}\in\mathcal{G}^m}\mathbf{p}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{r}\end{pmatrix}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}.$$

Definición 2.29. 1. *Una cuaternaria* $\begin{pmatrix} & \boldsymbol{p} & \\ \boldsymbol{r} & & \boldsymbol{s} \\ & \boldsymbol{q} & \end{pmatrix}$ *es una faz si* $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\in\mathcal{G}^1$ *y*

$$\mathfrak{s}(\boldsymbol{p})=\mathfrak{s}(\boldsymbol{r}),\ \mathfrak{r}(\boldsymbol{p})=\mathfrak{s}(\boldsymbol{s}),\ \mathfrak{r}(\boldsymbol{r})=\mathfrak{s}(\boldsymbol{q}),\ \mathfrak{r}(\boldsymbol{q})=\mathfrak{r}(\boldsymbol{s}). \tag{41}$$

2. *$(\mathcal{G},w)$ es un modelo facial (o $\mathcal{V}$-modelo facial) sobre $\mathbb{K}$ si w es un mapa que asigna un escalar* $w\begin{pmatrix} & \boldsymbol{p} & \\ \boldsymbol{r} & & \boldsymbol{s} \\ & \boldsymbol{q} & \end{pmatrix}\in\mathbb{K}$ *a cada faz* $\begin{pmatrix} & \boldsymbol{p} & \\ \boldsymbol{r} & & \boldsymbol{s} \\ & \boldsymbol{q} & \end{pmatrix}$ *de $\mathcal{G}$.*

3. *Un modelo facial $(\mathcal{G},w)$ es llamado un modelo de vértice si $\#(\mathcal{V})=1$.*

Por conveniencia, tomamos $w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q} & \end{pmatrix}=0$ a menos que $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^1$ satisfagan (41). Para un modelo facial $(\mathcal{G},w)$, identificamos a w con el operador lineal en $\mathbb{K}\mathcal{G}^2$ dado por

$$w(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})\in\mathcal{G}^2}w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix}(\mathbf{r},\mathbf{s})\ \ ((\mathbf{p},\mathbf{q})\in\mathcal{G}^2). \tag{42}$$

Definición 2.30. 1. *Un modelo facial se dice inversible si w es inversible como operador en $\mathbb{K}\mathcal{G}^2$. Para un modelo facial $(\mathcal{G},w)$ inversible, definimos otro modelo facial $(\mathcal{G},w^{-1})$ usando la identificación* (42).

2. *Un modelo facial inversible es llamado trenzado (o Yang-Baxter) si w satisface la relación de trenzas $w_1w_2w_1=w_2w_1w_2$, donde w_1 y w_2 denotan operadores lineales en $\mathbb{K}\mathcal{G}^3$ definidos por $w_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=w(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\otimes\boldsymbol{r}$ y $w_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\boldsymbol{p}\otimes w(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$. Aquí identificamos $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\in\mathcal{G}^3$ con $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{r}\in(\mathbb{K}\mathcal{G}^1)^{\otimes 3}$.*

Observación 2.31. De la igualdad $w^{-1}w(\mathbf{p},\mathbf{q})=(\mathbf{p},\mathbf{q})$ se desprende

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}}w^{-1}\begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix}w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix}=\delta_{\mathbf{a},\mathbf{p}}\delta_{\mathbf{b},\mathbf{q}}, \tag{43}$$

para todo $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}$.

Para un modelo facial $(\mathcal{G},w)$, definimos el álgebra $\mathfrak{U}(\mathcal{G},w)=\mathfrak{U}(w)$ como el cociente de $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ módulo las relaciones

$$\sum_{(\mathbf{c},\mathbf{d})\in\mathcal{G}^2}w\begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix}e\begin{pmatrix}\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\end{pmatrix}=\sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})\in\mathcal{G}^2}w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix}e\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}\end{pmatrix} \tag{44}$$

Proposición 2.32. *Con la definición anterior,*

1. *$\mathfrak{U}(w)$ tiene una estructura única de $\mathcal{V}$-álgebra facial tal que la proyección $\mathfrak{H}(\mathcal{G}) \to \mathfrak{U}(w)$ es un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales.*

2. *Si $(\mathcal{G}, w)$ es trenzado, entonces existen mapas bilineales únicos $\mathfrak{R}^{\pm}$ en $\mathfrak{U}(w)$ tal que $(\mathfrak{U}(w), \mathfrak{R}^{\pm})$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT.*

3. *Para un modelo de vértice $w = \check{R}$, $\mathfrak{U}(w)$ coincide con la FRT biálgebra A_R de [10], donde $R = P\check{R}$ y $P(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$.*

Demostración. 1. Debemos ver que las relaciones (44) definen un bi-ideal. Por definición generan un ideal y vemos que, si llamamos

$$H_{ab}^{pq} = \sum_{(\mathbf{c},\mathbf{d})\in\mathcal{G}^2} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \end{pmatrix} - \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})\in\mathcal{G}^2} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{s} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\Delta\left(H_{ab}^{pq}\right) = \sum_{\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{u},\mathbf{v}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \otimes e \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} -$$

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{u}',\mathbf{v}'} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} \otimes w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} H_{ab}^{uv} \otimes e \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{u} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{v} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \otimes e \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} +$$

$$\sum_{\mathbf{u}',\mathbf{v}'} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} \otimes H_{u'v'}^{pq} -$$

$$\sum_{\mathbf{u}',\mathbf{v}',\mathbf{c},\mathbf{d}} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} \otimes w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{u}' & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{v}' & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} H_{ab}^{uv} \otimes e \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \sum_{\mathbf{u}',\mathbf{v}'} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} \otimes H_{u'v'}^{pq}$$

y

$$\varepsilon(H_{ab}^{pq}) = \sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} \varepsilon\left(e \begin{pmatrix} \mathbf{cd} \\ \mathbf{pq} \end{pmatrix}\right) - \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} \varepsilon\left(e \begin{pmatrix} \mathbf{ab} \\ \mathbf{rs} \end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} \delta_{\mathbf{cd},\mathbf{pq}} - \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} \delta_{\mathbf{ab},\mathbf{rs}} = w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} = 0$$

Así, $\mathfrak{J} = \langle H_{ab}^{pq} / (\mathbf{p}, \mathbf{q}), (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{G}^2 \rangle$ es un bi-ideal.

2. Definimos
$$\mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = w\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} \tag{45}$$
para cada $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^1$, y lo extendemos utilizando la noción de función de partición, que definimos a continuación. Decimos que $\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q} & \end{pmatrix}$ satisface una *condición de borde* de tamaño $m\times n$ si $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^n, \mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^m$ y la relación (41) es satisfecha. Para un modelo facial $(\mathcal{G},w)$, definimos su función de partición como la extensión $w:\coprod_{m,n\geq 0}\mathcal{G}^m\times\mathcal{G}^m\times\mathcal{G}^n\times\mathcal{G}^n\to\mathbb{K}$ del mapa w, que está determinada por las dos siguientes relaciones de recursión:
$$w\begin{bmatrix} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}' & \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{G}^m} w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{a} \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix} w\begin{bmatrix} & \mathbf{p}' & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q}' & \end{bmatrix},$$
$$w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' & & \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}' \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{G}^n} w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} w\begin{bmatrix} & \mathbf{a} & \\ \mathbf{r}' & & \mathbf{s}' \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix},$$
para $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^m, \mathbf{p}',\mathbf{q}'\in\mathcal{G}^{n'}, \mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^m, \mathbf{r}',\mathbf{s}'\in\mathcal{G}^{m'}$, junto con la condición
$$w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ i & & j \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix} = \delta_{\mathbf{pq}}\delta_{i\mathfrak{s}(\mathbf{p})}\delta_{j\mathfrak{r}(\mathbf{p})} = w\begin{bmatrix} & i & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{q} \\ & j & \end{bmatrix},$$
para $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^m$, $i,j\in\mathcal{V}$. Notemos que $w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix}=0$ a menos que $\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q} & \end{pmatrix}$ satisfaga una condición de borde. Con esta notación, la relación (45) se mantiene para todo $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^n, \mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^m, (m,n\geq 0)$ y definimos
$$\mathfrak{R}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = w^{-1}\begin{bmatrix} & \mathbf{s} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix}$$
Así, por ejemplo,
$$\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) =$$
$$\sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\mathfrak{R}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{a}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}\right)\mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) =$$
$$\sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} w^{-1}\begin{bmatrix} & \mathbf{b} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{a} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix} w\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{b} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} =$$
$$\delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}} = \delta_{\mathbf{pr},\mathbf{qs}} = \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right).$$

Aquí hemos extendido w^{-1} tal como lo hemos hecho con w, y así comprobamos la igualdad anterior, por ejemplo para $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}^2$, donde escribiremos $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, computando:

$$\sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{b} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{a} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{b} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2} \sum_{\mathbf{x},\mathbf{w},\mathbf{z},\mathbf{y}} \sum_{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{b}_1 & \\ \mathbf{p}_1 & & \mathbf{x} \\ & \mathbf{y} & \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{b}_2 & \\ \mathbf{x} & & \mathbf{a}_1 \\ & \mathbf{w} & \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{y} & \\ \mathbf{p}_2 & & \mathbf{z} \\ & \mathbf{r}_1 & \end{bmatrix} \times$$

$$w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{w} & \\ \mathbf{z} & & \mathbf{a}_2 \\ & \mathbf{r}_2 & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{q}_1 & \\ \mathbf{b}_1 & & \mathbf{e} \\ & \mathbf{f} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{q}_2 & \\ \mathbf{e} & & \mathbf{s}_1 \\ & \mathbf{g} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{f} & \\ \mathbf{b}_2 & & \mathbf{h} \\ & \mathbf{a}_1 & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{g} & \\ \mathbf{h} & & \mathbf{s}_2 \\ & \mathbf{a}_2 & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1} \sum_{\mathbf{x},\mathbf{w},\mathbf{z},\mathbf{y}} \sum_{\mathbf{e},\mathbf{g}} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{b}_1 & \\ \mathbf{p}_1 & & \mathbf{x} \\ & \mathbf{y} & \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{y} & \\ \mathbf{p}_2 & & \mathbf{z} \\ & \mathbf{r}_1 & \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{w} & \\ \mathbf{z} & & \mathbf{a}_2 \\ & \mathbf{r}_2 & \end{bmatrix} \times$$

$$w \begin{bmatrix} & \mathbf{q}_1 & \\ \mathbf{b}_1 & & \mathbf{e} \\ & \mathbf{y} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{q}_2 & \\ \mathbf{e} & & \mathbf{s}_1 \\ & \mathbf{g} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{g} & \\ \mathbf{w} & & \mathbf{s}_2 \\ & \mathbf{a}_2 & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{e},\mathbf{z}} \delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1} \delta_{\mathbf{r}_2,\mathbf{s}_2} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{e} & \\ \mathbf{p}_2 & & \mathbf{z} \\ & \mathbf{r}_1 & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{q}_2 & \\ \mathbf{e} & & \mathbf{s}_1 \\ & \mathbf{z} & \end{bmatrix} =$$

$$\delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1} \delta_{\mathbf{r}_2,\mathbf{s}_2} \delta_{\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_2} \delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{s}_1} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}}.$$

Finalmente, vemos que $\mathfrak{R}^{\pm}$ así definido es compatible con las relaciones (44). Por ejemplo,

$$\mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \sum_{(\mathbf{c},\mathbf{d}) \in \mathcal{G}^2} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \end{pmatrix} - \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s}) \in \mathcal{G}^2} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) = \tag{46}$$

$$\sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} \mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \end{pmatrix} \right) -$$

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} \mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\sum_{\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{y} & \\ \mathbf{c} & & \mathbf{p} \\ & \mathbf{e} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{e} & \\ \mathbf{d} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} & \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{y} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{r} \\ & \mathbf{t} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{t} & \\ \mathbf{b} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{x} & \end{bmatrix} =$$

$$(w_1 w_2 w_1 - w_2 w_1 w_2)_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x};\mathbf{y},\mathbf{p},\mathbf{q}} = 0,$$

donde para $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}\mathcal{G}^3)$, tomamos $f(q) = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} f_{\mathbf{pq}}$ ($\mathbf{p} \in \mathcal{G}^3$). También podemos ver que satisface las identidades (26), e. g.

$$(m \otimes \mathrm{id})^* \mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right) = \mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right) =$$

$$w \begin{pmatrix} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} & \\ \mathbf{t} & & \mathbf{u} \\ & \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} & \end{pmatrix} = \mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \right) \mathfrak{R}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\mathfrak{R}^+_{13} \mathfrak{R}^+_{23} \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right).$$

3. Se verá en la próxima sección, al realizar la construcción sin coordenadas, viendo que coincide con la relación tomada habitualmente.

□

Sea $\tilde{\mathcal{G}}$ el grafo que resulta de la orientación inversa de $\mathcal{G}$ y sea $\tilde{\ }: \mathcal{G}^m \to \tilde{\mathcal{G}}^m$, $\mathbf{p} \mapsto \tilde{\mathbf{p}}$ ($m \geq 0$) la biyección canónica que satisface $\widetilde{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}$, $\mathfrak{s}(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathfrak{r}(\mathbf{p})$, y $\mathfrak{r}(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathfrak{s}(\mathbf{p})$. Definimos también un nuevo grafo $\mathcal{G}_{LD}$ tomando $\mathcal{G}^0_{LD} = \mathcal{V}$ y $\mathcal{G}^1_{LD} = \mathcal{G}^1 \coprod \tilde{\mathcal{G}}^1$. Sean $\mathcal{G} \bar{\times} \tilde{\mathcal{G}}$ y $\tilde{\mathcal{G}} \bar{\times} \mathcal{G}$ los subconjuntos de $\mathcal{G}^2_{LD}$ consistentes de los elementos de la forma $\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}$ ($\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{G}^1$), respectivamente. Definimos operadores lineales w_{LD}, w^-_{LD} : $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{G}} \bar{\times} \mathcal{G}) \to \mathbb{K}(\mathcal{G} \bar{\times} \tilde{\mathcal{G}})$ por

$$w_{LD}(\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} \mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{s}};\ w_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} := w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$w^-_{LD}(\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w^-_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} \mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{s}};\ w^-_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} := w \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Definición 2.33. *Decimos que un $\mathcal{V}$-modelo facial trenzado $(\mathcal{G}, w)$ es cerradizo si w_{LD} y w^-_{LD} son inversibles.*

Quedan entonces definidos

$$w^{-1}_{LD} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{v}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \mathbf{u} & \end{bmatrix} \quad y \quad (w^-_{LD})^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{v}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \mathbf{u} & \end{bmatrix}$$

de forma tal que satisfacen, respectivamente, las ecuaciones

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} w^{-1}_{LD} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{v}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \mathbf{u} & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix} w^{-1}_{LD} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{v}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \mathbf{u} & \end{bmatrix} = \delta_{\mathbf{v},\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{u}}. \tag{49}$$

pues sabemos que

$$w_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} = w^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix};$$

y

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w_{LD}^{-} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} (w_{LD}^{-})^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{v}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \mathbf{u} & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix} (w_{LD}^{-})^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{v}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \mathbf{u} & \end{bmatrix} = \delta_{\mathbf{v},\mathbf{p}}\delta_{\mathbf{q},\mathbf{u}}, \tag{50}$$

ya que, recordemos que

$$w_{LD}^{-} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \tilde{\mathbf{s}} & \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix}.$$

En este caso, definimos un nuevo $\mathcal{V}$-modelo facial $(\mathcal{G}_{LD}, w_{LD})$ extendiendo w_{LD} en $\mathbb{K}\mathcal{G}_{LD}^2$ vía

$$w_{LD|\mathbb{K}\mathcal{G}^2} = w, \; w_{LD|\mathbb{K}(\mathcal{G}\tilde{\times}\tilde{\mathcal{G}})} = (w_{LD}^{-})^{-1} \text{ y } w_{LD} \begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \tilde{\mathbf{r}} & & \tilde{\mathbf{s}} \\ & \tilde{\mathbf{q}} & \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{s} & & \mathbf{r} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} \tag{51}$$

para $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathcal{G}^1$.

Definición 2.34. *Llamamos a w_{LD} el doble de Lyubashenko de w.*

Proposición 2.35. *Con la notación anterior, $(\mathcal{G}_{LD}, w_{LD})$ es un modelo facial trenzado.*

Veremos la demostración de esta proposición tras enunciar la siguiente, que probaremos después.

Proposición 2.36. *Para un modelo facial trenzado $(\mathcal{G}, w)$, la $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{U}(w)$ es cerradiza (ver Definición 2.23) si y sólo si $(\mathcal{G}, w)$ es cerradizo. En este caso, las formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}^{\pm}$ de $\mathfrak{U}(w)$ están dadas por*

$$\mathfrak{Q}^{+}\left(e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}\right) = w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{s} & \\ \tilde{\boldsymbol{q}} & & \tilde{\boldsymbol{p}} \\ & \boldsymbol{r} & \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{Q}^{-}\left(e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}\right) = w_{LD} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{q} & \\ \tilde{\boldsymbol{s}} & & \tilde{\boldsymbol{r}} \\ & \boldsymbol{p} & \end{bmatrix}, \tag{52}$$

para cada $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{G}^m$ y $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathcal{G}^n$ $(m, n \geq 0)$.

Vemos entonces la demostración de la Proposición 2.35.

Demostración. Debemos ver que la ecuación

$$(w_{LD})_1(w_{LD})_2(w_{LD})_1 - (w_{LD})_2(w_{LD})_1(w_{LD})_2 = 0 \tag{53}$$

se satisface en los subconjuntos $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, $\mathcal{G}\times\tilde{\mathcal{G}}\times\mathcal{G}$, $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\tilde{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}\times\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}\times\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}\times\mathcal{G}\times\tilde{\mathcal{G}}$ y $\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}_{LD}^3$. Ahora bien, $(w_{LD})_{|\mathcal{G}\times\mathcal{G}} = w$ y por lo tanto la ecuación (53) se cumple en el primero de los subconjuntos mencionados, por ser $(\mathcal{G}, w)$ trenzado. Este hecho también muestra su validez en el último de los subconjuntos, en efecto,

$$((w_{LD})_1(w_{LD})_2(w_{LD})_1)(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{r}}) =$$

$$\sum_{\mathbf{a,b,c}}\sum_{\mathbf{d,e,f}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \tilde{\mathbf{a}} & & \tilde{\mathbf{q}} \\ & \tilde{\mathbf{b}} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{b}} & \\ \tilde{\mathbf{c}} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \tilde{\mathbf{d}} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{a}} & \\ \tilde{\mathbf{e}} & & \tilde{\mathbf{c}} \\ & \tilde{\mathbf{f}} & \end{bmatrix}(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{d}}) =$$

$$\sum_{\mathbf{a,b,c}}\sum_{\mathbf{d,e,f}} w\begin{bmatrix} & \mathbf{d} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{f} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} w\begin{bmatrix} & \mathbf{b} & \\ \mathbf{c} & & \mathbf{e} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} w\begin{bmatrix} & \mathbf{a} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{c} \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix}(\mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{e}),$$

por ser w solución de la ecuación de trenzas en $\mathbb{K}\mathcal{G}^3$. Ahora, deshaciendo la cuenta anterior, esta última expresión es

$$\sum_{\mathbf{a,b,c}}\sum_{\mathbf{d,e,f}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{b}} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{a}} \\ & \tilde{\mathbf{d}} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{p}} & \\ \tilde{\mathbf{e}} & & \tilde{\mathbf{c}} \\ & \tilde{\mathbf{b}} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{q}} & \\ \tilde{\mathbf{c}} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \tilde{\mathbf{a}} & \end{bmatrix}(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{d}}) =$$

$$((w_{LD})_2(w_{LD})_1(w_{LD})_2)(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{r}}).$$

Comprobar la ecuación (53) en los subconjuntos entre el segundo y el cuarto equivale a comprobarla en los tres siguientes, ya que podemos identificar, por ejemplo, a $\tilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ con $\tilde{\mathcal{G}} \times (\widetilde{\tilde{\mathcal{G}}}) \times (\widetilde{\tilde{\mathcal{G}}})$. Vemos que la ecuación se cumple en $\mathcal{G} \times \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}}$:

$$((w_{LD})_1(w_{LD})_2(w_{LD})_1 - (w_{LD})_2(w_{LD})_1(w_{LD})_2)(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{r}}) =$$

$$\sum_{\mathbf{d,e,f}}[\sum_{\mathbf{a,b,c}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{a}} & & \tilde{\mathbf{q}} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{b} & \\ \tilde{\mathbf{c}} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{d} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{a}} & \\ \tilde{\mathbf{e}} & & \tilde{\mathbf{c}} \\ & \tilde{\mathbf{f}} & \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{\mathbf{x,y,z}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{q}} & \\ \tilde{\mathbf{x}} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \tilde{\mathbf{y}} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{e}} & & \tilde{\mathbf{x}} \\ & \mathbf{z} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{z} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{y}} \\ & \mathbf{d} & \end{bmatrix}](\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{d}) =$$

$$\sum_{\mathbf{d,e,f}}[\sum_{\mathbf{a,c}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}} & & \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{d} & \end{bmatrix} w\begin{bmatrix} & \mathbf{f} & \\ \mathbf{c} & & \mathbf{e} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} - \sum_{\mathbf{x,y}} w\begin{bmatrix} & \mathbf{y} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{x} \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}} \\ & \mathbf{d} & \end{bmatrix}](\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{d}),$$

donde hemos extendido a w_{LD} como antes hemos hecho con w, usando una función de partición. Ahora, el coeficiente de una terna $(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{d})$ dada es, según (52) y (45),

$$\sum_{\mathbf{a,c}} \mathfrak{Q}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{rq}\\ \mathbf{ca}\end{pmatrix}\right)\mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}\right) -$$

$$\sum_{\mathbf{x,y}} \mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{x}\end{pmatrix}\right)\mathfrak{Q}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{fe}\\ \mathbf{yx}\end{pmatrix}\right) =$$

$$\mathfrak{Q}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}_1 e\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}_1 \mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}_2, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}_2\right)\right) -$$

$$\mathfrak{Q}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}, \mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}_1, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}_1\right) e\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}_2 e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}_2\right).$$

Como hemos visto en (46),en el caso en que tenemos $\mathfrak{R}^+$ en lugar de $\mathfrak{Q}^-$ en esta ecuación, ésta es igual a 0. Ahora, si bien $(\mathfrak{H}(\mathcal{G}), \mathfrak{R}^{\pm})$ no es CQT, sí resulta de la definición que $\mathfrak{R}^{\pm} \in (\mathfrak{H}(\mathcal{G}) \otimes \mathfrak{H}(\mathcal{G})^{cop})^*$ con inversa generalizada $\mathfrak{Q}^{\mp}$. Por ejemplo,

$$\mathfrak{R}^+\mathfrak{Q}^- \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \mathfrak{R}^+ \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, e\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) \mathfrak{Q}^- \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{a} & \\ \mathbf{b} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} w_{LD} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{b}} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}},$$

por (50), y, en este caso,

$$\mathfrak{F}^- \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) = \sum_k \varepsilon \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} e_k \right) \varepsilon \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} e_k^o \right) =$$

$$\sum_{k,i,j} \varepsilon \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} e\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \right) \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} e\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \right) =$$

$$\varepsilon \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \right) \varepsilon \left(e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) \delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),\mathfrak{r}(\mathbf{r})} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}},$$

ya que $\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),\mathfrak{r}(\mathbf{r})} = 1$ pues estamos considerando la faz $\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{b}} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix}$. Así, tenemos que también se cumple $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}^+\mathfrak{Q}^-\mathfrak{R}^+$. Especificando esto, tenemos que

$$\mathfrak{R}^+(c, \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)a_2b_2) = \mathfrak{R}^+\mathfrak{Q}^-\mathfrak{R}^+(c, \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)a_2b_2) =$$

$$\mathfrak{R}^+(c_1, a_4b_4)\mathfrak{Q}^-(c_2, a_3b_3)\mathfrak{R}^+(c_3, a_2b_2)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2).$$

Utilizando (46), como hemos dicho, también tenemos

$$\mathfrak{R}^+(c, \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)a_2b_2) = \mathfrak{R}^+(c, \mathfrak{R}^+(a_2, b_2)b_1a_1) = \mathfrak{R}^+\mathfrak{Q}^-\mathfrak{R}^+(c, \mathfrak{R}^+(a_2, b_2)b_1a_1) =$$

$$\mathfrak{R}^+(c_1, b_3, a_3)\mathfrak{Q}^-(c_2, b_2a_2)\mathfrak{R}^+(c_1, b_1a_1)\mathfrak{R}^+(a_4, b_4).$$

Queremos ver entonces que

$$\mathfrak{Q}^-(c, b_1a_1\mathfrak{R}^+(a_2, b_2)) = \mathfrak{Q}^-(c, \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)a_2b_2)$$

en $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$, y tenemos que

$$\mathfrak{R}^+(c_1, a_4b_4)\mathfrak{Q}^-(c_2, b_2a_2\mathfrak{R}^+(a_3, b_3))\mathfrak{R}^+(c_3, b_1a_1) =$$

$$\mathfrak{R}^+(c_1, a_4b_4)\mathfrak{Q}^-(c_2, a_3b_3\mathfrak{R}^+(a_2, b_2))\mathfrak{R}^+(c_3, b_1a_1).$$

Llamamos

$$\mathfrak{T}_1(c, a, b) = \mathfrak{Q}^-(c, b_1a_1\mathfrak{R}^+(a_2, b_2)), \ \mathfrak{T}_2(c, a, b) = \mathfrak{Q}^-(c, \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)a_2b_2).$$

Haremos en lo siguiente un abuso de notación, por cuanto estos mapas $\mathfrak{T}_i$ no son lineales, diciendo que, entonces, tenemos la siguiente igualdad en $(\mathfrak{H}(\mathcal{G}) \otimes \mathfrak{H}(\mathcal{G})^{cop} \otimes \mathfrak{H}(\mathcal{G})^{cop})^*$:

$$(\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{R}^+ \mathfrak{T}_1 (\mathrm{id} \otimes m^{op})^* \mathfrak{R}^+ = (\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{R}^+ \mathfrak{T}_2 (\mathrm{id} \otimes m^{op})^* \mathfrak{R}^+. \tag{54}$$

Ahora,

$$(\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{Q}^- (\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{R}^+ (c, ab) = \mathfrak{Q}^- \mathfrak{R}^+ (c, ab) = \mathfrak{F}^+ (c, ab) = \sum_k \varepsilon(e_k c) \varepsilon(e_k ab),$$

con lo que, multiplicando el lado izquierdo de la igualdad (54) a izquierda por $(\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{Q}^-$ y a derecha por $(\mathrm{id} \otimes m^{op})^* \mathfrak{Q}^-$, obtenemos, utilizando las propiedades (21) y (22) para s-pareos inversibles,

$$(\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{F}^+ \mathfrak{T}_1 (\mathrm{id} \otimes m^{op})^* \mathfrak{F}^- (c, a, b) =$$

$$\sum_{k,l} \varepsilon(e_k c_1) \varepsilon(e_k a_4 b_4) \mathfrak{Q}^- (c_2, b_2 a_2 \mathfrak{R}^+ (a_3, b_3)) \varepsilon(c_3 e_l) \varepsilon(b_1 a_1 e_l) =$$

$$\sum_{k,l,i} \mathfrak{Q}^- (e_k^o c e_l, b_1 a_1 e_l^o \mathfrak{R}^+ (a_2, b_2)) \varepsilon(e_k a_3 e_i) \varepsilon(e_i b_2) =$$

$$\sum_{k,l,i} \mathfrak{Q}^- (e_k^o c e_l, b_1 a_1 e_l^o \mathfrak{R}^+ (e_k a_2 e_i, e_i b_2)) =$$

$$\sum_{k,l,i} \mathfrak{Q}^- (c, e_k b_1 a_1 e_l^o e_l^o \mathfrak{R}^+ (e_k a_, e_i e_i b_2)) =$$

$$\sum_k \mathfrak{Q}^- (c, e_k b_1 a_1 \mathfrak{R}^+ (e_k a_2, b_2)) = \sum_k \mathfrak{Q}^- (c, e_k b_1 a_1 \mathfrak{R}^+ (a_2, e_k^o b_2)) \overset{(14)}{=}$$

$$\sum_k \mathfrak{Q}^- (c, e_k e_k b_1 a_1 \mathfrak{R}^+ (a_2, b_2)) = \mathfrak{Q}^- (c, b_1 a_1 \mathfrak{R}^+ (a_2, b_2)) = \mathfrak{T}_1 (c, a, b).$$

Multiplicando ahora el lado derecho de (54) también a izquierda y a derecha por $(\mathrm{id} \otimes m)^* \mathfrak{Q}^-$ y $(\mathrm{id} \otimes m^{op})^* \mathfrak{Q}^-$ respectivamente, obtenemos que es igual a $\mathfrak{T}_2$, y así concluimos que $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$, que es lo que queríamos probar. □

Ahora vemos la demostración de la Proposición 2.36.

Demostración. Sean $\tilde{\mathfrak{Q}}^\pm$ los mapas bilineales en $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ definidos por los términos de la derecha en la proposición. Entonces obtenemos

$$\tilde{\mathfrak{Q}}^+ \left(e \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}, \sum_{(\mathbf{c},\mathbf{d}) \in \mathcal{G}^2} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \end{pmatrix} - \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s}) \in \mathcal{G}^2} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} e \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{pq} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{e}} \\ & \mathbf{cd} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} - \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{rs} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{e}} \\ & \mathbf{ab} & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{h}} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{h}} \\ & \mathbf{c} & \end{bmatrix} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{h}} & & \tilde{\mathbf{e}} \\ & \mathbf{d} & \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} - \tag{55}$$

$$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{g}} w \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{g}} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{s} & \\ \tilde{\mathbf{g}} & & \tilde{\mathbf{e}} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix}.$$

Pero esta expresión es igual a

$$\left((w_{LD})_2(w_{LD})_1^{-1}(w_{LD})_2^{-1} - (w_{LD})_1^{-1}(w_{LD})_2^{-1}(w_{LD})_1\right)_{\tilde{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\cdot\tilde{\mathbf{e}}}, \tag{56}$$

para cada $\mathbf{e},\mathbf{f} \in \mathcal{G}^1$ y $(\mathbf{a},\mathbf{b}),(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathcal{G}^2$ tales que $\mathfrak{r}(\mathbf{f}) = \mathfrak{s}(\mathbf{a})$ y $\mathfrak{r}(\mathbf{e}) = \mathfrak{r}(\mathbf{q})$. Veamos, por ejemplo, que los términos de la izquierda de las diferencias (55) y (56) coinciden:

$$\left((w_{LD})_2(w_{LD})_1^{-1}(w_{LD})_2^{-1}\right)(\mathbf{p},\mathbf{q},\tilde{\mathbf{e}}) =$$

$$\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\sum_{\mathbf{t},\mathbf{z}}\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{x}} & & \tilde{\mathbf{e}} \\ & \mathbf{y} & \end{bmatrix} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{t}} & & \tilde{\mathbf{x}} \\ & \mathbf{z} & \end{bmatrix} w_{LD} \begin{bmatrix} & \mathbf{z} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{y} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} (\tilde{\mathbf{t}},\mathbf{r},\mathbf{s}).$$

Donde, tomando $\mathbf{t} = \mathbf{f}, \mathbf{r} = \mathbf{a}, \mathbf{s} = \mathbf{b}$ y teniendo en cuenta que, por definición, $(w_{LD})_{|\mathbb{K}(\mathcal{G}^2)} = w$, tenemos

$$\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{x}} & & \tilde{\mathbf{e}} \\ & \mathbf{y} & \end{bmatrix} w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \tilde{\mathbf{f}} & & \tilde{\mathbf{x}} \\ & \mathbf{z} & \end{bmatrix} w_{LD} \begin{bmatrix} & \mathbf{z} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{y} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix},$$

y tenemos la igualdad buscada haciendo $\mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{y} = \mathbf{d}, \mathbf{x} = \mathbf{h}$. Pero multiplicando la ecuación (56) (y por lo tanto (55)) a izquierda por $(w_{LD})_2^{-1}$ y a derecha por $(w_{LD})_1^{-1}$ obtenemos

$$(w_{LD})_1^{-1}(w_{LD})_2^{-1}(w_{LD})_1^{-1} - (w_{LD})_2^{-1}(w_{LD})_1^{-1}(w_{LD})_2^{-1}$$

que es 0 por definición de modelo facial trenzado. Más aún, por la definición de $w\,[\cdot]$, la ecuación (55) es todavía 0 aún si estas condiciones no son satisfechas. Como (44) genera un coideal de $\mathfrak{U}(w)$ y como $\tilde{\mathfrak{Q}}^+$ satisface (17)-(18), esto implica que $\mathfrak{J}$:=Ker$(\mathfrak{H}(\mathcal{G}) \to \mathfrak{U}(w))$ pertenece al radical derecho de $\mathfrak{Q}^+$. La prueba de que $\tilde{\mathfrak{Q}}^-(\mathfrak{H},\mathfrak{J}) = \tilde{\mathfrak{Q}}^\pm(\mathfrak{J},\mathfrak{H}) = 0$ es similar. Ahora, en este caso,

$$\mathfrak{F}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = \sum_{k,i,j} \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}i\\ k\end{pmatrix}\right)\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}j\\ k\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{k,i,j} \delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p}),i}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),k}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{r}),j}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{s}),k}\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\cdot i\\ \mathbf{q}\cdot k\end{pmatrix}\right)\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\cdot j\\ \mathbf{s}\cdot k\end{pmatrix}\right) =$$

$$\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right)\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right)\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),\mathfrak{r}(\mathbf{s})} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),\mathfrak{r}(\mathbf{s})} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p}),\mathfrak{r}(\mathbf{s})},$$

y análogamente vemos que

$$\mathfrak{F}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = \delta_{\mathfrak{s}(\mathbf{q}),\mathfrak{s}(\mathbf{s})}\delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}}.$$

Y notamos que

$$\mathfrak{R}^+\mathfrak{Q}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = \sum_{\mathbf{t},\mathbf{t}'} \mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{t}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{t}'\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right)\mathfrak{Q}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{t}'\end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{\mathbf{t},\mathbf{t}'} w\begin{bmatrix} & \mathbf{t} & \\ \mathbf{t}' & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{t}'} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{t} & \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{t},\mathbf{t}'} w\begin{bmatrix} & \mathbf{t} & \\ \mathbf{t}' & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} (w_{LD}^{-})^{-1}\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{t}'} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{t} & \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{\mathbf{t},\mathbf{t}'} w_{LD}^{-}\begin{bmatrix} & \tilde{\mathbf{t}'} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{t} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} (w_{LD}^{-})^{-1}\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \tilde{\mathbf{t}'} & & \tilde{\mathbf{r}} \\ & \mathbf{t} & \end{bmatrix} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p}),\mathfrak{r}(\mathbf{s})}.$$

Notemos que aquí $\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p}),\mathfrak{r}(\mathbf{s})} = 1$ por definición de faz y este último término es

$$\mathfrak{F}^{-}\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right).$$

Análogamente probamos el resto de las relaciones (33)-(35) que definen a las formas de Lyubashenko. De manera recíproca, si $\mathfrak{U}(w)$ es cerradiza, definimos w_{LD}^{-1} a partir de $\mathfrak{Q}^{+}$ y $(w_{LD}^{-})^{-1}$ a través de $\mathfrak{Q}^{-}$, ya que ésta última define a $(w_{LD})_{|\mathbb{K}(\mathcal{G}\times\tilde{\mathcal{G}})}$ y a partir de éste se define la inversa de w_{LD}^{-}. □

Ejemplos 2.37. (i) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Como el operador identidad $w = \mathrm{id}_{V\otimes V}$ en $V^{\otimes 2}$ satisface la ecuación de trenzas en $\mathrm{End}(V^{\otimes 3})$, da un ejemplo de un espacio vectorial trenzado, que no es cerradizo. La FRT biálgebra correspondiente está dada por

$$\mathfrak{U}(\mathrm{id}) = T(\mathrm{End}(V)^{*}) = \langle t_{pq} | \text{sin relaciones}\rangle$$

con coproducto $\Delta(t_{pq}) = \sum_r t_{pr}\otimes t_{rq}$ $(1\le q\le \dim V)$.

1. En [19], Hietarinta considera un espacio vectorial V con base $\{u_+, u_-\}$. Una solución de la ecuación de trenzas allí es R, con $u_\pm\otimes u_\pm \mapsto (\pm 1)u_+\otimes u_+ + u_-\otimes u_-$ y $u_\mp\otimes u_\pm \mapsto (\pm 1)u_+\otimes u_- + u_-\otimes u_+$. A diferencia de (i), la biálgebra $\mathfrak{U}(R)$ tiene relaciones no triviales pero tampoco posee formas de Lyubashenko.

2. Sea $\mathcal{V}$ un conjunto finito y $a\neq 0$ una constante fija. Un mapa $W : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{K}^{X}$ $(=\mathbb{K}-\{0\})$, $(i,j)\mapsto W(i,j)$ es un *modelo espín* si satisface las condiciones

$$W(i,j) = W(j,i),$$

$$W(i,i) = a,\ \sum_l W(i,l)^{\pm 1} = \sqrt{\#(\mathcal{V})}a^{\mp 1},$$

$$\sum_l W(i,l)W(l,j)^{-1} = \#(\mathcal{V})\delta_{ij}, \tag{57}$$

$$\sum_l W(i,l)W(j,l)W(k,l)^{-1} = \sqrt{\#(\mathcal{V})}W(i,j)W(j,k)^{-1}W(k,i)^{-1}, \tag{58}$$

para cada $i,j,k\in\mathcal{V}$. Para un modelo espín W, definimos un modelo facial $(\mathcal{G},w) = (\mathcal{G}_W, w_W)$ tomando $\mathcal{G}^0 = \mathcal{V}, \#(\mathcal{G}^1_{ij}) = 1$ $(i,j\in\mathcal{V})$ y

$$w\begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \to k\end{bmatrix} = \left(\sqrt{\#(\mathcal{V})}\right)^{-1} W(j,l)W(i,k)^{-1}\ (i,j,k,l\in\mathcal{V}).$$

Aquí denotamos por $i \to j$ o $\begin{matrix} i \\ \downarrow \\ j \end{matrix}$ el único elemento de $\mathcal{G}^1_{ij}$. Es decir, con la notación anterior,

$$w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \to k \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} & i \to j & \\ i & & j \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & & k \\ & l \to k & \end{bmatrix}.$$

Así queda definido

$$w(i \to j, l \to k) = \sum_{a,b,c,d} w \begin{bmatrix} & i \to j & \\ a & & l \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & & k \\ & c \to d & \end{bmatrix} (a \to b, c \to d) =$$

$$\delta_{j,l} \sum_b w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ b \to k \end{bmatrix} (i \to b, b \to k).$$

Y vemos que w es inversible notando que debe cumplirse, para definir w^{-1}:

$$w^{-1} w(i \to j, k \to l) = \delta_{j,k} \sum_a w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \to l \end{bmatrix} w^{-1}(i \to a, a \to l) =$$

$$\delta_{j,k} \sum_a \sum_{x,y,w,z} w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \to l \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} & i \to a & \\ x & & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & & l \\ & w \to z & \end{bmatrix} (x \to y, w \to z) =$$

$$\delta_{j,k} \sum_{a,b} w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \to l \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} i \to a \\ \downarrow \quad \downarrow \\ b \to l \end{bmatrix} (i \to b, b \to l).$$

Buscamos entonces que

$$\sum_a w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \to l \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} i \to a \\ \downarrow \quad \downarrow \\ b \to l \end{bmatrix} (i \to b, b \to l) = \delta_{b,j}.$$

Definimos

$$w^{-1} \begin{bmatrix} i \to a \\ \downarrow \quad \downarrow \\ b \to l \end{bmatrix} = \left(\sqrt{\#(\mathcal{V})}\right)^{-1} W(a,b)^{-1} W(i,l)$$

y así

$$\sum_a w \begin{bmatrix} i \to j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \to l \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} i \to a \\ \downarrow \quad \downarrow \\ b \to l \end{bmatrix} (i \to b, b \to l) =$$

$$\sum_a \#(\mathcal{V})^{-1} W(j,a) W(a,b)^{-1} = \#(\mathcal{V})^{-1}\#(\mathcal{V})\delta_{b,j} = \delta_{b,j},$$

por (57). Hemos visto que w es inversible, veamos ahora que satisface la ecuación de trenzas.

$$(w\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes w)(w\otimes \mathrm{id})(i\to j, k\to l, m\to n) =$$

$$\delta_{j,k}\sum_a w\begin{bmatrix} i\to j\\ \downarrow\quad\downarrow\\ a\to l\end{bmatrix}(w\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes w)(i\to a, a\to l, m\to n) =$$

$$\delta_{j,k}\delta_{l,m}\sum_{a,b} w\begin{bmatrix} i\to j\\ \downarrow\quad\downarrow\\ a\to l\end{bmatrix} w\begin{bmatrix} a\to l\\ \downarrow\quad\downarrow\\ b\to n\end{bmatrix}(w\otimes \mathrm{id})(i\to a, a\to b, b\to n) =$$

$$\delta_{j,k}\delta_{l,m}\sum_{a,b,c} w\begin{bmatrix} i\to j\\ \downarrow\quad\downarrow\\ a\to l\end{bmatrix} w\begin{bmatrix} a\to l\\ \downarrow\quad\downarrow\\ b\to n\end{bmatrix} w\begin{bmatrix} i\to a\\ \downarrow\quad\downarrow\\ c\to b\end{bmatrix}(i\to c, c\to b, b\to n) =$$

$$\delta_{j,k}\delta_{l,m}\sum_{a,b,c}\#(\mathcal{V})^{-3/2} W(j,a)W(i,l)^{-1}W(l,b)W(a,n)^{-1}\times$$

$$\times W(a,c)W(i,b)^{-1}(i\to c, c\to b, b\to n) =$$

$$\delta_{j,k}\delta_{l,m}\sum_{b,c}\#(\mathcal{V})^{-1} W(i,l)^{-1}W(l,b)W(i,b)^{-1}W(j,c)\times \tag{59}$$

$$\times W(j,n)^{-1}W(c,n)^{-1}(i\to c, c\to b, b\to n),$$

por (58). Por otro lado

$$(\mathrm{id}\otimes w)(w\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes w)(i\to j, k\to l, m\to n) =$$

$$\delta_{l,m}\sum_a w\begin{bmatrix} k\to l\\ \downarrow\quad\downarrow\\ a\to n\end{bmatrix}(\mathrm{id}\otimes w)(w\otimes \mathrm{id})(i\to j, k\to a, a\to n) =$$

$$\delta_{l,m}\delta_{j,k}\sum_{a,b} w\begin{bmatrix} k\to l\\ \downarrow\quad\downarrow\\ a\to n\end{bmatrix} w\begin{bmatrix} i\to j\\ \downarrow\quad\downarrow\\ b\to a\end{bmatrix}(\mathrm{id}\otimes w)(i\to b, b\to a, a\to n) =$$

$$\delta_{l,m}\delta_{j,k}\sum_{a,b,c} w\begin{bmatrix} k\to l\\ \downarrow\quad\downarrow\\ a\to n\end{bmatrix} w\begin{bmatrix} i\to j\\ \downarrow\quad\downarrow\\ b\to a\end{bmatrix} w\begin{bmatrix} b\to a\\ \downarrow\quad\downarrow\\ c\to n\end{bmatrix}(i\to b, b\to c, c\to n) =$$

$$\delta_{l,m}\delta_{j,k}\sum_{a,b,c}\#(\mathcal{V})^{-3/2} W(a,l)W(k,n)^{-1}W(b,j)W(i,a)^{-1}\times$$

$$\times W(a,c)W(b,n)^{-1}(i\to b, b\to c, c\to n) =$$

$$\delta_{l,m}\delta_{j,k}\sum_{b,c}\#(\mathcal{V})^{-1} W(b,l)W(c,n)^{-1}W(c,j)W(k,n)^{-1}\times$$

$$\times W(b,i)^{-1}W(i,l)^{-1}(i\to b, b\to c, c\to n),$$

y, cambiando los roles de b y c, obtenemos (59) y por lo tanto $(\mathcal{G}, w)$ es un modelo facial trenzado. Podemos también ver que es cerradizo, definiendo su doble de Lyubashenko.

$$w_{LD}\begin{bmatrix} i \leftarrow j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \leftarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} i \leftarrow j \\ i \qquad j \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ l \qquad k \\ l \leftarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} j \tilde{\rightarrow} i \\ i \qquad j \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ l \qquad k \\ k \tilde{\rightarrow} l \end{bmatrix} =$$

$$w^{-1}\begin{bmatrix} j \rightarrow k \\ j \qquad k \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ i \qquad l \\ i \rightarrow l \end{bmatrix} = w^{-1}\begin{bmatrix} j \rightarrow k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \rightarrow l \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\#(\mathcal{V})}} W(j,l)W(k,i)^{-1} = w\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \rightarrow k \end{bmatrix}$$

$$w_{LD}\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \uparrow \quad \uparrow \\ l \rightarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ i \qquad j \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ l \qquad k \\ l \rightarrow k \end{bmatrix} w_{LD}\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \tilde{l} \qquad \tilde{k} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ i \qquad j \\ l \rightarrow k \end{bmatrix} =$$

$$(w_{LD}^{-})^{-1}\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \tilde{l} \qquad \tilde{k} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ i \qquad j \\ l \rightarrow k \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\#(\mathcal{V})}} W(j,l)W(k,i)^{-1} =$$

$$w\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \rightarrow k \end{bmatrix};$$

ya que esto tiene que cumplir

$$\sum_j w\begin{bmatrix} a \rightarrow k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \rightarrow j \end{bmatrix} (w_{LD}^{-})^{-1}\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \tilde{l} \qquad \tilde{k} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ i \qquad j \\ l \rightarrow k \end{bmatrix} = \delta_{a,l}$$

y, precisamente,

$$\sum_j \frac{1}{\sqrt{\#(\mathcal{V})}} W(k,i)W(a,j)^{-1} \frac{1}{\sqrt{\#(\mathcal{V})}} W(j,l)W(k,i)^{-1} =$$

$$\sum_j \frac{1}{\#(\mathcal{V})} W(a,j)^{-1} W(j,l) = \delta_{a,l}.$$

Finalmente,

$$w_{LD}\begin{bmatrix} i \leftarrow j \\ \uparrow \quad \uparrow \\ l \leftarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} i \leftarrow j \\ i \qquad j \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ l \qquad k \\ l \leftarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} j \tilde{\rightarrow} i \\ \tilde{l} \qquad \tilde{k} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ i \qquad j \\ k \tilde{\rightarrow} l \end{bmatrix} =$$

$$w\begin{bmatrix} k \rightarrow l \\ k \qquad l \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ j \qquad i \\ j \rightarrow i \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} k \rightarrow l \\ \downarrow \quad \downarrow \\ j \rightarrow i \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \rightarrow k \end{bmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$w_{LD}\begin{bmatrix} i \leftarrow j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \leftarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \uparrow \quad \uparrow \\ l \rightarrow k \end{bmatrix} = w_{LD}\begin{bmatrix} i \leftarrow j \\ \uparrow \quad \uparrow \\ l \leftarrow k \end{bmatrix} = \tag{60}$$

$$w\begin{bmatrix} i \rightarrow j \\ \downarrow \quad \downarrow \\ l \rightarrow k \end{bmatrix}.$$

2.3. Doble producto cruz

Definición 2.38. *Sean $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{K}$ $\mathcal{V}$-álgebras faciales y sea $\mathfrak{P}^+$ un s-pareo inversible en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ con inversa generalizada $\mathfrak{P}^-$. Sea $\mathfrak{G}_{\mathfrak{H}}$ la subálgebra de $\mathfrak{H}$ generada por los idempotentes faciales, que identificamos con la misma subálgebra $\mathfrak{G}_{\mathfrak{K}}$, en $\mathfrak{K}$. En esta sección definimos una estructura de $\mathcal{V}$-álgebra facial en $\mathfrak{H} \bowtie_{\mathfrak{P}} \mathfrak{K} := \mathfrak{H} \otimes_{\mathfrak{G}} \mathfrak{K}$, que llamamos el doble producto cruz de $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ vía $\mathfrak{P}^+$.*

Proposición 2.39. *Sean $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \mathfrak{P}^{\pm}$ y $\mathfrak{G}$ como antes. Entonces $\mathfrak{H} \bowtie_{\mathfrak{P}} \mathfrak{K}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial tomando*

$$e_{\mathfrak{H}\bowtie_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K},i} = e_{\mathfrak{H},i} \otimes_{\mathfrak{G}} 1 = 1 \otimes_{\mathfrak{G}} e_{\mathfrak{K},i}, \quad e^o_{\mathfrak{H}\bowtie_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K},i} = e^o_{\mathfrak{H},i} \otimes_{\mathfrak{G}} 1 = 1 \otimes_{\mathfrak{G}} e^o_{\mathfrak{K},i},$$

para cada $i \in \mathcal{V}$, y

$$(a \otimes_{\mathfrak{G}} x)(b \otimes_{\mathfrak{G}} y) = \mathfrak{P}^+(b_1, x_1)ab_2 \otimes_{\mathfrak{G}} x_2 y \mathfrak{P}^-(b_3, x_3), \tag{61}$$

$$\Delta(a \otimes_{\mathfrak{G}} x) = (a_1 \otimes_{\mathfrak{G}} x_1) \otimes (a_2 \otimes_{\mathfrak{G}} x_2), \tag{62}$$

$$\varepsilon(a \otimes_{\mathfrak{G}} x) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k x), \tag{63}$$

para $a, b \in \mathfrak{H}, x, y \in \mathfrak{K}$.

Demostración. Llamamos $M(a, x, b, y)$ al lado derecho de (61). Calculamos (15),

$$M(ae^o_i e_j, x, b, e^o_k e_l y) = \mathfrak{P}^+(b_1, x_1)ae^o_i e_j b_2 \otimes x_2 e^o_k e_l \mathfrak{P}^-(b_3, x_3),$$

y esto es igual, por (14), a

$$\mathfrak{P}^+(e_i b_1, x_1 e_k)ab_2 \otimes_{\mathfrak{G}} x_2 y \mathfrak{P}^-(e^o_j b_3, x_3 e^o_l) = \mathfrak{P}^+(b_1, x_1)ae^o_i b_2 \otimes x_2 e^o_k e_l y \mathfrak{P}^-(e^o_j b_3, x_3) =$$

$$\mathfrak{P}^+(e_ib_1, x_1e_k)ab_2 \otimes x_2y\mathfrak{P}^-(e_j^ob_3, x_3e_l^o) =$$
$$\mathfrak{P}^+(b_1e_k^o, e_i^ox_1)ab_2 \otimes_{\mathfrak{G}} x_2y\mathfrak{P}^-(b_3e_l, e_jx_3)$$

donde estas dos últimas igualdades surgen de (14); (21) y (22) respectivamente. Por otro lado,

$$M(a, e_i^oe_jx, be_k^oe_l, y) =$$
$$\mathfrak{P}^+((be_k^oe_l)_1, (e_i^oe_jx)_1)a(be_k^oe_l)_2 \otimes (e_i^oe_jx)_2y\mathfrak{P}^-((be_k^oe_l)_3, (e_i^oe_jx)_3)$$

y esto, por (15), es

$$\mathfrak{P}^+(b_1e_k^o, e_i^ox_1)ab_2 \otimes_{\mathfrak{G}} x_2y\mathfrak{P}^-(b_3e_l, e_jx_3).$$

Así, (61) da un mapa bien definido $m : (\mathfrak{H}\triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K})^{\otimes 2} \to \mathfrak{H}\triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K}$. Vemos la asociatividad de m:

$$[(a \otimes x)(b \otimes y)](c \otimes z) = [\mathfrak{P}^+(b_1, x_1)ab_2 \otimes x_2y\mathfrak{P}^-(b_3, x_3)](c \otimes z) =$$
$$\mathfrak{P}^+(b_1, x_1)\mathfrak{P}^+(c_1, (x_2y)_1)ab_2c_2 \otimes (x_2y)_2x\mathfrak{P}^-(c_3, x_4y_3)\mathfrak{P}^(b_3, x_5).$$

Y

$$(a \otimes x)[(b \otimes y)(c \otimes z)] = (a \otimes x)[\mathfrak{P}^+(c_1, y_1)bc_2 \otimes y_2z\mathfrak{P}^-(c_3, y_3)] =$$
$$\mathfrak{P}^+(c_1, y_1)\mathfrak{P}^+((bc_2)_1, x_1)a(bc_2)_2 \otimes x_2y_2z\mathfrak{P}^-((bc_2)_3, x_3)\mathfrak{P}^-(c_3, y_3) =$$
$$\mathfrak{P}^+(c_1, y_1)\mathfrak{P}^+(b_1c_2, x_1)ab_2c_3 \otimes x_2y_2z\mathfrak{P}^-(b_3c_4, x_3)\mathfrak{P}^-(c_5, y_3) =$$
$$\mathfrak{P}^+(c_1, y_1)\mathfrak{P}^+(b_1, x_1)\mathfrak{P}^+(c_2, x_2)ab_2c_3 \otimes x_3y_2z\mathfrak{P}^-(b_3, x_5)\mathfrak{P}^-(c_4, x_4)\mathfrak{P}^-(c_5, y_3),$$

y esto, por (17)-(20) es

$$\mathfrak{P}^+(c_1, x_2y_1)\mathfrak{P}^+(b_1, x_1)ab_2c_2 \otimes x_3y_2z\mathfrak{P}^-(b_3, x_5)\mathfrak{P}^-(c_4, x_4y_3).$$

Por (23) y (24), tenemos:

$$(a \otimes_{\mathfrak{G}} 1)(b \otimes_{\mathfrak{G}} y) = ab \otimes_{\mathfrak{G}} y, \quad (a \otimes_{\mathfrak{G}} x)(1 \otimes_{\mathfrak{G}} y) = a \otimes_{\mathfrak{G}} xy. \tag{64}$$

En efecto, para la primera igualdad

$$(a \otimes_{\mathfrak{G}} 1)(b \otimes_{\mathfrak{G}} y) = \mathfrak{P}^+(b_1, 1_{(1)})ab_2 \otimes 1_{(2)}y\mathfrak{P}^-(b_3, 1_{(3)}) =$$
$$\sum_{k,l}\mathfrak{P}^+(b_1, e_k)ab_2 \otimes e_k^oe_ly\mathfrak{P}^-(b_3, e_l^o) = \sum_{k,l}\varepsilon(b_1e_k)ab_2 \otimes e_k^oe_ly\varepsilon(b_3e_l) =$$
$$a\sum_{k,l}[\varepsilon(b_1e_k)b_2e_k^oe_l]\varepsilon(b_3e_l) \otimes y = a\sum_{l}(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(b_1e_l)\varepsilon(b_3e_l) \otimes y =$$
$$a(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(b \cdot 1) \otimes y = ab \otimes y$$

La segunda igualdad es probada de manera similar. En particular $1\otimes_{\mathfrak{G}}1$ da la unidad del álgebra $(\mathfrak{H}\triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K}, m)$. Es fácil ver que (62) y (63) dan una estructura de coálgebra en $\mathfrak{H}\triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K}$, el coproducto es coasociativo por definición y

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(a \otimes x) = \sum_k \varepsilon(a_1e_k)a_2 \otimes \varepsilon(e_kx_1)x_2 = \sum_k ae_k^o \otimes e_k^ox = a \otimes x.$$

$\mathfrak{H} \triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}} \mathfrak{K}$ satisface las relaciones (1)-(3) por ser $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ $\mathcal{V}-$álgebras faciales. Con respecto a (4), tenemos:

$$\Delta(e_i^o e_j \otimes 1) = \sum_{k,l} (e_i^o e_k \otimes e_l) \otimes (e_k^o e_j \otimes e_l^o) =$$

$$\sum_{k,l} (e_i^o e_k \delta_{k,l} \otimes 1) \otimes (\delta_{k,l} e_k^o e_j \otimes 1) = \sum_k (e_i^o \otimes 1)(e_k \otimes 1) \otimes (e_k^o \otimes 1)(e_j \otimes 1)$$

y

$$\varepsilon(e_i^o e_j \otimes 1) = \sum_k \varepsilon(e_i^o e_j e_k)\varepsilon(e_k) = \delta_{i,j}$$

Para ver (5) para $\mathfrak{H} \triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}} \mathfrak{K}$, calculamos

$$\varepsilon((a \otimes_{\mathfrak{G}} x)(b \otimes_{\mathfrak{G}} y)) = \varepsilon\left(\mathfrak{P}^+(b_1, x_1) a b_2 \otimes x_2 y \mathfrak{P}^-(b_3, x_3)\right) =$$

$$\mathfrak{P}^+(b_1, x_1)\varepsilon(a b_2 \otimes x_2 y)\mathfrak{P}^-(b_3, x_3 = \mathfrak{P}^+(b_1, x_1)) \sum_m \varepsilon(a b_2 e_m)\varepsilon(e_m x_2 y)\mathfrak{P}^-(b_3, x_3),$$

igual, por (5) y (8), a

$$\sum_{k,l,m} \mathfrak{P}^+(b_1, x_1)\varepsilon(a e_k)\varepsilon(e_k b_2 e_m)\varepsilon(e_m x_2 e_l)\varepsilon(e_l y)\mathfrak{P}^-(b_3, x_3) =$$

$$\sum_{k,l,m} \mathfrak{P}^+(b_1 \varepsilon(e_k b_2 e_m), x_1 \varepsilon(e_m x_2 e_l))\varepsilon(a e_k)\varepsilon(e_l y)\mathfrak{P}^-(b_3, x_3) =$$

$$\sum_{k,l,m} \mathfrak{P}^+(e_k b_1 e_m, e_m x_1 e_l)\varepsilon(a e_k)\varepsilon(e_l y)\mathfrak{P}^-(b_2, x_2),$$

y esto, por (10) y (21), es

$$\sum_{k,l} \mathfrak{P}^+(b_1 e_l^o, e_k^o x_1)\mathfrak{P}^-(b_2, x_2)\varepsilon(a e_k)\varepsilon(e_l y) = \sum_{k,l,n} \varepsilon(a e_k)\varepsilon(e_k x e_n)\varepsilon(e_n b e_l)\varepsilon(e_l y),$$

por (15). Este último término es igual a

$$\sum_k \varepsilon(a \otimes x e_k)\varepsilon(e_k^o b \otimes y) = \varepsilon((a \otimes x)(e_k \otimes 1))\varepsilon((e_k^o \otimes 1)(b \otimes y))$$

y esto completa la prueba de la proposición. □

2.4. La clausura de Hopf

Sea $(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}^{\pm})$ un $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT con formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}^{\pm}$. Aplicando la construcción de doble producto cruz al s-pareo inversible $\mathfrak{P}_1^+$ dado por (36), obtenemos una $\mathcal{V}$-álgebra facial $\hat{\mathfrak{H}} := \mathfrak{H} \triangleright\!\triangleleft_{\mathfrak{P}} \mathfrak{H}^{bop}$. Explícitamente, las operaciones de $\hat{\mathfrak{H}}$ están dadas por

$$(a \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b))(c \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(d)) = \mathfrak{R}^-(b_1, c_3)\mathfrak{Q}^+(b_3, c_1) a c_2 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(d b_2), \tag{65}$$

$$\Delta(a \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b)) = (a_1 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b_2) \otimes (a_2 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b_1)), \tag{66}$$

$$\varepsilon(a \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b)) = \sum_k \varepsilon(a e_k)\varepsilon(b e_k), \tag{67}$$

$$e_{\hat{\mathfrak{H}},i} = e_{\mathfrak{H},i} \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(1_{\mathfrak{H}}), \quad e^o_{\hat{\mathfrak{H}},i} = e^o_{\mathfrak{H},i} \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(1_{\mathfrak{H}}), \tag{68}$$

para cada $a, b, c, d \in \mathfrak{H}$ e $i \in \mathcal{V}$, donde $\sigma : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^{bop}$ denota el anti-isomorfismo canónico.

Lema 2.40. *Sea $\mathfrak{J}$ el ideal de $\hat{\mathfrak{H}}$ generado por todos los elementos de la forma*

$$(1 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(a_1))(a_2 \otimes_{\mathfrak{G}} 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)e_k \tag{69}$$

$$a_1 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(a_2) - \sum_k \varepsilon(e_k a)e_k^o, \quad (a \in \mathfrak{H}). \tag{70}$$

$\mathfrak{J}$ resulta un bi-ideal.

Demostración. Sean $h(a) = (1 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(a_1))(a_2 \otimes_{\mathfrak{G}} 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)e_k$ y $k(a) = a_1 \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(a_2) - \sum_k \varepsilon(e_k a)e_k^o$. Entonces

$$\varepsilon(h(a)) = \mathfrak{P}^+(a_4\sigma(a_2)) \sum_k \varepsilon(a_5 e_k)\varepsilon(e_k a_2)\mathfrak{P}^-(a_6, \sigma(a_1)) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k) =$$

$$\sum_k \mathfrak{P}^+(a_3, \sigma(a_2))\mathfrak{P}^-(a_4 e_k^o \sigma(a_1)) - \varepsilon(a) = \mathfrak{P}^+(a_3, \sigma(a_2))\mathfrak{P}^-(a_4, \sigma(a_1)) - \varepsilon(a) =$$

$$(\mathfrak{P}^+\mathfrak{P}^-)(a_2, \sigma(a_1)) - \varepsilon(a) = \sum_k \varepsilon(e_k a_2)\varepsilon(\sigma(a_1)e_k^o) = \sum_k \varepsilon(e_k a_2)\varepsilon(\sigma(e_k^o a_1)) - \varepsilon(a) =$$

$$\sum_k \varepsilon(\sigma(\varepsilon(e_k a_2)e_k^o a_1)) - \varepsilon(a) = \sum_k \varepsilon(\sigma(e_k e_k^o a)) - \varepsilon(a) = \sum_k \varepsilon(e_k a) - \varepsilon(a) = 0.$$

Análogamente vemos que $\varepsilon(k(a)) = 0$. Ahora,

$$\Delta(h(a)) = \Delta(1 \otimes \sigma(a_1))\Delta(a_2 \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_{i,j} (e_i \otimes \sigma(a_2))(a_3 \otimes e_j) \otimes (e_i^o \otimes \sigma(a_1))(a_4 \otimes e_j^o) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_{i,j} (1 \otimes \sigma(a_2 e_i^o))(a_3 e_j \otimes 1) \otimes (1 \otimes \sigma(a_1 e_i))(a_4 e_l^o \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_{i,j} (1 \otimes \varepsilon(a_2 e_i^o)\sigma(a_3))(a_4 \varepsilon(a_5 e_j) \otimes 1) \otimes (1 \otimes \sigma(a_1 e_i))(a_6 e_l^o \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_{i,j} (1 \otimes \varepsilon(a_2 e_i^o)\varepsilon(a_4 e_j)\varepsilon(a_3 e_t))e_t \otimes 1) \otimes (1 \otimes \sigma(a_1 e_i))(a_5 e_l^o \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_{i,j,t} (\varepsilon(a_2 e_i^o e_t e_j)e_t \otimes 1) \otimes (1 \otimes \sigma(a_1 e_i))(a_3 e_l^o \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_i (e_i \otimes 1) \otimes (e_j^o \otimes \sigma(a_1))(a_2 e_i^o \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_i (e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes \sigma(a_1))(a_2 \otimes 1)(1 \otimes e_i^o) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) =$$

$$\sum_i (1 \otimes e_i) \otimes (\sum_k \varepsilon(ae_k)e_k \otimes 1) - \sum_k \varepsilon(ae_k)\Delta(e_k \otimes 1) = 0$$

Análogamente,

$$\Delta(a_1 \otimes \sigma(a_2)) = (a_1 \otimes \sigma(a_4)) \otimes (a_2\sigma(a_3)) = (a_1 \otimes \sigma(a_3)) \otimes (\sum_k \varepsilon(e_k a_2)e_k^o) =$$

$$\sum_k (e_k a_1 \otimes \sigma(a_2)) \otimes (a \otimes e_k^o) = \sum_k (e_k \otimes 1)(a_1 \otimes \sigma(a_2)) \otimes (e_k^o \otimes 1) =$$

$$\sum_{k,l} \varepsilon(e_l a)(e_l^o \otimes 1)(e_k \otimes 1) \otimes (e_k^o \otimes 1) = \sum_{k,l} \varepsilon(e_l a)(e_k e_l^o \otimes 1) \otimes (e_k^o \otimes 1)$$

y esto es igual a $\Delta(\sum_l \varepsilon(e_l a)e_l^o)$ y por lo tanto $\Delta(k(a)) = 0$. $\square$

Definición 2.41. *Denotamos a la $\mathcal{V}$-álgebra facial cociente $\hat{\mathfrak{H}}/\mathfrak{J}$ por $Hc(\mathfrak{H})$ y la llamamos la clausura de Hopf de $\mathfrak{H}$. Por simplicidad, denotamos a un elemento $a \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b) + \mathfrak{J}$ de $Hc(\mathfrak{H})$ por $a\sigma(b)$, para cada $a, b \in \mathfrak{H}$.*

La clausura de Hopf $Hc(\mathfrak{H})$ tiene la propiedad universal descripta por los dos teoremas que siguen.

Teorema 2.42. *Sean $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT y A un álgebra. Sean $\iota : \mathfrak{H} \to Hc(\mathfrak{H})$ dado por $\iota(a) = a \otimes_{\mathfrak{G}} 1 + \mathfrak{J}$, $(a \in \mathfrak{H})$ y $f^+ : \mathfrak{H} \to A$ un mapa de álgebras con antípoda f^-. Entonces existe un único mapa de álgebras $\tilde{f} : Hc(\mathfrak{H}) \to A$ tal que*

$$f^+ = \tilde{f} \circ \iota. \tag{71}$$

Explícitamente, tenemos

$$\tilde{f}(a\sigma(b)) = f^+(a)f^-(b). \tag{72}$$

Si $A = \mathfrak{K}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial y f^+ es un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales, entonces también lo es $\tilde{f}$.

Demostración. Supongamos que un mapa de álgebras $\bar{f}$ cumple la igualdad (71). Entonces usando la unicidad de la inversa generalizada, obtenemos $\bar{f}(\sigma(b)) = f^-(b)$. En efecto, si llamamos $\Sigma : \mathfrak{H} \to Hc(\mathfrak{H})$, $b \mapsto 1 \otimes \sigma(b) + \mathfrak{J}$, vemos que

$$f^+(\bar{f} \circ \Sigma)(a) = f^+(a_1)\bar{f}(1 \otimes \sigma(a_2) + \mathfrak{J}) = \bar{f} \circ \iota(a_1)\bar{f}(1 \otimes \sigma(a_2) + \mathfrak{J}) =$$

$$\bar{f}(a_1 \otimes \sigma(a_2) + \mathfrak{J}) = \bar{f}(\sum_k \varepsilon(e_k a)e_k^o + \mathfrak{J}) = \sum_k \varepsilon(e_k a)\bar{f}(e_k^o \otimes 1 + \mathfrak{J}) = \sum_k \varepsilon(e_k a)\bar{f} \circ \iota(e_k^o) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_k a)f^+(e_k^o) = (f^+ \circ E^-)(a)$$

y análogamente vemos que se cumplen las otras igualdades de la definición de inversa generalizada, con lo que obtenemos la unicidad. Ahora,

$$\bar{f}(a\sigma(b)) = \bar{f}(a \otimes \sigma(b)) + \mathfrak{J} = \bar{f}(a \otimes 1 + \mathfrak{J})\bar{f}(1 \otimes \sigma(b) + \mathfrak{J}) = f^+(a)f^-(b)$$

Por lo tanto $\bar{f}$ está dada por (72). Sea $\hat{f} : \hat{\mathfrak{H}} \to A$ el mapa lineal definido por $\hat{f}(a \otimes_{\mathfrak{G}} \sigma(b)) = f^+(a)f^-(b)$. Para mostrar que $\hat{f}$ es un mapa de álgebras, definimos los mapas lineales $F; G : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to A$ tomando

$$F(b, c) = f^-(b)f^+(c)$$

$$G(b, c) = \mathfrak{R}^-(b_1, c_3)\mathfrak{Q}^+(b_3, c_1)f^+(c_2)f^-(b_2)$$

para cada $b, c \in \mathfrak{H}$. Ya que queremos ver que $\hat{f}$ es un mapa de álgebras y

$$\hat{f}((a\sigma(b))(c\sigma(d)) = \mathfrak{P}^+(c_1, \sigma(b_3))\bar{f}(ac_2\sigma(db_2))\mathfrak{P}^-(c_3, \sigma(b_1)) =$$

$$\mathfrak{P}^+(c_1,\sigma(b_3))f^+(ac_2)f^-(db_2)\mathfrak{P}^-(c_3,\sigma(b_1)) = G(b,c),$$

tomando $a = d = 1$, ya que $a\sigma(b) = (a\otimes 1)(1\otimes\sigma(b))$ y

$$\hat{f}(\sigma(b))\hat{f}(c) = F(b,c).$$

Obtenemos entonces

$$((f^+\otimes\varepsilon)*G)(b,c) = (f^+\otimes\varepsilon)(b_1,c_1)G(b_2,c_2) =$$

$$f^+(b_1)\varepsilon(c_1)\mathfrak{R}^-(b_2,c_4)\mathfrak{Q}^+(b_4,c_2)f^+(c_3)f^-(b_3) =$$

$$f^+(b_1c_2\mathfrak{R}^-(b_2,c_3))\mathfrak{Q}^+(b_4,c_1)f^-(b_3) = f^+(\mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_3b_2)\mathfrak{Q}^+(b_4,c_1)f^-(b_3)$$

por (25) y esto es igual a

$$f^+(\mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_3b_2)\mathfrak{Q}^+(b_4,c_1)f^+(b_2)f^-(b_3) =$$

$$f^+(\mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_3b_2)\mathfrak{Q}^+(b_4,c_1)\sum_k \varepsilon(e_kb_2)f^+(e_k^o) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^-(e_kb_1,c_2)\mathfrak{Q}^+(b_2,c_1)f^+(c_3e_k^o),$$

por $f^+ * f^- = f^+\circ E^-$ y (10). Usando ahora (22) para $\mathfrak{R}^-$ y (13), vemos que el lado derecho de la igualdad superior es

$$\sum_k \mathfrak{R}^-(e_kb_1)\mathfrak{Q}^+(b_2,c_1)f^+(c_3e_k^o) =$$

$$\mathfrak{R}^-(b_1,c_2)\mathfrak{Q}^+(b_2,c_1)f^+(c_3) = \sum_k \varepsilon(e_kb)\varepsilon(e_kc_1)f^+(c_2)$$

y, por (13), esto es

$$\mathfrak{R}^-(b_1,c_2)\mathfrak{Q}^+(b_2,c_1)f^+(c_3) = \sum_k \varepsilon(e_kb)\varepsilon(e_kc_1)f^+(c_2) = \sum_k \varepsilon(e_kb)f^+(\varepsilon(e_k^oc_1)c_2) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_kb)f^+(e_k^oc) = \sum_k \varepsilon(e_kb)f^+(e_k^o)f^+(c) = ((f^+\circ E^-)\otimes f^+)(b,c).$$

De donde tenemos

$$((f^+\circ E^+)\otimes\varepsilon)*G = (f^-\otimes\varepsilon)*(f^+\otimes\varepsilon)*G = (f^-\otimes\varepsilon)*((f^+\circ E^-)\otimes f^+) =$$

$$(f^-\otimes\varepsilon)*((f^+ * f^-)*f^+) = (f^-\otimes\varepsilon)*(f^+\otimes\varepsilon)*F = ((f^+\circ E^+)\otimes\varepsilon)*F.$$

Donde la anteúltima igualdad surge de observar que

$$(f^+ * f^-\otimes f^+)(b,c) = f^+(b_1)f^-(b_2)f^+(c) = f^+(b_1)\varepsilon(c_1)f^-(b_2)f^+(c_2).$$

Por otro lado, usando (11), (22) y (13), obtenemos

$$(((f^+\circ E^+)\otimes\varepsilon)*G)(b,c) = (f^+\circ E^+)(b_1)\varepsilon(c_1)G(b_2,c_2) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^-(b_1e_k^o,c_3)\mathfrak{Q}^+(b_3,c_1)f^+(e_kc_2)f^-(b_2) =$$

$$\mathfrak{R}^-(b_1,c_3)\mathfrak{Q}^+(b_3,c_1)f^+(c_2)f^-(b_2) = G(b,c).$$

y

$$((f^+ \circ E^+) \otimes \varepsilon) * F(b,c) = f^+ \circ E^+(b_1)\varepsilon(c_1)f^-(b_2)f^+(c_2) =$$

$$\sum_k \varepsilon(b_1 e_k)f^+(e_k)\varepsilon(c_1)f^-(b_2)f^+(c_2) = \sum_k f^-(be_k^o)f^+(e_k)f^+(c) =$$

$$\sum_k f^-(e_k^o)f^+(e_k f^-(b))f^-(c) = (f^+ * f^-)(1)F(b,c) = \sum_k \varepsilon(e_k)e_k F(b,c) = F(b,c).$$

Así $F = G$ y $\hat{f}$ es un mapa de álgebras. Usando este hecho junto con la definición de la antípoda f^-, vemos que (72) da un mapa de álgebras bien definido de $Hc(\mathfrak{H})$ a A. La última afirmación surge de (72) y el inciso (ii) del Lema 2.11. □

La prueba del siguiente resultado será dada en las dos secciones siguientes

Teorema 2.43. *Para cada $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT $\mathfrak{H}$, su clausura de Hopf $Hc(\mathfrak{H})$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT cuya antípoda y trenza están dadas por*

$$S(a\sigma(b)) = \mathfrak{Q}^-(b_2,b_1)b_3\sigma(a)\mathfrak{Q}^+(b_5,b_4), \tag{73}$$

$$S(a\sigma(b)) = \mathfrak{Q}^+(b_1,b_2)b_2\sigma(a)\mathfrak{Q}^-(b_4,b_5), \tag{74}$$

$$\mathfrak{R}^+(a\sigma(b), c\sigma(d)) = \mathfrak{Q}^-(a_1,d_2)\mathfrak{R}^+(a_2,c_1)\mathfrak{R}^+(b_2,d_1)\mathfrak{R}^-(b_1,c_2), \tag{75}$$

$$\mathfrak{R}^+(a\sigma(b), c\sigma(d)) = \mathfrak{Q}^+(b_2,c_1)\mathfrak{R}^-(b_1,d_2)\mathfrak{R}^-(a_1,c_2)\mathfrak{R}^+(a_2,d_1), \tag{76}$$

para cada $a,b,c,d \in \mathfrak{H}$.

Corolario 2.44. *Sean $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{K}$ $\mathcal{V}$-álgebras faciales CCQT y $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT. Entonces existe un mapa $Hc(f) : Hc(\mathfrak{H}) \to Hc(\mathfrak{K})$ de $\mathcal{V}$-álgebras faciales de Hopf CQT dado por*

$$Hc(f)(a\sigma(b)) = f(a)\sigma(f(b)) \ (a,b \in \mathfrak{H}) \tag{77}$$

Así la correspondencia $\mathfrak{H} \mapsto Hc(\mathfrak{H})$ da un funtor de la categoría de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CCQT a la categoría de $\mathcal{V}$-álgebras faciales de Hopf CQT, que es un adjunto a izquierda del funtor subyacente de $\mathcal{V}$-álgebras faciales de Hopf a $\mathcal{V}$-álgebras faciales CCQT.

Demostración. Veamos que $Hc(f)$ es un mapa de álgebras:

$$Hc(f)(\sigma(b)c) = \mathfrak{P}^+(c_1,\sigma(b_3))Hc(f)(c_2\sigma(b_2))\mathfrak{P}^-(c_3,\sigma(b_1)) =$$

$$\mathfrak{P}^+(c_1,\sigma(b_3))f(c_2)\sigma(f(b_2))\mathfrak{P}^-(c_3,\sigma(b_1))$$

y

$$Hc(f)(\sigma(b))Hc(f)(c) = \sigma(f(b))f(c) =$$

$$\mathfrak{P}^+(f(c_1,\sigma(f(b_3)))f(c_2)\sigma(f(b_2))\mathfrak{P}^- f(c_3,\sigma(f(b_1))) =$$

$$(f\otimes f)^*\mathfrak{P}^+(c_1,\sigma(b_3))f(c_2)\sigma(f(b_2))f^-(c_3,\sigma(b_1)).$$

También, $Hc(f)(e_i) = Hc(f)(e_i\sigma(1)) = f(e_i) = e_i$ y

$$\Delta(Hc(f))(a\sigma(b)) = \Delta(f(a)\sigma(f(b))) = f(a_1)\sigma(f(b_2)) \otimes f(a_2)\sigma(f(b_1)),$$

$$(Hc(f)\otimes Hc(f))\Delta(a\sigma(b)) = (Hc(f)\otimes Hc(f))(a_1\sigma(b_2)\otimes a_2\sigma(b_1)) =$$

$$Hc(f)(a_1\sigma(b_2)) \otimes Hc(f)(a_2\sigma(b_1)) = f(a_1\sigma(f(b_2))) \otimes F(a_2)\sigma(f(b_1))$$

y así $Hc(f)$ es un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales. Además,

$$(Hc(f)\otimes Hc(f))^*\mathfrak{R}^+(a\sigma(b),c\sigma(d)) = \mathfrak{R}^+(Hc(f)(a\sigma(b)),Hc(f)(c\sigma(d))) =$$

$$\mathfrak{R}^+(f(a\sigma(f(b))),f(c)\sigma(f(d))) = (f\otimes f)^*\mathfrak{R}^+(a\sigma(b),c\sigma(d)) = \mathfrak{R}^+(a\sigma(b),c\sigma(d)).$$

lo que muestra que $Hc(f)$ es un morfismo de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT. $\square$

Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT finitamente generada $\mathfrak{H}$, existe un $\mathcal{V}$-modelo facial trenzado $(\mathcal{G},w)$ y un CQT bi-ideal $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{U}(w)$ tal que $\mathfrak{H}\cong\mathfrak{U}(w)/\mathfrak{J}$ como $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT [15]. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

Teorema 2.45. *Sea $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CCQT, que es finitamente generada como álgebra. Entonces existe un modelo facial trenzado $(\mathcal{G},w)$ cerradizo y un ideal de Hopf CQT de $Hc(\mathfrak{U}(w))$ tal que $\mathfrak{H}\cong Hc(\mathfrak{U}(w))/\mathfrak{J}$ como $\mathcal{V}$-álgebras faciales de Hopf CQT.*

Demostración. Por la observación anterior, tenemos que $\mathfrak{H}\cong\mathfrak{U}(w)/\mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ CQT bi-ideal de $\mathfrak{U}(w)$. Tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U}(w) \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Hc(\mathfrak{U}(w)) \arrow[dl, "\bar\pi"] \\ & \mathfrak{U}(w)/\mathcal{I}\cong\mathfrak{H} & \end{tikzcd}$$

Ahora, la suryectividad de π implica la existencia de un bi-ideal $\mathfrak{J}$ tal que

$$\mathfrak{H}\cong Hc(\mathfrak{U}(w))/\mathfrak{J}.$$

$\square$

Tenemos la siguiente descripción de la clausura de Hopf de $\mathfrak{U}(w)$.

Proposición 2.46. *Sea $(\mathcal{G},w)$ un $\mathcal{V}$-modelo facial trenzado. Entonces el álgebra facial $Hc(\mathfrak{U}(w))$ es isomorfa al álgebra generada por los símbolos $e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{q}\end{pmatrix}$, $e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\\\tilde{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathcal{G}^m, m\geq 0)$ sujetos a las relaciones*

$$\sum_{k,l\in\mathcal{V}} e\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix} = 1, \tag{78}$$

$$e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{q}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix} = \delta_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{p}),\mathfrak{s}(\boldsymbol{r})}\delta_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{q}),\mathfrak{s}(\boldsymbol{s})} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\\\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{s}\end{pmatrix} \tag{79}$$

$$e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\\\tilde{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}\\\tilde{\boldsymbol{s}}\end{pmatrix} = \delta_{\mathfrak{r}(\tilde{\boldsymbol{p}}),\mathfrak{s}(\tilde{\boldsymbol{r}})}\delta_{\mathfrak{r}(\tilde{\boldsymbol{q}}),\mathfrak{s}(\tilde{\boldsymbol{s}})} e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\cdot\tilde{\boldsymbol{r}}\\\tilde{\boldsymbol{q}}\cdot\tilde{\boldsymbol{s}}\end{pmatrix} \tag{80}$$

$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathcal{G}^m, \boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\in\mathcal{G}^n, m,n\geq 0.$

$$\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathcal{G}^1} e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{t}}\\\tilde{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{q}\end{pmatrix} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} e_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{p})},\ \sum_{\boldsymbol{t}\in\mathcal{G}^1} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}\\\tilde{\boldsymbol{t}}\end{pmatrix} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} e_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{p})} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} e^o_{\mathfrak{s}(\boldsymbol{p})}, \tag{81}$$

$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathcal{G}^1,$

$$\sum_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{c} & \\ \boldsymbol{a} & & \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{b} & \end{bmatrix} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{p}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{q}\end{pmatrix} = \sum_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}} w_{LD}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{p} & \\ \boldsymbol{r} & & \boldsymbol{q} \\ & \boldsymbol{s} & \end{bmatrix} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{r}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix} \tag{82}$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{G}^1$, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \tilde{\mathcal{G}}^1$ o $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a} \in \mathcal{G}^1$, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \in \tilde{\mathcal{G}}^1$. Donde, por ejemplo, la suma con respecto a $\boldsymbol{r}$ en (82) *está tomada sobre todos los $\boldsymbol{r} \in \mathcal{G}^1$ o $\boldsymbol{r} \in \tilde{\mathcal{G}}^1$, de acuerdo a si $\boldsymbol{a} \in \mathcal{G}^1$ o $\boldsymbol{a} \in \tilde{\mathcal{G}}^1$. La estructura de coálgebra está dada por*

$$\Delta\left(e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}\right) = \sum_{\boldsymbol{t}\in\mathcal{G}^m} e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix} \otimes e\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}, \ \Delta\left(e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\\ \tilde{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\right) = \sum_{\boldsymbol{t}\in\mathcal{G}^m} e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\\ \tilde{\boldsymbol{t}}\end{pmatrix} \otimes e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{t}}\\ \tilde{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix} \tag{83}$$

y

$$\varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}\right) = \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\\ \tilde{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\right) = \delta_{\boldsymbol{pq}},$$

para cada $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{G}^m$ y los idempotentes faciales están dados por (38). *La antípoda y trenza están dadas por*

$$S\left(e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}\right) = e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}\\ \tilde{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix}$$

$$S\left(e\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{p}}\\ \tilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix}\right) = \sum_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathcal{G}^m} w_{LD}^{\pm}\begin{bmatrix} & \mathbf{r} & \\ \tilde{\mathbf{a}} & & \tilde{\mathbf{q}} \\ & \mathbf{a} & \end{bmatrix} e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix} w_{LD}^{\mp}\begin{bmatrix} & \mathbf{b} & \\ \tilde{\mathbf{p}} & & \tilde{\mathbf{b}} \\ & \mathbf{s} & \end{bmatrix} \tag{84}$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{G}^m$, $m \geq 0$.

$$\mathfrak{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = w_{LD}\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix}, \tag{85}$$

y

$$\mathfrak{R}^-\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right) = w_{LD}^{-1}\begin{bmatrix} & \mathbf{s} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{r} & \end{bmatrix}.$$

Demostración. Por argumentos algebraicos estándares, (78) surge de las propiedades de los idempotentes faciales, y (79), (80) de la definición del producto en $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$. (82) es (30) en este contexto, dada la definición de $\mathfrak{R}^+$, en (85), que surge de (75). Esta definición también motiva inmediatamente la de $\mathfrak{R}^-$. De la definición de $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ también obtenemos (83). Tenemos (84) de (73), primero calculando $S(a\sigma(1)) = \sigma(a)$ y luego $S(1\sigma(b))$. Finalmente, (81) es (69) y (70), por ejemplo, (69) en este contexto es

$$\sigma\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}_1\right) e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}_2 = \sum_k \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} e_k\right) e_k = \sum_k \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} e_k^o\right) e_k =$$

$$\sum_k \sum_{i,j} \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} e\begin{pmatrix}k\\ i\end{pmatrix}\right) e\begin{pmatrix}j\\ k\end{pmatrix},$$

y el primer término de la igualdad es el término de la izquierda de la primera igualdad en (81) y el de la derecha es igual a

$$\sum_k \sum_{i,j} \varepsilon\left(\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p}),k}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),i} e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right) e\begin{pmatrix}j\\ k\end{pmatrix} =$$

$$\sum_j \varepsilon\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right) e\begin{pmatrix}j\\ \mathfrak{r}(\mathbf{p})\end{pmatrix} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} e_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})}.$$

□

Combinando este resultado con el Teorema 2.45, obtenemos el siguiente teorema generador de $\mathcal{V}$-álgebras faciales de Hopf CQT.

Teorema 2.47. *Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT finitamente generada $\mathfrak{H}$, existe un $\mathcal{V}$-modelo facial trenzado cerradizo $(\mathcal{G}, w)$ y generadores lineales*

$$e\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix},\ e\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{p}}\\ \tilde{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\quad (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{G}^m, m \geq 0)$$

de $\mathfrak{H}$ que cumplen las relaciones (78)-(85).

Demostración. Es inmediato que, si tenemos elementos $\dot{e}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}$ cumplen (78)-(85) en $Hc(\mathfrak{U}(w))$, tomamos en $\mathfrak{H}$

$$e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} = \phi^{-1}\pi\left(\dot{e}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right),$$

donde ϕ es el isomorfismo encontrado antes y π la proyección al cociente. $\square$

2.5. La estructura trenzada en $Hc(\mathfrak{H})$

Vamos a construir ahora la trenza de $Hc(\mathfrak{H})$. Sea $(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}^{\pm})$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial con formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}^{\pm}$ y sean $\sigma, Hc(\mathfrak{H})$, etc. como en la sección previa. Aplicando el Lema 2.16 y el Teorema 2.42 al s-pareo inversible $(\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^-)$ en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ obtenemos el mapa $Hc(\mathfrak{H}) \to (\mathfrak{H}^o)^{cop}$; $a\sigma(b) \mapsto \mathfrak{R}^+_L(a)\mathfrak{R}^-_L(b)$ de $\mathcal{V}$-álgebras faciales, o equivalentemente, obtenemos el s-pareo $\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}$ en $(Hc(\mathfrak{H}), \mathfrak{H})$ dado por

$$\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}(a\sigma(b), c) = \mathfrak{R}^+(a, c_1)\mathfrak{R}^-(b, c_2). \tag{86}$$

Esto es

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathfrak{R}^+_L"'] & & Hc(\mathfrak{H}) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
& (\mathfrak{H}^o)^{cop} &
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{f}$ está definida por (86). Similarmente, usando el s-pareo inversible $(\mathfrak{o}^+, \mathfrak{o}^-)$ en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^{bop})$ dado por

$$\mathfrak{o}^+(a, \sigma(c)) = \mathfrak{Q}^-(a, c), \quad \mathfrak{o}^-(a, \sigma(c)) = \mathfrak{R}^+(a, c)$$

obtenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathfrak{o}^+_L"'] & & Hc(\mathfrak{U}(w)) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
& ((\mathfrak{H}^{bop})^o)^{cop} &
\end{tikzcd}$$

y en este caso $\bar{f}$ es el mapa bilinear $\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}} : Hc(\mathfrak{H}) \otimes \mathfrak{H} \to \mathbb{K}$ dado por

$$\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}}(a\sigma(b), d) = \mathfrak{R}^+(b, d_1)\mathfrak{Q}^-(a, d_2). \tag{87}$$

Tenemos

$$\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}}(a_1\sigma(b_2), c_2)\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}(a_2\sigma(b_1), c_1) =$$

$$\mathfrak{R}^+(b_2,c_3)\mathfrak{Q}^-(a_1,c_4)\mathfrak{R}^+(a_2,c_1)\mathfrak{R}^-(b_1,c_2) = (\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^+)(b,c_2)\mathfrak{Q}^-(a_1,c_3)\mathfrak{R}^+(a_2,c_1) = \tag{88}$$

$$\sum_k \varepsilon(be_k)\varepsilon(e_kc_2)\mathfrak{Q}^-(a_1,c_3)\mathfrak{R}^+(a_2,c_1) = \sum_k \varepsilon(be_k)\mathfrak{Q}^-(a_1,c_3)\mathfrak{R}^+(a_2,c_1\varepsilon(e_kc_2))$$

que, por (10) y (21) es

$$\sum_k \varepsilon(be_k)\mathfrak{Q}^-(a1,c_2)\mathfrak{R}^+(a_2e_k,c_1) = \sum_k \varepsilon(e_ka\sigma(b))\varepsilon(e_kc),$$

y por (34) y (15), esto es

$$\sum_k \varepsilon(be_k)\sum_j \varepsilon(e_jae_k)\varepsilon(e_jc) = \sum_j(\sum_k \varepsilon(be_k)\varepsilon(e_jae_k))\varepsilon(e_jc) =$$

$$\sum_j \varepsilon(e_ja\sigma(b))\varepsilon(e_jc).$$

Pero, justamente,

$$(\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}})_R * (\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}})_R(c)(a\sigma(b)) = (\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}})(a_2\sigma(b_1),c_1)\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}}(a_1\sigma(b_2),c_2) =$$

$$\mathfrak{R}^+(a_2,c_1)\mathfrak{R}^(b_1,c_2)\mathfrak{R}^+(b_2,c_3)\mathfrak{Q}^-(a_1,c_4),$$

y

$$(\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}) \circ E^-(a\sigma(b)) = \sum_k \varepsilon(e_kc)\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}(a\sigma(b),e_k^o) = \sum_k \varepsilon(e_kc)\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}(e_ka\sigma(b),1)$$

que es igual, por (21) a $\sum_k \varepsilon(e_kc)\varepsilon(e_ka\sigma(b))$. Entonces tenemos que

$$(\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}})_R * (\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}})_R(c) = (\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}) \circ E^-$$

en el álgebra $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{H},(Hc(\mathfrak{H})^o)^{op})$. Continuando con cuentas similares, vemos que el mapa $(\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}})_R \in {}_{\mathcal{V}}\mathcal{FA}(\mathfrak{H},Hc(\mathfrak{H}))$ dado por

$$\mathfrak{R}^+_{Hc}(a\sigma(b),c\sigma(d)) = \left\langle (\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}})_R(d)(\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}})_R(c),a\sigma(b)\right\rangle, \tag{89}$$

que coincide con (75). Considerando $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^{\mp}_{21})$ en lugar de $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^{\pm})$, obtenemos también la forma bilineal $\mathfrak{R}^-_{Hc}$ dada por (76). Imitando (88), vemos que $\mathfrak{R}^-_{Hc}$ es la inversa generalizada de $\mathfrak{R}^+_{Hc}$. Para ver (25) para $\mathfrak{R}^+_{Hc}$ necesitamos lo siguiente.

Lema 2.48. *En $Hc(\mathfrak{H})$, tenemos*

$$\sigma(a_1)a_2 = \sum_k \varepsilon(ae_k)e_k,\ \ a_1\sigma(a_2) = \sum_k \varepsilon(e_ka)e_k^o, \tag{90}$$

$$\sigma(b)c = \mathfrak{R}^-(b_1,c_3)\mathfrak{Q}^+(b_3,c_1)c_2\sigma(b_2), \tag{91}$$

$$\sigma(c,b)\mathfrak{Q}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(b_3,c_1)b_2\sigma(c_2) \tag{92}$$

para cada $a,b,c,\in\mathfrak{H}$.

Demostración. Basta probar la última relación, ya que obtenemos (90) por (69) y, por (65), (91). Notemos que

$$\mathfrak{L}^-(b_1,c_4)\mathfrak{R}^+(b_3,c_3)\sigma(c_1)c_2b_2\sigma(c_4) =$$

$$\mathfrak{L}^-(b_1,c_4)\sigma(c_1)\mathfrak{R}^+(b_2,c_2)b_3c_3\sigma(c_4) = \mathfrak{L}^-(b_1,c_4)\mathfrak{R}^+(b_2,c_2)\sigma(c_1)b_3\sum_k \varepsilon(e_kc_3)e_k^o$$

por (30). Pero esto es igual a

$$\mathfrak{L}^-(b_1,c_4)\mathfrak{R}^+(b_2,c_2)\sigma(c_1)b_3\sum_k \varepsilon(e_kc_3)e_k^o = \sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3),\mathfrak{R}^+(b_2,e_kc_2)\sigma(c_1)b_3e_k^o$$

por (10). Ahora, por (14) y seguidamente por (21), esto es

$$\sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(b_2e_k,e_kc_2)\sigma(c_1)b_3 = \sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(b_2e_k,c_2)\sigma(c_1)b_3,$$

que, por (34), es igual a

$$\sum_k\sum_j \varepsilon(e_jb_1e_k)\varepsilon(e_jc_2)\sigma(c_1)b_2 = \sum_j \sigma(e_jc)e_j^ob = \sum_j \sigma(e_jc)\sigma(e_j)b =$$

$$\sum_j \sigma(e_jc)b = \sigma(c)b,$$

por (21) y (10)-(11). Por otro lado, por (90), el primer término de esta igualdad,

$$\mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(b_3,c_3)\sigma(c_1)c_2b_2\sigma(c_4)$$

es

$$\mathfrak{L}^-(b_1,c_4)\mathfrak{R}^+(b_3,c_2)\sum_k \varepsilon(c_1e_k)e_kb_2\sigma(c_3) = \sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(b_3,c_1e_k^o)e_kb_2\sigma(c_2) =$$

$$\sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(e_k^ob_3,c_1)e_kb_2\sigma(c_2) = \sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(b_3,c_1e_k^o)e_kb_2\sigma(c_2),$$

y, por (21), esto es

$$\sum_k \mathfrak{L}^-(b_1,c_3)\mathfrak{R}^+(e_k^ob_3,c_1)e_kb_2\sigma(c_2),$$

que coincide con (92) por (13). □

Lema 2.49. *Por el lema superior, tenemos*

$$\mathfrak{R}^-(b_2,c_1)\sigma(b_1)c_2 = \mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_1\sigma(b_2), \tag{93}$$

$$\mathfrak{L}^-(a_1,d_2)a_2\sigma(d_1) = \mathfrak{L}^-(a_2,d_1)\sigma(d_2)a_1. \tag{94}$$

Demostración. Veamos (93), siendo la prueba de (94) análoga. Por (91)

$$\mathfrak{R}^-(b_2,c_1)\sigma(b_1)c_2 = \mathfrak{R}^-(b_4,c_1)\mathfrak{R}^-(b_1,c_4)\mathfrak{L}^+(b_3,c_2)c_3\sigma(b_2)$$

y esto, por (33) es

$$\sum_k \varepsilon(b_3e_k)\varepsilon(c_1e_k)\mathfrak{R}^-(b_1,c_3)c_2\sigma(b_2) = \sum_k \mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_1e_k^o\sigma(b_2e_k) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_1e_k^o\sigma(b_2) = \mathfrak{R}^-(b_1,c_2)c_1\sigma(b_2).$$

□

Usando las igualdades provistas por este lema, para $x = a\sigma(b)$ e $y = c\sigma(d)$, tenemos

$$\mathfrak{R}^+_{Hc}(x_1, y_1)x_2y_2 = \mathfrak{R}^+_{Hc}(a_1\sigma(b_2), c_1\sigma(d_2))a_2\sigma(b_1)c_2\sigma(d_1) =$$
$$\mathfrak{Q}^-_{Hc,\mathfrak{H}}(a_1\sigma(b_3), d_2)\mathfrak{R}^+_{Hc,\mathfrak{H}}(a_2\sigma(b_2), c_1)a_3\sigma(b_1c_2\sigma(d_1)) =$$
$$\mathfrak{R}^+(b_3, d_2)\mathfrak{Q}^-(a_1, d_3)\mathfrak{R}^+(a_2, c_1)\mathfrak{R}^-(b_2, c_2)a_3\sigma(b_1)c_3\sigma(d_1) =$$
$$\mathfrak{Q}^-(a_1, d_3)\mathfrak{R}^+(a_2, c_1)\mathfrak{R}^+(b_3, d_2)\mathfrak{R}^-(b_1, c_3)a_3c_2\sigma(d_1b_2) =$$

ya que por el lema,

$$\mathfrak{R}^-(b_2, c_2)\sigma(b_1)c_3 = \mathfrak{R}^-(b_1, c_3)c_2\sigma(b_2)$$

Ahora, la expresión anterior es igual a

$$\mathfrak{Q}^-(a_1, d_3)\mathfrak{R}^+(a_2, c_1)\mathfrak{R}^+(b_3, d_2)\mathfrak{R}^-(b_1, c_3)a_3c_2\sigma(d_1b_2) =$$
$$\mathfrak{Q}^-(a_1, d_3)\mathfrak{R}^+(a_3, c_2)\mathfrak{R}^+(b_2, d_1)\mathfrak{R}^-(b_1, c_3)c_1a_2\sigma(d_2)\sigma(b_3) = \tag{95}$$

ya que

$$\mathfrak{R}^+(a_2, c_1)a_3c_2 = c_1a_2\mathfrak{R}^+(a_3c_2),\ d_1b_2\mathfrak{R}^+(b_3, d_2) = \mathfrak{R}^+(b_2, d_1)b_3d_2.$$

Y, como por el lema tenemos que

$$\mathfrak{Q}^-(a_1, d_3)a_2\sigma(d_2) = \mathfrak{Q}^-(a_2, d_2)\sigma(d_3)a_1,$$

llegamos a la expresión

$$c_1\sigma(d_3)a_1\sigma(b_3)\mathfrak{Q}^-(a_2, d_2)\mathfrak{R}^+(a_3, c_2)\mathfrak{R}^+(b_2, d_1)\mathfrak{R}^-(b_1, c_3)$$

que por definición de $\mathfrak{R}^+_{Hc}$ es igual a

$$c_1\sigma(d_2)a_1\sigma(b_2)\mathfrak{R}^+_{Hc}(a_2\sigma(b_1), c_2\sigma(d_1)) = y_1x_1\mathfrak{R}^+_{Hc}(x_2, y_2),$$

como es requerido. Esto completa la prueba del hecho de que $(Hc(\mathfrak{H}), \mathfrak{R}^\pm_{Hc})$ es co-quasitriangular.

2.6. Funcionales de Drinfeld y la antípoda de $Hc(\mathfrak{H})$

Definición 2.50. *Mostraremos la existencia de la antípoda en $Hc(\mathfrak{H})$, generalizando resultados de Drinfeld [7] en álgebras de Hopf CQT, esto es, sin asumir la existencia de la antípoda y desarrollando una idea de Reshetikhin. Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT $\mathfrak{H}$, definimos los funcionales lineales $\mathfrak{U}_\upsilon$, $(\upsilon = 1, 2)$ en $\mathfrak{H}$ vía*

$$\mathfrak{U}_1(a) = \mathfrak{Q}^-(a_2, a_1),\quad \mathfrak{U}_2(a) = \mathfrak{Q}^+(a_1, a_2)\ (a \in \mathfrak{H}) \tag{96}$$

y los llamamos funcionales de Drinfeld de $\mathfrak{H}$.

Proposición 2.51. *Los funcionales de Drinfeld de una $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT $\mathfrak{H}$ son inversibles en $\mathfrak{H}^*$ y satisfacen las relaciones*

$$\mathfrak{U}_1^{-1}(a) = \mathfrak{Q}^+(a_2, a_1),\quad \mathfrak{U}_2^{-1}(a) = \mathfrak{Q}^-(a_1, a_2), \tag{97}$$
$$(\mathfrak{U}_\upsilon^{\pm 1} \otimes 1)\mathfrak{R}^\pm = \mathfrak{Q}^\pm(\mathfrak{U}_\upsilon^{\pm 1} \otimes 1),\ (1 \otimes \mathfrak{U}_\upsilon^{\pm 1})\mathfrak{Q}^\pm = \mathfrak{R}^\pm(1 \otimes \mathfrak{U}_\upsilon^{\pm 1}), \tag{98}$$
$$\mathfrak{U}_\upsilon^{\pm 1}(e_i^o e_j) = \delta_{ij},\ \mathfrak{U}_\upsilon^\pm(e_i^o a e_j^o) = \mathfrak{U}_\upsilon^\pm(e_i a e_j), \tag{99}$$
$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1, \tag{100}$$

para cada $\upsilon = 1, 2, a \in \mathfrak{H}, i, j \in \mathcal{V}$.

Demostración. Para comenzar, mostramos que la trenza $\mathfrak{R}^{\pm}$ de una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT satisface

$$\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23} = \mathfrak{R}^{-}_{13}\mathfrak{R}^{-}_{23}\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{+}_{13}. \tag{101}$$

Por la relación de Yang-Baxter (28), el término de la derecha de (101) es

$$\mathfrak{R}^{-}_{13}\mathfrak{R}^{+}_{13}\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23} = m^{*}(1)_{13}\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23}. \tag{102}$$

De donde obtenemos

$$(\mathfrak{R}^{-}_{13}\mathfrak{R}^{-}_{23}\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{+}_{13})(a,b,c) = m^{*}(1)_{13}\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23}(a,b,c) =$$

$$\varepsilon(a_1c_1)\varepsilon(b_1)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_2)\varepsilon(c_2)\mathfrak{R}^{-}(b_3,c_3)\varepsilon(a_3) =$$

$$\sum_k \varepsilon(a_1e_k)\varepsilon(e^o_k c_1)\varepsilon(b_1)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_2)\varepsilon(c_2)\mathfrak{R}^{-}(b_3,c_3)\varepsilon(a_3) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^{+}(\varepsilon(a_1e^o_k)e_2, \varepsilon(b_1)b_2)\varepsilon(e^o_k c_1)\mathfrak{R}^{-}(b_3,c_3)\varepsilon(a_3)$$

y esto es igual, por (5), (8), (11) a

$$\sum_k (\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23})(ae^o_k, be^o_k c) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^{+}(ae^o_k, b_1)\mathfrak{R}^{-}(b_2, e^o_k c) = \sum_k \mathfrak{R}^{+}(ab_1e_k)\mathfrak{R}^{-}(b_2e^o_k, c) =$$

$$\mathfrak{R}^{+}(a,b_1)\mathfrak{R}^{-}(b_2,c) = (\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23})(a,b,c),$$

por (21), (22) y (13). Así obtenemos (101). Sustituyendo $a_2 \otimes \sigma(a_1) \otimes b$ en (101) para $Hc(\mathfrak{H})$, obtenemos

$$\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{-}_{23}(a_2,\sigma(a_1),b) = \mathfrak{R}^{+}(a_2,\sigma(a_1)_1)\mathfrak{R}^{-}(\sigma(a_2)_2,b) = \mathfrak{R}^{+}(a_3,\sigma(a_2))\mathfrak{R}^{-}(\sigma(a_1),b) =$$

$$\mathfrak{Q}^{-}(a_5,a_4)\mathfrak{R}^{+}(a_6,1_{(1)})\mathfrak{R}^{+}(1'_{(2)},a_3)\mathfrak{R}^{-}(1'_{(1)},1_{(2)})\mathfrak{Q}^{+}(a_2,b_1)\times$$

$$\mathfrak{R}^{-}(a_1,1''_{(2)})\mathfrak{R}^{-}(1'''_{(1)},b_2)\mathfrak{R}^{+}(1'''_{(2)}1''_{(1)}) =$$

$$\sum_{i,j,k,l} \mathfrak{Q}^{-}(a_5,a_4)\mathfrak{R}^{+}(a_6,e_i)\mathfrak{R}^{+}(e^o_j,a_3)\mathfrak{R}^{-}(e_j,e^o_i)\times$$

$$\mathfrak{Q}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{-}(a_1,e^o_k)\mathfrak{R}^{-}(e_l,b_2)\mathfrak{R}^{+}(e^o_l,e_k) =$$

$$\sum_{i,j,k,l} \mathfrak{Q}^{-}(a_5,a_4)\varepsilon(a_6e_i)\varepsilon(a_3e_j)\varepsilon(e_je_i)\mathfrak{Q}^{+}(a_2,b_1)\varepsilon(a_1e_k)\varepsilon(b_2e_l)\varepsilon(e_le_k) =$$

$$\sum_{j,k} \mathfrak{Q}^{-}(a_5,a_4)\varepsilon(a_6e_j)\varepsilon(a_3e_j)\mathfrak{Q}^{+}(a_2,b_1)\varepsilon(a_1e_k)\varepsilon(b_2e_k) =$$

$$\sum_{j,k} \mathfrak{Q}^{-}(a_3,a_2e^o_j)\mathfrak{Q}^{+}(a_1e^o_k,b) = \mathfrak{Q}^{-}(a_3,a_2)\mathfrak{Q}^{+}(a_1,b).$$

Mientras que

$$\mathfrak{R}^{-}_{13}\mathfrak{R}^{-}_{23}\mathfrak{R}^{+}_{12}\mathfrak{R}^{+}_{13}(a_2,\sigma(a_1),b) =$$

$$\mathfrak{R}^{-}(a_5,b_1)\varepsilon(\sigma(a_4))\mathfrak{R}^{-}(\sigma(a_3),b_2)\varepsilon(a_6)\mathfrak{R}^{+}(a_7,\sigma(a_2))\varepsilon(b_3)\times$$

$$\mathfrak{R}^{+}(a_8,b_4)\varepsilon(\sigma(a_1)) =$$

$$\mathfrak{R}^-(a_3,b_1)\mathfrak{R}^-(\sigma(a_2),b_2)\mathfrak{R}^+(a_4,\sigma(a_1))\mathfrak{R}^+(a_5,b_3) =$$

$$\sum_{i,j,k,l}\sum_{l,r,s,t}\sum_{t,n}\mathfrak{Q}^+(e_i^o,b_1)\mathfrak{R}^-(e_i,e_j^o)\mathfrak{R}^-(a_5,b_2)\mathfrak{R}^+(a_6,e_j)\times$$

$$\mathfrak{Q}^+(a_4,b_3)\mathfrak{R}^-(a_3,e_k^o)\mathfrak{R}^-(e_l,b_4)\mathfrak{R}^+(e_l^o,e_k)\mathfrak{Q}^-(a_7,a_2)\mathfrak{R}^+(a_8,e_r)\mathfrak{R}^+(e_s^o,a_1)\mathfrak{R}^-(e_s,e_r^o)\times$$

$$\mathfrak{Q}^-(e_t^o,b_5)\mathfrak{R}^+(e_t,e_n^o)\mathfrak{R}^+(a_9,b_6)\mathfrak{R}^-(a_{10},e_n) =$$

$$\sum_{i,k,r,t}\varepsilon(b_1e_i)\mathfrak{R}^-(a_5,b_2)\varepsilon(a_6e_i)\mathfrak{Q}^+(a_4,b_3)\varepsilon(a_3e_k)\varepsilon(b_4e_k)\mathfrak{Q}^-(a_7,a_2)\times$$

$$\varepsilon(a_8e_r)\varepsilon(a_1e_r)\varepsilon(e_tb_5)\mathfrak{R}^+(a_9,b_6)\varepsilon(e_ta_{10}) =$$

$$\sum_{i,k,r,t}\mathfrak{R}^-(a_3,b_1e_i^o)\mathfrak{Q}^+(a_2,b_2e_k)\mathfrak{Q}^-(a_4,a_1e_r^o)\mathfrak{R}^+(a_5,e_t^ob_3) =$$

$$\mathfrak{R}^-(a_3,b_1)\mathfrak{Q}^+(a_2,b_2)\mathfrak{Q}^-(a_4,a_1)\mathfrak{R}^+(a_5,b_3),$$

que por (34), (10) y (11) es igual a

$$\sum_k\varepsilon(a_2e_k)\varepsilon(b_1e_k)\mathfrak{Q}^-(a_3,a_1)\mathfrak{R}^+(a_4,b_2) = \sum_k\mathfrak{Q}^-(a_2,a_1e_k)\mathfrak{R}^+(a_3,be_k^o) =$$

$$\mathfrak{Q}^-(a_2,a_1)\mathfrak{R}^+(a_3,b);$$

por (21), (22) y (13). Y así obtenemos la igualdad

$$\mathfrak{Q}^+(a_1,b)\mathfrak{Q}^-(a_3,a_2) = \mathfrak{Q}^-(a_2,a_1)\mathfrak{R}^+(a_3,b).$$

Esto prueba $(\mathfrak{U}_1\otimes 1)\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{Q}^+(\mathfrak{U}_1\otimes 1)$. En efecto,

$$(\mathfrak{U}_1\otimes 1)\mathfrak{R}^+(a,b) = \mathfrak{U}_1(a_1)b_2\mathfrak{R}^+(a_2,b_2) = \mathfrak{Q}^-(a_2,b_1)b_2\mathfrak{R}^+(a_3,b_2) = \mathfrak{Q}^-(a_2,a_1)\mathfrak{R}^+(a_3,b)$$

y

$$\mathfrak{Q}^+(\mathfrak{U}_1\otimes 1)(a,b) = \mathfrak{Q}^+(a_1,b_1)\mathfrak{U}_1(a_2)b_2 = \mathfrak{Q}^+(a_1,b)\mathfrak{Q}^-(a_3,a_2)$$

Reemplazando $(\mathfrak{H},\mathfrak{R}^\pm)$ con $(\mathfrak{H}^{cop},\mathfrak{R}^\pm_{21})$, obtenemos también

$$\mathfrak{R}^+(\mathrm{id}\otimes\mathfrak{U}_1) = (\mathrm{id}\otimes\mathfrak{U}_1)\mathfrak{Q}^+.$$

Sustituyendo $a_2\otimes a_1$ en estas dos fórmulas, obtenemos

$$\mathfrak{Q}^-(a_3,a_2)\mathfrak{R}^+(a_4,a_1) = \mathfrak{Q}^+(a_2,a_1)\mathfrak{U}_1(a_3),$$

$$\mathfrak{Q}^-(a_3,a_2)\mathfrak{R}^+(a_4,a_1) = \mathfrak{U}_1(a_1)\mathfrak{Q}^+(a_3,a_2).$$

Por ejemplo, para la primera de estas dos igualdades,

$$(\mathfrak{U}_1\otimes 1)\mathfrak{R}^+(a_2\otimes a_1) = \mathfrak{Q}^-(a_3,a_2)\mathfrak{R}^+(a_4,a_1) =$$

$$\mathfrak{Q}^+(a_2,a_1)\mathfrak{Q}^-(a_4,a_3) = \mathfrak{Q}^+(a_2,a_1)\mathfrak{U}_1(a_3)$$

y

$$\mathfrak{R}^+(1\otimes\mathfrak{U}_1)(a_2,a_1) = (1\otimes\mathfrak{U}_1)\mathfrak{Q}^+(a_2,a_1) = \mathfrak{U}_1(a_1)\mathfrak{Q}^+(a_3,a_2).$$

Usando (34) y (10), vemos que los términos de la izquierda de estas igualdades son

$$\sum_k\varepsilon(e_ka_2)\varepsilon(e_ka_1) = \sum_k\varepsilon(e_ka_2)\varepsilon(e_ka_1) = \sum_k\varepsilon(e_ke_ka) = \varepsilon(a).$$

Esto prueba la primera fórmula de (97). Reemplazando $(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}^{\pm})$ con $(\mathfrak{H}^{op}, \mathfrak{R}^{\mp})$ y $(\mathfrak{H}^{bop}, \mathfrak{R}^{\pm})$, obtenemos las fórmulas restantes de (97) y (98). La primera relación de (99) surge de (23) y (24) para $\mathfrak{F}^{\pm} = \mathfrak{Q}^{\pm}$:

$$\mathfrak{U}_{\upsilon}^{\gamma}(e_i^o e_j) = \begin{cases} \sum_k \mathfrak{Q}^-(e_k^o e_j, e_i^o e_k) = \sum_k \varepsilon(e_k e_i^o e_k e_j) & \upsilon = 1,\ \gamma = +1 \\ \sum_k \mathfrak{Q}^+(e_i^o e_k, e_k^o e_j) = \sum_k \varepsilon(e_k e_k^o e_j e_i) & \upsilon = 2,\ \gamma = +1 \\ \sum_k \mathfrak{Q}^+(e_k^o e_j, e_i^o e_k) = \sum_k \varepsilon(e_j e_i^o e_k e_k) & \upsilon = 1,\ \gamma = -1 \\ \sum_k \mathfrak{Q}^-(e_i^o e_k, e_k^o e_j) = \sum_k \varepsilon(e_i e_k^o e_j e_k) & \upsilon = 2,\ \gamma = -1 \end{cases}$$

y, por lo tanto $\mathfrak{U}_{\upsilon}^{\pm 1}(e_i^o e_j) = \delta_{ij}$. También vemos la otra afirmación de (99),

$$\mathfrak{U}_1^+(e_i^o a e_j^o) = \sum_{k,l} \mathfrak{Q}^-(e_k^o a_2 e_l^o, e_i^o e_k a_1 e_j^o e_l) =$$

$$\sum_{k,l} \mathfrak{Q}^-(e_k^o e_l e_k^o a_2 e_l^o e_i^o e_j, a_1) = \sum_k \mathfrak{Q}^-(e_k^o e_i a_2 e_i^o e_j, a_1)$$

por (22). Y

$$\mathfrak{U}_1^+(e_i a e_j) = \sum_{k,l} \mathfrak{Q}^-(e_k^o e_i a_2 e_l^o e_j, e_k a_1 e_l) = \sum_{k,l} \mathfrak{Q}^-(e_k^o e_i a_2 e_l^o e_j, a_1) =$$

$$\mathfrak{Q}^-(e_i a_2 e_j, a_1).$$

Análogamente probamos

$$\mathfrak{U}_1^{-1}(e_i a) = \mathfrak{U}_1^{-1}(e_i^o a) \text{ y } \mathfrak{U}_1(e_i a) = \mathfrak{U}_1(e_i a_1)\mathfrak{U}_1(a_2)\mathfrak{U}_1(a_3) = \mathfrak{U}_1(e_i^o a).$$

Las otras relaciones de (97)-(99) se prueban de manera similar. Usando $(98)^-$ para $\upsilon = 1$ dos veces, obtenemos

$$(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2^{-1})(a) = \mathfrak{R}^-(a_1, a_3)\mathfrak{U}_1(a_2) = (\mathfrak{U}_2^{-1}\mathfrak{U}_1)(a),$$

en efecto,

$$= \mathfrak{U}_1(a_1)(\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2^{-1})(a)\mathfrak{U}_2^{-1}(a_1)\mathfrak{U}_1(a_1)\mathfrak{Q}^-(a_2, a_3) =$$

$$(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathrm{id})\mathfrak{Q}^-(a_1, a_2) = \mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathrm{id})(a_1, a_2) = \mathfrak{R}^-(a_1, a_3)\mathfrak{U}_1(a_2),$$

ya que

$$(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathrm{id})\mathfrak{Q}^- = (\mathfrak{U}_1 \otimes \mathrm{id})(\mathfrak{U}_1^{-1})\mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathrm{id})$$

por $(98)^-$. Análogamente,

$$\mathfrak{U}_2^{-1}\mathfrak{U}_1(a) = \mathfrak{U}_2^{-1}(a_1)\mathfrak{U}_1(a_2) = \mathfrak{Q}^-(a_1, a_2)\mathfrak{U}_1(a_3) = \mathfrak{Q}^-(\mathrm{id} \otimes \mathfrak{U}_1)(a_1, a_2) =$$

$$(\mathrm{id} \otimes \mathfrak{U}_1)\mathfrak{R}^-(\mathrm{id} \otimes \mathfrak{U}_1^{-1})(\mathrm{id} \otimes \mathfrak{U}_1)(a_1, a_2) = (\mathrm{id} \otimes \mathfrak{U}_1)\mathfrak{R}^-(a_1, a_2) = \mathfrak{U}_1(a_2)\mathfrak{R}^-(a_1, a_3).$$

Y de esta igualdad se desprende (100), ya que

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_2^{-1}\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_2^{-1}\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1.$$

De (98), inmediatamente vemos que

$$\left(\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}_{21}^-(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U})\right)(a, b) = \mathfrak{R}^-(a_1, b_1)\mathfrak{R}^-(b_2, a_2)\mathfrak{U}(b_3)\mathfrak{U}(a_3) =$$

$$\mathfrak{R}^-(a_1,b_1)\left(\mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\right)(b_2,a_2) = \mathfrak{R}^-(a_1,b_1)\left((\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\right)(b_2,a_2) =$$
$$\left(\mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\right)(a_1,b_1)\mathfrak{R}^-(b_2,a_2) = \left((\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\right)(a,b_1)\mathfrak{R}^-(b_2,a_2) =$$
$$\left((\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}\right)(a,b),$$

ya que de allí resulta

$$(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^- = \mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U}).$$

$\square$

Lema 2.52. *En $Hc(\mathfrak{H})$ tenemos las fórmulas*

$$\Sigma_v(a_2)\sigma(a_1) = \sum_k \varepsilon(e_k a)e_k,\ \ \sigma(a_2)\Sigma_v(a_1) = \sum_k \varepsilon(ae_k)e_k^o \tag{103}$$

para cada $v = 1, 2$ y $a \in \mathfrak{H}$.

Demostración. Tenemos

$$\Sigma_1(a_2)\sigma(a_1) = \mathfrak{U}_1(a_2)a_3\mathfrak{U}_1^{-1}(a_4)\sigma(a_1) = \mathfrak{Q}^-(a_3,a_2)a_4\sigma(a_1)\mathfrak{U}_1^{-1}(a_5),$$

que, por (94) es

$$\mathfrak{Q}^-(a_4,a_1)\sigma(a_2)a_3\mathfrak{U}_1^{-1}(a_5) = \sum_k \mathfrak{Q}^-(a_3,a_1)\varepsilon(a_2e_k)e_k\mathfrak{U}_1^{-1}(a_4) =$$

$$\sum_k \mathfrak{Q}^-(a_2e_k^o,a_1)\mathfrak{U}_1^{-1}(a_3)e_k = \sum_k \mathfrak{U}_1(e_k^o a_1)\mathfrak{U}_1^{-1}(a_2)e_k = \sum_k \varepsilon(e_k a)e_k,$$

donde estas últimas igualdades se siguen de (22) y (15) y de (15) y (8), respectivamente. La prueba de la otra fórmula es similar. $\square$

Por el lema superior, el mapa de álgebras $f^+ : \mathfrak{H} \to Hc(\mathfrak{H})^{op}$; $a \mapsto \sigma(a)$ tiene a $a \mapsto \Sigma_v(a)$ como antípoda. De donde, por el Teorema 2.42, existe el anti-endomorfismo de álgebras S en $Hc(\mathfrak{H})$ que envía $a\sigma(b)$ a $\Sigma_1(b)\sigma(a) = \Sigma_2(b)\sigma(a)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f^+"'] & & Hc(\mathfrak{H}) \arrow[dl, "S"] \\
& (Hc(\mathfrak{H}))^{op} &
\end{tikzcd}$$

Así,

$$S(a\sigma(b)) = f^+(a)\circ f^-(b) = f^-(b)f^+(a) = \Sigma_1(b)\sigma(a),$$

donde $\circ$ es el producto en $(Hc(\mathfrak{H}))^{op}$. Usando (90), (15) y (103) obtenemos

$$S(a_1\sigma(b_2))a_2\sigma(b_1) = \Sigma_1(b_2)\sigma(a_1)a_2\sigma(b_1) =$$

$$\sum_k \varepsilon(ae_k)\Sigma_1(b_2)\sigma(b_1e_k^o)\sum_k \varepsilon(ae_k)\sum_l \varepsilon(e_lbe_k)e_l =$$

$$\sum_{k,l}\varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_lbe_k)e_l = \sum_l \varepsilon(a\sigma(b)e_l)e_l.$$

La verificación de las otras igualdades en la definición de la antípoda S es inmediata. Por lo tanto S da una antípoda de $Hc(\mathfrak{H})$. Así, completamos la prueba del Teorema 2.42.

Proposición 2.53. *Dada $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT de dimensión finita, los funcionales de Drinfeld satisfacen:*

$$m^*(\mathfrak{U}) = \mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U}) = (\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}, \tag{104}$$

$$m^*(\mathfrak{U}^{-1}) = \mathfrak{R}^+_{21}\mathfrak{R}^+(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})^{-1} = (\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})^{-1}\mathfrak{R}^+_{21}\mathfrak{R}^+, \tag{105}$$

donde $\mathfrak{U}$ es $\mathfrak{U}_1$ o $\mathfrak{U}_2^{-1}$.

Demostración. En (104), para $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$,

$$\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})(a,b)\mathfrak{R}^-(a_1,b_1)\mathfrak{R}^-(b_2,a_2)\mathfrak{U}(b_3)\mathfrak{U}(a_3) = \mathfrak{R}^-(a_1,b_1)\mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})(b_2,a_2) =$$

$$\mathfrak{R}^-(a_1,b_1)(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-(b_2,a_2) = \mathfrak{R}^-(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})(a_1,b_1)\mathfrak{R}^-(b_2,a_2) =$$

$$(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-(a_1,b_1)\mathfrak{R}^-(b_2,a_2) = (\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}(a,b).$$

Veamos ahora que $m^*(\mathfrak{U}) = (\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}$. Basta probar que $m^*(\mathfrak{U})\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R} = \mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U}$, ya que si esto ocurre,

$$(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}(a,b) = m^*(\mathfrak{U})\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R}\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}^-_{21}(a,b) =$$

$$m^*(\mathfrak{U})(a_1,b_1)\mathfrak{R}(b_2,a_2)\varepsilon(b_3a_3)\mathfrak{R}^-(b_4,a_4) = m^*(\mathfrak{U})(a_1,b_1)\varepsilon(a_2b_2\mathfrak{R}\mathfrak{R}^-(b_3a_3)) =$$

$$m^*(\mathfrak{U})(a_1,b_1)\varepsilon(a_2b_2\varepsilon(a_3b_3)) = m^*(\mathfrak{U})(a_1,b_1)\varepsilon(a_2,b_2) = m^*(\mathfrak{U})(a,b).$$

Notemos que basta probar el caso en que $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT, ya que tenemos, por el Teorema 2.25, que por ser $\mathfrak{H}$ cerradiza, existe una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT $\mathfrak{K}$ y un mapa $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT. En este caso, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{H}} = (f\otimes f)^*(\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}})$ y $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}} = f^*(\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}})$, por la Definición 2.20 y la Proposición 33. Por lo tanto, si probamos, por ejemplo, la primera igualdad de (104) para $\mathfrak{K}$, obtenemos la misma conclusión para $\mathfrak{H}$, pues

$$m^*(\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}})\mathfrak{R}_{\mathfrak{H},21}\mathfrak{R}_{\mathfrak{H}} = (f\otimes f)^*(m^*(\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}})\mathfrak{R}_{\mathfrak{K},21}\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}) =$$

$$(f\otimes f)^*(\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}\otimes\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}) = \mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}\otimes\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}.$$

Ahora, si escribimos, teniendo en cuenta que $\mathfrak{H}$ es de dimensión finita, $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R} = \sum_i \alpha_i\otimes\beta_i \in \mathfrak{H}^o\otimes\mathfrak{H}^o$, con $\sum_i \alpha_i(a)\beta_i(b) = \mathfrak{R}(a,b)$, tenemos $\mathfrak{U} = \sum_i S^*(\beta_i) * \alpha_i$ ya que

$$\sum_i \beta_i(S(a_1))\alpha_i(a_2) = \mathfrak{R}(a_2, S(a_1)) = (\mathrm{id}\otimes S)^*(\mathfrak{R})(a_2,a_1)$$

y podemos ver que $(\mathrm{id}\otimes S)^*(\mathfrak{R}) = \mathfrak{Q}^-$, en efecto

$$(\mathrm{id}\otimes S)^*(\mathfrak{R})\mathfrak{R}(a,b) = \mathfrak{R}(a_1,S(b_1))\mathfrak{R}(a_2,b_2) = \mathfrak{R}(a, b_2S(b_1)) =$$

$$\mathfrak{R}^-_{op}(a, S(b_1)\circ b_2) = \mathfrak{R}^-_{op}(a, E^+(b)) = \sum_k \mathfrak{R}^-_{op}(a, \varepsilon(b\circ e_k)e_k) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_kb)\mathfrak{R}^-_{op}(a,e_k)\sum_k \varepsilon(e_kb)\varepsilon(e_ka) = \mathfrak{F}^+(a,b).$$

Así, tenemos

$$m^*(\mathfrak{U})(a,b) = m^*\left(\sum_i S^*(\beta_i)*\alpha_i\right)(a,b) = \sum_i \beta_i(S(a_1b_1))\alpha_i(a_2b_2) =$$

$$\sum_i \beta_i(S(b_1)S(a_1))\alpha_i(a_2b_2) = \sum_i [(S\otimes S)^*(m^{op})^*\beta_i] * m^*(\alpha_i)(a,b).$$

Es claro que $\mathfrak{R}$ cumple que $(m^{op})^*(f) = \mathfrak{R}m^*(f)\mathfrak{R}^-$, entonces tenemos que

$$m^*(\alpha_i)\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2 1\mathfrak{R}m^*(\alpha_i).$$

Así,

$$m^*(\mathfrak{U})\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R} = \sum_i [(S\otimes S)^*(m^{op})^*(\beta_i)]\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R}m^*(\alpha_i).$$

Hacemos ahora de $\mathfrak{H}^o\otimes\mathfrak{H}^o$ un módulo a derecha sobre $\mathfrak{H}^o\otimes\mathfrak{H}^o\otimes\mathfrak{H}^o\otimes\mathfrak{H}^o$ tomando

$$(f_1\otimes f_2)\cdot(g_1\otimes g_2\otimes g_3\otimes g_4) = S^*(g_3)f_2g_1\otimes S^*(g_4)f_2g_2.$$

Es trivial verificar que esto está bien definido y tenemos entonces

$$m^*(\mathfrak{U})\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{21}\cdot[\mathfrak{R}_{12}(m^*\otimes(m^{op})^*)(\mathfrak{R})].$$

En efecto, si $m^*(\alpha_i) = \alpha_i^1\otimes\alpha_i^2$ y lo mismo para β_i, donde estas expresiones denotan sumas de elementos en $\mathfrak{H}^o\otimes\mathfrak{H}^o$, tenemos que

$$\mathfrak{R}^{21}\cdot[\sum_{i,j}\alpha_j\alpha_i^1\otimes\beta_j\alpha_i^2\otimes\beta_i^2\otimes\beta_i^1] = \sum_{i,j,k} S^*(\beta_i^2)\beta_k\alpha_i^1\otimes S^*(\beta_i^1)\alpha_k\alpha_j\alpha_i^2 =$$

$$\sum_i (S\otimes S)^*(m^{op})^*(\beta_i)\mathfrak{R}_{21}\mathfrak{R}m^*(\alpha_i).$$

Ahora, por (17)-(20),

$$(m\otimes m^{op})^*(\mathfrak{R})(a,b,c,d) = \mathfrak{R}(ab,dc))\mathfrak{R}(a_1b_1,c)\mathfrak{R}(a_2b_2,d) =$$

$$\mathfrak{R}(a_1,c_1)\mathfrak{R}(b_1,c_2)\mathfrak{R}(a_2,d_1)\mathfrak{R}(b_2,d_2) = \mathfrak{R}_{13}\mathfrak{R}_{23}\mathfrak{R}_{14}\mathfrak{R}_{24}(a,b,c,d).$$

Y por la relación (27),

$$\mathfrak{R}_{12}(m\otimes m^{op})^*(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{13}\mathfrak{R}_{23}\mathfrak{R}_{14}\mathfrak{R}_{24} = \mathfrak{R}_{23}\mathfrak{R}_{13}\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{14}\mathfrak{R}_{24}.$$

Además, usando el hecho de que S es inversible, que será probado en la proposición siguiente y, en un contexto más general, en la Proposición 3.27,

$$\mathfrak{R}_{21}\cdot\mathfrak{R}_{23} = \sum_{i,j}(\beta_i\otimes\alpha_i)(1\otimes\alpha_j\otimes\beta_j\otimes 1) = \sum_{i,j} S^*(\beta_j)\beta_i\otimes\alpha_i\alpha_j =$$

$$(S\otimes\mathrm{id})^*(\sum_{i,j}(S^{-1})^*(\beta_i)\beta_j\otimes\alpha_i\alpha_j) = (S\otimes\mathrm{id})^*(\sum_i (S^{-1})^*(\beta_i)\otimes\alpha_i)(\sum_j \beta_j\otimes\alpha_j) =$$

$$(S\otimes\mathrm{id})^*(\mathrm{id}\otimes(S^{-1})^*)(\mathfrak{R}_{21})\mathfrak{R}_{21} = (S\otimes\mathrm{id})^*(\mathfrak{R}_{21}^-\mathfrak{R}_{21}) = 1.$$

Deducimos que $(\mathrm{id}\otimes S^{-1})^*(\mathfrak{R}_{21}) = \mathfrak{R}_{21}^-$ del hecho de que $(\mathfrak{H}^{op},\mathfrak{R}_{21}^{\pm},S^{-1})$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT. Ahora,

$$\mathfrak{R}_{21}\cdot(\mathfrak{R}_{23}\mathfrak{R}_{13}) = \mathrm{id}\cdot\mathfrak{R}_{13} = \sum_i S^*(\beta_i)\alpha_i\otimes 1 = \mathfrak{U}\otimes 1$$

y

$$\mathfrak{R}_{21}\cdot(\mathfrak{R}_{23}\mathfrak{R}_{13}\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{24}) = (\mathfrak{U}\otimes 1)\cdot(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{24}) = \sum_{i,j}\mathfrak{U}\alpha_i\alpha_j\otimes S^*(\beta_j)\beta_i = \mathfrak{U}\otimes 1,$$

nuevamente, porque $\sum_{i,j} S^*(\beta_j)\beta_i \otimes \alpha_i\alpha_j = 1$. Finalmente,

$$(\mathfrak{U} \otimes 1) \cdot \mathfrak{R}_{24} = \sum_i (\mathfrak{U} \otimes 1)(1 \otimes \alpha_i \otimes 1 \otimes \beta_i) = \sum_i \mathfrak{U} \otimes S^*(\beta_i)\alpha_i = \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}.$$

De manera análoga se siguen las otras igualdades y (105). □

El siguiente resultado no nos va a ser necesario, y por lo tanto damos una versión parcial de su prueba.

Proposición 2.54. *Para cada $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT $\mathfrak{H}$, tenemos $S^*(\mathfrak{U}_1^{\pm 1}) = \mathfrak{U}_2^{\pm 1}$, $S^*(\mathfrak{U}_2^{\pm 1}) = \mathfrak{U}_1^{\pm 1}$ y $\mathfrak{U}_v X \mathfrak{U}_v^{-1} = (S^2)^*(X)$ $(X \in \mathfrak{H}^*)$. En particular, S es biyectiva y $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2^{-1}$ es un elemento central en $\mathfrak{H}^*$.*

Demostración. Sabemos que si $\mathfrak{R}^+ = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$, entonces $\mathfrak{U}_1 = \sum_i S^*(\beta_i) * \alpha_i$. Ahora,

$$S^*(\mathfrak{U}_1)(a) \sum_i S^*(\beta_i)\alpha_i(S(a)) = \sum_i S^*(\beta_i)(S(a)_1)\alpha_i(S(a)_2) =$$

$$\sum_i S^*(\beta_i)(S(a_2))\alpha_i(S(a_1)) = \sum_i \beta_i(S^2(a_2))\alpha_i(S(a_1)) = \mathfrak{R}^+(S(a_1), S^2(a_2)) =$$

$$(S \otimes S)^*(\mathfrak{R}^+)(a_1, S(a_2)) = \mathfrak{R}^+(a_1, S(a_2)) = (\mathrm{id} \otimes S)^*(\mathfrak{R}^+)(a_1, a_2) =$$

$$\mathfrak{Q}^-(a_1, a_2) = \mathfrak{U}_2^{-1}(a).$$

Así, $S^*(\mathfrak{U}_1) = \mathfrak{U}_2^{-1}$ y las otras igualdades se prueban tras consideraciones similares (cf. [7] Proposiciones 2.1 y 2.2). Así, $S = \mathfrak{U}_1^{\mp 1}\mathfrak{U}_2^{\mp 1}$ es biyectiva. Esto también será probado más adelante, en un contexto más general. Finalmente, vemos que $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2^{-1}$ es central:

$$X\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2^{-1} = \mathfrak{U}_2^{-1}\mathfrak{U}_2(X\mathfrak{U}_1)\mathfrak{U}_2^{-1} = (\mathfrak{U}_2^{-1})(S^2)^*(X\mathfrak{U}_1) = \mathfrak{U}_2^{-1}S^*[(S^*(\mathfrak{U}_1))(S^*(X))] =$$

$$\mathfrak{U}_2^{-1}S^*[\mathfrak{U}_2^{-1}(S^*(X))]\mathfrak{U}_2^{-1}S^*(s^*(X))(S^*(\mathfrak{U}_2^{-1})) = \mathfrak{U}_2^{-1}(S^2)^*(X)\mathfrak{U}_1$$

mientras que también

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2^{-1}X = \mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2^{-1}X)\mathfrak{U}_1^{-1}\mathfrak{U}_1 = (S^2)^*(\mathfrak{U}_2^{-1}X)\mathfrak{U}_1 = S^*((S^*(X)(S^*(\mathfrak{U}_2^{-1}))))\mathfrak{U}_1 =$$

$$S^*(S^*(X)\mathfrak{U}_1)\mathfrak{U}_1 = (S^*(\mathfrak{U}_1))(S^2)^*(X)\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2^{-1}(S^2)^*(X)\mathfrak{U}_1.$$

□

Definición 2.55. *Para cada $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf CQT $\mathfrak{H}$ y $v = 1, 2$, definimos el automorfismo de coálgebras Σ_v de $\mathfrak{H}$ vía*

$$\Sigma_v(a) = \mathfrak{U}_v(a_1)a_2\mathfrak{U}_v^{-1}(a_3) \quad (a \in \mathfrak{H}). \tag{106}$$

Lema 2.56. Σ_v *es un automorfismo de $\mathfrak{H}$ como $\mathcal{V}$-álgebra facial.*

Demostración. Para $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$, usando (104), (105)

$$\Sigma_1(ab) = \mathfrak{U}(a_1b_1)a_2b_2\mathfrak{U}_1^{-1}(a_3b_3) =$$

$$(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U})\mathfrak{R}^-\mathfrak{R}_{21}^-(a_1, b_1)a_2b_2\mathfrak{R}_{21}^+\mathfrak{R}^+(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U})^{-1}(a_3, b_3) =$$

$$\mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)\mathfrak{R}^-(a_2,b_2)\mathfrak{R}^-(b_3,a_3)a_4b_4\mathfrak{R}^+(b_5,a_5)\mathfrak{R}^+(a_6,b_6)\mathfrak{U}^{-1}(a_7)\mathfrak{U}^{-1}(b_7) =$$
$$\mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)\mathfrak{R}^-(a_2,b_2)b_3a_3\mathfrak{R}^-(b_4,a_4)\mathfrak{R}^+(a_5,b_5)\mathfrak{R}^+(a_6,b_6)\mathfrak{U}^{-1}(a_7)\mathfrak{U}^{-1}(b_7)$$

por (30) para $\mathfrak{R}^-$. Esto es igual a

$$\mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2b_2\mathfrak{R}^-(a_3,b_3)\varepsilon(b_4a_4)\mathfrak{R}^+(a_5,b_5)\mathfrak{U}^{-1}(a_7)\mathfrak{U}^{-1}(b_7) =$$
$$\sum_k \mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2b_2\mathfrak{R}^-(a_3,b_3)\varepsilon(b_4e_k)\varepsilon(e_ka_4)\mathfrak{R}^+(a_5,b_5)\mathfrak{U}^{-1}(a_6)\mathfrak{U}^{-1}(b_6) =$$
$$\sum_k \mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2b_2\mathfrak{R}^-(e_ka_3,b_3e_k)\mathfrak{R}^+(a_4,b_4)\mathfrak{U}^{-1}(a_5)\mathfrak{U}^{-1}(b_5) =$$
$$\sum_k \mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2b_2\mathfrak{R}^-(a_3,b_3e_k)\mathfrak{R}^+(a_4,b_4)\mathfrak{U}^{-1}(a_5)\mathfrak{U}^{-1}(b_5) =$$

por (22). Y esto es

$$\mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2b_2\varepsilon(a_3b_3)\mathfrak{U}^{-1}(a_4)\mathfrak{U}^{-1}(b_4) =$$
$$\sum_k \mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2b_2\varepsilon(a_3e_k)\varepsilon(e_kb_3)\mathfrak{U}^{-1}(a_4)\mathfrak{U}^{-1}(b_4) =$$
$$\sum_k \mathfrak{U}(a_1)\mathfrak{U}(b_1)a_2e_ke_kb_2\mathfrak{U}^{-1}(a_4)\mathfrak{U}^{-1}(b_4) =$$
$$\mathfrak{U}_1(a_1)\mathfrak{U}_1(b_1)a_2b_2\mathfrak{U}_1^{-1}(a_3)\mathfrak{U}_1^{-}(b_3) = \Sigma_1(b)\Sigma_1(b).$$

Para $\mathfrak{U}_2$ es similar. □

2.7. La localización $\mathfrak{H}[G^{-1}]$

Definición 2.57. *Sea g un elemento de una $\mathcal{V}$-álgebra facial $\mathfrak{H}$. Decimos que g es group-like si las siguientes relaciones son satisfechas:*

$$\Delta(g) = \sum_k ge_k \otimes ge_k^o, \quad \varepsilon(ge_i^oe_j) = \delta_{ij}, \tag{107}$$

$$ge_i^oe_j = e_i^oe_jg \ (i,j \in \mathcal{V}). \tag{108}$$

Denotamos por GLE($\mathfrak{H}$) al semigrupo de todos los elementos group-like de $\mathfrak{H}$.

Observación 2.58. Notemos que esta definición coincide con la usual cuando $\mathfrak{H}$ es una biálgebra (i. e. $\#(\mathcal{V}) = 1$). Además, notemos que, dado $\mathfrak{F}^\pm$ un s-pareo bilineal, tenemos que

$$\mathfrak{F}^+(x_1,g)\mathfrak{F}^-(x_2,g) = \varepsilon(xg).$$

Si bien la igualdad que surge de la definición del s-pareo bilineal $\mathfrak{F}^\pm$ es

$$\mathfrak{F}^+(x_1,g_1)\mathfrak{F}^-(x_2,g_2) = \varepsilon(xg),$$

tenemos, por (21)-(22) que

$$\mathfrak{F}^+(x_1,g_1)\mathfrak{F}^-(x_2,g_2) = \sum_k \mathfrak{F}^+(x_1,ge_k)\mathfrak{F}^-(x_2,ge_k^o) = \sum_k \mathfrak{F}^+(x_1,e_kg)\mathfrak{F}^-(x_2,e_k^og) =$$
$$\sum_k \mathfrak{F}^+(x_1e_k,g)\mathfrak{F}^-(x_2e_k^o,g) = \mathfrak{F}^+(x_1,g)\mathfrak{F}^-(x_2,g).$$

En esta sección, introducimos una localización de $\mathcal{V}$-álgebras faciales con respecto a sus elementos group-like, y discutimos la relación entre la localización y la clausura de Hopf.

Definición 2.59. *Para una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT, definimos*

$$\mathfrak{J}_g^{\pm}(a) = \mathfrak{R}^{\pm}(a_1, g)a_2\mathfrak{R}^{\mp}(a_3, g), \tag{109}$$

$$e_{g,h} = \sum_{k,l} \mathfrak{R}^{-}(he_k, g)\mathfrak{R}^{+}(he_l, g)e_k^o e_l \tag{110}$$

para cada $a \in \mathfrak{H}$ y $g, h \in GLE(\mathfrak{H})$. Sea G un subsemigrupo de $GLE(\mathfrak{H})$. Para $(a, g), (b, h) \in \mathfrak{H} \times G$ definimos $(a, g) \sim_G (b, h)$ si existen $c, d \in \mathfrak{H}$ tales que $ac = bd$ y $gc = hd \in G$. Entonces $\sim_G$ define una relación de equivalencia en $\mathfrak{H} \times G$. Para cada $a \in \mathfrak{H}$, $g \in G$, denotamos por a/g la clase de equivalencia que contiene a (a, g).

Teorema 2.60. *Sea $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT y G un subsemigrupo de GLE($\mathfrak{H}$). Sea $\sim_G$ como antes. Entonces $\mathfrak{H}[G^{-1}] := (\mathfrak{H} \times G)/\sim_G$ resulta una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT tomando $e_{\mathfrak{H}[G^{-1}],i} = e_i/1, e^o_{\mathfrak{H}[G^{-1}],i} = e_i^o/1$, y*

$$a/g + b/h = (ahe_{g,h} + bg)/(hg), \quad (a/g)(b/h) = a\mathfrak{J}_g^{-}(b)/(hg), \tag{111}$$

$$\Delta(a/g)a_1/g \otimes a_2/g, \quad \varepsilon(a/g)\varepsilon(a), \tag{112}$$

$$\mathfrak{R}^{+}(a/g, b/h) = \sum_{k} \mathfrak{R}^{-}(a_1, h)\mathfrak{R}^{+}(a_2, b_1)\mathfrak{R}^{-}(ge_k, b_2)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^o, h) \tag{113}$$

para cada $i \in \mathcal{V}, a, b \in \mathfrak{H}$ y $g, h \in G$. Si $\mathfrak{H}$ es cerradiza, también lo es $\mathfrak{H}[G^{-1}]$. La correspondencia $a \mapsto a/1$ da un mapa $\iota_G : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}[G^{-1}]$ de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT y tenemos que Ker(ι_G)$= \{a \in \mathfrak{H} \,/\, \exists\, g \in G : ga = 0\}$.

Probamos este teorema en la sección siguiente. Es fácil verificar que $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ tiene la siguiente propiedad universal.

Teorema 2.61. *Sean $\mathfrak{H}$ y G como en el teorema anterior. Sea $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ un morfismo de álgebras (resp. $\mathcal{V}$-álgebras faciales, $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT). Si $f(g)$ es inversible para cada $g \in G$, entonces existe un único morfismo $f_G : \mathfrak{H}[G^{-1}] \to \mathfrak{K}$ de álgebras (resp. $\mathcal{V}$-álgebras faciales, $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT) tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\iota_G"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathfrak{H}[G^{-1}] \arrow[dl, "f_G"] \\
& \mathfrak{K} &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos

$$f_G(a/g) = f(a)f(g)^{-1}$$

y así obtenemos que $f_G \circ \iota_G = f_G(a/1) = f(a)$ y por lo tanto el diagrama conmuta. Más abajo veremos que f_G satisface las propiedades requeridas. Veamos ahora la unicidad. Supongamos para ello que tenemos $h : \mathfrak{H}[G^{-1}] \to \mathfrak{K}$ con $h \circ \iota_G = f$, esto es $h(a/1) = f(a)$. Ahora, notemos que

$$a/g = a/1 \cdot 1/g,$$

en efecto, $a/1 \cdot 1/g = a\mathfrak{J}_1^-(1)/g$ y

$$\mathfrak{J}_1^-(1) = \sum_{k,l} \mathfrak{R}^-(e_l, 1) e_k^o e_l \mathfrak{R}^+(e_l^o, 1) = \sum_{k,l} \varepsilon(e_l) e_k^o e_l \varepsilon(e_l) = \sum_{k,l} e_k^o e_l = 1.$$

Así, $h(a/g) = h(a/1 \cdot 1/g) = f(a)h(1/g)$, y $h(1/g)f(g)h(g/g) = h(1) = 1$ y entonces $h(1/g) = f(g)^{-1}$, i.e. $h = f_G$. La definición de f_G no depende del representante a/g que tomemos de la clase de equivalencia de (a, g), de hecho, si $(a, g) \sim_G (b, h)$,

$$f(a) = f_G \circ \iota_G(a) = f_G \circ \iota_G(b) = f(b)$$

porque $a/1 \sim_G b/1$ y análogamente $f(g) = f(h)$. Además tenemos

$$f_G(e_i) f_G(e_i/1) = f_G \iota_G(e_i) f(e_i) = e_i, \text{ y } f_G(e_i^o) = e_i^o.$$

Vemos que también f_G es de coálgebras,

$$\Delta(f_g(a/g)) = \Delta(f(a))\Delta(f(g)^{-1}) = \sum_k f(a_1) f(g^{-1}) e_k \otimes f(a_2) f(g)^{-1} e_k^o =$$

$$\sum_k f_G(a_1/g \cdot e_k/1) \otimes f_G(a_2/g \cdot e_k^o/1) = (f_g \otimes f_g)\Delta(a/g \cdot 1) = (f_g \otimes f_g)\Delta(a/g),$$

y

$$\varepsilon(f_G(a/g))\varepsilon(f(a)f(g)^{-1}) = \sum_k \varepsilon(f(a)e_k)\varepsilon(e_k f(g)^{-1}) =$$

$$\sum_k f(a) e_k = \varepsilon(f(a)) = \varepsilon(a) = \varepsilon(a/g).$$

Donde usamos el hecho de que si g es group-like, $\varepsilon(ge_i) = 1$ y, si además es inversible, g^{-1} es group-like.

$$\varepsilon(ge_i) = \sum_j \varepsilon(ge_i e_j^o) = \sum_j \delta_{i,j} = 1.$$

con respecto a la segunda afirmación, $\Delta(g^{-1}) = (g^{-1})_1 \otimes (g^{-1})_2$ y

$$\sum_k e_k \otimes e_k^o = \Delta(1) = \Delta(g^{-1}g) = \sum_k (g^{-1})_1 g e_k \otimes (g^{-1})_2 g e_k^o = \sum_k (g^{-1})_1 e_k g \otimes (g^{-1})_2 e_k^o g,$$

multiplicando por $g^{-1} \otimes g^{-1}$, tenemos

$$\sum_k e_k g^{-1} \otimes e_k^o g^{-1} = \sum_k (g^{-1})_1 e_k \otimes (g^{-1})_2 e_k^o = \Delta(g^{-1} \cdot 1) = \Delta(g^{-1}).$$

Por lo tanto, f_G es de $\mathcal{V}$-álgebras faciales. Veamos que también preserva la estructura coquasitriangular, i.e., que

$$(f_G \otimes f_G)^*(\mathfrak{R}^+)_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{R}^+_{\mathfrak{H}[G^{-1}]}.$$

Por (17) y (18),

$$(f_G \otimes f_G)^*(\mathfrak{R}^+)_{\mathfrak{K}}(a/g, b/h) = \mathfrak{R}^+(f(a)f(g^{-1}), f(b)f(h)^{-1}) =$$

$$\sum_{k,l} \mathfrak{R}^+(f(a_1), f(h)^{-1}e_k)\mathfrak{R}^+(f(a_2), f(b_1))\mathfrak{R}^+(f(g)^{-1}e_l^o, f(h)^{-1}e_k^o)\mathfrak{R}^+(f(g)^{-1}e_l, f(b_2)) =$$

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{+}(f(a_1e_k),f(h)^{-1})\mathfrak{R}^{+}(f(a_2),f(b_1))\mathfrak{R}^{+}(f(g)^{-1},f(h)^{-1}e_k^{o})\mathfrak{R}^{+}(f(g)^{-1},f(e_kb_2)),\tag{114}$$

por la propiedad conmutativa de los elementos group-like con respecto a los idempotentes faciales y (21). Buscamos entonces que (114) sea igual a

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_2)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h),$$

ya que esta es la definición de $\mathfrak{R}^{+}_{\mathfrak{H}[G^{-1}]}(a/g,b/h)$. Ahora, si $\mathcal{Z}:f(G)\to\mathbb{K}$ está definida por $f(g)\mapsto f(g)^{-1}$, se cumple, como en (32), ya que si existe una antípoda S se cumple $S(g)=g^{-1}$, como veremos más abajo, que

$$((\mathcal{Z}\otimes\mathrm{id})^{*}(\mathfrak{R}^{+}))_{|f(G)\otimes\mathfrak{K}}=\mathfrak{R}^{-}\ y\ ((\mathrm{id}\otimes\mathcal{Z})^{*}(\mathfrak{R}^{-}))_{|\mathfrak{K}\otimes f(G)}=\mathfrak{R}^{+}.$$

En lo que sigue, al utilizar $\mathcal{Z}$ estamos haciendo un abuso de notación, ya que este mapa no es lineal. Entonces, (114) es igual a

$$\sum_{k,l}[(\mathrm{id}\otimes\mathcal{Z})^{*}(f\otimes f)^{*}(\mathfrak{R}^{+})](a_1,e_k)[(f\otimes f)^{*}(\mathfrak{R}^{+})](a_2,b_1)\times$$

$$\times[(\mathcal{Z}\otimes\mathrm{id})^{*}(\mathfrak{R}^{+})](f(g),e_lf(h)^{-1}e_k^{o})[(\mathcal{Z}\otimes\mathrm{id})^{*}(\mathfrak{R}^{+})](f(g),f(e_lb_2))=$$

$$\sum_{k,l}\mathfrak{R}^{-}(a_1e_k,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)(\mathrm{id}\otimes\mathcal{Z})^{*}(\mathfrak{R}^{-})(f(g)e_k^{o}e_l,f(h))(f\otimes f)^{*}(\mathfrak{R}^{-}(g,e_lb_2)),$$

donde para esta igualdad definimos $(\mathrm{id}\otimes\mathcal{Z})^{*}(\mathfrak{R}^{+}):=(\mathrm{id}\otimes\mathcal{Z})^{*}((f\otimes f)^{*}(\mathfrak{R}^{+}))$. Eso es igual a

$$\sum_{k,l}\mathfrak{R}^{-}(a_1e_k,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{+}(f(ge_k^{o}e_l)f(h))\mathfrak{R}^{-}(g,e_lb_2)=$$

$$\sum_{k,l}\mathfrak{R}^{-}(a_1e_k,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o}e_l,h)\mathfrak{R}^{-}(ge_l,b_2)=$$

$$\sum_{k,l}\mathfrak{R}^{-}(a_1,he_k)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{+}(ge_l,he_k^{o})\mathfrak{R}^{-}(ge_l,b_2)=$$

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1e_k,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_2)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h).$$

Esto es igual, usando que $a_1e_k=a_1\varepsilon(a_2e_k)$, a

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2e_k^{o},b_1)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_2)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h)=$$

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1e_k)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_2)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h)=$$

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\varepsilon(b_2e_k)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_3)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h)=$$

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_2e_k^{o})\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h)=$$

$$\sum_{k}\mathfrak{R}^{-}(a_1,h)\mathfrak{R}^{+}(a_2,b_1)\mathfrak{R}^{-}(ge_k,b_2)\mathfrak{R}^{+}(ge_k^{o},h),$$

que es lo que queríamos obtener. □

Cada elemento group-like g de una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf satisface $S(g) = g^{-1}$, ya que

$$(S \otimes \mathrm{id})\Delta(g) = \sum_k \varepsilon(ge_k)e_k = \sum_k e_k = 1,$$

y el término de la izquierda es también igual a

$$\sum_k S(ge_k)ge_k^o = \sum_k S(e_k g)ge_k^o = \sum_k S(g)e_k^o ge_k^o = \sum_k S(g)ge_k^o = S(g)g.$$

De donde, como consecuencia inmediata de la propiedad universal de $Hc(\mathfrak{H})$ y $\mathfrak{H}[G^{-1}]$, obtenemos lo siguiente.

Teorema 2.62. *Sea $\mathfrak{H}$ un $\mathcal{V}$-álgebra facial CCQT y G un subsemigrupo de $GLE(\mathfrak{H})$. Entonces existe un mapa $\mathfrak{H}[G^{-1}] \to Hc(\mathfrak{H})$ de $\mathcal{V}$-álgebras faciales CQT, que envía a/g a $\iota(a)\iota(g)^{-1})$ $(a \in \mathfrak{H}, g \in G)$. Si $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ tiene una antípoda, entonces*

$$Hc(\mathfrak{H}) \cong \mathfrak{H}[G^{-1}]. \tag{115}$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\iota_G"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathfrak{H}[G^{-1}] \arrow[dl, "f"] \\
& Hc(\mathfrak{H}) &
\end{tikzcd}$$

con f dado por $f(a/g) = \iota(a)\iota(g)^{-1}$, donde notamos que $\iota(g)$ es inversible porque Hc es una $\mathcal{V}$-álgebra facial de Hopf e $\iota(g)$ es group-like por serlo g. También tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_G"'] & & Hc(\mathfrak{H}) \arrow[dl, "\alpha"] \\
& \mathfrak{H}[G^{-1}] &
\end{tikzcd}$$

Donde la existencia de α se desprende del hecho de que ι_G tiene antípoda por existir una, S, en $Hc(\mathfrak{H})$, por el Lema 1, y está dada por $\iota_G^-(b) = S \circ \iota_G(b)$. Entonces, α queda definida por

$$\alpha(a\sigma(b)) = \iota_G(a)(S \circ \iota_G)(b).$$

Ahora,

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_G"] \arrow[ddr, bend right, "\iota"'] & & Hc(\mathfrak{H}) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[ddl, bend left, "\mathrm{id}"] \\
& \mathfrak{H}[G^{-1}] \arrow[d, "f"'] & \\
& Hc(\mathfrak{H}) &
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto $f \circ \alpha = \mathrm{id}_{Hc(\mathfrak{H})}$. Similarmente, $\alpha \circ f = \mathrm{id}_{\mathfrak{H}[G^{-1}]}$, de donde obtenemos el teorema. $\square$

Sea $\mathfrak{H}$ una biálgebra conmutativa. Tomamos a $\mathfrak{H}$ como una biálgebra CCQT con $\mathfrak{R}^{\pm} = \mathfrak{Q}^{\pm} = 1$. En [31], Takeuchi muestra que $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ es un álgebra de Hopf para un G suficientemente grande. De donde, por ejemplo, tenemos lo siguiente.

Corolario 2.63. *Para una biálgebra conmutativa $\mathfrak{H}$, tenemos que*

$$Hc(\mathfrak{H}) \cong \mathfrak{H}[GLE(\mathfrak{H})^{-1}].$$

Más ejemplos en donde vale la conclusión del corolario pueden encontrarse en [10], [1], [2], [11], [33].

2.8. Prueba del Teorema 2.60

Aquí daremos algunas relaciones entre los elementos group-like y los s-pareos inversibles y construiremos $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ para álgebras faciales $\mathfrak{H}$. Finalmente, usaremos estas y otras observaciones para la prueba del Teorema 2.60.

Proposición 2.64. *Sean $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{K}$ $\mathcal{V}$-álgebras faciales y $\mathfrak{F}^+$ un s-pareo inversible en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ con inversa generalizada $\mathfrak{F}^-$.*

(i) Para cada $g \in GLE(\mathfrak{H})$, tenemos $\mathfrak{F}^{\pm}_L(g)^{-1} = \mathfrak{F}^{\mp}_L(g)$ en el álgebra $\mathfrak{K}^*$.

(ii) Si g es inversible, entonces $\mathfrak{F}^{\mp}_L(g^{-1}) = \mathfrak{F}^{\mp}_L(g)$.

(iii) Para $x \in \mathfrak{K}$, e $i, j \in \mathcal{V}$, tenemos $\mathfrak{F}^{\pm}(g, e_i x e_j) = \mathfrak{F}^{\pm}(g, e^o_i x e^o_j)$.

Demostración. Notemos que, en este caso,

$$\mathfrak{E}^+(g, x) = \sum_k \varepsilon(ge_k)\varepsilon(e_k x) = \sum_k \varepsilon(e_k x) = \varepsilon(x),$$

$$\mathfrak{E}^-(g, x) = \sum_k \varepsilon(e_k g)\varepsilon(x e_k) = \sum_k \varepsilon(x e_k) = \varepsilon(x).$$

Usando (13) y (21)-(22), obtenemos

$$(\mathfrak{F}^+\mathfrak{F}^-)(g, x) = \mathfrak{F}^+(g_1, x_1)\mathfrak{F}^-(g_2, x_2) = \sum_k \mathfrak{F}^+(ge_k, x_1)\mathfrak{F}^-(gek^o, x_2) =$$

$$\sum_k \mathfrak{F}^+(g, e_k x_1)\mathfrak{F}^-(g, e^o_k x_2) = \mathfrak{F}^+_L(g)\mathfrak{F}^-_L(g)(1 \cdot x) =$$

$$\mathfrak{F}^+_L(g)\mathfrak{F}^-_L(g)(x) = \mathfrak{F}^+_l(g, x_1)\mathfrak{F}^-_L(g, x_2).$$

Esto, junto con cuentas similares para las otras desigualdades, prueba la parte (i). El inciso (ii) se sigue del Lema 2.16 y la parte (i), utilizando $\mathcal{Z}$ como en la prueba del Teorema 2.61

$$(\mathfrak{F}^+_L(g^{-1})\mathfrak{F}^+_L(g))(x) = \mathfrak{F}^+(g^{-1}, x_1)\mathfrak{F}^+(g, x_2) =$$

$$(\mathcal{Z} \otimes \mathrm{id})^*\mathfrak{F}^+\mathfrak{F}^+(g, x) = (\mathfrak{F}^-\mathfrak{F}^-)(g, x) = \mathfrak{E}^+(g, x).$$

La parte (iii) surge de (21)-(22) y (108),

$$\mathfrak{F}^+(g, e_i x e_j) = \mathfrak{F}^+(ge^o_j e_i, x) = \mathfrak{F}^+(e^o_j e_i g, x) = \mathfrak{F}^+(g, e^o_i x e^o_j).$$

$\square$

Y así obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.65. *Para un elemento group-like de una* $\mathcal{V}$*álgebra facial* $\mathfrak{H}$ *CQT tenemos* $\mathfrak{R}_L^{\mp}(g) = \mathfrak{R}_L^{\pm}(g)^{-1}$, *y* $\mathfrak{R}_R^{\mp}(g) = \mathfrak{R}_R^{\pm}(g)^{-1}$. *Si, además,* $\mathfrak{H}$ *es cerradiza, entonces*

$$\mathfrak{Q}_L^{\pm}(g) = \mathfrak{R}_L^{\pm}(g), \quad \mathfrak{Q}_R^{\pm}(g) = \mathfrak{R}_R^{\pm}(g). \tag{116}$$

□

Proposición 2.66. *Sea* $\mathfrak{H}$ *una* $\mathcal{V}$*-álgebra facial CQT. Para cada* $g \in GLE(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{J}_g = \mathfrak{J}_g^+$ *en* (109) *da un automorfismo de* $\mathfrak{H}$ *como* $\mathcal{V}$*-álgebra facial CQT, cuya inversa es* $\mathfrak{J}_g^-$. *La correspondencia* $g \mapsto \mathfrak{J}_g$ *es un morfismo de semigrupos de* $GLE(\mathfrak{H})$ *a* $Aut(\mathfrak{H})$.

Demostración. Vemos que

$$\mathfrak{J}_g^+(ab) = \mathfrak{R}^+(a_1b_1, g)a_2b_2\mathfrak{R}^-(a_3b_3, g) = \mathfrak{R}^+(a_1, g)\mathfrak{R}^+(b_1, g)a_2b_2\mathfrak{R}^-(a_3, g)\mathfrak{R}^-(b_3, g) =$$

$$\mathfrak{R}^+(a_1, g)a_2\mathfrak{R}^-(a_3, g)\mathfrak{R}^+(b_1, g)b_2\mathfrak{R}^-(b_3, g) = \mathfrak{J}_g^+(a)\mathfrak{J}_g^+(b).$$

Además,

$$(\mathfrak{J}_g \otimes \mathfrak{J}_g)\Delta(a) = \mathfrak{J}_g(a_1) \otimes \mathfrak{J}_g(a_2) = \mathfrak{R}^+(a_1, g)a_2\mathfrak{R}^-(a_3, g) \otimes \mathfrak{R}^+(a_4, g)a_5\mathfrak{R}^-(a_6, g) =$$

$$\mathfrak{R}^+(a_1, g)a_2\varepsilon(a_3) \otimes a_4\mathfrak{R}^-(a_5, g) = \mathfrak{R}^+(a_1, g)a_2 \otimes a_3\mathfrak{R}^-(a_4, g) = \Delta(J_g(a))$$

y

$$\varepsilon(\mathfrak{J}_g(a)) = \mathfrak{R}^+(a_1, g)\varepsilon(a_2)\mathfrak{R}^-(a_3, g) = \mathfrak{R}^+(a_1, g)\mathfrak{R}^-(a_2, g) = \varepsilon(a).$$

También podemos ver que

$$(\mathfrak{J}_g \otimes \mathfrak{J}_g)^*(\mathfrak{R}^+)(a \otimes b) = \mathfrak{R}^+(a_1, g)\mathfrak{R}^+(b_1, g)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2)\mathfrak{R}^-(a_3, g)\mathfrak{R}^-(b_3, g)$$

que, por (17)-(19), es

$$\mathfrak{R}^+(b_1a_1, g)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2)\mathfrak{R}^-(a_3b_3, g) = \mathfrak{R}^+(b_1a_1\mathfrak{R}^+(a_2, b_2), g)\mathfrak{R}^-(a_3b_3, g),$$

ahora, por (30), esto es igual a

$$\mathfrak{R}^+(a_1, b_1,)\mathfrak{R}^+(a_2, b_2, g)\mathfrak{R}^-(a_3b_3, g) = \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)\varepsilon(a_2b_2) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^+(a_1, b_1)\varepsilon(a_2e_k)\varepsilon(e_kb_2) = \sum_k \mathfrak{R}^+(ae_k, e_kb) = \sum_k \mathfrak{R}^+(a, e_k, b) = \mathfrak{R}^+(a, b).$$

Y finalmente,

$$\mathfrak{J}_g \circ \mathfrak{J}_h(a) = \mathfrak{J}_g(\mathfrak{R}^+(a_1, h)a_2\mathfrak{R}^-(a_3, h)) = \mathfrak{R}^+(a_1, h)\mathfrak{R}^+(a_2, g)a_3\mathfrak{R}^-(a_4, g)\mathfrak{R}^-(a_5, h) =$$

$$\mathfrak{R}^+(a_1, gh)a_3\mathfrak{R}^-(a_4, gh) = \mathfrak{J}_{gh}(a).$$

□

Con la notación introducida en la Definición 2.59, tenemos lo siguiente.

Proposición 2.67. *Sean* $\mathfrak{H}$ *un* $\mathcal{V}$*-álgebra facial CQT. Sean* a *y* g *elementos de* $\mathfrak{H}$ *y* $GLE(\mathfrak{H})$ *respectivamente. Entonces,*

(i) Tenemos $ga = \mathfrak{J}_g(a)g$ *y* $ag = g\mathfrak{J}_g^{-1}(a)$.

(ii) Tenemos $ga = 0$ *si y sólo si* $ag = 0$.

(iii) Para otro elemento group-like h, $e_{g,h}$ es inversible y $\mathfrak{J}_g^{\pm 1}(h) = e_{g,h}^{\mp 1}h$.

(iv) Para cada subsemigrupo G de GLE($\mathfrak{H}$) y $(a,g),(b,h) \in \mathfrak{H} \times G$, $(a,g) \sim_G (b,h)$ si y sólo existen elementos s,t de GLE($\mathfrak{H}$) tales que $as = bt$ y $gs = ht$.

Demostración. Sustituyendo $b = g$ en (30) y usando (21) y (13), obtenemos

$$\mathfrak{R}^+(a_1, ge_k)a_2ge_k^o = \sum_k ge_ka_1\mathfrak{R}^+(a_2, ge_k^o) = \sum_k ge_ka_1\mathfrak{R}^+(e_k^oa_2, g) = ga_1\mathfrak{R}^+(a_2, g).$$

Ahora,

$$\mathfrak{J}_g(a)g = \mathfrak{R}^+(a_1, g)a_2\mathfrak{R}^-(a_3, g)g.$$

Multiplicando por

$$\mathfrak{R}^+(a_3, g)^{-1}\mathfrak{R}_R^+(g)(a_3)^{-1} = \mathfrak{R}_R^-(g)(a_3)\mathfrak{R}^-(a_3, g),$$

tenemos que la igualdad anterior es

$$\mathfrak{R}^+(a_1, g)a_2g\mathfrak{R}^-(a_3g) = ga_1\varepsilon(a_2) = ga.$$

Y así vemos la primera fórmula de la parte (i). La otra fórmula se sigue de manera análoga:

$$gJ_g^{-1}(a) = g\mathfrak{R}^-(a_1, g)a_2\mathfrak{R}^+(a_3, g) = \mathfrak{R}^-(a_1, g)ga_2\mathfrak{R}^+(a_3, g) = \mathfrak{R}^-(a_1, g)\mathfrak{R}^+(a_2, g)a_3g =$$

$$\varepsilon(a_1g)a_2g = \varepsilon(a_1)a_2g = ag.$$

La parte (iii) se sigue de la Proposición 2.64, ya que tenemos

$$e_{g,h} = \sum_{k,l} \mathfrak{R}^-(he_k, g)\mathfrak{R}^+(he_l, g)e_k^oe_l,$$

$$J_g(h) = \sum_{k,l} \mathfrak{R}^+(he_k, g)he_k^oe_l\mathfrak{R}^-(he_l^o, g) =$$

$$\left[\sum_{k,l} \mathfrak{R}_R^+(g)(he_k)\mathfrak{R}_R^-(g)(he_l^o)e_k^oe_l\right] h =: fh.$$

Notemos que por la Proposición 2.64, (iii), en este caso

$$\mathfrak{R}_R^\pm(g)(he_k) = \mathfrak{R}_R^\pm(g)(he_k^o).$$

Así,

$$e_{g,h}f = \sum_{k,l}\sum_{i,j} \mathfrak{R}_R^-(g)(he_k)\mathfrak{R}_R^+(g)(he_l)\mathfrak{R}_R^-(g)^{-1}(h_i)\mathfrak{R}_R^-(g)^{-1}(he_j)e_k^oe_le_i^oe_j =$$

$$\sum_{k,l} \mathfrak{R}_R^-(g)(he_k)\mathfrak{R}_R^-(g)^{-1}(he_k)\mathfrak{R}_R^+(g)(he_l)\mathfrak{R}_R^+(g)^{-1}(he_l)e_k^oe_l =$$

$$\sum_{k,l} \varepsilon(h)\varepsilon(h)e_k^oe_l = 1,$$

y así $J_g(h) = e_{g,h}^{-1}h$. Obtenemos la segunda fórmula de este ítem aplicando a ambos miembros de esta igualdad J_g^{-1}, obteniendo

$$h = J_g^{-1}(e_{g,h}^{-1}h) = J_g^{-1}(e_{g,h}^{-1})J_g^{-1}(h).$$

Ahora, por la primera fórmula,

$$J_g^{-1}(e_{g,h}^{-1})e_{g,h}^{-1} = J_g(J_g^{-1}(e_{g,h}^{-1})) = e_{g,h}^{-1},$$

y entonces $h = e_{g,h}^{-1}J_g^{-1}(h)$, i. e., $J_g^{-1}(h) = e_{g,h}h$. Con respecto a la parte (ii), si $0 = ga = \mathfrak{J}_g(a)g$, entonces

$$0 = \mathfrak{J}_g^{-1}(\mathfrak{J}_g(a)g) = a\mathfrak{J}_g^{-1}(g) = ag.$$

Finalmente, si $(a, g) \sim_G (b, h)$, sean $c, d \in \mathfrak{H}$ tales que $ac = bd$ y $gc = hd \in G$. Entonces

$$cg = g\mathfrak{J}_g^{-1}(c) = \mathfrak{J}_g^{-1}(\mathfrak{J}_g(g)c) = \mathfrak{J}_g^{-1}(gc) = \mathfrak{J}_g^{-1}(\mathfrak{J}_g(c)g) = \mathfrak{J}_g^{-1}(g)\mathfrak{J}_g^{-1}(\mathfrak{J}_g(c)) = gc.$$

Sean entonces $s = cgh$ y $t = dgh$, vemos que

$$as = acgh = bdgh = bt, \quad gs = gcgh = hdgh = ht,$$

y $s \in G$, ya que $s = cgh = gch$ y $g, ch \in G$. Análogamente, $t \in G$, de donde obtenemos (iv). □

Esta proposición y la siguiente nos darán las herramientas para realizar la demostración del Teorema 2.60.

Lema 2.68. *Los $e_{g,h}$ definidos en* (110)*, cumplen, para $h, g, k \in G$, dado que éste es un semigrupo, que*

1. $e_{hg,k} = e_{h,k}e_{g,k}$.
2. $e_{g,hk} = e_{g,h}e_{g,k}$.

Demostración.

$$e_{hg,k} = \sum_{i,j} \mathfrak{R}^-(ke_i, hg)\mathfrak{R}^+(ke_j, hg)e_i^o e_j =$$

$$\sum_{i,j} \mathfrak{R}^-((ke_i)_1, g)\mathfrak{R}^-((ke_i)_2, h)\mathfrak{R}^+((ke_j)_1, h)\mathfrak{R}^+((ke_j)_2, g)e_i^o e_j,$$

por (20) y (18) y por ser k group-like y la propiedad (107). Ahora,

$$\Delta(ke_i) = \Delta(k)\Delta(e_i) = \sum_{a,b} ke_a e_b \otimes ke_a^o e_b^o e_i = \sum_a ke_a \otimes ke_a^o e_i.$$

Así, la cuenta continúa como

$$\sum_{i,j,a,b} \mathfrak{R}^-(ke_a, g)\mathfrak{R}^-(ke_a^o e_i, h)\mathfrak{R}^+(ke_b, h)\mathfrak{R}^+(ke_b^o e_j, g)e_i^o e_j,$$

pero, si $g, h \in G$, como tenemos $ge_i e_j^o = e_i e_j^o g$ y lo mismo para h, por (21),

$$\mathfrak{R}^+(he_i, g)\mathfrak{R}^+(h, e_i g)\mathfrak{R}^+(h, ge_i) = \mathfrak{R}^+(he_i^o, g) =$$

$$\mathfrak{R}^+(e_i^o h, g)\mathfrak{R}^+(h, ge_i^o) = \mathfrak{R}^+(h, e_i^o g) = \mathfrak{R}^+(e_i h, g).$$

Así, vale que

$$\mathfrak{R}^+(he_i, g) = \mathfrak{R}^+(he_i^o, g) = \mathfrak{R}^+(e_i h, g) = \mathfrak{R}^+(he_i^o, g) \tag{117}$$

y lo mismo vale para $\mathfrak{R}^-$, por (22). La cuenta sigue, entonces

$$\sum_{i,j} \mathfrak{R}^-(ke_i, g)\mathfrak{R}^-(ke_i, h)\mathfrak{R}^+(ke_j, h)\mathfrak{R}^+(ke_j, g)e_i^o e_j =$$

$$\sum_{i,j}\sum_{a,b} \mathfrak{R}^-(ke_i, g)\mathfrak{R}^+(ke_j, g)\mathfrak{R}^-(ke_a, h)\mathfrak{R}^+(ke_b, h)e_i^o e_a^o e_j e_b = e_{g,k}e_{h,k}.$$

Así tenemos (i) y, análogamente, probamos (ii),

$$e_{g,hk} = \sum_{i,j} \mathfrak{R}^-(hke_i, g)\mathfrak{R}^+(hke_j, g)e_i^o e_j = \sum_{i,j} \mathfrak{R}^-(he_ie_ik, g)\mathfrak{R}^+(he_je_jk, g)e_i^o e_j =$$

$$\sum_{i,j} \mathfrak{R}^-(he_i, g)\mathfrak{R}^-(e_ik, g)\mathfrak{R}^+(he_j, g)\mathfrak{R}^+(e_jk, g)e_i^o e_j = e_{g,h}e_{g,k},$$

□

Ahora vemos la demostración del teorema.

Demostración. Vamos a verlo en varios pasos.

1. Veamos la afirmación correspondiente al $\mathrm{Ker}(\iota_G)$. Si $\iota_G(a) = 0$, entonces $a/1 = 0$, y esto ocurre si y sólo si existe $g \in G$ tal que $ag = 0$.

2. Comenzamos a ver la estructura de $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT en $\mathfrak{H}[G^{-1}]$. Veamos primero que las operaciones en (111) están bien definidas y no dependen de los representantes de las distintas clases de equivalencia. Si a/g, a'/g' son dos representantes de una misma clase de equivalencia, para ver que el producto está bien definido, tenemos que ver que, dado b/h otro elemento de $\mathfrak{H}[G^{-1}]$,

   $$a\mathfrak{J}_g^-(b)/hg = a'\mathfrak{J}_{g'}^-(b)/(hg')$$

   Tenemos que existen $c, g \in G$ tal que $ac = a'd, gc = g'd$. Tenemos entonces que $hgc = hg'd$. Necesitamos ver

   $$a\mathfrak{J}_g^-(b)c = a'\mathfrak{J}_{g'}^-(b)d.$$

   Y, en efecto,

   $$a\mathfrak{J}_g^-(b)c = ac\mathfrak{J}_c^-\mathfrak{J}_g^-(b) = a'd\mathfrak{J}_{gc}^-(b) = a'd\mathfrak{J}_{g'd}^-(b) = a'd\mathfrak{J}_d^-\mathfrak{J}_{g'}^-(b) = a'\mathfrak{J}_(^- g')(b)d.$$

   Para ver que la suma también resulta bien definida, debemos ver que

   $$(ahe_{hg}^{-1} + bg)c = (a'he_{hg'}^{-1} + bg')d.$$

   Tenemos que

   $$(ahe_{hg}^{-1} + bg)c = ahe_{hg}^{-1}c + bgc = ahce_{hg}^{-1} + bg'd = ache_{hc}^{-1}e_{hg}^{-1} + bg'd =$$

   $$a'dh(e_{hg}e_{hc})^{-1} + bg'd = a'dhe_{hgc}^{-1} + bg'd = a'dhe_{hg'd}^{-1} + bg'd = a'dhe_{hd}^{-1}e_{hg'}^{-1} + bg'd =$$

   $$a'hde_{hg'}^{-1} + bg'd = (a'he_{hg'}^{-1} + bg')d.$$

3. A continuación vemos que la suma definida en (111) es asociativa. Por un lado,

$$(a/g+b/h)+c/k=((ahe_{gh}+bg)ke_{hgk}+chg)/(khg)=$$
$$(ahe_{gh}ke_{hgk}+bgke_{hgk}+chg)/(khg) \tag{118}$$

y

$$a/g+(b/h+c/k)=(akhe_{gkh}+(bke_{hk}+ch)g)/(khg)=$$
$$(akhe_{gkh}+bke_{hk}g+chg)/(khg). \tag{119}$$

Ahora,

$$bgke_{hg,k}=bgke_{h,k}e_{g,k}=be_{h,k}ge_{g,k}k=$$
$$be_{h,k}gJ_g^{-1}(k)=be_{h,k}kg,$$

de donde tenemos la igualdad de los términos centrales del numerador y también podemos ver la de los primeros términos, pues

$$ahke_{g,h}e_{hg,k}=ahke_{g,h}e_{h,k}e_{g,k}=ahke_{h,k}e_{g,kh}=ahe_{h,k}ke_{g,kh}=$$
$$ahJ_h^{-1}(k)e_{g,kh}=akhe_{g,kh}.$$

Veamos que es también conmutativa.

$$a/g+b/h=(ahe_{gh}+bg)/(hg), \quad b/h+a/g=(bge_{hg}+ah)/(gh)$$

Tenemos que ver que, entonces,

$$(ahe_{gh}+bg,hg)\sim_G(bge_{hg}+ah,gh).$$

Tomamos para esto $c=h$, $d=e_{gh}h$ y obtenemos

$$hgc=hgh=ghe_{gh}h=ghd,$$
$$bgc=bgh=bJ_g^{-1}(h)g=bhe_{h,g}g=bhge_{h,g}=$$
$$bgJ_g^{-1}(h)e_{h,g}=bge_{g,h}he_{h,g}=bge_{h,g}d,$$

y, finalmente, tenemos

$$ahe_{gh}c=ahe_{gh}h=ahd.$$

4. Ahora vemos la propiedad de asociatividad del producto en (111), y la unidad. Vemos que $1/1\cdot a/g=1\mathfrak{J}_1^-(a)/g$ y

$$\mathfrak{J}_1^-(a)=\mathfrak{R}^-(a,1)a_2\mathfrak{R}^+(a_3,1)=\varepsilon(a_1)a_2\varepsilon(a_3)=a.$$

Por otro lado, $a/g\cdot 1/1=a\mathfrak{J}_g^-(1)/g$ y

$$\mathfrak{J}_g^-(1)=\mathfrak{R}^-(1_{(1)},g)1_{(2)}\mathfrak{R}^+(1_{(3)},g)=\sum_{k,l}\mathfrak{R}^-(e_k,g)e_k^oe_l\mathfrak{R}^+(e_l^o,g)=$$
$$\sum_{k,l}\varepsilon(ge_k)e_k^oe_l\varepsilon(ge_l)=\sum_{k,l}e_k^oe_l=1.$$

Tenemos además que

$$[(a/g)(b/h)](c/k)=a\mathfrak{J}_g^-(b)\mathfrak{J}_{hg}^-(c)/khg,$$

igual a

$$(a/g)[(b/h)(c/k)]=a\mathfrak{J}_g^-(b\mathfrak{J}_h^-(c))/khg.$$

5. Mostramos ahora la coasociatividad del coproducto y los axiomas correspondientes a la counidad, definidos en (112) Es inmediato de la definición, que

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta(a/g) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(a_1/g\otimes a_2/g) = a_1/g\varepsilon(a_2/g) = \varepsilon(a_2)a_1/g = a/g,$$

y

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(a/g) = a_1/g\otimes\Delta(a_2/g) = \Delta(a_1/g)\otimes a_2 = (\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(a/g)$$

y las otros axiomas se cumplen de manera análoga.

6. Chequeamos los axiomas (1)-(5) que hacen de $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial.

7. Chequeamos los axiomas (1)-(5) que hacen de $\mathfrak{H}[G^{-1}]$ una $\mathcal{V}$-álgebra face. Tenemos que

$$\Delta((a/g)(b/h)) = (\Delta(a\mathfrak{J}_g^-(b)/(hg)) = (a\mathfrak{J}_g^-(b))_1/(hg))(a\mathfrak{J}_g^-(b))_2/(hg)) =$$

$$(a_1(\mathfrak{J}_g^-(b))_1/(hg))(a_2(\mathfrak{J}_g^-(b))_2/(hg)) \tag{120}$$

$$\Delta(\mathfrak{J}_g^-(b)) = \Delta(\mathfrak{R}^-(b_1,g)b_2)\mathfrak{R}^+(b_3,g) = \mathfrak{R}^-(b_1,g)b_2\otimes b_3\mathfrak{R}^+(b_4,g) =$$

$$\mathfrak{R}^-(b_1,g)b_2\mathfrak{R}^+(b_3,g)\mathfrak{R}^-(b_4,g)\otimes b_5\mathfrak{R}^+(b_6,g) = \mathfrak{J}_g^-(b_1)\otimes\mathfrak{J}_g^-(b_2).$$

Por lo tanto, (120) es igual a

$$(a_1\mathfrak{J}_g^-(b_1)/(hg))\otimes(a_2\mathfrak{J}_g^-(b_2)/(hg)) = (a_1/g)(b_1/h)\otimes(a_2/g)(b_2/h) = \Delta(a/g)\Delta(b/h).$$

Así tenemos el axioma (1). Inmediatamente vemos las igualdades del axioma (2), e.g.

$$(e_i/1)(e_j/1) = e_i\mathfrak{J}_1^-(e_j)/1 = e_ie_j/1 = \delta_{i,j}e_i/1.$$

Para el axioma (3), tenemos $e_i/1 + e_j/1 = (e_ie_{11}+e_j)/1 = (e_i+e_j)/1$, ya que $e_{11}=1$. También es inmediato el axioma (4),

$$\Delta((e_i^o/1)(e_j/1)) = \Delta((e_i^oe_j)/1) = \sum_k((e_i^oe_k)/1)\otimes((e_k^oe_j)/1) =$$

$$\sum_k((e_i^o/1)(e_k/1))\otimes((e_k^o/1)(e_j/1)).$$

y

$$\varepsilon((e_i^o/1)(e_j/1)) = \varepsilon((e_i^oe_j)/1) = \varepsilon(e_i^oe_j) = \delta_{i,j}.$$

Ahora, tomamos

$$\varepsilon((a/g)(b/h)) = \varepsilon((a\mathfrak{J}_g^-(b))/(hg)) = \varepsilon(a\mathfrak{J}_g^-(b)) = \sum_k\varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k^o\mathfrak{J}_g^-(b)).$$

Ahora,

$$\varepsilon(e_k^o\mathfrak{J}_g^-(b)) = \varepsilon(e_k^ob_2)\mathfrak{R}^-(b_1,g)\mathfrak{R}^+(b_3,g) = \mathfrak{R}^-(b_1,g)\mathfrak{R}^+(e_k^ob_2,g) =$$

$$\mathfrak{R}^-(b_1,g)\mathfrak{R}^+(ge_k^o) = \mathfrak{R}^-(b_1,g)\mathfrak{R}^+(b_2,e_k^og) = \mathfrak{R}^-(b_1,g)\mathfrak{R}^+(e_kb_2,g) =$$

$$\mathfrak{R}^-(b_1,g)\mathfrak{R}^+(b_2,g)\varepsilon(e_kb_3) = \varepsilon(b_1g)\varepsilon(e_kb_2) = \varepsilon(b_1)\varepsilon(e_kb_2) = \varepsilon(e_k^ob).$$

Entonces tenemos

$$\varepsilon((a/g)(b/h)) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k^o b) = \varepsilon(ab).$$

Mientras que

$$\sum_k \varepsilon((a/g)(e_k/1))\varepsilon((e_k^o/1)(b/h)) = \sum_k \varepsilon(a\mathfrak{J}_g^-(e_k))\varepsilon(e_k^o\mathfrak{J}_1^-(b)) =$$

$$\sum_k \varepsilon(a\mathfrak{J}_g^-(e_k))\varepsilon(e_k^o\mathfrak{J}_1^-(b)) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k^o b) = \varepsilon(ab),$$

ya que

$$\mathfrak{J}_g^-(e_k) = \sum_{i,j} \mathfrak{R}^-(e_i, g)e_i^o e_j \mathfrak{R}^+(e_j^o e_k, g) = \sum_{i,j} \varepsilon(e_i g)e_i^o e_j \varepsilon(e_j g e_k) =$$

$$\sum_i \varepsilon(e_i g)e_i^o e_k \varepsilon(g e_k) = \sum_i e_i^o e_k = e_k.$$

8. Finalmente, vemos que la definición (113) da una trenza en este álgebra, y así obtenemos la estructura de $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT. $(\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^-)$ es un s-pareo bilineal en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ y por lo tanto, también lo es $(\mathfrak{R}_{21}^-, \mathfrak{R}_{21}^+)$. Ahora utilizamos la Proposición 2.69 a continuación para generar la siguiente cadena de conclusiones. $((\mathfrak{R}_{21}^-)_G, (\mathfrak{R}_{21}^+)_G)$ es un s-pareo bilineal en $(\mathfrak{H}[G^{-1}], \mathfrak{H})$ y entonces $([(\mathfrak{R}_{21}^+)_G]_{21}, [(\mathfrak{R}_{21}^-)_G]_{21})$ lo es en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}[G^{-1}])$. Y así, por la proposición, tenemos en $(\mathfrak{H}[G^{-1}], \mathfrak{H}[G^{-1}])$ el s-pareo bilineal inversible

$$(([(\mathfrak{R}_{21}^+)_G]_{21})_G, ([(\mathfrak{R}_{21}^-)_G]_{21})_G)$$

que cumple las relaciones (25), (26) por hacerlo $\mathfrak{R}^\pm$. Vemos entonces que además coincide con la definición (113), ya que,

$$([(\mathfrak{R}_{21}^+)_G]_{21})_G(a/g, b/h) = [(\mathfrak{R}_{21}^+)_G]_{21}(a, b_1/h)[(\mathfrak{R}_{21}^-)_G]_{21}(g, b_2/h) =$$

$$(\mathfrak{R}_{21}^+)_G(b_1/h, a)(\mathfrak{R}_{21}^-)_G(b_2/h, g) = \mathfrak{R}_{21}^-(h, a_1)\mathfrak{R}_{21}^+(b_1, a_2)\mathfrak{R}_{21}^-(b_2, g_1)\mathfrak{R}_{21}^+(h, g_2) =$$

$$\mathfrak{R}^-(a_1, h)\mathfrak{R}^+(a_2, b_1)\mathfrak{R}^-(g_1, b_2)\mathfrak{R}^+(g_2, h) =$$

$$\sum_k \mathfrak{R}^-(a_1, h)\mathfrak{R}^+(a_2, b_1)\mathfrak{R}^-(ge_k, b_2)\mathfrak{R}^+(ge_k^o, h).$$

9. Además, si $\mathfrak{H}$ es cerradiza, con razonamientos similares al ítem anterior, utilizando la Propiedad 2.69, obtenemos formas de Lyubashenko $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{H}[G^{-1}]}^\pm$ para $\mathfrak{H}[G^{-1}]$.

□

Proposición 2.69. *Sea $\mathfrak{H}$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT y G un subsemigrupo de GLE($\mathfrak{H}$). Sea $\mathfrak{K}$ otra $\mathcal{V}$-álgebra facial y $\mathfrak{F}^+$ un s-pareo inversible en $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ con inversa generalizada $\mathfrak{F}^-$. Entonces existe el s-pareo inversible $\mathfrak{F}_G^+$ en $(\mathfrak{H}[G^{-1}]), \mathfrak{K})$ dado por*

$$\mathfrak{F}_G^+(a/g, x) = \mathfrak{F}^+(a, x_1)\mathfrak{F}^-(g, x_2), \tag{121}$$

$$\mathfrak{F}_G^-(a/g, x) = \mathfrak{F}^+(g, x_1)\mathfrak{F}^-(a, x_2) \tag{122}$$

para cada $a \in \mathfrak{H}, g \in G$ y $x \in \mathfrak{K}$.

Demostración. Usando la parte (iv) de la Proposición 2.67 y la parte (i) de la Proposición 2.64, vemos que (121) y (122) determinan mapas bilineales bien definidos en $(\mathfrak{H}[G^{-1}]), \mathfrak{K})$, ya que, si $a/g\ a'/g'$, entonces, notando que,

$$\mathfrak{F}^+(a, x_1)\mathfrak{F}^-(g, x_2) = \mathfrak{F}^+_L(a)\mathfrak{F}^+_l(g)^{-1}(x)$$

y, si c, d son como en la definición de la relación de equivalencia $\sim_G$, tenemos

$$\mathfrak{F}^+_l(a')\mathfrak{F}^+_L(g')^{-1}(x) = \mathfrak{F}^+_l(a')\mathfrak{F}^+_l(c)\mathfrak{F}^+_L(c)^{-1}\mathfrak{F}^+_L(g')^{-1}(x) =$$

$$\mathfrak{F}_L(a'c)\mathfrak{F}^-_l(g'c)(x) = \mathfrak{F}^+_l(ac)\mathfrak{F}^-_L(gc)(x) = \mathfrak{F}^+_l(a)\mathfrak{F}^+_L(g)^{-1}(x)$$

Veamos ahora que $\mathfrak{F}^\pm_G$ son efectivamente s-pareos bilineales inversibles. Pero

$$\mathfrak{F}^+_G\mathfrak{F}^-_G(a/b, x) = \mathfrak{F}^+_G(a_1/g, x_1)\mathfrak{F}^-_G(a_2/g, x_2) =$$

$$\mathfrak{F}^+(a_1, x_1)\mathfrak{F}^-(g, x_2)\mathfrak{F}^+(g, x_3)\mathfrak{F}^-(a_2, x_4) = \mathfrak{F}^+(a_1, x_1)\mathfrak{E}^+(g, x_2)\mathfrak{F}^-(a_2, x_3) =$$

$$\mathfrak{F}^+(a_1, x_1)\varepsilon(x_2)\mathfrak{F}^-(a_2, x_3) = \mathfrak{F}^+\mathfrak{F}^-(a, x) = \mathfrak{E}^-(a, x) = \sum_k \varepsilon(e_k a)\varepsilon(x e_k) =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_k/1 \cdot a/g)\varepsilon(x e_k)\mathfrak{E}^-(a/g, x),$$

ya que

$$e_k/1 \cdot a/g = e_k\mathfrak{I}_1^{-1}(a)/g = (e_k a)/g.$$

Además,

$$\mathfrak{F}^+_G((a/g)(b/h), x) = \mathfrak{F}^+(a\mathfrak{I}^-_g(b)/(hg), x) = \mathfrak{F}^+(a\mathfrak{I}^-_g(b), x_1)\mathfrak{F}^-(hg, x_2) =$$

$$\mathfrak{F}^+(a, x_1)\mathfrak{F}^+(\mathfrak{I}^-_g(b), x_2)\mathfrak{F}^-(g, x_3)\mathfrak{F}^-(h, x_4).$$

Mientras que

$$\mathfrak{F}^+_G(a/g, x_1)\mathfrak{F}^+_G(b/h, x_2) = \mathfrak{F}^+(g, x_1)\mathfrak{F}^-(g, x_2)\mathfrak{F}^+(b, x_3)\mathfrak{F}^-(h, x_4).$$

Veamos entonces que

$$\mathfrak{F}^+(\mathfrak{I}^-_g(b), x_2)\mathfrak{F}^-(g, x_3) = \mathfrak{F}^-(g, x_2)\mathfrak{F}^+(b, x_3),$$

o, en general, que

$$\mathfrak{F}^+(\mathfrak{I}^-_g(b), x_1)\mathfrak{F}^-(g, x_2) = \mathfrak{F}^-(g, x_1)\mathfrak{F}^+(b, x_2).$$

Sean

$$H(g, x, b) = \mathfrak{F}^-(g, x_1)\mathfrak{F}^+(b, x_2), \quad H^-(g, x, b) = \mathfrak{F}^-(b, x_1)\mathfrak{F}^+(g, x_2).$$

Así,

$$H^-H(g, x, b) = \mathfrak{F}^-(b_1, x_1)\mathfrak{F}^+(g_1, x_2)\mathfrak{F}^-(g_2, x_3)\mathfrak{F}^+(b_2, x_4) =$$

$$\mathfrak{F}^-(b_1, x_1)\varepsilon(x_2)\mathfrak{F}^+(b_2, x_2) = \sum_k \varepsilon(b e_k)\varepsilon(e_k x).$$

Por otro lado,

$$\mathfrak{F}^-(b_1, x_1)\mathfrak{F}^+(g\mathfrak{I}_g(b_2), x_3)\mathfrak{F}^-(g, x_4) = \mathfrak{F}^-(b_1, x_1)\mathfrak{F}^+(g\mathfrak{I}_g(b_2), x_3)\mathfrak{F}^-(g, x_3) =$$

$$\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^+(b_2g,x_2)\mathfrak{F}^-(g,x_3)=\mathfrak{F}^-(b_1,x_1)\mathfrak{F}^+(b_2,x_2)\mathfrak{F}^+(g,x_3)\mathfrak{F}^-(g,x_4)=$$
$$\sum_k \varepsilon(b_1e_k)\varepsilon(e_kx)\sum_l \varepsilon(ge_k)\varepsilon(e_kx_2)=\sum_k \varepsilon(be_k)\varepsilon(e_kx).$$

Y así, continuando con las otras igualdades que definen a la inversa generalizada, por la unicidad de la misma, tenemos la igualdad buscada. Ahora también,

$$\mathfrak{F}^+_G(a/g,xy)=\mathfrak{F}^+(a,x_1y_1)\mathfrak{F}^-(g,x_2y_2)=$$

$$\mathfrak{F}^+(a_1,y_1)\mathfrak{F}^+(a_2,x_1)\mathfrak{F}^-(g_1,x_2)\mathfrak{F}^-(g_2,y_2)=\mathfrak{F}^+(a_1,y_1)\mathfrak{F}^+(a_2,x)\mathfrak{F}^-(g,x)\mathfrak{F}^-(g,y_2)=$$
$$\mathfrak{F}^+_g(a_1/g,y)\mathfrak{F}^+_g(a_2/g,x),$$

y por lo tanto $\mathfrak{F}^\pm_G$ da un s-pareo bilineal inversible en $(\mathfrak{H}[G^{-1}],\mathfrak{H})$. $\square$

3. Biálgebras débiles

3.1. Álgebras separables

Recordaremos a continuación algunas propiedades de las álgebras separables, tal como aparecen en [8] y [6]. En lo siguiente, R denotará un anillo conmutativo, A será una R-álgebra y $A^e = A \otimes_R A^o$, con A^o el álgebra opuesta. Sea $\mu : A^e \to A$ definido por $\mu(\sum a_i \otimes a_i^o) = \sum a_i a_i^o$.

Observación 3.1. Con estas definiciones, obtenemos

1. A tiene una estructura de A^e-módulo a izquierda dada, por $(a \otimes a^o) \cdot b = aba^o$,

2. μ resulta un morfismo de A^e-módulos y

3. si $J = \ker \mu$, tenemos la sucesión exacta de A^e-módulos

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A^e \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Proposición 3.2. *J es un ideal a izquierda generado por* $\{a \otimes 1 - 1 \otimes a \,/\, a \in A\}$

Demostración. Es claro que $\langle a \otimes 1 - 1 \otimes a\rangle \subset J$. Si $c = \sum c_i \otimes c_i^o \in J$, $\sum c_i c_i^o = 0$, entonces $c = -\sum_i (c_i \otimes 1)(c_i^o \otimes 1 - 1 \otimes c_i^o) \in \langle a \otimes 1 - 1 \otimes a\rangle$. □

Proposición 3.3. *Son equivalentes:*

(i) *A es proyectiva como A^e-módulo a izquierda.*

(ii) $0 \longrightarrow J \longrightarrow A^e \longrightarrow A \longrightarrow 0$ *se escinde como sucesión de A^e-módulos.*

(iii) $\exists\, e \in A^e$ *tal que* $\mu(e) = 1$ *y* $Je = 0$.

Demostración. La equivalencia entre (i) y (ii) es clara. Ahora, si vale (ii), existe un mapa $\psi : A \to A^e$ con $\mu\psi = \mathrm{id}_A$. Definimos $e = \psi(1)$. Entonces $\mu(e) = 1$ y $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)e = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)\psi(1) = \psi(a - a) = 0$. Por lo tanto, $Je = 0$.
Recíprocamente, si tenemos (iii), definimos $\psi : A \to A^e$, como $\psi(a) = (a \otimes 1)e = (1 \otimes a)e$. Así definido, ψ resulta un morfismo de A^e-módulos:

$$\psi\left((a \otimes b) \cdot c\right) = \psi(acb) = (acb \otimes 1)e = (ac \otimes 1)(b \otimes 1)e =$$

$$(ac \otimes 1)(1 \otimes b)e = (ac \otimes b)e = (a \otimes b)(c \otimes 1)e = (a \otimes b)\psi(c).$$

Además, $\mu\psi(a) = \mu\left((a \otimes 1)e\right) = \mu(a \otimes 1) = a$. □

Definición 3.4. *Una R-álgebra A se dice separable si cumple una (y por lo tanto todas) de las condiciones de la proposición anterior.*

Observación 3.5. e resulta necesariamente nilpotente:

$$e^2 - e = (e - 1 \otimes 1)e \in Je = 0.$$

Definición 3.6. *Llamamos a e un nilpotente de separabilidad.*

Definición 3.7. *Decimos que un idempotente simétrico de separabilidad $e = e_1\ e_2$ es simétrico si $\tau(e) = e$, donde $\tau : A^e \to A^e$ denota la trasposición usual.*

Ejemplos 3.8. 1. Sea $M_n(R)$ el anillo de matrices $n \times n$ sobre R. Así, $M_n(R)$ resulta un álgebra separable con idempotente $e = e_j = \sum_i E_{ij} \otimes E_{ji}$, donde E_{ij} es la matriz cuyas entradas son todas nulas salvo por un 1 en el lugar (i, j). Si n es inversible en R, este álgebra tiene también un idempotente simétrico de separabilidad, dado por

$$\hat{e} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

2. Si G es un grupo finito cuyo orden n es una unidad en R, el álgebra de grupo $R[G]$ es un álgebra separable con idempotente de separabilidad dado por $e = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes \sigma^{-1}$.

Veremos ahora, sin demostración, cuatro resultados que serán útiles en consideraciones posteriores.

Proposición 3.9. *1. Si A es una R-álgebra separable y S es una R-álgebra conmutativa cualquiera, entonces $A \otimes S$ es S-separable.*

2. A R-álgebra y S R-álgebra conmutativa que contiene a R como sumando directo, entonces A es separable si $A \otimes S$ es S-separable. Más aún, si $(1 \otimes S)$ es el centro de $A \otimes S$, $R \cdot 1$ es el centro de A.

3. S R-álgebra separable conmutativa, A S-álgebra separable. Si A es una R-algebra separable y S es una R-subálgebra del centro de A, entonces A es S-separable.

4. Sean A_1 una R_1-álgebra y A_2 una R_2-álgebra, con R_1 y R_2 anillos conmutativos. Entonces $A_1 \times A_2$ es un álgebra $R_1 \times R_2$-separable si y sólo si A_1 y A_2 son R_1-separable y R_2-separable respectivamente.

Veremos a continuación la conexión entre la definición que hemos dado de separabilidad y la definición clásica correspondiente al caso en que el anillo de coeficientes R es un cuerpo.

Definición 3.10. *Sea R un cuerpo. Una R-álgebra A es clásicamente separable si el radical de Jacobson de $A \otimes_R K$ es 0 para toda extensión K de R.*

Observación 3.11. Notar que en particular, con la definición anterior y $R = K$, A resulta semisimple.

Proposición 3.12. *Si A es una R-álgebra separable proyectiva como R-módulo, entonces A es finitamente generada como R-módulo.*

Demostración. Sea $\{f_i, a_i^o\}$ una base dual de A^o sobre R con $a_i^o \in A^o$ y $f_i \in \mathrm{Hom}_R(A^o, R)$ (A^o es proyectiva si A lo es). Esto es, dado $a \in A^o$, $a = \sum f_i(a) a_i$, donde $f_i(a) = 0$ salvo para finitos índices i. Si identificamos $A \otimes_R R$ con A, podemos considerar a $1_A \otimes f_i$ en $\mathrm{Hom}_A(A^e, A)$ y el conjunto $\{\mathrm{id}_A \otimes f_i, 1_A \otimes a_i\}$ forma una base dual para A^e como A-módulo proyectivo a izquierda, esto es, para $u \in A^e$,

$$u = \sum_i (\mathrm{id}_A \otimes f_i)(u) \cdot (1_A \otimes a_i).$$

Aplicando μ y tomando $u = (1_A \otimes a)e$, con e idempotente de separabilidad, tenemos

$$a = \mu\left((1_A \otimes a)e\right) = \sum_i \left[(\mathrm{id}_A \otimes f_i)((1_A \otimes a)e)\right] \cdot a_i. \qquad (123)$$

Como $(\mathrm{id}_A \otimes f_i)((1_A \otimes a)e) = (\mathrm{id}_A \otimes f_i((a \otimes 1)e)) = (a \otimes 1)((1_A \otimes a)e)$, el conjunto de índices i para los cuales $(\mathrm{id}_A \otimes f_i)((1_A \otimes a)e) \neq 0$ en (123) es un subconjunto del conjunto finito de i para los cuales $(\mathrm{id}_A \otimes f_i)(e) \neq 0$, independiente de a. Si $e = \sum e_i \otimes e_i^o$, tenemos, en (123),

$$a = \sum_{i,j} e_j f_i(e_j^o a) a_i = \sum_{i,j} f_i(e_j^o a) e_j a_i.$$

Por lo tanto, $\{e_j a_i\}$ genera a A^o (y entonces a A) sobre R. □

Corolario 3.13. *Si A R-álgebra separable, con R cuerpo, la dimensión de A como espacio vectorial sobre R es finita.*

Proposición 3.14. *Sea A una R-álgebra separable. Entonces todo A-módulo R-proyectivo (con la estructura inducida por la de A, considerando $R \cdot 1 \subset A$) es A-proyectivo.*

Demostración. Sea la sucesión exacta de A-módulos $0 \to L \to N \xrightarrow{\eta} M \to 0$. M es A proyectivo sii toda sucesión de este tipo se escinde. Supongamos que M es R-proyectivo. La sucesión entonces se escinde, i. e. existe $\psi : M \to N$ morfismo de R-módulos tal que $\eta\psi = \mathrm{id}_M$. Por ser N, M A-módulos a izquierda, podemos dotar a $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ con la estructura de A^e-módulo a izquierda dada por $\left[(a \otimes a^o) \cdot f\right](m) = af(a^o m)$, para $a, a^o \in A, f \in \mathrm{Hom}_R(M, N), m \in M$. Usamos ahora la separabilidad de A para modificar a ψ de modo tal que resulte ahora un A-morfismo. Si e es el idempotente de separabilidad de A, definimos $\psi' := e \cdot \psi$, i. e.

$$\psi'(m) = \sum_i e_i \psi(e_i^o m).$$

Como η es un A-morfismo y $\mu(e) = 1$,

$$\eta\psi'(m) = \eta\left(\sum_i e_i \psi(e_i^o m)\right) = \sum_i e_i \eta\psi(e_i^o m) = \sum_i e_i e_i^o m = m.$$

Más aún, como $Je = 0$, tenemos $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)\psi' = 0$ y entonces

$$a\psi'(m) = (a \otimes 1)\psi'(m) = (1 \otimes a)\psi'(m) = \psi'(am).$$

Por lo tanto la sucesión se A-escinde. □

Observación 3.15. Sean $M, N \in {}_R\mathcal{M}_R$. Entonces podemos dotar a $M \otimes_R N$ de la siguiente estructura de A^e-módulo a izquierda:

$$(m \otimes n)(a \otimes a^o) = ma \otimes a^o n,$$

para $a, a^o \in A$. Ahora, dada la proyección canónica $M \otimes_R N \xrightarrow{\pi} M \otimes_A N$, existe una sección $\eta : M \otimes_R N \to M \otimes_A N$, tal que $\pi\eta = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$, dada por $\eta(m \otimes_A n) = me_1 \otimes_R e_2 n$. En efecto, vemos que

$$\pi\eta(m \otimes n) = \pi(me_1 \otimes e_2 n) = me_1 e_2 \otimes n = m \otimes n,$$

para $m \in M$, $n \in N$. Además, si $a \in A$,

$$\eta(ma \otimes_A n) = mae_1 \otimes_R e_2 n = (m \otimes_R n)(ae_1 \otimes e_2) =$$

$$(m \otimes_R n)(e_1 \otimes e_2 a) = me_1 \otimes_R e_2 an = \eta(m \otimes_A an).$$

Corolario 3.16. *Una R-álgebra A separable sobre un cuerpo R resulta una R-álgebra clásicamente separable.*

Demostración. Debemos probar que el radical de Jacobson de $A \otimes K$ es cero para toda extensión K de R. Sabemos, por la Proposición 3.9, (1) que $A \otimes K$ es K-separable. Pero todo $A \otimes K$-módulo es K-proyectivo (ya que todo K-módulo es libre) y se sigue de la proposición que todo $A \otimes K$-módulo es proyectivo. Esto implica que todo R-módulo M es completamente reducible, esto es, todo submódulo de M es un sumando directo de éste. Por ser A de dimensión finita y K cuerpo, $A \otimes K$ resulta un anillo noetheriano. Así, radical de $A \otimes K$ sea 0, por [6], (25.8). □

Veremos ahora recíprocas a los Corolarios 2 y 4, esto es, veremos que si A es de dimensión finita y clásicamente separable sobre un cuerpo R entonces A es separable. Sea S la clausura algebraica de R. Si A es clásicamente separable y de dimensión finita sobre R, $A \otimes S$ es un anillo noetheriano con radical nulo. Por Wedderburn, $A \otimes S$ es una suma finita de álgebras de matrices sobre S (esto último por ser S algebraicamente cerrado). Ahora, el Ejemplo 1 muestra que cada una de estas álgebras es S-separable. Por lo tanto, por la Proposición 3.9, (4) $A \otimes S$ es separable sobre $S \oplus S \oplus \ldots \oplus S$ (tantas S como componentes simples de $A \otimes S$). Además es fácil ver que $S \oplus \ldots \oplus S$ es S-separable, con lo que $A \otimes S$ resulta S separable por la Proposición 3.9, (3). Se sigue entonces de la parte (2) que A es R separable.
Tenemos así el siguiente

Teorema 3.17. *Un álgebra A sobre un cuerpo R es separable si y sólo si es clásicamente separable sobre R y la dimensión de A sobre R es finita.*

Vemos que, en conclusion, el concepto de álgebra separable sobe $\mathbb{C}$ equivale al de álgebra semisimple de dimensión finita.
Además del concepto de separabilidad, vamos a necesitar el de álgebra Frobenius separable. Damos en consecuencia la siguiente definición.

Definición 3.18. *Sea R una k-álgebra.*

1. *R es Frobenius si existe un sistema de Frobenius (ϕ, e) para R, el que consiste en un mapa k-lineal $\phi : R \to k$ y un elemento $e = e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in R \otimes R$ tal que*

$$\forall\, r \in R,\ r = \phi(re^{(1)})e^{(2)} = e^{(1)}\phi(e^{(2)}r).$$

2. *Sea (ϕ, e) un sistema de Frobenius. Decimos que (ϕ, e) un sistema idempotente de Frobenius si e es un idempotente de separabilidad para R (si y sólo si $\mu(e) = 1$).*

3. *Si existe un sistema idempotente de Frobenius, decimos que R es Frobenius separable.*

Observación 3.19. Notemos que si R es Frobenius, con sistema (ϕ, e), e es un *elemento de casimir*, esto es, cumple que $re_1 \otimes e_2 = e_1 \otimes e_2 r$, ya que

$$re_1 \otimes e_2 = e'_1 \phi(e'_2 re_1) \otimes e_2 = e'_1 t\phi(e'_2 re_1)e_2 = e'_1 \otimes e'_2 r = e_1 \otimes e_2 r.$$

Así, un álgebra Frobenius separable es separable.

Ejemplo 3.20. $M_n(R)$ es Frobenius separable. Si consideramos el idempotente de separabilidad $e = \sum_i E_{ij} \otimes E_{ji}$, un sistema de Frobenius está dado con

$$\phi(E_{ij}) = \delta_{i,j}$$

y, si tomamos el idempotente simétrico de separabilidad $\hat{e}$, tenemos un sistema de Frobenius simétrico, con

$$\hat{\phi}(E_{ij}) = n\delta_{i,j}.$$

3.2. Grupoides cuánticos

Definición 3.21. *Un grupoide cuántico o álgebra de Hopf débil sobre un cuerpo k en el sentido de [21] es un k-espacio vectorial H con las estructuras de álgebra asociativa $(H, m, 1)$ con multiplicación $m : H \otimes_k H \to H$ y unidad $1 \in H$ y coálgebra coasociativa (H, Δ, ε) con comultiplicación $\Delta : H \to H \otimes_k H$ y counidad $\varepsilon : H \to k$ tales que:*

(i) [(i)] La comultiplicación Δ es un homomorfismo de álgebras que no preserva necesariamente la unidad tal que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1) \tag{124}$$

(ii) [(ii)] La counidad es un mapa k-lineal que satisface la identidad

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_1)\varepsilon(g_2h) = \varepsilon(fg_2)\varepsilon(g_1h) \tag{125}$$

para todo $f, g, h \in H$.

(iii) [(iii)] Existe un mapa lineal $S : H \to H$, llamado antípoda, tal que, para todo $h \in H$,

$$m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(h) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)(h \otimes 1)), \tag{126}$$

$$m(S \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes h)\Delta(1)), \tag{127}$$

$$m(m \otimes \mathrm{id})(S \otimes \mathrm{id} \otimes S)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = S(h). \tag{128}$$

Si sólo se cumplen las condiciones (i), (ii) decimos que H es una biálgebra débil.

Un grupoide cuántico es un álgebra de Hopf si y sólo si la comultiplicación preserva la unidad (si y sólo si la counidad es un morfismo de álgebras).

Definición 3.22. *Un morfismo entre grupoides cuánticos H_1 y H_2 es un mapa $\alpha : H_1 \to H_2$ que es un morfismo de álgebras y coálgebras que preserva la unidad y la counidad y que cumple $\alpha \circ S = S \circ \alpha$.*

En lo siguiente, H denotará una biálgebra débil, salvo mención en contrario. Así, las propiedades que siguen son válidas para biálgebras débiles y grupoides cuánticos.

Definición 3.23. *Los mapas lineales definidos en* (126) *y* (127) *son llamados* mapas counitales target *y* source *y denotados por ε_t y ε_s respectivamente:*

$$\varepsilon_t(h) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})((\Delta(1))(h \otimes 1)), \ \varepsilon_s(h) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes h)\Delta(1)).$$

Proposición 3.24. *Para todo $h, g \in H$, biálgebra débil, tenemos*

1. *Los mapas counitales son idempotentes en $End_k(H)$:*

$$\varepsilon_t(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(h), \ \varepsilon_s(\varepsilon_s(h)) = \varepsilon_s(h).$$

2. *Las relaciones entre $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ y la comultiplicación son las siguientes:*

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_t)\Delta(h) = 1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}, \ (\varepsilon_s \otimes \mathrm{id})\Delta(h)) = 1_{(1)} \otimes h1_{(2)}.$$

3. *Las imágenes de los mapas counitales estás caracterizadas por*

$$h = \varepsilon_t(h) \ \textit{sii} \ \Delta(h) = 1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}, \tag{129}$$

$$h = \varepsilon_s(h) \ \textit{sii} \ \Delta(h) = 1_{(1)} \otimes h1_{(2)}. \tag{130}$$

(iv) $\varepsilon_t(H)$ y $\varepsilon_s(H)$ conmutan.

(v) Si H es un grupoide cuántico, se tienen también identidades duales a (ii):

$$h\varepsilon_t(g) = \varepsilon(h_1 g)h_2, \ \varepsilon_s(h)g = g_1\varepsilon(hg_2). \tag{131}$$

Demostración. Probamos las identidades referentes al mapa counital target, siendo las del mapa source similares. Notemos que de la igualdad $\Delta(h) = \Delta(h \cdot 1) = \Delta(h)\Delta(1)$ tenemos que $h_1 \otimes h_2 = h_1 1_{(1)} \otimes h_2 1_{(2)}$.

1. Usando los axiomas (124) y (125) tenemos

$$\varepsilon_t(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(\varepsilon(1_{(1)}h)1_{(2)}) = \varepsilon(1_{(1)}h)\varepsilon(1'_{(1)}1_{(2)})1'_{(2)} =$$

$$\varepsilon(1_{(1)}h)\varepsilon(1_{(2)})1_{(3)} = \varepsilon(1_{(1)}h)1_{(2)} = \varepsilon_t(h).$$

2. Tenemos lo siguiente:

$$h_1 \otimes \varepsilon_t(h_2) = h_1\varepsilon(1_{(1)}h_2) \otimes 1_{(2)} = 1'_{(1)}h1\varepsilon(1_{(1)}1'_{(2)}h_2) \otimes 1_{(2)} =$$

$$1_{(1)}h1\varepsilon(1_{(2)}h_2) \otimes 1_{(3)} = 1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}.$$

3. Observamos que

$$\Delta(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon(1_{(1)}h)1_{(2)} \otimes 1_{(3)} = \varepsilon(1_{(1)}h)1'_{(1)}1_{(2)} \otimes 1'_{(2)} = 1'_{(1)}\varepsilon_t(h) \otimes 1'_{(2)},$$

   por otro lado, aplicando $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$ a ambos lados de $1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}$, obtenemos $h = \varepsilon_t(h)$.

4. Esto es inmediato a partir de la identidad

$$1_{(1)} \otimes 1'_{(1)}1_{(2)} \otimes 1'_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}1'_{(1)} \otimes 1'_{(2)}.$$

5. Usando el axioma de la antípoda (128),

$$\varepsilon(h_1 g)h_2 = \varepsilon(h_1 1_{(1)} g)h_2 1_{(2)} = \varepsilon(h_1 1_{(1)} g_1 \varepsilon(1_{(2)} g2))h_2 1_{(3)} =$$

$$\varepsilon(h_1 1_{(1)} g_1)h_2 \varepsilon(1_{(2)} g_2)1_{(3)} = \varepsilon(h_1 g_1)h_2 \varepsilon_t(g2) = \varepsilon(h_1 g_1)h_2 g_2 S(g_3) =$$

$$hg_1 S(g_2) = h\varepsilon_t(g).$$

□

Las imágenes de los mapas counitales

$$H_t = \varepsilon_t(h) = \{h \in H/\Delta(h) = 1_{(1)} h \otimes 1_{(2)}\},$$

$$H_s = \varepsilon_s(H) = \{h \in H/\Delta(h) = 1_{(1)} \otimes h1_{(2)}\}$$

tienen el rol de bases de H. En la siguiente proposición establecemos algunas de sus propiedades.

Proposición 3.25. *H_t (resp. H_s) es una subálgebra coideal a izquierda (resp. a derecha) de H. Estas subálgebras conmutan entre sí, más aún,*

$$H_t = \{(\phi \otimes \mathrm{id})\Delta(1)/\phi \in H^*\},\ H_s = \{(\mathrm{id} \otimes \phi)\Delta(1)/\phi \in H^*\},$$

donde H^* es el dual lineal de H, i. e. H_t (resp. H_s) está generado por los tensorandos de la derecha (resp. izquierda) de $\Delta(1)$ (y por lo tanto tienen la misma dimensión).

Demostración. H_t y H_s son coideales por la Proposición 3.24, (iii) y conmutan por (iv). Tenemos $H_t = \varepsilon(1_{(1)} H)1_{(2)} \subset \{(\phi \otimes \mathrm{id})\Delta(1)/\phi \in \hat{H}\}$. Recíprocamente, $\phi(1_{(1)})1_{(2)} = \phi(1_{(1)})\varepsilon_t(1_{(2)}) \subset H_t$. Así, $H_t = \{(\phi \otimes \mathrm{id})\Delta(1)/\phi \in \hat{H}\}$. Para ver que es un álgebra notamos que $1 = \varepsilon_t(1) \in H_t$ y, para todo $h, g \in H$, computamos, usando la Proposición 3.24 (ii) y (v):

$$\varepsilon_t(h)\varepsilon_t(g) = \varepsilon(\varepsilon_t(h)_1 g)\varepsilon_t(h)_2 = \varepsilon(1_{(1)}\varepsilon_t(h)g)1_{(2)} = \varepsilon_t(\varepsilon_t(h)g) \in H_t.$$

Similarmente probamos las afirmaciones correspondientes a H_s. □

Definición 3.26. *Llamamos a H_t (resp. H_s) una subálgebra counital target (resp. source)*

Veremos ahora algunas propiedades de la antípoda de un grupoide cuántico, que resultarán similares a aquellas de un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Proposición 3.27. *Si la dimensión de H es finita, la antípoda S es única y biyectiva. También es un antimorfismo de álgebras y coálgebras.*

Demostración. Sea $f * g = m(f \otimes g)\Delta$ el producto de convolución en $\mathrm{End}_k(H)$. Entonces $S * \mathrm{id} = \varepsilon_s, \mathrm{id} * S = \varepsilon_t$ y $S * \mathrm{id} * S = S$. Si S' es otra antípoda, entonces

$$S' = S' * \mathrm{id} * S' = S' * \mathrm{id} * S = S * \mathrm{id} * S = S.$$

Para ver que S es antimorfismo de álgebras, computamos:

$$S(1) = S(1_{(1)})1_{(2)} S(1_{(3)}) = S(1_{(1)})\varepsilon_t(1_{(2)}) = \varepsilon_t(1) = 1$$

y, usando la Proposición 3.24, (iv)

$$S(hg) = S(h_1g_1)\varepsilon_t(h_2g_2) = S(h_1g_1)\varepsilon_t(h_2\varepsilon_t(g_2)) = S(h_1g_1)\varepsilon_t(\varepsilon(h_2g_2)h_3) =$$

$$S(h_1g_1)\varepsilon(h_2g_2)h_3S(h_4) = S(h_1g_1)h_2\varepsilon_t(g_2)S(h_3).$$

Ahora,

$$S(h_1g_1)h_2\varepsilon_t(g_2)S(h_3) = S(h_1g_1h_2g_2)S(g_3)S(h_3) = \varepsilon_s(h_1g_1)S(g_2)S(h_2),$$

en donde usamos que $\varepsilon_t(hg) = \varepsilon_t(h\varepsilon_t(g))$. En efecto,

$$\varepsilon_t(hg) = \varepsilon(1_{(1)}hg)1_{(2)} = \varepsilon(1_{(1)}h1'_{(2)})\varepsilon(1'_{(1)}g)1_{(2)} = \varepsilon(1_{(1)}h_2\varepsilon(1'_{(1)}g_2)1'_{(2)})1_{(2)} = \quad (132)$$

$$\varepsilon(1_{(1)}h_2\varepsilon_t(g))1_{(2)} = \varepsilon_t(h\varepsilon_t(g)).$$

Pero

$$\varepsilon_s(h_1g_1)S(g_2)S(h_2) = \varepsilon_s(\varepsilon_s(h_1)g_1)S(g_2)S(h_2) = S(\varepsilon_s(h_1)_1g_1)\varepsilon_s(h_1)_2g_2S(g_3)S(h_2) =$$

$$S(1_{(1)}g_1)1_{(2)}g_2\varepsilon(h_11_{(3)})S(g_3)S(h_2) = S(1_{(1)}g_1)1'_{(1)}1_{(2)}g_2\varepsilon(h_11'_{(2)})S(g_3)S(h_2) =$$
$$S(1_{(1)}g_1)\varepsilon_s(h_1)1_{(2)}g_2S(g_3)S(h_2) = S(g_1)h_1\varepsilon(g_2h_2)S(g_3)S(h_3) =$$
$$S(g_1)\varepsilon_s(h_1)\varepsilon_t(g_2)S(h_2),$$

aquí usamos que $\varepsilon_s(hg) = \varepsilon_s(\varepsilon_s(h)g)$, ya que, similarmente a como hicimos antes

$$\varepsilon_s(hg) = 1_{(1)}\varepsilon(hg1_{(2)})1_{(1)}\varepsilon(h1'_{(2)})\varepsilon(1'_{(1)}g1_{(2)}) = 1_{(1)}\varepsilon(1'_{(1)}\varepsilon(h1'_{(2)})g_11_{(2)}) =$$

$$1_{(1)}\varepsilon(\varepsilon_s(h)g1_{(2)}) = \varepsilon_s(\varepsilon_s(h)g).$$

Y tenemos finalmente

$$S(g_1)\varepsilon_s(h_1)\varepsilon_t(g_2)S(h_2) = S(g_1)\varepsilon_t(g_2)\varepsilon_s(h_1)S(h_2) =$$

$$S(g_1)g_2S(g_3)S(h_1)h_2S(h_3) = S(g)S(h),$$

para todo $h, g \in H$. Dualizando los argumentos anteriores, donde el grupoide cuántico dual se definirá más adelante, mostramos que S es un antimorfismo de coálgebras:

$$\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(S(h_1)h_2S(h_3)) = \varepsilon(S(h_1)\varepsilon_t(h_2)) = \hat{\Delta}(\hat{1})(S(h_1) \otimes \varepsilon_t(h_2)) =$$

$$m\left(\hat{1}_{(1)}(S(h_1)) \otimes \hat{1}_{(2)}(\varepsilon_t(h_2))\right) = m\left((\hat{S}(\hat{1}_{(1)}))(h_1) \otimes (\hat{\varepsilon}_t(\hat{1}_{(2)}))(h_2)\right) =$$

$$m\left(\left(\hat{S}(\hat{1}_{(1)}) \otimes \hat{\varepsilon}_t(\hat{1}_{(2)})\right)\Delta(h)\right) = (\hat{S}(\hat{1}_{(1)}) * \hat{\varepsilon}_t(\hat{1}_{(2)}))(h) =$$

$$(\hat{\varepsilon}_t(\hat{1}))(h) = \varepsilon(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon(h).$$

Análogamente, podemos ver que

$$\Delta(S(h)) = \Delta(S(h_1)\varepsilon_t(h_2)) = \Delta(S(h_1))(h_2S(h_4) \otimes \varepsilon_t(h_3)) =$$

$$\Delta(\varepsilon_s(h_1))(S(h_3) \otimes S(h_2)) = S(h_2) \otimes S(h_1).$$

ya que, en $\hat{H}$, vale

$$\hat{S}(\phi * \psi) = \hat{S}(\phi_1 * \psi_1) * \hat{\varepsilon}_t(\phi_2 * \psi_2) = \hat{S}(\phi_1 * \psi_1) * \phi_2 * \varepsilon_t(\hat{\psi}_2) * \hat{S}(\phi_3) =$$

$$\hat{\varepsilon_s}(\phi_1 * \psi_1) * \hat{S}(\psi_2) * \hat{S}(\phi_2) = \hat{S}(\psi) * \hat{S}(\psi).$$

Y evaluando en $h \in H$ vemos que se cumple lo propuesto ya que valen, para toda $\phi, \psi \in \hat{H}$,

$$m(\phi \otimes \psi)(\Delta(S(h))) = m(\phi \otimes \psi)(\Delta(S(h_1)\varepsilon_t(h_2)) = \Delta(S(h_1))(h_2S(h_4) \otimes \varepsilon_t(h_3))) =$$

$$m(\phi \otimes \psi)(\Delta(\varepsilon_s(h_1))(S(h_3) \otimes S(h_2))) = m(\phi \otimes \psi)(S(h_2) \otimes S(h_1)).$$

Veamos ahora la biyectividad de S, argumentando como en [22]. Tenemos la cadena

$$H \supset S(H) \supset S^2(H) \supset \cdots$$

y $1 \in S^i(H) \forall\, i \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^{n+1}(H) = S^n(H) \subset S^{n-1}(H)$, por ser H de dimensión finita. Veremos que esto implica que $S^n(H) = S^{n-1}(H)$. Teniendo en cuenta que $S(h)$ es una subálgebra de Hopf débil, reemplazando H por $S^{n-1}(H)$, basta probar la inyectividad (y por lo tanto la biyectividad) bajo la hipótesis $S^2(H) = S(H)$, que implica que $\ker(S) \cap S(H) = \emptyset$. En este caso, sea $\bar{S} = S_{|S(H)}$. Entonces $\bar{S} : S(H) \to S(H)$ es biyectiva y

$$P_S = \bar{S}^{-1} \circ S : H \to S(H)$$

es un idempotente que satisface $P_S(xS(y)) = P_s(x)S(y)$ $(P_S \circ S = S)$. Ahora, $H_s, H_t \subset S(H)$, ya que podemos comprobar que

$$S \circ \varepsilon_s = \varepsilon_t \circ S, \quad \varepsilon_s \circ S = S \circ \varepsilon_t \tag{133}$$

ya que

$$S(\varepsilon_s(h)) = S(1_{(1)})\varepsilon(h1_{(2)}) = S(1_{(1)})\varepsilon(S(h1_{(2)})) = S(1_{(1)})\varepsilon(S(1_{(2)})S(h)) =$$

$$S(1)_2\varepsilon(S(1)_1S(h)) = S(1)\varepsilon_t(S(h)) = \varepsilon_t(S(h)),$$

para todo $h \in H$, teniendo en cuenta que S es un antimorfismo de coálgebras. La segunda identidad se prueba de manera análoga. Usando que

$$x_1S(x_2)x_3 = \varepsilon_t(x_1)x_2 = \varepsilon(1_{(1)}x_1)1_{(2)}x_2 = x$$

y que $P_S(1) = 1$, tenemos que

$$P_S(x) = P_S(x_1S(x_2)x_3) = P_S(x_11_{(1)}\varepsilon(x_21_{(2)})) = P_S(x_1S(1_{(2)}))\varepsilon(x_2S(1_{(1)})) =$$

$$P_S(x_1)S(1_{(2)})\varepsilon(x_2S(1_{(1)})) = P_S(x_1)\varepsilon_s(x_2) = P_S(x_1)S(x_2)x_3 =$$

$$P_S(x_1S(x_2))x_3 = P_S(1)x_1S(x_2)x_3 = x.$$

Entonces $\ker(P_S) = \ker\,(S) = 0$. Por lo tanto, $S(A) = A$ y S es biyectiva. $\square$

Vemos ahora las relaciones entre la antípoda y los mapas counitales.

Proposición 3.28. *La restricción de S define un antimorfismo entre las álgebras counitales H_t y H_s*

Demostración. Usando los resultados de la Proposición 3.27, tenemos que S mapea H_t en H_s y viceversa. Como S es biyectiva y $\dim H_t = \dim H_s$ por la Proposición 3.25, $S_{|H_t}$ y $S_{|H_s}$ son anti-isomorfismos. $\square$

Proposición 3.29. *Un morfismo no nulo $\alpha : H \to K$ de grupoides cuánticos preserva las álgebras counitales, i.e. $H_t \cong K_t$ y $H_s \cong K_s$.*

Demostración. Vamos a definir una inversa de $\alpha_{|H_t} := f$. Sea $g : K_t \to H_t$ dada por $g(k) = \varepsilon(f(1_{(1)})k)1_{(2)} \in H_t$. Entonces tenemos:

$$g \circ f(h) = \varepsilon(f(1_{(1)})f(h))1_{(2)} = \varepsilon(f(1_{(1)}h))1_{(2)} = \varepsilon(1_{(1)}h)1_{(2)} = h,$$

$$f \circ g(k) = \varepsilon(f(1_{(1)})k)f(1_{(2)}) = \varepsilon(1_{(1)}k)1_{(2)} = k.$$

Así, $g = f^{-1}$ y $H_t \cong K_t$ □

Veamos ahora otra propiedad de las álgebras counitales, según [22].

Proposición 3.30. *Las subálgebras counitales de una biálgebra débil H, H_t y H_s, son Frobenius separables (y por lo tanto separables, por la Observación 3.19) con sistemas de Frobenius dados por $(\varepsilon_{|H_t}, e_t)$ y $(\varepsilon_{|H_s}, e_s)$, respectivamente, donde $e_t = (\varepsilon_t \otimes \mathrm{id})\Delta(1)$ y $e_s = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_s)\Delta(1)$.*

Demostración. Veamos que H_t es Frobenius separable, siendo la prueba de la otra afirmación análoga. Es claro que $\mu(e_t) = 1$, pues

$$\mu(e_t) = \varepsilon_t(1_{(1)})1_{(2)} = \varepsilon(1'_{(1)}1_{(1)})1'_{(2)}1_{(2)} = 1.$$

Por otro lado,

$$\varepsilon(h\varepsilon_t(1_{(1)}))1_{(2)} = \varepsilon(h\varepsilon(1'_{(1)}1_{(1)})1'_{(2)})1_{(2)} = \varepsilon(1'_{(1)}1_{(1)})\varepsilon(h1'_{(2)})1_{(2)}$$

lo que coincide, por el axioma (124) con

$$\varepsilon(h1_{(1)})1_{(2)} = h$$

pues $h \in H_t$, y así vemos que H_t es Frobenius separable. Análogamente vemos lo propio para H_s. Notamos entonces que H_t (H_s) es un álgebra separable con idempotente de separabilidad e_t (e_s). □

Definimos una variante de los mapas counitales ε_t y ε_s, para mostrar el anti-isomorfismo entre las subálgebras counitales en el caso más general de una biálgebra débil.

Definición 3.31. *Tomamos, para una biálgebra débil H,*

$$\varepsilon'_s(h) = 1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}h), \quad \varepsilon'_t(h) = \varepsilon(h1_{(1)})1_{(2)}.$$

Estos son, claramente, los mapas counitales source y target de la biálgebra débil H^{op}, lo que en particular significa que sus propiedades generales se seguirán de las de ε_t y ε_s, mutatis mutandis.

Lema 3.32. *Sea H una biálgebra débil. El mapa counital ε_t induce un anti-ismorfismo de álgebras $H_s \to H_t$ cuya inversa es inducida por ε'_s.*

Demostración. Para ver que ε_t es un antimorfismo de álgebras, computamos, más generalmente,

$$\varepsilon_t(yh) = \varepsilon_t(y\varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(\varepsilon_t(h)y) = \varepsilon_t(h)\varepsilon_t(y)$$

para todo $y \in H_s$ y $h \in H$, usando (132) y la siguiente igualdad, que se sigue de (131), para $x \in H_t$,

$$x\varepsilon_t(h) = \varepsilon(1_{(1)}xh)1_{(2)} = \varepsilon_t(xh). \tag{134}$$

Para probar que ε'_s induce una inversa al mapa inducido por ε_t, usamos que

$$\forall\, h \in H,\ \varepsilon_t\varepsilon'_s(h) = \varepsilon_t(h) \tag{135}$$

ya que

$$\varepsilon_t\varepsilon'_s(h) = \varepsilon(1_{(1)}\varepsilon'_s)1_{(2)} = \varepsilon(1_{(1)}1'_{(1)}\varepsilon(1'_{(2)}h))1_{(2)} = \varepsilon(1_{(1)}h)1_{(2)} = \varepsilon_t(h)$$

por el axioma (125). Aplicando esto a H^{bop}, tenemos que $\varepsilon'_s\varepsilon_t(h) = \varepsilon'_s(h)$ para todo $h \in H$ y esto, junto con (135) prueba la afirmación. $\square$

Se sigue de la observación anterior que

$$\forall\, x \in H_t,\ x\varepsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} = \varepsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}x. \tag{136}$$

Aplicando el lema a (H^{bop}) obtenemos que H_s^{bop} es Frobenius separable con sistema $(\varepsilon, (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_s)\Delta(1))$, en particular,

$$\forall\, y \in H_s,\ 1_{(1)}y \otimes \varepsilon_s(1_{(2)}) = 1_{(1)} \otimes y\varepsilon_s(1_{(2)}).$$

Aplicando ε'_s (que es anti-morfismo de álgebras restringido a H_t) al primer factor de (136), obtenemos

$$\forall\, x \in H_t\ 1_{(1)}\varepsilon'_s(x) \otimes 1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}x. \tag{137}$$

Definición 3.33. *El conjunto de axiomas de la definición de grupoide cuántico es dual de sí mismo, lo que nos permite definir una estructura natural de grupoide cuántico en el espacio vectorial dual $\hat{H}$ =$Hom_k(H,k)$, para H de dimensión finita, tomando*

$$\langle h, \phi\psi\rangle = \langle \Delta(h), \phi \otimes \psi\rangle\,,$$
$$\left\langle h \otimes g, \hat{\Delta}(\phi)\right\rangle = \langle hg, \phi\rangle\,,$$
$$\left\langle h, \hat{S}(\phi)\right\rangle = \langle S(h), \phi\rangle\,,$$

para todo $\phi, \psi \in \hat{H}, h, g \in H$. La unidad $\hat{1}$ de $\hat{H}$ es ε y la counidad es $\phi \mapsto \langle \phi, 1\rangle$. Así, resulta $\hat{\varepsilon_t}$ como $h \mapsto \langle \phi, \varepsilon_t(h)\rangle$.

Las álgebras counitales de $\hat{H}$ son canónicamente anti-isomorfas a las de H. Más precisamente, el mapa $H_t \ni z \mapsto (z \rightharpoonup \varepsilon) \in \hat{H}_s$ es un isomorfismo de álgebras con inversa dada por $\chi \mapsto (1 \leftharpoonup \chi)$. Similarmente, el mapa $H_s \ni z \mapsto (\varepsilon \leftharpoonup z) \in \hat{H}_t$ es un isomorfismo de álgebras. Aquí hemos usado la notación de flechas de Sweedler anteriormente mencionada, escribiendo, para $h \in H$, $\phi \in \hat{H}$:

$$h \rightharpoonup \phi = \phi_1 \langle h, \phi_2\rangle\,,\ \phi \leftharpoonup \langle h, \phi_1\rangle\, \phi_2.$$

Observación 3.34. El álgebra opuesta H^{op} también resulta un grupoide cuántico con la misma estructura de coálgebra y antípoda S^{-1}. También (H^{cop}, S^{-1}) y (H^{bop}, S) lo son.

Ejemplo 3.35. Así como las álgebras de grupo y sus duales son los ejemplos más inmediatos de álgebras de Hopf, las álgebras de grupoide y sus duales proveen ejemplos de grupoides cuánticos. Sea G un grupoide, entonces el álgebra de grupoide kG es un grupoide cuántico vía:

$$\Delta(g) = g \otimes g,\ \varepsilon(g) = 1,\ S(g) = g^{-1},\ g \in G$$

Las subálgebras counitales de kG son iguales entre sí y coinciden con el álgebra abeliana generada por los morfismos identidad: $(kG)_t = (kG)_s = k\{gg^{-1}/g \in G\}$. Los mapas counitales target y source están dados por la operación de tomar el objeto target (resp. source) de un morfismo:

$$\varepsilon_t(g) = gg^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{target(g)}}, \varepsilon_s(g) = g^{-1}g = \mathrm{id}_{\mathrm{source(g)}}.$$

El grupoide cuántico dual $\widetilde{kG}$ es isomorfo al álgebra de funciones en G, i.e. está generado por los idempotentes $p_g, g \in G$ tales que $p_g p_h = \delta_{g,h} p_g$, con las siguientes operaciones:

$$\Delta(p_g) = \sum_{uv=g} p_u \otimes p_v, \varepsilon(p_g) = \delta_{g,gg^{-1}}, S(p_g) = p_g^{-1}$$

El álgebra counital de target (resp. source) es precisamente el álgebra de funciones constantes en cada conjunto de morfismos de G que tienen el mismo objeto target (resp. source). Los mapas de target y source son:

$$\varepsilon_t(p_g) = \sum_{vv^{-1}=g} p_v,\ \varepsilon_s(p_g) = \sum_{v^{-1}v=g} p_v.$$

3.3. Álgebras faciales y biálgebras débiles

Vamos a traducir los resultados de Hayashi de la sección 2 a resultados sobre álgebras de Hopf débiles. Lo primero que debemos notar es

Proposición 3.36. *Las álgebras faciales definidas en la sección anterior son álgebras de Hopf débiles para las cuales las subálgebras counitales son conmutativas.*

Demostración. Sea $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial. En la Proposición 2.2, vemos que, en este caso, $\Delta(1) = \sum_{i\in\mathcal{V}} e_i \otimes e_i^o$, de donde tenemos

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(1)) = \sum_{i,j\in\mathcal{V}} e_j \otimes e_i e_j^o \otimes e_i^o$$

y por lo tanto se cumple el axioma (i) de la Definición 3.21, utilizando (2). Este mismo hecho notado en la observación, sumado a (8), permite que se cumpla el axioma (ii) de la definición de biálgebra débil. Es claro que las subálgebras counitales $\mathfrak{H}_t$ y $\mathfrak{H}_s$ estarán generadas por los $\{e_i^o\}_{i\in\mathcal{V}}$ y $\{e_i\}_{i\in\mathcal{V}}$ respectivamente y resultan conmutativas por (2). Recíprocamente, dada una biálgebra H cuyas álgebras counitales son conmutativas, como resultan también semisimples como consecuencia de ser separables, tenemos $H_s \cong H_t \cong k^n$. Supongamos que estos isomorfismos están dados por $\phi : k^n \to H_s$ y $\phi^o : k^n \to H_t$ y llamemos $e_i = \phi(E_i)$, $e_i^o = \phi^o(E_i)$, donde los $\{E_i\}_{i=1}^n$ denotan la base canónica en k^n. Así, es inmediato que (H, e_i, e_i^o) cumple los axiomas (1), (2) y (3) de la definición de álgebra facial. Veremos que $\Delta(1) = \sum_i e_i \otimes e_i^o$, y de esto se desprenderán los axiomas (4) y (5), ya que, como $e_j \in H_s$ y $e_i^o \in H_t$, entonces

$$\Delta(e_i^o e_j) = \Delta(e_i^o)\Delta(e_j) = (1_{(1)}e_i^o \otimes 1_{(2)})(1'_{(1)} \otimes e_j 1'_{(2)}) = \sum_{k,l} e_k e_i^o e_l \otimes e_k^o e_j e_l^o =$$

$$\sum_k e_i^o e_k \otimes e_k^o e_j$$

y como

$$e_j^o = \varepsilon_t(e_j^o) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(e_i e_j^o) e_i^o$$

entonces $\varepsilon(e_i e_j^o) = \delta_{ij}$, de donde obtenemos (4). Por ser H una biálgebra débil, tenemos $\Delta(ab) = \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}b)$ y así se cumple (5):

$$\varepsilon(ab) = \sum_k \varepsilon(ae_k)\varepsilon(e_k^o b).$$

Veamos entonces la igualdad $\Delta(1) = \sum_i e_i \otimes e_i^o$. Supongamos $\Delta(1) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i'$. Como $\{e_i\}$ es una base de H_s, tenemos, para cada i, $v_i = \sum_j \lambda_{ij} e_j$, entonces

$$\Delta(1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j \otimes v_i' = \sum_{j=1}^n e_j \otimes \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} v_i' := \sum_{j=1}^n e_j \otimes w_j.$$

De aquí y por el hecho que $\Delta(e_i) = 1_{(1)} \otimes e_i 1_{(2)} = \sum_j e_j \otimes e_i w_j$, la igualdad

$$e_i = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(e_i) = \sum \varepsilon(e_i w_j) e_j$$

implica, por ser los e_i básicos, $\varepsilon(e_i w_j) = \delta_{ij}$. Ahora, como $w_j \in H_t$,

$$(w_j)_1 \varepsilon_s((w_j)_2) = (w_j)_1 1_{(1)} \varepsilon((w_j)_2 1_{(2)}) = w_j = \varepsilon_t(w_j)$$

y entonces podemos ver que $w_i w_j = w_i \varepsilon_t(w_j) = \varepsilon((w_i)_1 w_j)(w_i)_2$, ya que dado $g \in H_t, h \in H$,

$$\varepsilon(h_1 g)h_2 = \varepsilon(h_1 1_{(1)} g)h_2 1_{(2)} = \varepsilon(h_1 1_{(1)} g_1)h_2 1_{(3)} \varepsilon(1_{(2)} g_2) = \varepsilon(h_1 g_1)h_2 \varepsilon_s(g_2) =$$

$$\varepsilon(h_1 g_1)h_2 g_2 \varepsilon_s(g_3) = hg_1 \varepsilon_s(g_2) = h\varepsilon_t(g) = hg.$$

Así,

$$w_i w_j = \varepsilon((w_i)_1 w_j)(w_i)_2 = \sum_h \varepsilon(e_h w_i w_j) w_h.$$

Utilizando el axioma (ii) de la Definición 3.21,

$$\varepsilon(e_h w_i w_j) = \varepsilon(e_h (w_i)_1)\varepsilon((w_i)_2 w_j) = \sum_k \varepsilon(e_h e_k w_i)\varepsilon(w_k w_j) =$$

$$\sum_k \delta_{h,k}\varepsilon(e_h w_i)\varepsilon(w_k w_k) = \delta_{h,i}\varepsilon(w_h w_j).$$

Tenemos entonces

$$w_i w_j = \sum_h \delta_{i,h}\varepsilon(w_h w_j) w_h = \varepsilon(w_i w_j) w_i, \tag{138}$$

y además

$$\varepsilon(e_i w_i w_i) = \varepsilon(w_i w_i). \tag{139}$$

Ahora $\{e_i^o\}_{i=1}^n$ es una base de H_t, por lo tanto, podemos escribir $w_i = \sum_h \alpha_{ih} e_h^o$. Como $e_h^o e_k^o = \delta_{h,k} e h^o$,

$$w_i w_j = \sum_h \alpha_{ih} e_h^o \sum_k \alpha_{jk} e_k^o \sum_h \alpha_{ih}\alpha_{jh} e_h^o$$

y, por (138), $w_i w_j = \sum_h \varepsilon(w_i w_j)\alpha_{ih} e_h^o$. Por lo tanto,

$$\alpha_{ih}\alpha_{jh} = \alpha_{ih}\varepsilon(w_i w_j). \tag{140}$$

Como $\varepsilon(e_j w_i) = \delta_{ij}$, tenemos que $w_i \neq 0$ y entonces existe k_i tal que $\alpha_{ik_i} \neq 0$. Luego, tomando $h = k_i$ en (140), resulta $a_j k_i = \varepsilon(w_i w_j)$ y así, si $i = j$, $\varepsilon(w_i w_i) \neq 0$. A continuación, tomamos

$$u_i = \frac{1}{\varepsilon(w_i w_i)} w_i.$$

Tenemos entonces, por (138),

$$u_i^2 = \frac{1}{\varepsilon(w_i w_i)^2} w_i w_i = \frac{1}{\varepsilon(w_i w_i)} w_i = u_i$$

Como $u_i \in H_t$, existen (β_{ih}) tales que $u_i \sum_h \beta_{ih} e_h^o$. Ahora, $u_i^2 = u_i$ implica que $\beta_{ih}^2 = \beta_{ih}$ y por lo tanto $\beta_{ih} = 0$ o $\beta_{ih} = 1$. Entonces existen subconjuntos $I_i \subset \{1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots, n$ tales que $u_i = \sum_{h \in I_i} e_h^o$. Ya que $\Delta(1) = \sum_i e_i \otimes w_i$,

$$1 = \sum_i \varepsilon(e_i) w_i \tag{141}$$

y $\varepsilon(e_i) = \sum_j \varepsilon(e_i e j)\varepsilon(w_j w_i) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(w_i w_i)$, pero, usando el axioma (ii),

$$1 = \varepsilon(e_i w_i) = \varepsilon(e_i e_i w_i) \sum_h \varepsilon(e_i e_h)\varepsilon(e_i w_h w_i) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_i w_i w_i) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(w_i w_i)$$

por (139). Luego, $\varepsilon(e_i) = \frac{1}{\varepsilon(w_i w_i)}$ y reemplazando en (141),

$$1 = \sum_i \frac{1}{\varepsilon(w_i w_i)} w_i = \sum_i u_i.$$

Ahora, $u_i = \sum_{j \in I_i} e_j^o$, $\sum_j e_j^o = 1$ y $\sum_i u_i = 1$ implican $\# I_i = 1, \forall\, i = 1, \ldots, n$. Así $u_i = \varepsilon_{h_i}^o$ para algún h_i y

$$w_i = \varepsilon(e_i) e_{h_i}^o. \tag{142}$$

Cambiando la biyección $E_i \mapsto e_i^o$ por $E_i \mapsto e_{h_i}^o$, tenemos

$$w_i = \varepsilon(e_i) e_i^o. \tag{143}$$

Así, $\Delta(1) = \sum_i \varepsilon(e_i)e_i \otimes e_i^o$. Ahora,

$$\sum_i e_i^o = 1 = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(1) = \sum_i \varepsilon(e_i)^2 e_i$$

y por lo tanto $\varepsilon(e_i) = \pm 1$. Pero

$$\Delta(e_i^o e_j^o)) = \Delta(e_i^o)\Delta(e_j^o) = \left(\sum_k \varepsilon(e_k)e_k e_i^o \otimes e_k^o\right)\left(\sum_l \varepsilon(e_l)e_l e_j^o \otimes e_l^o\right) =$$

$$\sum_{k,l} \varepsilon(e_k)\varepsilon(e_l)e_k e_i^o e_l e_j^o \otimes e_k^o e_l^o = \sum_k \varepsilon(e_k)^2 e_k e_k e_i^o e_j^o \otimes e_k^o = \sum_k \varepsilon(e_k)^2 e_k e_i^o e_j^o \otimes e_k^o =$$

$$\sum_k \varepsilon(e_k)^2 e_j \delta_{ij} e_i^o \otimes e_k^o.$$

Tomando en esta expresión $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})$, obtenemos

$$e_i^o e_j^o = \sum_k \varepsilon(e_k)^2 \delta_{ij} \varepsilon(e_k e_i^o) e_k^o,$$

pero

$$\varepsilon(e_k e_i^o) = \frac{1}{\varepsilon(e_i)} \varepsilon(e_k w_i) = \delta_{i,k} \frac{1}{\varepsilon(e_i)}.$$

Por lo tanto,

$$e_i^o e_j^o = \sum_k \varepsilon(e_k)^2 \delta_{i,j} \delta_{i,k} \frac{1}{\varepsilon(e_k)} e_k^o = \delta_{i,j} \varepsilon(e_i) e_i^o.$$

Así,

$$e_i^o e_j^o = \delta_{i,j} e_i^o = \delta_{i,j} \varepsilon(e_i) e_i^o,$$

de donde $\varepsilon(e_i) = 1$. Obtenemos finalmente que $\Delta(1) = \sum_i e_i \otimes e_i^o$ y, como hemos visto, de esto deducimos que H es una $\mathcal{V}$-álgebra facial. □

En lo siguiente, H denotará entonces una biálgebra débil tal que sus subálgebras counitales son conmutativas. Notemos que en este contexto los mapas E^+ y E^- definidos en (16) son los mapas ε_s y ε_t respectivamente y podemos referirnos a inversas generalizadas y antípodas de morfismos de álgebras $f^+ : H \to A$ en cualquiera de ambos términos, indistintamente.

Consideramos ahora un carcaj $(\mathcal{G}, \mathcal{V}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ como en la sección anterior, y construimos un $k^{\mathcal{V}}$-bimódulo M, donde $M = k\mathcal{G}$, el espacio vectorial generado por las flechas en $\mathcal{G}$ y la acción $E_i \cdot \mathbf{p} \cdot E_j = \delta_{i,\mathfrak{s}(\mathbf{p})}\delta_{j,\mathfrak{t}(\mathbf{p})}\mathbf{p}$, con $\{E_i\}_{i\in\mathcal{V}}$ la base canónica de $k^{\mathcal{V}}$ y $\mathbf{p} \in \mathcal{G}^1$ y lo extendemos naturalmente. Así, por ejemplo, vemos que

$$(E_k E_i) \cdot \mathbf{p} = (\delta_{ki} E_i) \cdot \mathbf{p} = \delta_{ik}\delta_{i\mathfrak{s}(\mathbf{p})}\mathbf{p}$$

y

$$E_k \cdot E_i \cdot \mathbf{p} = \delta_{i,\mathfrak{s}(\mathbf{p})} E_k \cdot \mathbf{p} = \delta_{i,\mathfrak{s}(\mathbf{p})}\delta_{k,\mathfrak{s}(\mathbf{p})}\mathbf{p},$$

pero $\delta_{ik}\delta_{i\mathfrak{s}(\mathbf{p})} = \delta_{i,\mathfrak{s}(\mathbf{p})}\delta_{k,\mathfrak{s}(\mathbf{p})}$, con lo que vemos que la acción a izquierda está bien definida y de manera análoga vemos lo propio para la acción a derecha.

Recíprocamente, si $R = k^{\mathcal{V}}$ y $M = k\mathcal{B}$ es un R-bimódulo, tomamos $\mathcal{G}(i,j)$ un base de ${}_iM_j = E_i \cdot M \cdot E_j$ y consideramos el carcaj $(\mathcal{G}_M, \mathcal{V}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ con $\mathcal{G}_M = \coprod_{i,j} \mathcal{G}(i,j)$. Resulta $k\mathcal{G}_M \cong M$.

Proposición 3.37. *Con la identificación anterior tenemos la equivalencia* $k\mathcal{G}^m \cong M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M$ *(m veces).*

Demostración. Si $\mathbf{p} \in \mathcal{G}^m$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m)$ tomamos $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_2 \otimes \ldots \mathbf{p}_m \in M \otimes_R \otimes_R \cdots \otimes_R M$ ya que, por ejemplo,

$$\mathbf{p}_1 \otimes E_i \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \otimes \delta_{i,\mathfrak{s}(\mathbf{p}_2)}\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\delta_{i,\mathfrak{s}(\mathbf{p}_2)} \otimes \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\delta_{i,\mathfrak{r}(\mathbf{p}_1)} \otimes \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \cdot E_i \otimes \mathbf{p}_2.$$

$\square$

En adelante, consideraremos sólo elementos de $M^{\otimes n}$ pertenecientes a $\mathcal{G}^n_M$. Así, como en el capítulo anterior consideramos $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ como el espacio lineal generado por los $e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix}$, consideraremos ahora $\mathcal{H}(M) = T_{R\otimes R}(M^{\otimes^2_k})$, el álgebra tensorial, tomando a $M \otimes_k M$ como $R \otimes_k R$-bimódulo con

$$(E_i \otimes E_j) \cdot (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \cdot (E_k \otimes E_l) = E_i \cdot \mathbf{p} \cdot E_k \otimes E_j \cdot \mathbf{q} \cdot E_l.$$

con el producto

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s}) = \delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{r})}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q})\mathfrak{s}(\mathbf{s})}\mathbf{pr} \otimes \mathbf{qs},$$

donde identificamos al elemento $\mathbf{p} \in M^{\otimes m}$ con el camino de $\mathcal{G}^m$ correspondiente en la identificación anterior. Si $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m), \mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_m) \in \mathcal{G}^m$, hacemos la identificación

$$e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{q}\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\\mathbf{q}_1\end{pmatrix} \cdots e\begin{pmatrix}\mathbf{p}_m\\\mathbf{q}_m\end{pmatrix} \mapsto (\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{q}_1) \otimes_{R\otimes R} \cdots \otimes_{R\otimes R} (\mathbf{p}_m \otimes \mathbf{q}_m).$$

Entonces, como $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$, $\mathcal{H}(M)$ es una $\mathcal{V}$-álgebra facial tomando

$$e^o_i = \sum_{j\in\mathcal{V}} E_i \otimes E_j, \;\; e_j = \sum_{i\in\mathcal{V}} E_i \otimes E_j,$$

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s}) = \mathbf{pr} \otimes \mathbf{qs} = \delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{r})}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q})\mathfrak{s}(\mathbf{s})}\mathbf{pr} \otimes \mathbf{qs},$$

$$\Delta\,(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{t}\in G^m_M} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{t}) \otimes_{R\otimes R} (\mathbf{t} \otimes \mathbf{q}), \;\; \varepsilon\,(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}},$$

Ahora nos ocupamos de definir modelo facial en este contexto.

Proposición 3.38. *Con la notación de esta sección, la noción de modelo facial* $(\mathcal{G}, w)$ *equivale a la existencia de* $S_w \in End_R(M \otimes_R M)$*. Además* $(\mathcal{G}, w)$ *es trenzado si y sólo si* (M, S_w) *es una solución de la ecuación de trenzas en la categoría tensorial de R-bimódulos* ${}_R\mathcal{M}_R$.

Demostración. Dado un modelo facial $(\mathcal{G}, w)$, construimos como antes un R-bimódulo M y definimos

$$S(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) = \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix}\mathbf{r} \otimes \mathbf{s},$$

donde $\mathfrak{r}(\mathbf{p}) = \mathfrak{s}(\mathbf{q})$ y $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ tal que $\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix}$ sea una faz. Así,

$$S(E_i\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}E_l) = \delta_{\mathfrak{s}(\mathbf{p}),i}\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q}),l}\sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix}\mathbf{r} \otimes \mathbf{s} =$$

$$\delta_{\mathfrak{s}(\mathbf{r}),i}\delta_{\mathfrak{t}(\mathbf{s}),l}\sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix}\mathbf{r}\otimes\mathbf{s} = \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix} E_i\mathbf{r}\otimes\mathbf{s}E_l$$

y S es de R-bimódulos.
Recíprocamente, dado $M \in {}_R\mathcal{M}_R$, definimos $\mathcal{G}$ como antes y, si $S(\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}) = \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})\mathbf{r}\otimes\mathbf{s}$, definimos

$$w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix} = \alpha(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}).$$

Notemos que esto está bien definido ya que

$$S(\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}) = S(E_{\mathfrak{s}(p)}\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}E_{\mathfrak{t}(\mathbf{q})}) = E_{\mathfrak{s}(p)}S(\mathbf{p},\mathbf{q})E_{\mathfrak{t}(\mathbf{q})} = \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})E_{\mathfrak{s}(p)}\mathbf{r}\otimes\mathbf{s}E_{\mathfrak{t}(\mathbf{q})} =$$

$$\sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})\delta_{\mathfrak{s}\mathbf{p}\mathfrak{s}(\mathbf{r}),\mathfrak{t}(\mathbf{q}),\mathfrak{t}(\mathbf{s})}\mathbf{r}\otimes\mathbf{s}$$

y por lo tanto los coeficientes $\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$ se anulan a menos que $\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix}$ sea una faz y así el mapa w hace de $(\mathcal{G},w)$ un modelo facial.
De la relación entre S_w y w se desprende que los coeficientes de $(S\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes S)(S\otimes\mathrm{id})(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r})$ y $(\mathrm{id}\otimes S)(S\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes S)(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r})$ son $w_1w_2w_1(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r})$ y $w_2w_1w_2(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r})$ respectivamente, de donde surge la segunda afirmación. $\square$

Dado (M,S) definimos el álgebra $\mathcal{U}(M,S) = \mathcal{U}(S)$ como el cociente de $\mathcal{H}(S)$ módulo las relaciones

$$\sum_{(\mathbf{c},\mathbf{d})} w\begin{pmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{pmatrix}(\mathbf{c}\otimes\mathbf{p})(\mathbf{d}\otimes\mathbf{q}) = \sum_{(\mathbf{r},\mathbf{s})} w\begin{pmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{s} & \end{pmatrix}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{r})(\mathbf{b}\otimes\mathbf{s}).$$

Notemos que estas relaciones son las análogas en este contexto a (44). Así, $\mathcal{U}(S)$ tiene una estructura única de $\mathcal{V}$-álgebra facial tal que la proyección $\mathcal{H}(S)\to\mathcal{U}(S)$ es un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales.
Como antes, si S es solución de la ecuación de trenzas, e inversible, existen mapas bilineales $\mathcal{R}^{\pm}$ en $\mathcal{U}(S)$ que hacen de $(\mathcal{U}(S),\mathcal{R}^{\pm})$ una $\mathcal{V}$-álgebra facial CQT, definidos por

$$\mathcal{R}^{+}(\mathbf{p}\otimes\mathbf{q},\mathbf{r}\otimes\mathbf{s}) = w\begin{pmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{pmatrix}, \mathcal{R}^{-}(\mathbf{p}\otimes\mathbf{q},\mathbf{r}\otimes\mathbf{s}) = w^{-1}\begin{pmatrix} & \mathbf{s} & \\ \mathbf{p} & & \mathbf{q} \\ & \mathbf{r} & \end{pmatrix}$$

Ahora, como $\Delta(\mathbf{b}\otimes\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{c})\otimes(\mathbf{c}\otimes\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{s}}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{s})\otimes(\mathbf{s}\otimes\mathbf{p})$ y $\Delta(\mathbf{a}\otimes\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{d})\otimes(\mathbf{d}\otimes\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{r}}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{r})\otimes(\mathbf{r}\otimes\mathbf{q})$, podemos reformular estos resultados en la siguiente proposición.

Proposición 3.39. *Dado (M,S) solución de la ecuación de trenzas en ${}_R\mathcal{M}_R$, $R = k^{\mathcal{V}}$, existe $\mathcal{R}^{+}\in(M^{\otimes 2}\otimes_R M^{\otimes 2})^{*}$ tal que el álgebra $\mathcal{U}(S)$ resultante del cociente del álgebra tensorial $T_{R\otimes R}(M\otimes M)$ por las relaciones*

$$\mathcal{R}^{+}((\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})_1,(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{q})_1)(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})_2(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{q})_2 = \mathcal{R}^{+}((\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})_2,(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{q})_2)(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{q})_1(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})_1$$

tiene una estructura única de $\mathcal{V}$-álgebra facial tal que la proyección $\mathcal{H}(S) \to \mathcal{U}(S)$ es un mapa de $\mathcal{V}$-álgebras faciales.

$\square$

Tomamos ahora la biyección $\tilde{}: M^{\otimes m} \to (M^{op})^{\otimes m}$, $\mathbf{p} \mapsto \tilde{\mathbf{p}}$ y definimos un nuevo R-bimódulo $M_{LD} = M \coprod M^{op}$. Tomamos como en el capítulo anterior

$$M \bar{\times} M^{op}, \quad M^{op} \bar{\times} M \subset M_{LD} \otimes M_{LD},$$

generados por los elementos $\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}$ respectivamente. Definimos también mapas $S_{LD}, S_{LD}^{-} : M^{op} \bar{\times} M \to M \bar{\times} M^{op}$ a partir de las definiciones (47) y (48) de w_{LD} y w_{LD}^{-}.

Definición 3.40. *Decimos que (M, S) es cerradizo si S_{LD}, S_{LD}^{-} son inversibles. En este caso, definimos S_{LD} en $M_{LD} \otimes M_{LD}$ como en la definición de w_{LD} en (51).*

La Proposición 2.36 se traduce en el siguiente resultado.

Proposición 3.41. *Dado (M, S) solución de la ecuación de trenzas en ${}_R\mathcal{M}_R$, $R = k^{\mathcal{V}}$, $\mathcal{U}(S)$ es cerradiza si y sólo si (M, S) es cerradizo. En este caso, las formas de Lyubashenko están dadas por*

$$\mathcal{Q}^{+}(\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{s}) = w_{LD}^{-1} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{s} & \\ \tilde{\boldsymbol{q}} & & \tilde{\boldsymbol{p}} \\ & \boldsymbol{r} & \end{bmatrix}, \; \mathcal{Q}^{-}(\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{s}) = w_{LD} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{q} & \\ \tilde{\boldsymbol{s}} & & \tilde{\boldsymbol{r}} \\ & \boldsymbol{p} & \end{bmatrix}$$

para cada $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in G_M^m$ y $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in G_M^n$ $(m, n \geq 0)$.

$\square$

Proposición 3.42. *Si (M, S) es cerradiza, entonces obtenemos el grupoide cuántico $Hc(\mathcal{U}(S))$, isomorfo al cociente del álgebra*

$$T_R(M) \otimes T_R(M^{op})$$

por las relaciones

$$\sum_{k,l \in \mathcal{V}} E_k \otimes E_l = 1, \tag{144}$$

$$(\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q})(\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{s}) = \delta_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{p}),\mathfrak{s}(\boldsymbol{r})} \delta_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{q}),\mathfrak{s}(\boldsymbol{s})} \boldsymbol{pr} \otimes \boldsymbol{qs} \tag{145}$$

$$(\tilde{\boldsymbol{p}} \otimes \tilde{\boldsymbol{q}})(\tilde{\boldsymbol{r}} \otimes \tilde{\boldsymbol{s}}) = \delta_{\mathfrak{r}(\tilde{\boldsymbol{p}}),\mathfrak{s}(\tilde{\boldsymbol{r}})} \delta_{\mathfrak{r}(\tilde{\boldsymbol{q}}),\mathfrak{s}(\tilde{\boldsymbol{s}})} \tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{r}} \otimes \tilde{\boldsymbol{q}}\tilde{\boldsymbol{s}} \tag{146}$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M^{\otimes m}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathcal{G}^n, m, n \geq 0.$

$$\sum_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}} w_{LD} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{c} & \\ \boldsymbol{a} & & \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{b} & \end{bmatrix} (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{p})(\boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}} w_{LD} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{p} & \\ \boldsymbol{r} & & \boldsymbol{q} \\ & \boldsymbol{s} & \end{bmatrix} (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{r})(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{s}) \tag{147}$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M,\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M^{op}$ *o* $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a} \in M,\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \in M^{op}$,

$$\sum_{\boldsymbol{t} \in \mathcal{G}_M} (\tilde{\boldsymbol{t}} \otimes \tilde{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{q}) = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} e_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{p})}, \quad \sum_{\boldsymbol{t} \in \mathcal{G}_M} (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{t})(\tilde{\boldsymbol{q}} \otimes \tilde{\boldsymbol{t}}) = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} e_{\mathfrak{r}(\boldsymbol{p})} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} e^{o}_{\mathfrak{s}(\boldsymbol{p})}, \tag{148}$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M$, *donde, por ejemplo, la suma con respecto a* $\boldsymbol{r}$ *en* (82) *está tomada sobre todos los* $\boldsymbol{r} \in M$ *o* $\boldsymbol{r} \in M^{op}$*, de acuerdo a si* $\boldsymbol{a} \in M$ *o* $\boldsymbol{a} \in M^{op}$*. La estructura de coálgebra está dada por*

$$\Delta\left(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\right)=\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathcal{G}_M^m}(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{t})\otimes(\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{q}),\ \Delta\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\otimes\tilde{\boldsymbol{q}}\right))=\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathcal{G}_M^m}(\tilde{\boldsymbol{p}}\otimes\tilde{\boldsymbol{t}})\otimes(\tilde{\boldsymbol{t}}\otimes\tilde{\boldsymbol{q}}) \tag{149}$$

y

$$\varepsilon\left(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\right)=\varepsilon\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\otimes\tilde{\boldsymbol{q}}\right)=\delta_{\boldsymbol{pq}},$$

para cada $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{G}_M^m$ *y los idempotentes faciales están dados por*

$$e_i^o=\sum_{j\in\mathcal{V}}E_i\otimes E_j,\ e_j=\sum_{i\in\mathcal{V}}E_i\otimes E_j,$$

como antes. La antípoda y trenza están dadas por

$$S\left(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\right)=\tilde{\boldsymbol{q}}\otimes\tilde{\boldsymbol{p}}$$

$$S\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\otimes\tilde{\boldsymbol{q}}\right)=\sum_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{G}_M^m}w_{LD}^{\pm}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{r} & \\ \tilde{\boldsymbol{a}} & & \tilde{\boldsymbol{q}} \\ & \boldsymbol{a} & \end{bmatrix}(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{s})w_{LD}^{\mp}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{b} & \\ \tilde{\boldsymbol{p}} & & \tilde{\boldsymbol{b}} \\ & \boldsymbol{s} & \end{bmatrix} \tag{150}$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M^{\otimes m}$, $m \geq 0$.

$$\mathfrak{R}^{+}\left(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{s}\right)=w_{LD}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{q} & \\ \boldsymbol{r} & & \boldsymbol{s} \\ & \boldsymbol{p} & \end{bmatrix}, \tag{151}$$

y

$$\mathfrak{R}^{-}\left(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{s}\right)=w_{LD}^{-1}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{s} & \\ \boldsymbol{p} & & \boldsymbol{q} \\ & \boldsymbol{r} & \end{bmatrix}.$$

□

Como antes, obtenemos el siguiente teorema generador de $\mathcal{V}$-álgebras faciales de Hopf CQT.

Teorema 3.43. *Para una* $\mathcal{V}$*-álgebra facial de Hopf CQT finitamente generada* $\mathfrak{H}$*, existe un* $k^{\mathcal{V}}$*-bimódulo trenzado cerradizo* (M, S) *y generadores* $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}, \tilde{\boldsymbol{p}}\otimes\tilde{\boldsymbol{q}}$ *(*$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{G}_M^m, m \geq 0$*) de* $\mathfrak{H}$ *tal que las relaciones* (78)-(85) *son satisfechas.*

□Finalmente veremos en esta sección, que dada un álgebra separable R, podemos dotar de una estructura de biálgebra débil a $R^e = R \otimes R^{op}$

Lema 3.44. *Dada* R *una* $\mathbb{C}$*-álgebra separable,* $R^e = R \otimes R^{op}$ *tiene una estructura de álgebra de Hopf débil dada por su idempotente simétrico de separabilidad, en el sentido de que resulta, si* $e = e_1 \otimes e_2$*,*

$$\Delta(1\otimes 1)=(e_1\otimes 1)\otimes(1\otimes e_2)$$

Demostración. Como hemos visto una tal álgebra resulta isomorfa a un producto directo de álgebras de matrices. Probamos el resultado entonces para $R = M_n(\mathbb{C})$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Tomamos

$$e=\frac{1}{n}\sum_{p,s}e_{ps}\otimes e_{sp}$$

y definimos
$$\Delta(e_{kl}\otimes e_{ji})=\frac{1}{n}\sum_{p,s}e_{ps}\otimes e_{ji}\otimes e_{kl}\otimes e_{sp},$$
$$\varepsilon(e_{kl}\otimes e_{ji})=n\delta_{k,i}\delta_{l,j}.$$
Así resulta
$$\Delta(1\otimes 1)=\sum_{i,j}\Delta(e_{ii}\otimes e_{jj})=\frac{1}{n}\sum_{p,s}e_{ps}\otimes e_{jj}\otimes e_{ii}\otimes e_{sp}=(e_1\otimes 1)\otimes(1\otimes e_2),$$

R^e es un álgebra asociativa y unitaria con $(a\otimes a^o)(b\otimes b^o)=(ab\otimes b^oa^o)$. Vemos que es una coálgebra coasociativa y counitaria a partir de lo siguiente.
$$(\Delta\otimes \mathrm{id})(\Delta)(e_{kl}\otimes e_{ji})=\frac{1}{n}\sum_{p,s}\Delta(e_{ps\otimes e_{ji}})\otimes e_{kl}\otimes e_{sp}=$$
$$\frac{1}{n^2}\sum_{p,s,q,r}e_{qr}\otimes e_{ji}\otimes e_{ps}\otimes e_{rq}\otimes e_{kl}\otimes e_{sp}$$
y esto es igual a $(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta)((e_{kl}\otimes e_{ji}))$. Además, surge inmediatamente de la definición de ε que R^e es counitaria. Vemos que Δ preserva el producto:
$$\Delta((e_{kl}\otimes e_{ji})(e_{ab}\otimes e_{dc}))=\delta_{l,a}\delta_{c,j}\Delta(e_{kb}\otimes e_{di})=$$
$$\delta_{l,a}\delta_{c,j}\frac{1}{n}\sum_{p,s}e_{ps}\otimes e_{di}\otimes e_{kb}\otimes e_{sp}$$
y
$$\Delta((e_{kl}\otimes e_{ji}))\Delta((e_{ab}\otimes e_{dc}))=\frac{1}{n^2}\sum_{p,s,q,r}(e_{ps}\otimes e_{ji}\otimes e_{kl}\otimes e_{sp})(e_{qr\otimes e_{dc}\otimes e_{ab}\otimes e_{rq}})=$$
$$\frac{1}{n^2}\sum_{p,s,q,r}\delta_{s,q}e_{pr}\otimes\delta_{cj}e_{di}\otimes\delta_{a,l}e_{kb}\otimes\delta_{q,s}e_{r,p}=$$
$$\delta_{l,s}\delta_{c,j}\frac{1}{n^2}\sum_{p,r,s}e_{pr}\otimes e_{di}\otimes e_{kb}\otimes e_{r,p}=$$
$$\delta_{l,s}\delta_{c,j}\frac{1}{n}\sum_{p,r}e_{pr}\otimes e_{di}\otimes e_{kb}\otimes e_{r,p}.$$
Ahora vemos que se cumplen los axiomas que definen a una biálgebra débil. En cuanto al axioma (i),
$$(\Delta(1\otimes 1)\otimes 1\otimes 1)(1\otimes 1\otimes\Delta(1\otimes 1))=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j,k,l}e_{ij}\otimes 1\otimes e_{kl}\otimes e_{ji}\otimes 1\otimes e_{lk}=$$
$$(1\otimes 1\otimes\Delta(1\otimes 1))(\Delta(1\otimes 1)\otimes 1\otimes 1)=(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta)(1\otimes 1).$$
El axioma (ii) también se cumple, al valer las igualdades:
$$\varepsilon((e_{kl}\otimes e_{ji})(e_{pq}\otimes e_{rs})(e_{ab}\otimes e_{cd}))=\delta_{l,p}\delta_{q,a}\delta_{d,r}\delta_{s,j}\varepsilon(e_{kb}\otimes e_{ci})=$$
$$n\delta_{l,p}\delta_{q,a}\delta_{d,r}\delta_{s,j}\delta_{k,i}\delta_{b,c}.$$

Y, por otro lado,

$$\frac{1}{n}\sum_{x,y}\varepsilon((e_{kl}\otimes e_{ji})(e_{xy}\otimes e_{rs}))\varepsilon((e_{pq}\otimes e_{yx})(e_{ab}\otimes e_{cd})) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{x,y}\delta_{l,x}\delta_{s,j}\varepsilon(e_{ky}\otimes e_{ri})\delta_{q,a}\delta_{d,y}\varepsilon(e_{pb}\otimes e_{cx}) =$$

$$\frac{n^2}{n}\delta_{l,p}\delta_{q,a}\delta_{d,r}\delta_{s,j}\delta_{k,i}\delta_{b,c} = n\delta_{l,p}\delta_{q,a}\delta_{d,r}\delta_{s,j}\delta_{k,i}\delta_{b,c}.$$

En este contexto, los mapas counitales quedan definidos por

$$\varepsilon_t(e_{kl}\otimes e_{ji}) = \frac{1}{n}\sum_{p,s}\varepsilon((e_{ps}\otimes 1)(e_{kl}\otimes e_{ji}))1\otimes e_{sp} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{p,s}\delta_{s,k}\varepsilon(e_{pl}\otimes e_{ji})1\otimes e_{sp} = \frac{1}{n}\sum_{p}\varepsilon(e_{pl}\otimes e_{e_ji})1\otimes e_{kp} =$$

$$\sum_{p}\delta_{p,i}\delta_{l,j}1\otimes e_{kp} = \delta_{l,j}1\otimes e_{ki}$$

y, análogamente, vemos que

$$\varepsilon_s(e_{kl}\otimes e_{ji}) = \delta_{k,i}e_{jl}\otimes 1.$$

Definimos S como

$$S(e_{kl}\otimes e_{ji}) = e_{ji}\otimes e_{kl}$$

y vemos que cumple el axioma (iii) de la definición de grupoide cuántico, en efecto,

$$(e_{kl}\otimes e_{ji})_1 S((e_{kl}\otimes e_{ji})_2) = \frac{1}{n}\sum_{p,s}(e_{ps}\otimes e_{ji})(e_{sp}\otimes e_{kl}) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{p,s}e_{pp}\otimes\delta_{l,j}e_{ki} = \delta_{l,j}1\otimes e_{ki},$$

$$S((e_{kl}\otimes e_{ji})_1)(e_{kl}\otimes e_{ji})_2 = \delta_{k,i}e_{jl}\otimes 1$$

y

$$S((e_{kl}\otimes e_{ji})_1)(e_{kl}\otimes e_{ji})_2 S((e_{kl}\otimes e_{ji})_3) =$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{p,s,q,r}S(e_{qr\otimes e_{ji}})e_{ps\otimes e_{rq}}S(e_{kl\otimes e_{sp}}) =$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{p,s,q,r}(e_{ji}\otimes e_{qr})(e_{ps}\otimes e_{rq})(e_{sp}\otimes e_{kl}) =$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{p,s,q,r}\delta_{i,p}e_{jp}\otimes\delta_{l,r}e_{kr} = \frac{1}{n^2}\sum_{s,q}e_{ji}\otimes e_{kl} =$$

$$e_{ji}\otimes e_{kl} = S(e_{kl}\otimes e_{ji}),$$

y por lo tanto R^e es un álgebra de Hopf débil. Tomando el coproducto opuesto, este álgebra también tiene una tal estructura y en este caso

$$\Delta((e_{kl}\otimes e_{ji})) = \sum_{p,s}e_{kl}\otimes e_{ps}\otimes e_{sp}\otimes e_{ji}$$

y $\Delta(1\otimes 1) = 1\otimes e_1\otimes e_2\otimes 1$. $\square$

4. Disquisiciones categóricas

4.1. Categorías monoidales

Comenzamos fijando las definiciones de algunos términos que usaremos en esta sección, según [5].

Definición 4.1. *Dado k un anillo conmutativo, decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva sobre k si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) *$Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ es un k-espacio vectorial para todo $U,V \in Obj(\mathcal{C})$ y las composiciones*

$$Hom_{\mathcal{C}}(V,W) \times Hom_{\mathcal{C}}(U,V) \to Hom_{\mathcal{C}}(U,W), \ (\phi,\psi) \to \phi \circ \psi$$

son k-bilineales ($U,V,W \in Obj(\mathcal{C})$).

(ii) *Existe un objeto cero $\mathbf{0} \in Obj(\mathcal{C})$ tal que $Hom_{\mathcal{C}}(\mathbf{0},V) = Hom_{\mathcal{C}}(V,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo $V \in obj(\mathcal{C})$.*

(iii) *Existen las sumas directas finitas en $\mathcal{C}$.*

Una categoría aditiva $\mathcal{C}$ se dice abeliana *si*

(iv) *Todo morfismo $\phi \in Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ tiene un núcleo $ker\phi \in Mor(\mathcal{C})$ y un conúcleo $coker\phi \in Mor(\mathcal{C})$ (ecualizador y coecualizador de f y el morfismo 0, respectivamente). Todo morfismo es la composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo. Si $ker\phi = \mathbf{0}$, entonces $\phi = ker(coker\phi)$. Si $coker\phi = \mathbf{0}$, $\phi = coker(ker\phi)$.*

Ejemplos 4.2. Las siguientes categorías son abelianas:

1. La categoría de k-espacios vectoriales $Vec(k)$ y la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita $Vec_f(k)$.

2. La categoría $Rep(A)$ de representaciones de una k-álgebra A.

3. La categoría $Rep(G)$ de representaciones de un grupo G sobre k (caso particular del anterior, vía el álgebra de grupo).

Recordemos que un *isomorfismo funtorial* o *transformación natural* ϕ ente dos funtores covariantes F y G es una colección de morfismos

$$\phi_U : F(U) \to G(U), \quad U \in Obj(\mathcal{C})$$

tal que para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,V)$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\phi_U"'] & F(V) \arrow[d, "\phi_V"] \\ G(U) \arrow[r, "G(f)"'] & G(V) \end{tikzcd} .$$

Se definen análogamente transformaciones naturales de funtores contravariantes y de varias variables. Recordemos también que dados dos funtores covariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, F se dice un *adjunto a izquierda* de G (o G un *adjunto a derecha* de F) si existe un isomorfismo natural del funtor $\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-)$ al funtor $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-))$.

Definición 4.3. *Una categoría monoidal es una colección de datos* $(\mathcal{C}, \otimes, \boldsymbol{1}, a, \lambda, \rho)$ *donde* $\mathcal{C}$ *es una categoría,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *es un bifuntor,* $\boldsymbol{1} \in Obj(\mathcal{C})$ *y*

$$a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

$$\rho_U : U \otimes \boldsymbol{1} \to U, \quad \lambda_U : 1 \otimes U \to U$$

son isomorfismos funtoriales que satisfacen los siguientes axiomas:

1. *Identidad del pentágono: Dados* $V_i \in Obj(\mathcal{C})$ $(i = 1, 2, 3, 4)$*, tenemos*

$$(\mathrm{id}_1 \otimes a_{2,3,4}) a_{1,23,4} (a_{1,2,3} \otimes \mathrm{id}_4) = a_{1,2,34} a_{12,3,4}.$$

2. *Identidad del triángulo: Dados* $V_1, V_2 \in Obj(\mathcal{C})$*, vale*

$$\rho \otimes \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \lambda) a_{1,\boldsymbol{1},2}.$$

Una categoría monoidal es aditiva si, además, $\otimes$ *es bilineal en los espacios de morfismos.*

Ejemplos 4.4. Las siguientes categorías son monoidales.

1. $Vec(k)$ y $Vec_f(k)$.

2. La categoría $Rep(\mathcal{L})$ (resp. $Rep_f(\mathcal{L})$) de representaciones (resp. representaciones de dimensión finita) de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ sobre k.

3. Más generalmente, la categoría $Rep(A)$ de una biálgebra A (como k-álgebra). $\otimes$ es el producto tensorial de espacios vectoriales, $\mathbf{1}$=k, con las siguientes acciones de A: $x(v \otimes w) = \Delta(x)(v \otimes w), xc = \varepsilon(x)c$, para $x \in A, v \in V$, $w \in W, c \in k$, $V, W \in Obj(Rep(A))$.

4.2. Álgebras

Consideramos en lo siguiente una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, \lambda, \rho)$.

Definición 4.5. *Un álgebra (asociativa, unitaria) en* $\mathcal{C}$ *es una terna* (A, m, u)*, donde* $m : A \otimes A \to A$*,* $u : \boldsymbol{1} \to A$*, tal que los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{A,A,A}"] \arrow[dr, "m \otimes \mathrm{id}"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
 & A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes \boldsymbol{1} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes u"] \arrow[dr, "\rho"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
 & A
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
\boldsymbol{1} \otimes A \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
 & A
\end{tikzcd}.$$

Dadas dos $\mathcal{C}$*-álgebras* A, B*,* $f : A \to B$ *es un morfismo de* $\mathcal{C}$*-álgebras si* $f(u_A) = u_B$ *y conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \otimes B \arrow[r, "m_B"'] & B
\end{tikzcd}.$$

Observación 4.6. El elemento u de la definición anterior es único. Sea u' otro mapa como en la definición. Como λ_X representa una transformación natural entre los funtores $X \mapsto X$ y $X \otimes \mathbf{1} \mapsto X$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes u"] \arrow[d, "l_{\mathbf{1}}"'] & \mathbf{1} \otimes A \arrow[d, "\lambda_A"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "u"'] & A
\end{tikzcd}$$

Análogamente, la transformación natural entre $X \mapsto X$ y $\mathbf{1} \otimes X \mapsto X$ dada por ρ_X hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "u'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\rho_{\mathbf{1}}"'] & A \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "\rho_A"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "u'"'] & A
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes u"] \arrow[dr, bend left, "\lambda_{\mathbf{1}}"] \arrow[dr, bend right, "\rho_{\mathbf{1}}"] \arrow[dd, "u'\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathbf{1} \otimes A \arrow[dd, "\lambda_A"] \\
 & \mathbf{1} \arrow[dr, bend left, "u"] \arrow[dr, bend right, "u'"] & \\
A \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "\rho_A"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Así, vemos que

$$u' \circ \rho_{\mathbf{1}} = u \circ \lambda_{\mathbf{1}}.$$

Tomando $u'' = u$, también tenemos que $u \circ \lambda_{\mathbf{1}} = u \circ \rho_{\mathbf{1}}$, y, por ser $\rho_{\mathbf{1}}$ un isomorfismo, tenemos que $u = u'$.

Tenemos entonces un funtor de olvido U de la categoría de $\mathcal{C}$-álgebras $Alg_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}$. Al respecto, observamos el siguiente lema

Lema 4.7. *Si $\mathcal{C}$ tiene coproductos numerables, existe un funtor T adjunto del funtor de olvido U.*

Demostración. Dado $M \in Obj(\mathcal{C})$, realizamos la siguiente construcción. Definimos primero

$$T^n(M) = \begin{cases} \mathbf{1} & si\ n = 0 \\ T^{n-1}(M) \otimes M & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Resultan naturalmente definidos morfismos $\mu_{r,s} : T^r(M) \otimes T^r(M) \to T^{r+s}(M)$, y finalmente, tomamos

$$T(M) = \coprod_{n \geq 0} T^n(M)$$

Si $\iota : \mathbf{1} \to T(M)$ es la inclusión en $T^0(M)$ y $\mu = \coprod_{r,s\geq 0} \mu_{r,s}$, en el sentido de que $\mu_{|T^r(M)\otimes T^s(M)} = \mu_{r,s}$, tenemos que $(T(M), \mu, \iota)$ es una $\mathcal{C}$-álgebra. Además, $i : M \to T(M)$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que dada A otra $\mathcal{C}$ álgebra y $\phi : M \to A$ morfismo en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo en $Alg_{\mathcal{C}}$ $\Phi : T(M) \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "i"'] & A \\ & T(M) \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd} .$$

Donde, dada ϕ, Φ resulta definida como

$$\Phi = \begin{cases} u_A \; si \; n = 0 \\ m^n \phi^{\otimes n} \; si \; n \geq 1 \end{cases}$$

y por $m^n \phi^{\otimes n}$ entendemos

$$\Phi(m^1 \otimes \ldots \otimes m^n) = \phi(m^1) \ldots \phi(m^n).$$

Si existe otro par $(\tilde{T}, \gamma)$, se desprende de la propiedad universal mencionada que existen también $\tilde{i} : \tilde{T} \to T(M)$ y $\Gamma : T(M) \to \tilde{T}$ morfismos de $\mathcal{C}$-álgebras tales que $\tilde{i} \circ \Gamma = \mathrm{id}_{T(M)}$ y $\Gamma \circ \tilde{i} = \mathrm{id}_{\tilde{T}}$ y así $T(M) \cong \tilde{T}$. Podemos ver entonces que el par $(T(M), i)$, cumple esta propiedad. De la definición del producto se desprende la unicidad de Φ. Finalmente vemos que T es un adjunto de U. Dada $A \in Alg_{\mathcal{C}}$, si $G_M(A)$ $=\mathrm{hom}_{Alg_{\mathcal{C}}}(T(M), A)$, $F_M(A)$ $=\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(M, U(A))$, para $M \in \mathcal{C}$, y α_A : $F_M(A) \to G_M(A)$, está dada por

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & U(A) \\ & T(M) \arrow[u, "\alpha_A(f)"'] \end{tikzcd}$$

entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(g)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

para cada $g \in \mathrm{hom}_{Alg_{\mathcal{C}}}(A, B)$ con $F(g)(f) = g \circ f$, para $f \in F(A)$. En efecto,

$$(\alpha_B \circ F(g))(f) = \alpha_B(g \circ f)$$

$$(G(g) \circ \alpha_A)(f) = g \circ (\alpha_A(f))$$

y la conmutatividad del diagrama surge del hecho de que g es un mapa de álgebras y la definición de α. Análogamente, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} H(M) \arrow[d, "\beta_M"'] & H(N) \arrow[l, "H(g)"'] \arrow[d, "\beta_N"] \\ K(M) & K(N) \arrow[l, "K(g)"] \end{tikzcd}$$

para $H(M) = H_A(M)$ $=\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(M, U(A))$ y $K(M) = K_A(M)$ $=\mathrm{hom}_{Alg_{\mathcal{C}}}(T(M), A)$ para cada $A \in Alg_{\mathcal{C}}$, y $M \in \mathcal{C}$. β, $H(g)$ y $K(g)$ se definen de manera obvia. $\square$

Definición 4.8. *Una coálgebra (coasociativa, counitaria) en $\mathcal{C}$ está dada por una terna (C, Δ, ε), donde $\Delta : A \to A \otimes A$, $\varepsilon : A \to \mathbf{1}$, tal que los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[drr, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & & \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[rr, "a_{A,A,A}"'] & & (A \otimes A) \otimes A
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\Delta"] & \\
& A \otimes A \arrow[dl, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & \\
\mathbf{1} \otimes A \arrow[dr, "\lambda"'] & & A \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "\rho"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Dadas dos $\mathcal{C}$-coálgebras C, D, $g : C \to D$ es un morfismo de coálgebras si $\varepsilon_D(f) = \varepsilon_C$ y conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "g"'] & C \otimes C \arrow[d, "g\otimes g"] \\
D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D
\end{tikzcd}.$$

Definición 4.9. *Una solución de la ecuación de trenzas en $\mathcal{C}$ es un par (M, c) con $M \in Obj(\mathcal{C})$ y $c : M \otimes M \to M \otimes M$ un isomorfismo que verifica*

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

Observación 4.10. Sea S una k-álgebra tal que existe $\phi : S \to S^{op}$ morfismo de álgebras inversible con $\phi^2 = \mathrm{id}$. Dado $M \in {}_S\mathcal{M}_S$, definimos $M_\phi \in {}_S\mathcal{M}_S$ con la acción $s \cdot m = m\phi(s)$. Esto es en efecto una acción bien definida:

$$(st) \cdot m \cdot (uv) = \phi(uv)m\phi(st) = \phi(v)\phi(u)m\phi(t)\phi(s) =$$

$$s \cdot \phi(u)m\phi(t) \cdot v = s \cdot (t \cdot m \cdot u) \cdot v.$$

Entonces, si $c = c_\phi : (M \otimes N) \to (N_\phi \otimes M_\phi)_\phi$, $m \otimes n \mapsto n \otimes m$, tenemos que $(M \otimes_S N, c)$ cumple que

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

Vemos que c está bien definido:

$$c(ms \otimes n) = n \otimes ms = n \otimes \phi(s) \cdot m = n \cdot \phi(s) \otimes m = sn \otimes m = c(m \otimes sn)$$

y es de S bimódulos:

$$c(sm \otimes nt) = (nt) \otimes (sm) = (\phi(t) \cdot n) \otimes (m \cdot \phi(s)) =$$

$$\phi(t)c(m \otimes n)\phi(s) = s \cdot c(m \otimes n) \cdot t.$$

Podemos aplicar la observación anterior al caso $S = R^e = R \otimes R^{op}$, con $\phi(r \otimes r^o) = r^o \otimes r$, ya que tenemos

$$\phi((r \otimes r^o)(s \otimes s^o)) = \phi(rs \otimes s^o r^o) = s^o r^o \otimes rs =$$

$$(r^o \otimes r) \circ (s^o \otimes s) = \phi(r \otimes r^o) \circ \phi(s \otimes s^o),$$

con $(r \otimes r^o) \circ (s \otimes s^o)$ el producto en $(R^e)^{op}$.

Lema 4.11. *Si* (B, m, u) *álgebra en* ${}_{R^e}\mathcal{M}_{R^e}$, $B \otimes B$ *también lo es, con el producto* $\mu = (m \otimes m)(\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id})$.

Demostración. Vemos que este producto está bien definido, si $r \in R^e$,

$$\mu(ar \otimes b, c \otimes d) = (m \otimes m)(ar \otimes (c_\phi \otimes b_\phi)_\phi \otimes d) = a \otimes (c_\phi \otimes b_\phi \phi(r))_\phi \otimes d =$$

$$a \otimes (c_\phi \otimes (rb)_\phi))_\phi \otimes d = \mu(a \otimes rb \otimes c \otimes d),$$

y es asociativo por serlo μ en B, ya que este es el producto usual en $B \otimes B$. $\square$

5. Cambio de base Morita en grupoides cuánticos

5.1. $\times_B$−biálgebras

Comenzaremos esta sección fijando la notación concerniente a las $\times_B$−biálgebras, siguiendo [24]. Aquí tomaremos una k-álgebra B y su álgebra opuesta $B^o = B^{op}$. Denotaremos por $B \ni b \mapsto b^o \in B^o$ el isomorfismo k-lineal trivial. Sea M un $B^o - B^o$-bimódulo y N un $B - B$-bimódulo. Usamos las siguientes notaciones,

$$\int_x {}_{x^o}M \otimes {}_xN = M \otimes N / \langle \{x^o m \otimes n - m \otimes xn : m \in M, n \in M, x \in B\} \rangle ;$$

$$\int^x M_{x^o} \otimes N_x = \{\sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes N : \forall\, x \in B, \sum_i m_i x^o \otimes n_i = \sum_i m_i \otimes n_i x\};$$

$$\int^y \int_x {}_{x^o}M_{y^o} \otimes {}_xN_y = \{\sum_i m_i \otimes n_i \in \int_x {}_{x^o}M \otimes {}_xN : \forall\, y \in B,$$

$$\sum_i m_i y^o \otimes n_i = \sum_i m_i \otimes n_i y\};$$

$$\int_x \int^y {}_{x^o}M_{y^o} \otimes {}_xN_y = \int^y M_{y^o} \otimes N_y \,/ \left\langle \{\sum_i x^o m_i \otimes n_i - \sum_i m_i \otimes x n_i : x \in B\} \right\rangle .$$

Hay un morfismo k-lineal natural de la cuarta a la tercera expresión, que manda la clase de $\sum_i m_i \otimes n_i$ a la clase de $\sum_i m_i \otimes n_i$. Los módulos que involucran sólo el símbolo $\int_x$ son variaciones del producto tensorial habitual sobre B, de hecho, $\int_x M_x \otimes {}_xN \cong M \otimes_B N$, para $M \in \mathcal{M}_B$ y $N \in {}_B\mathcal{M}$. Sea M un $B^o - B^o$-bimódulo y P un $B - B$-bimódulo. Entonces

$$M \times_B P := \int^y \int_x {}_{x^o}M_{y^o} \otimes {}_xN_y.$$

Si $M \in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$, entonces $M \times_B P \in {}_B\mathcal{M}_B$ con B actuando en el factor de la izquierda, y si también $P \in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$, entonces $M \times_B P \in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$. Así, $\times_B$ define un producto en la categoría ${}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$, que, no obstante, no es asociativo ni unitario. Supongamos que $M \in {}_{B^o}\mathcal{M}_{B^o}$, $P \in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$ y $N \in {}_B\mathcal{M}_B$, entonces

$$M \times_B P \times_B N := \int^{y,c} \int_{x,b} {}_{x^o}M_{y^o} \otimes {}_{x,b^o}P_{y,c^o} \otimes {}_bN_c,$$

donde, ya que $\int^c$ y $\int^y$ conmutan, hemos abreviado $\int^{y,c} := \int^y \int^c = \int^c \int^y$. Hay mapas de asociatividad

$$(M \times_B P) \times_B N \xrightarrow{\alpha} M \times_B P \times_B N,$$

$$\sum_j (\sum_i m_{ij} \otimes p_{ij}) \otimes n_j \mapsto \sum_{i,j} m_{ij} \otimes p_{ij} \otimes n_j$$

y

$$M \times_B (P \times_B N) \xrightarrow{\alpha'} M \times_B P \times_B N,$$

$$\sum_i m_i \otimes \sum_j p_{ij} \otimes n_{ij} \mapsto \sum_{ij} m_i \otimes p_{ij} \otimes n_{ij}.$$

La buena definición de estos mapas se sigue de cuentas como

$$\alpha(\sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})x^o\otimes n_j) = \alpha(\sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij}x^o)\otimes n_j) =$$

$$\sum_{i,j} m_{ij}\otimes p_{ij}x^o\otimes n_j = \sum_{i,j} m_{ij}\otimes p_{ij}\otimes n_jx = \alpha(\sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})\otimes n_jx),$$

lo que coincide con el hecho que $\sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})x^o\otimes n_j = \sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})\otimes n_jx$ Si M y N son B^e-bimódulos, también lo son $(M\times_B P)\times_B N$, $M\times_B(P\times_B N)$ y $M\times_B P\times_B N$, y los mapas α,α' son mapas de bimódulos. Por ejemplo,

$$\alpha((b\otimes b^o)(\sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})\otimes n_j)) = \alpha(\sum_j(b\otimes b^o)(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})\otimes n_j) =$$

$$\alpha(\sum_j(\sum_i(b\otimes b^o)m_{ij}\otimes p_{ij})\otimes n_j) = \sum_{i,j}(b\otimes b^o)m_{ij}\otimes p_{ij}\otimes n_j =$$

$$(b\otimes b^o)\alpha(\sum_j(\sum_i m_{ij}\otimes p_{ij})\otimes n_j).$$

Una estructura de B^e-bimódulo en $E = End(B)$ es inducida por la estructura de B^e-módulo a izquierda de B. Tenemos, para $M\in {}_{B^o}\mathcal{M}_{B^o}$ y $N\in {}_B\mathcal{M}_B$, los siguientes mapas

$$\theta: M\times_B End(B)\to M,$$

$$\sum_i m_i\otimes f_i\mapsto\sum_i(f_i(1))^o m_i$$

y

$$\theta': End(B)\times_B N\to N$$

$$\sum_i f_i\otimes n_i\mapsto\sum_i f_i(1)n_i.$$

θ es un mapa de B^o-bimódulos:

$$\theta(b^o(\sum_i m_i\otimes f_i)) = \theta(\sum_i bm_i\otimes f_i) = \sum_i(f_i(1))^o b^o m_i =$$

$$\sum_i b^o((f_i(1))^o m_i) = b^o(\sum_i(f_i(1))^o m_i).$$

y análogamente θ' es un mapa de B-bimódulos. Si $M,N\in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$, entonces son mapas de bimódulos.

Definición 5.1. *Una $\times_B$−coálgebra es un B^e-bimódulo L junto con una comultiplicación $\Delta: L\to L\times_B L$ y una counidad $\varepsilon: L\to E$, ambas de R^e-bimódulos, tales que los diagramas*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & L\times_B L \arrow[d, "\mathrm{id}\times_B\Delta"] \\
L\times_B L \arrow[d, "\Delta\times_B\mathrm{id}"'] & & L\times_B(L\times_B L) \arrow[d, "\alpha'"] \\
(L\times_B L)\times_B L \arrow[rr, "\alpha"'] & & L\times_B L\times_B L
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & L \times_B L \arrow[d, "\mathrm{id}\times_B \varepsilon"] \\
L & L \times_B E \arrow[l, "\theta"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & L \times_B L \arrow[d, "\varepsilon\times_B \mathrm{id}"] \\
L & E \times_B L \arrow[l, "\theta'"]
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Para $\times_B-$coálgebras utilizamos la misma notación (de Sweedler) que utilizamos para las coálgebras usuales, i.e. escribimos $\Delta(\xi) = \xi_1 \otimes \xi_2 \in L \times_B L$. La categoría de B^e-módulos a izquierda es monoidal con el producto tensorial $M \diamond N := \int_x {}_{x^o}M \otimes {}_x N$ (que es naturalmente isomorfa a $({}_B\mathcal{M}_B, \otimes_B)$). En esta notación un mapa $\Delta : L \to L \times_B L$ en ${}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$ induce un mapa $\Delta_0 : L \to L \diamond L$ en ${}_{B^e}\mathcal{M}$. Componiendo con $E \ni f \to f(1) \in B$, un mapa $\varepsilon : L \to E$ en ${}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$ induce un mapa $\varepsilon_0 L \to B$ en ${}_{B^e}\mathcal{M}$. Así tenemos que los mapas Δ y ε dan a L una estructura de $\times_B-$coálgebra si y sólo su Δ_0 y ε_0 le dan una estructura de coálgebra en $({}_{B^e}\mathcal{M}, \diamond)$; esto es, si y sólo si valen $(\Delta_0 \diamond \mathrm{id})\Delta_0 = (\mathrm{id} \diamond \Delta_0)$ y $(\varepsilon_0 \diamond \mathrm{id})\delta_0 = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \diamond \varepsilon_0)\Delta_0$. Ya que $\diamond$ es asociativo, como $\otimes_B$ y, por ejemplo,

$$(\varepsilon_0 \diamond \mathrm{id})\Delta_0(\xi) = \varepsilon_0(\xi_1)\xi_2 = \varepsilon(\xi_1)(1)\xi_2 = \theta'(\varepsilon \times_B \mathrm{id})\Delta(\xi) = \xi.$$

Si $M, M', N, N' \in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$, entonces tenemos bien definido un mapa de B^e-bimódulos

$$\tau : (M \times_B M') \otimes_{B^e} (N \times_B N') \to (M \otimes_{B^e} N) \times_B (M' \otimes_{B^e} N')$$
$$(\sum_i m_i \otimes m_i') \otimes (\sum_j n_i \otimes n_i') \mapsto \sum_{i,j} m_i \otimes n_j \otimes m_i' \otimes n_i'$$

En efecto,

$$\tau((m \otimes m')(b \otimes b^o) \otimes (n \otimes n')) = \tau(mb \otimes m'b^o) \otimes n \otimes n') = mb \otimes n \otimes m'b^o \otimes n' =$$
$$(m \otimes bn) \otimes (m' \otimes b^o n') = \tau(m \otimes m' \otimes (b \otimes b^o)(n \otimes n'))$$

y

$$\tau((b \otimes b^o)(m \otimes m') \otimes (n \otimes n')) = \tau((bm \otimes b^o m') \otimes (n \otimes n')) =$$
$$bm \otimes n \otimes b^o m' \otimes n = b(m \otimes n) \otimes b^o(m' \otimes n') =$$
$$(b \otimes b^o)(m \otimes n) \otimes (m' \otimes n') = (b \otimes b^o)\tau((m \otimes m')(n \otimes n')).$$

Definición 5.2. *Sea S una k-álgebra. Un álgebra sobre S (o un S-ring) es un álgebra L junto con un mapa de álgebras $\iota : S \to L$.*

En particular, un álgebra sobre S es un S-bimódulo de un modo natural y vemos que las álgebras sobre S son precisamente las álgebras en la categoría monoidal $({}_S\mathcal{M}_S, \otimes_S)$. Usando el mapa τ definido arriba, vemos que para un álgebra L sobre B^e, el B^e-bimódulo $L \times_B L$ es nuevamente un álgebra sobre B^e, con

$$\iota(b \otimes b^o) = b \otimes b^o \in L \times_B L \quad (\text{i.e } \iota(b \otimes b^o) = \iota(b \otimes 1) \otimes \iota(1 \otimes b^o))$$

Definición 5.3. *Sea B una k-álgebra. Una $\times_B-$biálgebra es un álgebra L sobre B^e con una estructura de $\times_B-$coálgebra tal que la comultiplicación $\Delta : L \to L \times_B L$ y la counidad $\varepsilon : L \to E$ son mapas de álgebras sobre B^e*

Ejemplo 5.4. Sea B un álgebra y H una biálgebra sobre k. Supongamos que H *mide* a B, es decir, existe una aplicación $\rightharpoonup: H\otimes B\to B$ tal que

$$h\rightharpoonup(bc)=(h_1\rightharpoonup b)(h_2\rightharpoonup c) \text{ y } h\rightharpoonup 1=\varepsilon(h)1_B,$$

para cada $b,c\in B$ y $h\in H$. Asumamos que $\sigma: H\otimes H\to B$ en un cociclo inversible bajo el producto de convolución, esto es, $\sigma(1,h)=\sigma(h,1)=\varepsilon(h)1_B$ y

$$(f_1\rightharpoonup\sigma(g_1,h_1))\sigma(f_2,g_2h_2)=\sigma(f_1,g_1)\sigma(f_2g_2,h)$$

para todo $f,g,h\in H$. Finalmente, supongamos que $\rightharpoonup$ es una estructura de H-módulo torcida por σ, esto es, que $1\rightharpoonup b=b$ y

$$(g_1\rightharpoonup h_1\rightharpoonup b)\sigma(g_2,h_2)=\sigma(g_1,h_1)(g_2h_2\rightharpoonup b)$$

para $g,h\in H$ y $b\in B$. Así, $R=R(H,B,\rightharpoonup,\sigma)=B\otimes H\otimes B^o$ es una $\times_B-$biálgebra con multiplicación

$$(b\otimes g\otimes c^o)(d\otimes h\otimes e^o)=b(g_1\rightharpoonup d)\sigma(g_2,h1)\otimes g_3h_2\otimes(\sigma^{-1}(g_4,h_3)(g_5\rightharpoonup e)c)^o,$$

comultiplicación

$$\Delta(b\otimes g\otimes c^o)=b\otimes g_1\otimes 1^o\otimes 1\otimes g_2\otimes c^o$$

y counidad

$$\varepsilon(b\otimes g\otimes c^o)(d)=b(g\rightharpoonup d)c$$

para $b,c,d,e\in B$ y $g,h\in H$. El mapa de álgebras $B^e\to R$ que hace de R un álgebra sobre B^e está dado por $b\otimes c^o\mapsto b\otimes 1\otimes c^o$ para $b,c\in B$.
Comprobamos, en efecto, que

$$\alpha'(\mathrm{id}\times_B\Delta)\Delta(b\otimes g\otimes c^o)=\alpha'(\mathrm{id}\times_B\Delta)(b\otimes g_1\otimes 1^o\otimes 1\otimes g_2\otimes c^o)=$$

$$\alpha'(b\otimes g_1\otimes 1^o\otimes(1\otimes g_2\otimes 1\otimes 1^o\otimes g_3\otimes c^o))=\alpha(\Delta\times_B\mathrm{id})\Delta(b\otimes g\otimes c^o)$$

por ser H una coálgebra. Además, vemos que

$$\theta(\mathrm{id}\times_B\varepsilon)\Delta(b\otimes g\otimes c^o)=\theta((b\otimes g_1\otimes 1^o)\otimes\varepsilon(1\otimes g_2\otimes c^o))=$$

$$\varepsilon(1\otimes g_2\otimes c^o)(1)^o(b\otimes g_1\otimes 1^o)=(1(g_2\rightharpoonup 1)c)^o(b\otimes g_1\otimes 1^o)=\varepsilon(g_2)c^o(b\otimes g_1\otimes 1^o)= \quad (152)$$

$$(1\otimes 1\otimes c^o)(b\otimes g\otimes 1)=(1\rightharpoonup b)\sigma(1,g_1)\otimes g_2\otimes(\sigma^{-1}(1,g_3)(1\rightharpoonup 1)c)^o= \quad (153)$$

$$b\otimes g\otimes c^o.$$

Vemos que Δ y ε son multiplicativos:

$$\Delta((b\otimes g\otimes c^o)(d\otimes h\otimes e^o))=\Delta(b(g_1\rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)\otimes g_3h_2\otimes(\sigma^{-1}(g_4,h_3)(g_5\rightharpoonup e)c)^o)=$$

$$b(g_1\rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)\otimes g_3h_2\otimes 1^o\otimes 1\otimes g_4h_3\otimes(\sigma^{-1}(g_5,h_4)(g_6\rightharpoonup e)c)^o$$

y esto es igual a

$$\Delta(b\otimes g\otimes c^o)\Delta(d\otimes h\otimes e^o)=(b\otimes g_1\otimes 1^o\otimes 1\otimes g_2\otimes c^o)(d\otimes h_1\otimes 1^o\otimes 1\otimes h_2\otimes e^o)=$$

$$b(g_1\rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)\otimes g_3h_2\otimes(\sigma^{-1}(g_4,h_3)(g_5\rightharpoonup 1)1)^o\otimes\cdots$$
$$\cdots 1(g_6\rightharpoonup 1)\sigma(g_7,h_4)\otimes g_8h_5\otimes(\sigma^{-1}(g_9,h_6)(g_{10}\rightharpoonup e)c)^o=$$

$$b(g_1 \rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)\otimes g_3h_2\otimes(\sigma^{-1}(g_4,h_3))^o\otimes(\sigma(g_5,h_4))\otimes g_6h_5\otimes(\sigma^{-1}(g_7,h_6)(g_8 \rightharpoonup e)c)^o =$$
$$b(g_1 \rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)\otimes g_3h_2\varepsilon(g_4)\varepsilon(h_3)\otimes 1^o\otimes 1\otimes g_5h_4\otimes(\sigma^{-1}(g_6,h_5)(g_7 \rightharpoonup e)c)^o =$$
$$b(g_1 \rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)\otimes g_3h_2\otimes 1^o\otimes 1\otimes g_4h_3\otimes(\sigma^{-1}(g_5,h_4)(g_6 \rightharpoonup e)c)^o.$$

Por su lado,

$$\varepsilon((b\otimes g\otimes c^o)(d\otimes h\otimes e^o))(f) = \varepsilon(b\otimes g\otimes c^o)\varepsilon(d\otimes h\otimes e^o)(f) =$$
$$b(g \rightharpoonup (d(h \rightharpoonup f)e))c = b(g_1 \rightharpoonup d)(g_2 \rightharpoonup (h \rightharpoonup f))(g_3 \rightharpoonup e)c.$$

Mientras que también

$$\varepsilon((b\otimes g\otimes c^o)(d\otimes h\otimes e^o))(f) =$$
$$b(g_1 \rightharpoonup d)\sigma(g_2,h_1)(g_3h_2 \rightharpoonup f)\sigma^{-1}(g_4,h_3)(g_5 \rightharpoonup e)f$$

y la igualdad entre estas dos expresiones se realiza ya que

$$g_2 \rightharpoonup h \rightharpoonup f = (g_2 \rightharpoonup h_1 \rightharpoonup f)\varepsilon(h_2)\varepsilon(g_3) =$$
$$(g_2 \rightharpoonup h_1 \rightharpoonup f)\sigma(g_3,h_2)\sigma^{-1}(g_4,h_3) = \sigma(g_2,h_1)(g_3h_2 \rightharpoonup f)\sigma^{-1}(g_4,h_3).$$

Finalmente, vemos que Δ y ε son mapas de B-álgebras, esto es que preservan los mapas $B^e \to R$, $B^e \to R\times_B R$ y $B^e \to E$ en cada caso:

$$\Delta(d\otimes 1\otimes e^o) = (d\otimes 1\otimes 1^o)\otimes(1\otimes 1\otimes e^o) = \iota(d\otimes 1\otimes 1^o)\otimes\iota(1\otimes 1\otimes e^o)$$

y

$$\varepsilon(\iota(b\otimes c^o))(d) = \varepsilon(b\otimes 1\otimes c^o)(d) = b(1 \rightharpoonup d)c = bdc = \iota(b\otimes c^o)(d).$$

La equivalencia dada por el próximo teorema será muy útil en lo que sigue.

Lema 5.5. *Para $M, M', N, N' \in {}_{B^e}\mathcal{M}$ tenemos un mapa*

$$\tau : Hom(M,M')\times_B Hom(N,N') \to Hom(M\diamond N, M'\diamond N')$$
$$\sum_i f_i\otimes g_i \mapsto (m\otimes n \mapsto \sum_i f_i(m)\otimes g_i(n))$$

Demostración. Esto se sigue del comportamiento de Hom en los colímites; hay un mapa natural

$$\varinjlim Hom(X,Y_i) \to Hom(X,\varinjlim Y_i)$$

y un isomorfismo natural

$$\varprojlim Hom(Y_i,X) \cong Hom(\varinjlim Y_i, X).$$

Así, el mapa natural $Hom(M,M')\otimes Hom(N,N') \to Hom(M\otimes N, M'\otimes N')$ induce:

$$Hom(M,M')\times_B Hom(N,N') = \int^y \int_x {}_{x^o}Hom(M,M')_{y^o}\otimes {}_xHom(N,N')_y =$$
$$\int^y \int_x Hom({}_{y^o}M,\, {}_{x^o}M')\otimes Hom({}_yN,\, {}_xN')$$

por como se traducen las acciones en M, N a $Hom(M,N)$ y lo mismo para M', N'. El mapa natural citado induce entonces

$$\to \int^y \int_x Hom({}_{y^o}M \otimes {}_yN,\, {}_{x^o}M' \otimes {}_xN') \to Hom(\int_y {}_{y^o}M \otimes {}_yN, \int_x {}_{x^o}M' \otimes {}_xN')$$

por la propiedad mencionada del colímite y por definición

$$Hom(M \diamond N, M' \diamond N')$$

□

Teorema 5.6. *Las siguientes características son equivalentes para un álgebra L sobre B^e:*

1. *Una estructura de $\times_B-$biálgebra en L.*
2. *Una estructura de categoría monoidal en ${}_L\mathcal{M}$ tal que el funtor subyacente ${}_L\mathcal{M} \to {}_{B^e}\mathcal{M}$ es estrictamente monoidal.*

Demostración. Primero, asumamos que (L, Δ, ε) es una $\times_B-$biálgebra. Definimos una estructura de L-módulo en $M \diamond N$ para $M, N \in {}_L\mathcal{M}$ como $\xi \triangleright (m \otimes n) = \xi_1 \triangleright m \otimes \xi_2 \triangleright n$, para $\xi \in L, m \in M, n \in N$. Podemos mostrar directamente que esta estructura de módulo está bien definida, pero utilizaremos en cambio un argumento algo más conceptual. Para $M, M' \in {}_{B^e}\mathcal{M}$, tenemos $Hom(M, M') \in {}_{B^e}\mathcal{M}_{B^e}$. De este modo, $End(M)$ es un álgebra sobre B^e. Una estructura de L-módulo a izquierda induciendo una estructura dada de B^e-módulo a izquierda en M puede ser descripta también por un mapa $\rho : L \to End(M)$ de álgebras sobre B^e.
Ahora, por el lema, para $M, N \in {}_L\mathcal{M}$, podemos reescribir la estructura deseada de L-módulo en $M \diamond N$ como la correspondiente al mapa de álgebras

$$L \xrightarrow{\Delta} L \times_B L \xrightarrow{\rho\otimes\rho} End(M) \times_B End(N) \xrightarrow{\tau} End(M \diamond N).$$

La coasociatividad de Δ implica que el funtor producto así descripto en ${}_L\mathcal{M}$ es asociativo. En efecto, tenemos

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & L \times_B L \arrow[d, "\mathrm{id}\times_B\Delta"] \\
L \times_B L \arrow[d, "\Delta\times_B\mathrm{id}"'] & & L \times_B (L \times_B L) \arrow[d, "\alpha'"] \\
(L \times_B L) \times_B L \arrow[d, "\alpha"'] & & L \times_B L \times_B L \arrow[d, "\rho\otimes\rho\otimes\rho"] \\
L \times_B L \times_B L \arrow[d, "\rho\otimes\rho\otimes\rho"'] & & End(M) \times_B (End(N) \times_B End(P)) \arrow[d, "\mathrm{id}\times_B\tau"] \\
End(M) \times_B End(N) \times_B End(P) \arrow[d, "\tau\otimes\mathrm{id}"'] & & End(M) \times_B End(N \diamond P) \arrow[d, "\tau"] \\
End((M \diamond N) \diamond P) \arrow[drr, "\cong"'] & & End(M \diamond N) \times_B End(P) \arrow[d, "\tau"] \\
& & End(M \diamond (N \diamond P))
\end{tikzcd}$$

que conmuta por la citada coasociatividad de Δ y por el hecho de que $\tau(\mathrm{id}\otimes\tau) = \tau(\mathrm{id}\otimes\tau)$ por definición. Así, tenemos una estructura de categoría monoidal en ${}_L\mathcal{M}$ tal que ${}_L\mathcal{M} \to {}_{B^e}\mathcal{M}$ es estrictamente monoidal por la definición de $\diamond$ (y su relación con $\otimes_B$ en ${}_B\mathcal{M}_B$).
Ahora, asumamos que $({}_L\mathcal{M}, \diamond)$ es una categoría monoidal. Entonces en particular $L \diamond L$ es L-módulo a izquierda. Como para $y \in B$ los mapas $L \ni \xi \mapsto \xi y \in L$ y $L \ni \xi \mapsto \xi y^o L$ son L-lineales a izquierda, $L \times_B L = \int^y L_{y^o} \diamond L_y$ es un límite de mapas en ${}_L\mathcal{M}$ y por lo tanto un L-módulo. Podemos definir $\Delta : L \to L \times_B L$ por $\Delta(\xi) = \xi \triangleright (1 \otimes 1)$. Si $M, N \in {}_L\mathcal{M}$ y $m \in M, n \in N$, entonces el mapa $f : L \diamond L \ni \xi \otimes \zeta \mapsto \xi \triangleright m \otimes \zeta \triangleright n \in M \diamond N$ está en ${}_L\mathcal{M}$ (siendo la imagen del bifuntor $\diamond$ de dos mapas L-lineales a izquierda $L \to M$, $L \to N$). Se sigue que la estructura de L-módulo a izquierda cumple

$$\xi \triangleright (m \otimes n) = (\xi \triangleright f(1 \otimes 1)) = f(\xi_1 \otimes \xi_2) = \xi_1 \triangleright m \otimes \xi_2 \triangleright n$$

para $\xi \in L, m \in M, n \in N$. Tomando $M = N = L$, esta fórmula y la asociatividad del L-módulo a izquierda $L \diamond L$ implican que Δ es un mapa de álgebras, lo que podemos ver explícitamente, si $\zeta \in L$, $m = \zeta_1, n = \zeta_2$, como

$$\xi \triangleright (\zeta_1 \otimes \zeta_2) = \xi_1 \triangleright \zeta_1 \otimes \xi_2 \triangleright \zeta_2 = \xi_1\zeta_1 \otimes \xi_1\zeta_2$$

y el primer término es esta igualdad es también igual a

$$\xi \triangleright \zeta \triangleright (1 \otimes 1) = \xi\zeta \triangleright (1 \otimes 1) = (\xi\zeta)_1 \otimes (\xi\zeta)_2.$$

Para ver que Δ es coasociativo en el sentido de la definición de $\times_B-$coálgebra, basta verificar que $\Delta_0 : L \to L \diamond L$ definido por $\Delta_0(\xi) = \Delta(\xi) = \xi \triangleright (1_L \otimes 1_L) \in L \diamond L$ es coasociativo, como ya hemos visto. Escribimos $\Delta_0(\xi) = \Delta(\xi) = \xi_1 \otimes \xi_2$. Sabemos que la categoría monoidal ${}_L\mathcal{M}$ el isomorfismo $L \diamond (L \diamond L) \cong (L \diamond L) \diamond L$ es L-lineal. Entonces, para $\xi \in L$, tenemos, en $L \diamond L \diamond L$,

$$(\Delta_0 \otimes \mathrm{id})\Delta_0(\xi) = \Delta_0(\xi_1) \otimes \xi_2 = \xi_1 \triangleright (1_L \otimes 1_L)) \otimes \xi_2 =$$

$$\xi \triangleright ((1_L \otimes 1_L) \otimes 1_L) = \xi \triangleright (1_L \otimes (1_L \otimes 1_L)) =$$
$$\xi_1 \otimes (\xi_2 \triangleright (1_L \otimes 1_L)) = (\mathrm{id} \diamond \Delta_0)\Delta_0(\xi).$$

Finalmente, vemos que la representación $L \to End(B)$ de L en el objeto neutral B con respecto a $\diamond$ da una counidad para L. Se cumple que $\varepsilon(\xi\zeta) = \varepsilon(\xi)\varepsilon(\zeta)$ por ser éste una representación y también vemos que

$$(\varepsilon_0 \diamond \mathrm{id})\Delta_0(\xi) = (\varepsilon_o \diamond \mathrm{id})(\xi \triangleright (1_L \otimes 1_L)) =$$

$$\varepsilon(\xi_1)(1)\xi_2 = (\xi_1 \triangleright 1_B) \otimes (\xi_2 \triangleright 1_L) =$$
$$\xi \triangleright (1_B \diamond 1_L) \cong \xi \triangleright 1_L = \xi.$$

$\square$

5.2. $\times_R$–álgebras de Hopf

Definición 5.7. *Una $\times_R$–biálgebra L es una $\times_R$–álgebra de Hopf si y sólo si el mapa*

$$\beta : L \otimes_R L \ni l \otimes m \mapsto l_1 \otimes l_2 m \in L \diamond L$$

es una biyección

Daremos a continuación una definición equivalente de $\times_R$–álgebra de Hopf, según [28]. Para ello necesitamos ciertas nociones previas.

Definición 5.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Sea Y un objeto de $\mathcal{C}$. Si el funtor $\mathcal{C} \ni X \mapsto X \otimes Y \in \mathcal{C}$ es un adjunto a izquierda, denotamos su adjunto a derecha por $\mathcal{C} \ni X \mapsto hom(Y, X) \in \mathcal{C}$ y lo llamamos un funtor hom interno (a derecha).*
Si el funtor $-\otimes Y$ es adjunto a izquierda para cada $Y \in \mathcal{C}$, decimos que $\mathcal{C}$ es cerrada (a derecha).

Un hom-funtor interno provee por definición un morfismo de adjunción $ev : hom(X, Y) \otimes X \to Y$ con la siguiente propiedad universal, para cada $T \in \mathcal{C}$ y $e : T \otimes X \to Y$ existe un único $f : T \to hom(X, Y)$ tal que $e = ev(f \otimes X)$. La categoría $({}_{R^e}\mathcal{M}, \diamond)$ es cerrada a derecha con hom-funtores internos $hom_{{}_{R^e}\mathcal{M}}(N, P) = Hom_{R^o}(N, P)$, para $N, P \in {}_{R^e}\mathcal{M}$, donde la estructura de R^e-módulo a izquierda está dada por $((r \otimes s^o)f)(n) = rf(sn)$.

Proposición 5.9. *Sea L una $\times_R$–biálgebra. Entonces la categoría ${}_L\mathcal{M}$ es cerrada a derecha con hom-funtores internos a derecha*

$$hom_{{}_L\mathcal{M}}(N, P) = Hom_L(L \diamond N, P)$$

donde $L \diamond N$ es un $L - L$-bimódulo con la estructura de L-módulo a izquierda como antes y a derecha inducida por la del factor L.

Demostración. Usando que

$$M \diamond N \ni m \otimes n \mapsto 1 \otimes n \otimes m \in (L \diamond N) \otimes_L M$$

es un isomorfismo con inversa $(l \otimes n) \otimes m \mapsto lm \otimes n$, obtenemos

$$Hom_L(M \diamond N, P) \cong Hom_L((L \diamond N) \otimes_L M, P) \cong Hom_L(M, Hom_L(L \diamond N, P)),$$

ésta última igualdad resultante de la adjunción tensor-hom usual. $\square$

Definición 5.10. *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor monoidal entre categorías monoidales cerradas a derecha, y sea*

$$\zeta : \mathcal{F}(hom(X, Y)) \to hom(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

para $X, Y \in \mathcal{C}$ el único isomorfismo para el cual

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(hom(X,Y)) \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\zeta \otimes \mathcal{F}(X)"] \arrow[d, "\cong"'] & hom(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \otimes \mathcal{F}(X) \arrow[d, "ev"] \\
\mathcal{F}(hom(X,Y) \otimes X) \arrow[r, "\mathcal{F}(ev)"'] & \mathcal{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Decimos que $\mathcal{F}$ preserva hom-funtores internos a derecha si ζ es un isomorfismo para todo $X, Y \in \mathcal{C}$

Dada una categoría localmente pequeña (esto es, que las clases de morfismos son conjuntos) $\mathcal{C}$, cada $A \in \mathcal{C}$ induce un funtor natural $\mathcal{C} \to Set$ llamado hom-funtor, dado por $h_A = Hom(A, -)$. Teniendo en cuenta esta notación, vemos el siguiente lema, conocido como lema de Yoneda, y que será usado en la demostración del próximo Teorema.

Lema 5.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña y $F : \mathcal{C} \to Set$ un funtor. Entonces, para cada $A \in \mathcal{C}$, las transformaciones naturales de h_A a F están en correspondencia uno-a-uno con los elementos de $F(A)$. Si consideramos el funtor contravariante $h'_A = Hom(-, A)$, obtenemos el mismo resultado para un funtor contravariante $G : \mathcal{C} \to Set$.*

Demostración. La prueba de este lema pude verse a partir del siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} Hom(A,A) \arrow[r, "Hom(A{,}f)"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & Hom(A,X) \arrow[d, "\Phi_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

para $f \in Hom(A, X)$ y Φ una transformación natural de h_A a F. Según este diagrama, si $u = \Phi_A(\mathrm{id}_A)$, tenemos que

$$\Phi_X(f) = (F(f))(u),$$

y esto muestra que la transformación Φ está completamente determinada por el elemento $u \in F(A)$. Y, más aún, un tal elemento u define una transformación natural de manera análoga. $\square$

Observación 5.12. En el caso en que el funtor F es otro hom-funtor h_B, el lema indica que

$$Nat(h_A, h_B) \cong Hom(B, A)$$

Teorema 5.13. *Sea L una $\times_R$−biálgebra. Son equivalentes*

1. *El funtor subyacente ${}_L\mathcal{M} \to {}_{R^e}\mathcal{M}$ preserva hom-funtores internos a derecha.*
2. *El mapa $\tilde{\beta} : L \otimes_{R^o} L \ni l \otimes m \mapsto l_1 \otimes l_2 m \in L \diamond L$ es una biyección.*

Demostración. Notemos primero que si $\tilde{\beta}$ es una biyección, también lo es

$$\tilde{\beta}_N : L \otimes_{R^o} N \ni l \otimes n \mapsto l_1 \otimes l_2 \triangleleft n \in L \diamond N$$

para cada $N \in {}_L\mathcal{M}$, ya que podemos identificar $\tilde{\beta}_N$ con $\tilde{\beta} \otimes_L N$. Sean $N, P \in {}_L\mathcal{M}$. Vemos que la evaluación

$$ev : Hom_L(L \diamond N, P) \diamond N \to P$$

para el hom-funtor interno en ${}_L\mathcal{M}$ está dada por $ev(f \otimes n) = f(1 \otimes n)$. Por otro lado, podemos identificar el hom-funtor interno $Hom_{R^o}(N, P)$ en ${}_{R^e}\mathcal{M}$ canónicamente con $Hom_L(L \otimes_{R^o} N, P)$; bajo esta identificación, el mapa

$$ev' : Hom_L(L \otimes_{R^o} N, P) \diamond N \to P$$

está dado por $ev'(f \otimes n) = f(1 \otimes n)$. Entonces el mapa único

$$T : Hom_L(L \diamond N, P) \to Hom_L(L \otimes_{R^o} N, P)$$

compatible con los mapas de evaluación respectivos está dado por

$$T(f)(l \otimes n) = l \triangleright T(f)(1 \otimes n) = l \triangleright f(1 \otimes n) = f(l \triangleright (1 \otimes n)) =$$

$$f(l_1 \otimes l_2 \triangleright n) = f\tilde{\beta}_N(l \otimes n).$$

Por la Observación 5.12, las transformaciones naturales $T = (T_P)_P$ de $Hom_L(L \diamond N, -)$ a $Hom_L(L \otimes_{R^o} N, -)$ están identificadas los elementos de $Hom_L(L \otimes_{R^o} N, L \diamond N)$, de manera tal que T queda determinado por $\tilde{\beta}_N$. Así, tenemos que T es una biyección para todo P si y sólo si $\tilde{\beta}_N$ es una biyección. $\square$

5.3. Biálgebras débiles y $\times_R-$biálgebras

A continuación, tal como hemos comprobado que las álgebras faciales son un caso particular de biálgebras débiles, mostraremos que éstas últimas son un caso particular de $\times_R-$biálgebras.

Teorema 5.14. *Sea (H, Δ, ε) una biálgebra débil. Tomamos $R = H_t$. Entonces H tiene una estructura de $\times_R-$biálgebra (H, Γ, C) como sigue. La estructura de R^e-ring de H está dada por $\iota(x \otimes y^o) = x\varepsilon'_s(y)$, la comultiplicación*

$$\Gamma : H \to H \times_R H \subset H \diamond H$$

es la composición de Δ con la suryección canónica $H \otimes H \to H \diamond H$. La counidad es

$$C : H \ni h \mapsto (x \mapsto \varepsilon_t(hx)) \in End(R).$$

Demostración. H es un R^e-ring ya que ε'_s induce un anti-isomorfismo de H_t con H_s, y H_s y H_t conmutan elemento a elemento. Que $\Gamma_0 : H \to H \otimes H \to H \diamond H$ toma sus valores en $H \times_R H$ se sigue de

$$\Gamma(h) = \Gamma(h \cdot 1) = h_1 1_{(1)} \otimes h_2 1_{(2)},$$

ya que tenemos, por (137), que

$$h_1 y^o \otimes h_2 = h_1 1_{(1)}\varepsilon'_s(y) \otimes h_2 1_{(2)} = (h_1 \otimes h_2)(1_{(1)}\varepsilon'_s(y) \otimes 1_{(2)}) =$$

$$(h_1 \otimes h_2)(1_{(1)} \otimes y1_{(2)}) = h_1 1_{(1)} \otimes h_2 1_{(2)} y = h_1 \otimes h_2 y.$$

Es claro que Γ es un mapa de álgebras, ya que Δ es multiplicativo y $\Gamma(1) = 1 \in H \diamond H$. También, Γ es un mapa de R^e-rings por (130) y (129) y coasociativo por serlo Δ. El mapa C preserva la unidad ya que ε_t es un idempotente, y multiplicativo porque

$$C(g)C(h)(x) = C(g)(\varepsilon_t(hx)) = \varepsilon_t(g\varepsilon_t(hx)) = \varepsilon_t(ghx)$$

para todo $g, h \in H$ y $x \in H_t$, usando (132). Más aún, $C(y)(x) = \varepsilon_t(yx) = yx$ y

$$C(y^o)(x) = \varepsilon_t(\varepsilon'_s(y)x) = \varepsilon_t(x\varepsilon'_s(y)) = x\varepsilon_t\varepsilon'_s(y) = xy$$

para $x, y \in H_t$, lo que muestra que C es un mapa de R^e-rings. Resta ver que C es una counidad. Tenemos

$$C(h_{[1]})(1)h_{[2]} = \varepsilon(1_{(1)}h_{[1]})1_{(2)}h_{[2]} = \varepsilon(1_{(1)}h_1)1_{(2)}h_2 = h$$

así como

$$(C(h_{[2]})(1))^o h_{[1]} = (\varepsilon(1_{(1)}h_{[2]})1_{(2)})^o h_{[1]} = \varepsilon(1_{(1)}h_2)\varepsilon'_2(1_{(2)})h_1 =$$

$$\varepsilon(1_{(1)}h_2)1'_{(1)}\varepsilon(1'_{(2)}1_{(2)})h_1 = \varepsilon(1'_{(2)}h_2)1'_{(1)}h_1 = h$$

para $h \in H$, por el axioma (125), donde escribimos $\Gamma(h) = h_{[1]} \otimes h_{[2]}$. $\square$

El teorema anterior muestra que una biálgebra débil es una $\times_R-$biálgebra en la cual, por la Proposición 3.30, R es Frobenius separable. Probaremos también una recíproca a este resultado, basada en la siguiente re-escritura de la Observación 3.15.

Observación 5.15. Sea R un álgebra separable con idempotente de separabilidad e. Entonces, para $M \in \mathcal{M}_R$ y $N \in {}_R\mathcal{M}$, la identidad en $M \otimes N$ induce un isomorfismo

$$\gamma : Me^{(1)} \otimes e^{(2)}N \to M \otimes_R N,$$

con inversa $\gamma^{-1}(m \otimes n) = me^{(1)} \otimes e^{(2)}n$.

Antes de utilizar (implícitamente) esta observación para probar el siguiente teorema, lo usaremos para comparar el producto tensorial definido para módulos M, N sobre una biálgebra débil H, dado por $M \odot N = \Delta(1)(M \otimes N)$ con la estructura diagonal de H-módulo inducida vía Δ con el producto tensorial definido sobre los módulos sobre la $\times_R-$biálgebra correspondiente.

Proposición 5.16. *Sea H una biálgebra débil. Entonces los isomorfismos*

$$\gamma = \gamma_{MN} : M \odot N \to M \diamond N$$

para $M, N \in {}_L\mathcal{M}$ dotan al funtor identidad con una estructura de funtor monoidal

$$(Id, \gamma) : ({}_H\mathcal{M}, \diamond) \to ({}_H\mathcal{M}, \odot).$$

Demostración. El sistema idempotente de Frobenius que hemos encontrado para $R = H_t$ en la Proposición 3.30, es tal que $\left(e^{(1)}\right)^o \otimes e^{(2)} = \Delta(1)$. Así, γ es un isomorfismo de espacios vectoriales por la Observación 5.15, es lineal por la definición de la comultiplicación en la $\times_R-$biálgebra asociada a la biálgebra débil H. La coherencia del funtor monoidal es evidente ya que γ está inducida por la identidad. Finalmente, en ambas categorías tenemos objetos unidad dados por H_t. $\square$

Observación 5.17. Los argumentos utilizados en la proposición anterior pueden ser re-escritos para ser una prueba diferente del Teorema 5.14. Una biálgebra débil H es un R^e-ring para $R = H_t$. Como R es separable, podemos usar la Observación 5.15 para dotar al funtor subyacente ${}_H\mathcal{M} \to {}_{R^e}\mathcal{M}$ con un estructura de funtor monoidal. Así, se sigue del Teorema 5.6 que H tiene una estructura de $\times_R-$biálgebra.

Ahora probamos una recíproca al Teorema 5.14

Teorema 5.18. *Sea R un álgebra Frobenius separable con sistema idempotente de Frobenius (ϕ, e). Sea (H, Γ, C) una $\times_R-$biálgebra. Entonces una estructura (H, Δ, ε) puede darse a H como*

$$\Delta(h) = (e^{(1)})^o h_{[1]} \otimes e^{(2)} h_{[2]}$$
$$\varepsilon(h) = \phi(C(h)(1)).$$

Demostración. El mapa Δ está bien definido porque

$$f : H \diamond H \ni g \otimes h \mapsto (e^{(1)})^o g \otimes e^{(2)} h \in H \otimes H$$

está bien definido, ya que $(e^{(1)})^o x^o g \otimes e^{(2)} h = (xe^{(1)})^o g \otimes e^{(2)} h = (e^{(1)})^o g \otimes e^{(2)} xh$ vale para todo $g, h \in H$ y $x \in R$. Tenemos

$$\Delta(h_1) \otimes h_2 = (e^{(1)})^o (\tilde{e}^{(1)} h_{[1]})_{[1]} \otimes e^{(2)} (\tilde{e}^{(1)} h_{[1]})_{[2]} \otimes \tilde{e}^{(2)} h_{[2]} =$$

$$(e^{(1)})^o h_{[1][1]} \otimes e^{(2)} \tilde{e}^{(1)} h_{[1][2]} \otimes \tilde{e}^{(2)} h_{[2]} = (e^{(1)})^o h_{[1]} \otimes e^{(2)} (\tilde{e}^{(1)})^o h_{[2][1]} \otimes \tilde{e}^{(2)} h_{[2][2]} =$$

$$(e^{(1)})^o h_{[1]} \otimes (\tilde{e}^{(1)})^o (e^{(2)} h_{[2]})_{[1]} \otimes \tilde{e}^{(2)} (e^{(2)} h_{[2]})_{[2]} = h_1 \otimes \Delta(h_2),$$

lo que muestra que Δ es coasociativo. El mapa es ε es una counidad ya que

$$h_1 \varepsilon(h_2) = (e^{(1)})^o h_{[1]} \phi(C(e^{(2)} h_{[2]})(1)) = (e^{(1)})^o h_{[1]} \phi(e^{(2)} C(h_{[2]})(1)) =$$

$$(C(h_{[2]})(1)) h_{[1]} = h$$

y

$$\varepsilon(h_1) h_2 = \phi(C((e^{(1)})^o h_{[1]})(1)) e^{(2)} h_{[2]} = \phi(C(h_{[1]})(1) e^{(1)}) e^{(2)} h_{[2]} =$$

$$C(h_{[1]})(1) h_{[2]} = h.$$

Δ es multiplicativo por

$$\Delta(g)\Delta(h) = (e^{(1)})^o g_{[1]} (\tilde{e}^{(1)})^o h_{[1]} \otimes e^{(2)} g_{[2]} \tilde{e}^{(2)} h_{[2]} =$$

$$(e^{(1)})^o g_{[1]} h_{[1]} \otimes e^{(2)} \tilde{e}^{(1)} \tilde{e}^{(2)} h_{[2]} = (e^{(1)})^o g_{[1]} h_{[1]} \otimes e^{(2)} h_{[2]} = \Delta(gh)$$

para todo $g, h \in H$, usando que $\Gamma(g) \in H \times_R H$. Tenemos

$$\varepsilon(g 1_{(1)}) \varepsilon(1_{(2)} h) = \varepsilon(g (e^{(1)})^o) \varepsilon(e^{(2)} h) = \phi(C(g(e^{(1)}))(1)) \phi(C(e^{(2)} h)(1)) =$$

$$\phi(C(g)(e^{(1)})) \phi(e^{(2)} C(h)(1)) = \phi(C(g)(C(h)(1))) = \phi(c(gh)(1)) = \varepsilon(gh)$$

y

$$\varepsilon(g 1_{(2)}) \varepsilon(1_{(1)} h) = \phi(C(g e^{(2)})(1)) \phi(C((e^{(1)})^o h)(1)) = \phi(C(g)(e^{(2)})) \phi(C(h)(1) e^{(1)}) =$$

$$\phi(C(g)(C(h)(1))) = \varepsilon(gh)$$

para $g, h \in H$,

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(1) = (e^{(1)})^o \otimes \Delta(e(2)) = (e^{(1)})^o \otimes (\tilde{e}^{(1)})^o (e^{(2)})_{[1]} \otimes \tilde{e}^{(2)} (e^{(2)})_{[2]} =$$

$$(e^{(1)})^o \otimes (\tilde{e}^{(1)})^o e^{(2)} \otimes \tilde{e}^{(2)} = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1).$$

□

Veamos ahora el comportamiento de esta relación al considerar álgebras de Hopf débiles y $\times_R-$álgebras de Hopf.

Teorema 5.19. *Sea H una biálgebra débil. Entonces H es un álgebra de Hopf débil si y sólo si el mapa*

$$\beta_0 : H \otimes H \ni g \otimes h \mapsto g_1 \otimes g_2 h \in H \otimes H$$

induce un isomorfismo

$$\beta : H \otimes_{H_s} H \to \Delta(1)(H \otimes H)$$

Demostración. Primero, asumamos que H tiene una antípoda S. Definimos $\bar{\beta}_0 : H \otimes H \to H \otimes_{H_s} H$ como $\bar{\beta}_0(g \otimes h) = g_1 \otimes S(g_2)h$. Entonces

$$\beta\bar{\beta}_0(g \otimes h) = \beta(g_1 \otimes S(g_2)h) = g_1 \otimes g_2 S(g_3)h = g_1 \otimes \varepsilon_t(g_2)h =$$

$$1_{(1)}g_1 \otimes \varepsilon_t(1_{(2)}g_2)h = 1_{(1)}g_1 \otimes \varepsilon(1'_{(1)}1_{(2)}g_2)1'_{(2)}h =$$
$$1_{(1)}g_1 \otimes \varepsilon(1_{(2)}g_2)1_{(3)}h = 1_{(1)}g1_{(2)}h$$

y
$$\bar{\beta}_0\beta(g \otimes h) = g_1 \otimes S(g_2)g_3 h = g_1 \otimes \varepsilon_s(g_2)h = g_1\varepsilon_s(g_2) \otimes h = g \otimes h.$$

Así, la restricción de $\bar{\beta}_0$ es una inversa para β.
Ahora asumamos que β tiene una inversa β^{-1}. Definimos $\pi : H \otimes_{H_s} H \to H$ por $\pi(g \otimes h) = \varepsilon_s(g)h$, y definimos $S : H \to H$ por $S(h) = \pi\beta^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)})$, para $h \in H$. Afirmamos que S es una antípoda para H. Para esto, calculamos

$$S(h_1)h_2 = \pi(\beta^{-1}(1_{(1)}h_1 \otimes 1_{(2)}))h_2 = \pi(\beta^{-1}(1_{(1)}1_{(2)})(1 \otimes h_2)) =$$

$$\pi(\beta^{-1}(1_{(1)}h_1 \otimes 1_{(2)}h_2)) = \pi\beta^{-1}(h_1 \otimes h_2) = \pi(h \otimes 1)\varepsilon_s(h).$$

Ahora, afirmamos que la inversa de β es la restricción del mapa

$$\gamma : H \otimes H \ni g \otimes h \mapsto g_1 \otimes S(g_2)h \in H \otimes_{H_s} H.$$

Esto se verifica en la siguiente cuenta:

$$\gamma\beta_0(g_1 \otimes g_2 h)g_1 \otimes S(g_2)g_3 h = g_1 \otimes \varepsilon(g_2)h = g_1\varepsilon_s(g_2) \otimes h = g \otimes h.$$

Usando, para $y \in H_s$,

$$S(yh) = \pi\beta^{-1}(1_{(1)}yh \otimes 1_{(2)})\pi\beta^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}\varepsilon_t(y)) =$$

$$\pi\beta^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)})\varepsilon_t(y) = S(h)\varepsilon_t(y),$$

obtenemos

$$1_{(1)}h \otimes 1_{(2)} = \beta\beta^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}) = \beta(h_1 \otimes S(1_{(1)}h_2)1_{(2)}) =$$

$$\beta(h_1 \otimes S(h_2)\varepsilon_t(1_{(1)})1_{(2)}) = \beta(h_1 \otimes S(h_2)) = h_1 \otimes h_2 S(h_3).$$

y podemos aplicar $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$ al resultado para obtener $\varepsilon_t(h) = h_1 S(h_2)$. La prueba culmina calculando

$$S(h_1)h_2 S(h_3) = S(h_1)\varepsilon_t(h_2) = S(h_1)\varepsilon_t\varepsilon'_s(h_2)S(\varepsilon'_s(h_2)h_1) = S(h)$$

para todo $h \in H$. $\square$

Corolario 5.20. *Sea H una biálgebra débil. Entonces son equivalentes:*

1. *S es un álgebra de Hopf débil.*

2. *La $\times_R-$biálgebra asociada es una $\times_R-$álgebra de Hopf.*

Demostración. La identidad induce un isomorfismo $\gamma : \Delta(1)(H \otimes H) \to H \diamond H$ por la Proposición 5.16. La composición $\gamma\beta$ es el mapa

$$H \otimes_{H_t} H \ni g \otimes h \mapsto g_{[1]} \otimes g_{[2]} h \in H \diamond H$$

la cual debe ser biyectiva según la definición de $\times_R-$álgebra de Hopf. $\square$

5.4. Equivalencias Morita y $\sqrt{\text{Morita}}$

Estudiaremos ahora los conceptos de equivalencias Morita y $\sqrt{\text{Morita}}$. Supongamos que R, S son k-álgebras Morita equivalentes, (lo que escribiremos $R \sim^M S$). Entonces por definición las categorías ${}_R\mathcal{M}$ y ${}_S\mathcal{M}$ de módulos a izquierda son equivalentes como categorías k-lineales abelianas. En esta situación, también se obtiene un equivalencia $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R) \cong ({}_S\mathcal{M}_S)$ de categorías k-lineales monoidales (esto puede verse aplicando el teorema de Watts [36] que dice que la categoría monoidal ${}_R\mathcal{M}_R$ puede ser vista como la categoría de endofuntores exactos a derecha k-lineales de ${}_R\mathcal{M}$). En algún sentido, resulta más útil la siguiente caracterización explícita de la equivalencia monoidal. Cuando $R \sim^M S$, fijemos un contexto estricto Morita (R, S, P, Q, f, g). En particular, tenemos $P \in {}_S\mathcal{M}_R, Q \in {}_R\mathcal{M}_S, f : P \otimes_R Q \to S$ un isomorfismo de S-bimódulos y $g : Q \otimes_S P \to R$ un isomorfismo de R-bimódulos. Un equivalencia está dada por

$$\mathcal{F} : {}_R\mathcal{M} \ni M \mapsto P \otimes_R M \in {}_S\mathcal{M},$$

y podemos describir una equivalencia de categorías de bimódulos compatible

$$(\hat{\mathcal{F}}, \xi) : ({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R) \to ({}_S\mathcal{M}_s, \otimes_S)$$

como sigue. Tomamos $\hat{F}(M) = P \otimes_R M \otimes_R Q$ como S-bimódulo, y definimos la estructura de funtor monoidal

$$\xi : \mathcal{F}(M) \otimes_S \mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M \otimes_R N)$$

como la composición

$$P \otimes_R M \otimes_R Q \otimes_S P \otimes_R n \otimes_R Q \overset{P\otimes M \otimes g \otimes N \otimes Q}{\longrightarrow} P \otimes_R M \otimes_R R \otimes_R N \otimes_R Q \cong$$

$$P \otimes_R M \otimes_R N \otimes_R Q.$$

La equivalencia $\mathcal{F}$ y la equivalencia monoidal $\hat{F}$ son compatibles en el siguiente sentido. La categoría ${}_R\mathcal{M}$ es de manera natural un categoría ${}_R\mathcal{M}_R$ a izquierda, esto es una categoría en la que ${}_R\mathcal{M}_R$ actúa (por el producto tensorial). La compatibilidad dice que el siguiente diagrama conmuta naturalmente:

$$\begin{tikzcd}
{}_R\mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M} \arrow[r, "\otimes_R"] \arrow[d, "\hat{\mathcal{F}} \times \mathcal{F}"'] & {}_R\mathcal{M} \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
{}_S\mathcal{M}_S \times {}_S\mathcal{M} \arrow[r, "\otimes_S"'] & {}_S\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Definición 5.21. *Dos k-álgebras se dicen $\sqrt{\text{Morita}}$-equivalentes, lo que escribimos $R \sim^{\sqrt{M}} S$, si hay una equivalencia de categorías monoidales k-lineales ${}_R\mathcal{M}_R \cong {}_S\mathcal{M}_S$.*

Observación 5.22. Por lo anterior, la equivalencia Morita implica la equivalencia $\sqrt{\text{Morita}}$. Por otro lado, como ${}_R\mathcal{M}_R \cong {}_{R^e}\mathcal{M}$, las álgebras envolventes de álgebras $\sqrt{\text{Morita}}$ equivalentes son equivalentes Morita, con lo que

$$R \sim^R S \;\Rightarrow\; R \sim^{\sqrt{M}} S \;\Rightarrow\; R^e \sim^M S^e,$$

mientras que no vale ninguna de las implicaciones recíprocas.

5.5. Un principio para el cambio de base $\sqrt{\text{Morita}}$

Lema 5.23. *Sea A una k-álgebra y L un A-ring (o álgebra sobre A). Supongamos que existe una k-álgebra B y un contexto Morita estricto (A, B, C, D, ϕ, ψ). Entonces existe un B-ring $\tilde{L}$ y una equivalencia de categorías $\mathcal{G} : {}_L\mathcal{M} \to {}_{\tilde{L}}\mathcal{M}$ de modo tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
{}_L\mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[d, "\mathcal{U}"'] & {}_{\tilde{L}}\mathcal{M} \arrow[d, "\tilde{\mathcal{U}}"] \\
{}_A\mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & {}_B\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

donde la equivalencia $\mathcal{F} : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$ está dada por el tensor con C.

Demostración. Un A-ring L para una k-álgebra A es un álgebra en la categoría monoidal de A-bimódulos. Una consecuencia inmediata, si $A \sim^M B$, entonces un A-ring es esencialmente lo mismo que un B-ring. Más aún, si $\tilde{L}$ es el B-ring correspondiente al A-ring L, entonces los $\tilde{L}$ módulos son esencialmente los mismo como L módulos, ya que las acciones de ${}_B\mathcal{M}_B$ en ${}_B\mathcal{M}$ y ${}_A\mathcal{M}_A$ en ${}_A\mathcal{M}$ son compatibles con las equivalencias. Explícitamente, el B-ring $\tilde{L}$ está dado por $\tilde{L} = C \otimes_A L \otimes_A D$ con mapa unidad

$$B \cong C \otimes_A D \stackrel{C\otimes_A\eta\otimes_A D}{\rightarrow} C \otimes_A L \otimes_A D$$

en donde η es el mapa unidad del A-ring L, y multiplicación dada por, si m es la multiplicación en L,

$$\tilde{L} \otimes_B \tilde{L} = C \otimes_A L \otimes_A D \otimes_B C \otimes_A L \otimes_A D \cong C \otimes_A L \otimes_A L \otimes_A D \stackrel{C\otimes_A m\otimes_A D}{\rightarrow} C \otimes_A L \otimes_A D.$$

Cuando M es un L-módulo, la estructura del $\tilde{L}$-módulo $\mathcal{G}(M)$ está dada por

$$\tilde{L} \otimes_B \mathcal{G}(M) = C \otimes_A L \otimes_A D \otimes_B C \otimes_A M = c \otimes_A L \otimes_A M \stackrel{c\otimes_A\mu}{\rightarrow} C \otimes_A M = \mathcal{G}(M),$$

donde μ da la estructura de L-módulo de M y así la estructura de B-módulo es igual a la de $\mathcal{F}(M)$. $\square$

Teorema 5.24. *Sea L una $\times_R-$biálgebra para una k-álgebra R. Sea S una k-álgebra que es $\sqrt{\text{Morita}}$ equivalente a R. Entonces existe una $\times_S-$biálgebra $\tilde{L}$ tal que su categoría de módulos es equivalente a la de L como categorías monoidales. Más* *precisamente, dada una equivalencia de categorías monoidales $\mathcal{F}: {}_{R^e}\mathcal{M} \to {}_{S^e}\mathcal{M}$, existe una $\times_S$−biálgebra $\tilde{L}$ y una equivalencia de categorías monoidales $\mathcal{G}: {}_L\mathcal{M} \to {}_{\tilde{L}}\mathcal{M}$ que hace de*

$$\begin{tikzcd} {}_L\mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[d, "\mathcal{U}"'] & {}_{\tilde{L}}\mathcal{M} \arrow[d, "\tilde{\mathcal{U}}"] \\ {}_{R^e}\mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & {}_{S^e}\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de funtores monoidales (en el que las flechas verticales son funtores subyacentes).

Demostración. Sabemos por el lema que existe un S^e-ring $\tilde{L}$ y una equivalencia de categorías $\mathcal{G}$ que hace del diagrama del teorema un diagrama conmutativo de funtores k-lineales. Podemos dotar a ${}_{\tilde{L}}\mathcal{M}$ con una estructura de categoría monoidal tal que $\mathcal{G}$ sea un funtor monoidal. Entonces el funtor subyacente $\tilde{\mathcal{U}}$ es monoidal también, ya que puede ser escrito como la composición $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{F}\mathcal{U}\mathcal{G}^{-1}$. Ahora, el Teorema 5.6 implica que existe una estructura de $\times_S$−biálgebra en $\tilde{L}$ que induce la estructura de categoría monoidal dada en ${}_{\tilde{L}}\mathcal{M}$. □

Definición 5.25. *Sea L una $\times_R$−biálgebra, y S un k-álgebra $\sqrt{Morita}$ equivalente a R. Diremos que la $\times_S$−biálgebra $\tilde{L}$ obtenida de L como en la prueba del teorema anterior es obtenida de L por un* cambio de base $\sqrt{\text{Morita}}$.

Dada una $\times_R$−biálgebra L y $S \sim^{\sqrt{M}} R$, hablaremos de *la* $\times_S$−biálgebra $\tilde{L}$ obtenida de L por un cambio de base $\sqrt{\text{Morita}}$, aunque esto no tiene en cuenta la elección de la equivalencia de categorías monoidales ${}_R\mathcal{M} \cong {}_S\mathcal{M}_S$ por la cual también $\tilde{L}$ está determinada, además de por el álgebra S.

Proposición 5.26. *Sea L una $\times_R$−biálgebra, $S \sim^{\sqrt{M}} R$, y $\tilde{L}$ la $\times_S$−biálgebra obtenida a partir de L por un cambio de base $\sqrt{Morita}$. Entonces $\tilde{L}$ es una $\times_S$−álgebra de Hopf si y sólo si L es una $\times_R$−álgebra de Hopf.*

Demostración. En el diagrama (5.24), los funtores horizontales son equivalencias monoidales, y por lo tanto preservan funtores hom internos. Así, el funtor vertical de la izquierda preserva funtores hom internos si y sólo si el funtor vertical de la derecha lo hace. □

5.6. Cambio de base Morita

Hemos visto que la equivalencia Morita implica la equivalencia $\sqrt{\text{Morita}}$. Así, dada una $\times_R$−biálgebra L y una k-álgebra S equivalente Morita a R, podemos aplicar el cambio de base $\sqrt{Morita}$ (que en este caso llamaremos cambio de base Morita) a L para obtener una $\times_S$−biálgebra $\tilde{L}$ con una categoría monoidal de módulos equivalente.

Para ver este resultado más explícitamente, fijamos un contexto Morita estricto (R, S, P, Q, f, g). Escribiremos $f(p \otimes q) = pq$, $g(q \otimes p) = qp$, $f^{-1}(1_S) = p_i \otimes q^i \in P \otimes_R Q$ y $g^{-1}(1_R) = q_i \otimes p^i \in Q \otimes_S P$ (donde sumamos sobre los índices superiores e inferiores). Escribimos $P^o \in {}_{R^o}\mathcal{M}_{S^o}$ para el bimódulo opuesto a P, y p^o para $p \in P$ para un elemento dado; similarmente para $Q^o \in {}_{S^o}\mathcal{M}_{R^o}$. Escribimos también

$P^e = P\otimes Q^o \in {}_{S^e}\mathcal{M}_{R^e}$ y $Q^e = Q\otimes P^o \in {}_{R^e}\mathcal{M}_{S^e}$, con lo que los bimódulos P^e y Q^e inducen la equivalencia ${}_{R^e}\mathcal{M} \cong {}_{S^e}\mathcal{M}$ subyacente a la equivalencia $\sqrt{\text{Morita}}$ entre R y S inducida por la equivalencia Morita entre R y S. Escribiremos $pq^o = p\otimes q^o \in P^e$ y similarmente para los elementos típicos de Q^e.
Sea ahora una $\times_R-$biálgebra. La $\times_S-$biálgebra $\tilde{L}$ obtenida de L por cambio de base Morita, tiene una estructura subyacente de S^e-bimódulo $P^e\otimes_{R^e} L\otimes_{R^e} Q^e$. La equivalencia ${}_L\mathcal{M}\cong {}_{\tilde{L}}\mathcal{M}$ envía $M\in {}_L\mathcal{M}$ a $P^e\otimes_{R^e} M$, con la estructura de $\tilde{L}$-módulo dada por

$$(p_1q_1^o\otimes l\otimes q_2p_2^o)(p_3q_3^o\otimes m) = p_1q_1^o\otimes l(q_2p_3)((q_3p_2)^o)m,$$

para $p_1,p_2,p_3\in P$ y $q_1,q_2,q_3\in Q$. En efecto, vemos que

$$((r_1s_1^o\otimes l'\otimes s_2r_2^o)(p_1q_1^o\otimes l\otimes q_2p_2^o))(p_3q_3^o\otimes m) =$$

$$(r_1s_1^o\otimes l'(s_2p_1(q_1r_2)^o)l\otimes q_2p_2^o)(p_3q_3^o\otimes m) =$$

$$r_1s_1^o\otimes l'(s_2p_1)((q_1r_2)^o)l(q_2p_3)((q_3p_2)^o)m$$

y esto es igual a

$$(r_1s_1^o\otimes l'\otimes s_2r_2^o)[(p_1q_1^o\otimes l\otimes q_2p_2^o)(p_2q_3^o)] =$$

$$(r_1s_1^o\otimes l'\otimes s_2r_2^o)(p_1q_1^o\otimes l(q_2p_3)((q_3p_2)^o)m) =$$

$$r_1s_1^o\otimes l'(s_2p_1)((q_1r_2)^o)l(q_2p_3)((q_3p_2)^o)m =$$

La unidad en $\tilde{L}$ está dada por

$$S^e \ni 1\otimes 1^o \mapsto p_i(q^j)^o\otimes 1_L\otimes q^ip_j^o$$

y tenemos

$$(p_i(q^j)^o\otimes 1_L\otimes q^ip_j^o)(pq^o\otimes m) = p_i(q^j)^o\otimes (q_ip)(qp_j)^o m =$$

$$(p_i(q^j)^o)((q_ip)(qp_j)^o)\otimes m = (p_i(q_ip)(q^j)^o(qp_j)^o)\otimes m = pq^o\otimes m$$

pues aquí $\otimes = \otimes_{R^e}$ y $(q_ip)(qp_j)^o \in R^e$. La estructura funtorial monoidal de la equivalencia está dada por

$$\xi : (P^e\otimes_{R^e} M)\diamond (P^e\otimes_{R^e} N) \xrightarrow{\cong} P^e\otimes_{R^e}(M\diamond_R N)$$

$$p_1q_1^o\otimes m\otimes p_2q_2^o \mapsto p_1q_2^o\otimes m\ t(q_1p_2)n = p_1q_2\otimes (q_1p_2)^o m\otimes n,$$

donde la última igualdad surge de considerar el producto $\diamond$;

$$pq_i^o\otimes m\otimes p^iq^o \leftarrow pq^o\otimes m\otimes n$$

para $M,N\in {}_L\mathcal{M}, m\in M, n\in N, p_1,p_2\in P, q_1,q_2\in Q$. Se sigue que la estructura de $\tilde{L}$-módulo del producto tensorial de dos $\tilde{L}$-módulos que provienen de la equivalencia de L-módulos M y N puede ser computada como la composición

$$(P^e\otimes_{R^e} L\otimes_{R^e} Q^e)\otimes_{S^e}((P^e\otimes_{R^e} M)\diamond_S (P^e\otimes_{R^e} N))$$

$$\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\xi} (P^e\otimes_{R^e} L\otimes_{R^e} Q^e)\otimes_{S^e}(P^e\otimes_{R^e}(M\diamond_R N))$$

$$\xrightarrow{\mu} P^e\otimes_{R^e}(M\diamond_R N) \xrightarrow{\xi^{-1}} (P^e\otimes_{R^e} M)\diamond_S (P^e\otimes_{R^e} N)$$

ya que $Q^e \otimes_{S^e} P^e \cong R^e$ y L actúa en $M \diamond N$, con lo que está dada por

$$(p_1q_1^o \otimes l \otimes q_2p_2^o)(p_3q_3^o \otimes m \otimes p_4q_4^o \otimes n) = \xi^{-1}((p_1q_1^o \otimes l \otimes q_2p_2^o)(p_3q_4^o \otimes m \otimes (q_3p_4)n))$$

pues $\xi^{-1} : {}_{\tilde{L}}\mathcal{M} \to {}_L\mathcal{M}$ y ahora esto es igual, por el isomorfismo $Q^e \otimes_{S^e} P^e \cong R^e$ citado, a

$$\xi^{-1}(p_1q_1^o \otimes l(q_2p_3)((q_4p_2)^o)(m \otimes (q_3p_4)n)) = \xi^{-1}(p_1q_1^o \otimes l_1(q_2p_3)m \otimes l_2((q_4p_2)^o)(q_3p_4)n),$$

igualdad que surge tras la acción de L en $M \diamond N$ y ahora, por la definición de ξ^{-1}, tenemos que esto es

$$p_1q_i^o \otimes l_1(q_2p_3)m \otimes p^iq_1^o \otimes l_2((q_4p_2)^o)(q_3p_4)n =$$

$$p_1q_i^o \otimes l_1(q_2p_3)((q_3p_j)^o)m \otimes p^iq_1^o \otimes l_2(q^jp_4)((q_4p_2)^o)n$$

ya que $p_jq^j = 1$ y en este caso $((q_4p_2)^o)(q_3p_4)$ denota el producto $(1 \otimes (q_4p_2)^o)(q_3p_4 \otimes 1^o)$. Entonces obtenemos, por la definición de $\diamond$ y la acción de L en cada tensorando,

$$(p_1q_i^o \otimes l_1 \otimes q_2p_j^o)(p_3q_3^o \otimes m) \otimes (p^iq_1^o \otimes l_2 \otimes q^jp_2^o)(p_4q_4 \otimes n)$$

para $p_1, \ldots, p_4 \in P$, $q_1, \ldots, q_4 \in Q$, $l \in L, m \in M, n \in N$. Esto prueba que la comultiplicación está dada por la fórmula

$$\Delta(p_1q_1^o \otimes l \otimes q_2p_2^o) = (p_1q_i^o \otimes l_1 \otimes q_2p_j^o) \otimes (p^iq_1^o \otimes l_2 \otimes q^jp_2^o)$$

para $p_1, p_2 \in P$ y $q_1, q_2 \in Q$.
Pasemos ahora al caso en el que R es un álgebra suma directa de álgebras de matrices $R = \bigoplus_{\alpha=1}^n M_{d_\alpha}(k)$, y $S = k^n$. Un contexto Morita puede darse como sigue. P está generado como R-módulo a derecha por un elemento p que es una suma $p = \sum_{\alpha=1}^n E_{11}^{(\alpha)}$ de idempotentes minimales. Q está generado como R-módulo a izquierda por el mismo elemento p. Ambos mapas f y g están dados por la multiplicación de matrices. Tenemos $f^{-1}(1_S) = p \otimes p$, y $g^{-1}(1_R) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^{d_\alpha} E_{i1}^{(\alpha)} \otimes E_{1i}^{(\alpha)}$. Sea L una $\times_R-$biálgebra, y $\tilde{L}$ la $\times_S-$biálgebra obtenida de ella por un cambio de base Morita. Entonces $\tilde{L} = pp^oLpp^o \subset L$, con la multiplicación dada por la multiplicación en L, unidad pp^o y comultiplicación

$$\Delta(pp^olpp^o) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^{d_\alpha} p\left(E_{i1}^{(\alpha)}\right)^o l_1pp^o \otimes E_{1i}^{(\alpha)}p^ol_2pp^o.$$

Ahora sea $k = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. Entonces una $\times_R-$biálgebra para un álgebra que es suma directa de álgebras de matrices coincide con una biálgebra débil en el sentido en el que lo hemos usado antes. Si R es conmutativa, entonces es lo mismo que un álgebra facial. Así, el cambio de base Morita dice que las álgebras faciales son un caso suficientemente general de biálgebras débiles, al menos para el caso en que el interés está puesto en las categorías de módulos respectivas.

Corolario 5.27. *Sea H una biálgebra débil sobre $\mathbb{C}$. Entonces H puede ser obtenida a través de un cambio de base Morita de una biálgebra débil tal que su subálgebra counital source es conmutativa. En particular, hay un álgebra facial F y una equivalencia de categorías monoidales ${}_H\mathcal{M} \cong {}_F\mathcal{M}$. H es un álgebra de Hopf débil si y sólo si F es un álgebra facial de Hopf.*

Referencias

[1] A. Abella, N. Andruskiewitsch, *Compact quantum groups arising from the FRT construction*, Bol. Acad. Ciencias (Córdoba) **63** (1999) 15-44.

[2] A. Abella, N. Andruskiewitsch, *Compact matrix quantum groups arising from hermitian Yang-Baxter coalgebras*, Comm. in Algebra **30**, 3107-3142.

[3] N. Andruskiewitsch, *On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation*, math.QA/0402269 (2004); Selecta Math., New ser. **11** (2005), 203-246.

[4] N. Andruskiewitsch, M. Aguiar, *Representations of matched pairs of groupoids and applications to weak Hopf algebras*, math.QA/0402118 v1 (2004); Contemp. Math. **376** (2005), 127-173.

[5] B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lecture on tensor categories and modular functor*, University Lecture Series, **21**, (2000). American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[6] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience (1992).

[7] V. G. Drinfeld, *Almost cocomutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321-342.

[8] F. DeMeyer, E. Ingraham, *Separable algebras over commutative rings*, Lecture Notes in Mathematics **181**, Springer-Verlag Berlín · Heidelberg · New York (1971).

[9] P. Etingof y D. Nikshych, *Dinamical quantum groups at roots of 1*, Duke Math. J. **108**, (2001) 135-168.

[10] L. Faddeev, N. Reshetikhin y L. Takhtadzhyan , *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J **1** (1990), 193-225.

[11] Gurevich, D. I. *Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation*, (Russian) Algebra i Analiz 2 (1990), no. 4, 119–148; translation in Leningrad Math. J. 2 (1991), **4**, 801-828

[12] T. Hayashi, *Quantum deformation of classical groups*, Publ. Res. Inst. Math. Sci **28** (1992) 57-81.

[13] T. Hayashi, *Quantum groups and quantum determinants*, J. Algebra **152** (1992) 146-165.

[14] T. Hayashi, *Quantum groups and quantum semigroups*, J. Algebra **204**, 225-254 (1998).

[15] T. Hayashi, *Face algebras II, standard generator theorems*, en preparación.

[16] T. Hayashi, *Quantum group symmetry of Partition functions of IRF models and its application to Jone's Index theory*, Commun. Math. Phys. **157**, 331-345 (1993).

[17] T. Hayashi, *Coribbon Hopf (face) algebras generated by Lattice models*, J. Algebra **233**, 614-641 (2000).

[18] T. Hayashi, *Face algebras and unitarity of $SU(N)_L - TQFT$*, Commun. Math. Phys. **203**, 211-247 (1999).

[19] J. Hietarinta, *All solutions to the constant quantum Yang-Baxter equations in two dimensions*, Phys. Lett. A. **165** (1992), 245-251.

[20] R. Lyubashenko, *Hopf algebras and vector symmetries*, Russian Math. Surveys **41** (1986), 153-154.

[21] D. Nikshych, L. Vainerman, *Finite quantum groups and their applications*, New directions in Hopf algebras, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 211-262, (2002).

[22] F. Nill, *Axioms for weak bialgebras*, math.QA/9805104 (1998).

[23] S. Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **82**, AMS, (1993).

[24] P. Schauenburg, *Bialgebras over noncommutative rings and a structure theorem for Hopf bimodules*, Appl. categorical structures **6** (1998), 193-222.

[25] P. Schauenburg, *Face algebras are $\times_R-$bialgebras*, Rings, Hopf algebras, and Brauer groups; Proceedings of the fourth week on algebra and algebraic geometry (1998), S. Caenepeel and . Verschoren, Eds., vol **197**, Marcel Dekker, Inc., 275-285.

[26] P. Schauenburg, *Morita base change in quantum groupoids*, math.QA/0204338, (2002).

[27] P. Schauenburg, *Weak Hopf algebras and quantum groupoids*, math.QA/0204180, (2002).

[28] P. Schauenburg, *Duals and doubles of quantum groupoids ($\times_R-$Hopf algebras)*, New trends in Hopf algebra theory, Proceedings of the colloquium on quantum groups and Hopf algebras, La Falda, Sierras de Córdoba, Argentina, August 1999, AMS Contemporary Mathematics 267 (2000) 273-299.

[29] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, (1969).

[30] M. Sweedler, *Groups of simple algebras*, Publ. Math. I.H.E.S. **44** (1974) 79-189

[31] M. Takeuchi, *Free Hopf algebras generated by coalgebras*, J. Math Soc. Japan **23** 561-582, (1971).

[32] M. Takeuchi, D. Tambara, *A new one-parameter family of* 2×2 *matrix bialgebras*, Hokkaido Math. J. **21** 405-419, (1992).

[33] M. Takeuchi, *Survey of braided Hopf algebras*, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), 301-323; Contemp. Math., **267**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[34] M. Takeuchi, *Groups of algebras over* $A \otimes A^o$, Math. Soc. Japan **29** (1977) 459-492.

[35] K. H. Ulbrich, *On Hopf algebras and rigid monoidal categories*, Israel J. Math. **72** (1990) 252-256.

[36] C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive functors*, Proc. AMS **11** (1960) 5-8.