De los grupos de Lie a los grupos cuánticos, III

Brasilia, febrero de 2008

Nicolás Andruskiewitsch

Universidad de Córdoba, Argentina.

`http://www.mate.uncor.edu/andrus`

Plan de las exposiciones.

1. Grupos y simetrías. Nacimiento de la teoría de Lie. Fundamentos: grupos y álgebras de Lie. Álgebras de Lie semisimples: Killing.

2. Álgebras de Lie semisimples: Killing y Cartan. Teoría de representaciones. Representaciones irreducibles de las álgebras de Lie semisimples. Completa irreducibilidad.

3. Sistemas de raíces y grupos de Coxeter. Grupos algebraicos lineales. Grupos finitos. Clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples. Álgebras de Hopf. Grupos cuánticos.

Referencias:

A. Borel. *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups.* A. M. S. (2001).

N. Bourbaki. Notes historiques. *Groupes et algèbres de Lie. Ch. 1-2-3, 4-5-6*.

P. Cartier. Postface. En C. Chevalley, *Classification des Groupes Algébriques Semi-simples*. Springer.

J. Gallian. *The Search for Finite Simple Groups*. Math. Magazine, Vol. 49 (1976), pp. 163-180.

T. Hawkins. *Emergence of the Theory of Lie Groups.* Springer (2000).

Plan de la exposición.

I. Sistemas de raíces y grupos de Coxeter.

II. Grupos algebraicos lineales.

III. Grupos finitos.

IV. Clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples.

V. Álgebras de Hopf.

VI. Grupos cuánticos.

I. Sistemas de raíces y grupos de Coxeter.

La clasificación de las álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ se expresa en términos de las matrices de Cartan, construidas a partir de las *raíces* (autovalores simultáneos de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$):

$$R = \text{sistema de raíces } \subset \mathfrak{h}^*.$$

También, la clasificación de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$ está dada por:

$$P^+ = \text{pesos dominantes } = \sum_{1 \le i \le k} \mathbb{Z}_{\ge 0} \lambda_i$$

$$\subset P = \sum_{1 \le i \le k} \mathbb{Z} \lambda_i = \text{látice de pesos } \subset \mathfrak{h}^*,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ es una base de $\mathfrak{h}^*$ (los *pesos fundamentales*).

Por otra parte, $R \subset P$ y por lo tanto $Q =$ subgrupo de $\mathfrak{h}^*$ engendrado por R también está contenido en P.

Recordemos que el 'diccionario' de Lie era impreciso pues un grupo de Lie es determinado por su álgebra de Lie sólo localmente. A partir de la determinación del grupo fundamental de un grupo de Lie simple y simplemente conexo por Weyl, Cartan resuelve esta cuestión.

Teorema. *Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de grupos de Lie simples cuya álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{g}$ y subgrupos intermedios L: $Q \subset L \subset P$.*

Otro importante objeto asociado a una matriz de Cartan es el *grupo de Weyl*, que se puede definir de varias maneras alternativas (por ejemplo, el subgrupo de automorfismos lineales de $\mathfrak{h}^*$ generado por las reflexiones correspondientes a las raíces). La importancia de su uso fue señalada por Weyl; aparece en los trabajos posteriores de E. Cartan.

La apelación *grupo de Lie* es debida a Cartan (1931), mientras que la denominación *álgebra de Lie* fue utilizada por primera vez por Weyl en 1935, a instancias de Jacobson.

La combinatoria de los sistemas de raíces es estudiada en abstracto por van der Waerden (1935). Simultánea pero independientemente, Coxeter completa la clasificación de los grupos finitos de traslaciones euclideanas generados por reflexiones. La relación entre ambos temas es explorada por Witt y Coxeter, y más tarde por Chevalley y Harish-Chandra.

Este tema es expuesto en profundidad en el celebrado volumen de Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie. Ch. 4-5-6*.

II. Grupos algebraicos lineales.

Recordemos la definición de grupo de Lie (real): es una variedad diferencial munida de una estructura de grupo compatible, en el sentido de que tanto el producto como la inversión sean morfismos de variedades diferenciales. La definición de grupo de Lie complejo es análoga, reemplazando diferencial por analítica.

Los principales ejemplos de grupos de Lie que hemos visto son

$$GL(n,\mathbb{k}), \quad SL(n,\mathbb{k})$$

con $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$; los que tienen sentido aún si $\mathbb{k}$ es un cuerpo (o un anillo conmutativo cualquiera).

La geometría algebraica se ocupa del estudio de objetos geométricos cuyas ‘coordenadas locales’ viven en un cuerpo (o aún en un anillo conmutativo) arbitrario. Estos objetos se llaman variedades algebraicas. Así, resulta natural plantearse el estudio de *grupos algebraicos*: se define un grupo algebraico como una variedad algebraica munida de una estructura de grupo compatible, en el sentido de que tanto el producto como la inversión sean morfismos de variedades algebraicas.

Fijemos un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{k}$. Los dos ejemplos paradigmáticos de variedades algebraicas sobre $\mathbb{k}$ (es decir, con 'coordenadas' en $\mathbb{k}$) son:

- el espacio afín $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}} = \mathbb{k}^n$,

- el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$.

Consecuentemente, se distinguen dos clases de variedades algebraicas:

- las variedades *afines*– definidas como los ceros en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ de una familia de polinomios;

- las variedades *proyectivas*– definidas como los ceros en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$ de una familia de polinomios homogéneos.

Por ende, se distinguen dos clases de grupos algebraicos:

• los *grupos algebraicos lineales*– es decir, aquellos grupos algebraicos cuya variedad subyacente es afín;

• las *variedades abelianas*– aquellos grupos algebraicos cuya variedad subyacente es proyectiva.

Las variedades abelianas, cuya multiplicación es siempre conmutativa, aparecen naturalmente en geometría algebraica; las curvas elípticas son ejemplos de ellas. Su estudio es vital en teoría de números.
En esta exposición, se bosquejará la historia de algunos aspectos de los inicios de la teoría de *grupos algebraicos lineales*.

Observemos antes de comenzar que no se pierde generalidad.

En efecto, si G es cualquier grupo algebraico, entonces existe un máximo subgrupo algebraico normal N *lineal*; el cociente G/N resulta una variedad abeliana.

Este teorema fue demostrado por Chevalley en 1953, e independientemente por Barsotti. Existen una prueba alternativa debida a Rosenlicht.

La historia de los grupos algebraicos lineales comienza a fines del siglo XIX, con trabajos debidos a Maurer, E. Cartan y Picard. Luego de un prolongado período de inactividad, se reinicia en la década del 1940.

Ludwig Maurer publica cuatro trabajos, de 1888 a 1893, donde entre otros temas, considera grupos algebraicos lineales sobre $\mathbb{C}$, con una definición distinta pero equivalente a la actual– como explica A. Borel en su monografía.

En su primer artículo Maurer considera el grupo de matrices que fijan un polinomio homogéneo, pero luego pasa al caso general.

Dado que existen subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ que no son algebraicos, el 'diccionario' no es válido en el contexto algebraico y es de interés caracterizar aquellas álgebras de Lie que corresponden a un grupo algebraico (llamadas *algebraicas*). Maurer estudia esta cuestión, caracterizando en particular la 'cápsula algebraica' de un elemento semsimple.

Otra importante contribución de Maurer es que todo grupo algebraico lineal es una variedad racional (tiene un abierto isomorfo a un abierto de un espacio proyectivo).

Por su parte, E. Cartan publica en 1895 un artículo donde se prueba que algunos grupos de Lie son algebraicos. Mientras que Picard, en la década de 1890, se ocupa de grupos algebraicos en tanto que grupos de Galois de ecuaciones diferenciales con coeficientes racionales.

Los trabajos de Picard son continuados por E. Vessiot y A. Loewy a principios de siglo XX.

El estudio de los grupos algebraicos es retomado vigorosamente por Chevalley y Kolchin en los 40.

Chevalley– en parte, en colaboración con Tuan– estudia las álgebras de Lie de grupos algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0; generaliza los resultados de Maurer mediante la noción de 'réplica' y obtiene una caracterización necesaria y suficiente. Estos trabajos fueron continuados y ampliados por Goto y Matsushima.

La herramienta fundamental de Chevalley es el uso de la exponencial 'formal' para establecer un 'diccionario' *grupos algebraicos–álgebras de Lie algebraicas*, por lo que su análisis se restringe a cuerpos de característica 0.

Por otro lado, Kolchin se propone a mediados de los 40 algebrizar la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales de Picard-Vessiot. El contexto algebraico para tratar ecuaciones diferenciales– el álgebra diferencial– había sido desarrollado por su mentor, J. Ritt. Kolchin aborda el desarrollo de una teoría de grupos algebraicos de matrices, pero para "enfatizar la naturaleza algebraica del tema" su enfoque es independiente de la característica (y no apela a la teoría de álgebras de Lie).

Sus primeros dos trabajos, publicados en el Annals en 1948, contienen ya varios resultados de gran importancia en el desarrollo de la teoría de grupos algebraicos.

Uno de ellos es: todo grupo algebraico de matrices conexo y soluble es triangular (respecto de alguna base). Esta generalización del teorema de Lie se conoce hoy como el *teorema de Lie-Kolchin.*

También prueba que todo grupo algebraico conmutativo es el producto directo de uno semisimple por otro unipotente (lo que implica la *descomposición de Jordan multiplicativa*).

Estos dos trabajos influyeron en Borel (ver página 169 de su monografía). Kolchin prosiguió su estudio de los grupos algebraicos de matrices durante 25 años mediante un desarrollo propio de la teoría de conjuntos algebraicos.

En 1954 Armand Borel escribió un paper fundamental [Annals 1956] donde sentó las bases del estudio de los grupos algebraicos lineales, influenciado por el trabajo de Kolchin pero también por artículos de Hopf, Samelson y Stiefel. No hay álgebras de Lie en el enfoque de Borel.

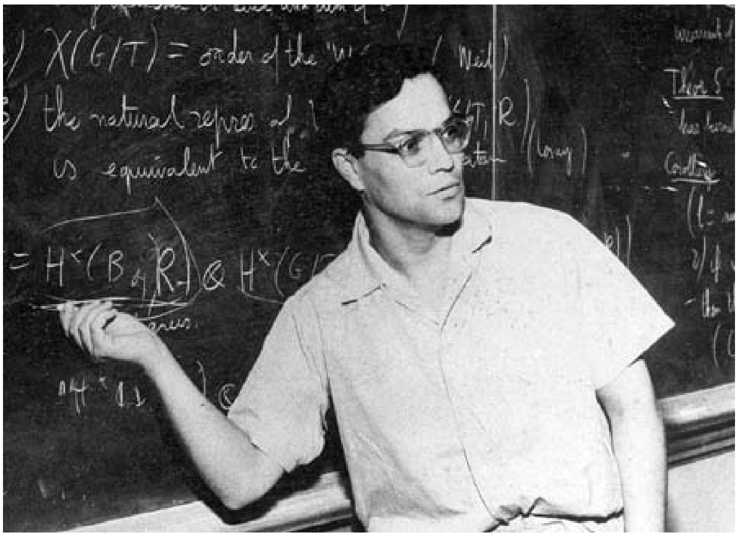
Desde un punto de vista técnico, el punto de partida de Borel es el estudio de la acción de un grupo algebraico; en particular el hecho de que toda órbita es un abierto denso en su clausura. En particular, existen órbitas cerradas. Esta diferencia fundamental con los grupos de Lie es explotada sistemáticamente por Borel.

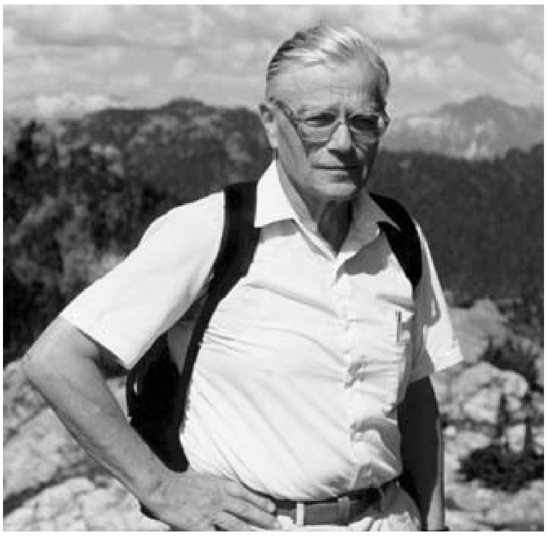
Entre las numerosas contribuciones, se destacan:

El estudio de los subgrupos conexos solubles maximales de un grupo algebraico lineal (llamados hoy en día *subgrupos de Borel*, y así bautizados por Chevalley).

El estudio de los subgrupos conexos diagonalizables (bautizados *toros* por Borel) y la caracterización de los subgrupos de Cartan (introducidos por Chevalley) como los centralizadores de los toros maximales.

En el verano boreal de 1955, Borel entrega una copia de este trabajo a Chevalley.





Armand Borel

21 de Mayo de 1923 en La Chaux-de-Fonds, Suiza
11 de Agosto de 2003 en Princeton, New Jersey, USA

III. Grupos finitos.

Chevalley escribió en 1954:

> *The principal interest of the algebraic groups seems to me to be that they establish a synthesis, at least partial, between the two main parts of group theory, namely the theory of Lie groups and the theory of finite groups.*

Los primeros grupos finitos simples fueron descubiertos por el propio Galois en 1832: $\mathbb{A}_5$, por supuesto, pero también el grupo de transformaciones proyectivas $PSL(2, \mathbb{F}_p) = PSL(2, p)$, p primo. En 1870, Jordan incluyó en su Tratado la prueba de la simplicidad de $\mathbb{A}_n$, $n \geq 5$. Siempre en el Tratado, Jordan introdujo los análogos de los grupos clásicos sobre un cuerpo finito y probó la simplicidad en el caso del cuerpo primo.

Para cuerpos no primos, el primer resultado es de Cole (1893) quien prueba la simplicidad de $PSL(2, 8)$; pronto Moore (1893) y Burnside (1894) extendieron el resultado a $PSL(2, p^n)$, salvo $p^n = 2, 3$; y Dickson a $PSL(m, p^n)$ (1897).

Dickson procedió a demostrar la simplicidad de los otros grupos clásicos sobre todos los cuerpos finitos; también introdujo y demostró la simplicidad de grupos de tipo G_2 (y de tipo E_6 lo que permaneció ignorado por mucho tiempo), sobre cuerpos finitos (1897-1905). Una simplificación del enfoque de Dickson fue ofrecida por Dieudonné (1948), siempre para los grupos clásicos y caso por caso.

E. Mathieu descubrió cinco grupos (que pertenecen a la familia hoy llamada 'de esporádicos') en 1861, a partir de un estudio de grupos múltiplemente transitivos. La simplicidad de los mismos fue establecida por Cole (1895, uno de ellos) y Miller (1900, los otros cuatro). Una presentación alternativa se debe a Witt (1938).

En 1953, Chevalley construyó los análogos de los grupos F_4, E_6 y E_7 sobre cuerpos finitos. Sin embargo, los problemas de cálculo que enfrentó al encarar E_8 lo llevaron a la búsqueda de un método general, que publicó en su famoso artículo de 1955 en Tohoku Math. J.

El método de Chevalley consiste en los siguientes pasos:

(i). Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple compleja de dimensión finita. Entonces se construye una base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ cuyos coeficientes de estructura son especiales (en particular son números enteros).

(ii). Sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ el subgrupo abeliano de $\mathfrak{g}$ generado por $\mathcal{B}$; es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{Z}$. Si K es un cuerpo, se encuentra un álgebra de Lie sobre K por extensión de escalares: $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

(iii). Mediante exponenciales de elementos nilpotentes, se construye un subgrupo G_K del grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}_K$.

(iv). Si K es finito, y excepto en algunos casos cuando K tiene 2 o 3 elementos, el cociente de G_K por su centro es un grupo finito simple.

Así, obtiene nuevas familias de grupos simples, 50 años después de los descubrimientos de Dickson.

El impacto de la teoría de Lie, a través del teorema de Chevalley, en la teoría de grupos es muy profundo. Por un lado, desencadenó un interés muy vivo en la búsqueda de nuevos grupos simples, resultando en el descubrimiento de varias familias, algunas de ellos variaciones de los grupos de Chevalley. Por otro lado, los métodos de la teoría de representaciones y otros aspectos de la teoría de Lie fueron adaptados a los grupos de Chevalley, obteniéndose enorme cantidad de información.

La construcción de Chevalley fue reformulada por Kostant en 1965 en el lenguaje de álgebras de Hopf.

IV. Clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples.

Como se dijo, Borel entregó una copia de su paper a Chevalley en el verano boreal de 1955. En 1956, Chevalley obtiene un resultado notable: la clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado, independientemente de la característica de $\Bbbk$. El enunciado preciso es el siguiente:

Los grupos algebraicos lineales semisimples sobre $\Bbbk$ están en correspondencia con pares (A, L) donde

- *A es una matriz de Cartan,*
- *L es un subgrupo del grupo P de pesos, que contiene al grupo Q generado por las raíces.*

Este teorema de Chevalley fue el objeto del Seminario dirigido por Chevalley en los años académicos 56-57 y 57-58 en la Ecole Normale Superieure de París. Los expositores fueron P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard y el mismo Chevalley.

Las notas del Seminario fueron accesibles únicamente en una versión mecanografiada por el Instituto Poincaré, hasta su publicación (ligeramente revisada) en 2005 por Springer Verlag, como parte de la edición de las Obras Completas de Chevalley– gracias a los esfuerzos de Pierre Cartier.

El Seminario comienza con una exposición de la geometría algebraica necesaria para el desarrollo de la teoría de grupos algebraicos. Sin pretender siquiera esbozar la historia de la geometría algebraica en el siglo XX, es menester destacar que las bases formales de la misma estaban en esa época en discusión: diferentes alternativas se proponían como lenguaje apto para los fundamentos de esta disciplina.

El Seminario continúa con un *racconto* de los resultados de Borel en [Annals 1956].

El resultado clave, como Chevalley destacó en diversas oportunidades, es el siguiente teorema:

El normalizador de un subgrupo algebraico conexo soluble maximal (bautizado en este Seminario subgrupo de Borel *por Chevalley) de un grupo algebraico lineal conexo es él mismo.*

Según Cartier, *Chevalley a toujours dit qu'ensuite il n'y avait plus qu'à suivre la pente!*

(Borel confirma que Chevalley consideraba a este teorema como el punto clave de la demostración).

Sea ahora G un grupo algebraico lineal conexo semisimple. Como en el paper de Borel, no hay álgebras de Lie. El rol de la subálgebra de Cartan es jugado por un toro maximal T.

El primer objetivo de la prueba es asignar a G un sistema de raíces *en abstracto*. Según Cartier, este trabajo contiene la primera presentación autónoma de sistemas de raíces. Se sabe que los sistemas de raíces están clasificados por las matrices de Cartan (implícito en Killing, Cartan, van der Waerden).

A este efecto, se considera el grupo $X(T)$ de caracteres– es decir, morfismos de grupos algebraicos a valores en $GL(1, \mathbb{k})$– de T. Resulta ser un grupo abeliano libre en tantos generadores como la dimensión de T.

Las raíces aparecen como los caracteres asociados a los subgrupos unipotentes conexos de dimensión 1 estables por conjugación de T.

Para demostrar que las raíces así definidas forman efectivamente un sistema de raíces que caracteriza a G, es necesario un delicado análisis de centralizadores de subtoros de T. Luego, se introduce el látice intermedio L.

A continuación procede a clasificar las representaciones racionales (es decir, morfismos de grupos algebraicos) irreducibles de G en términos de pesos dominantes (respecto de un subgrupo de Borel $B \supset T$). Para ello, dado un peso dominante λ, considera el espacio de secciones $W(\lambda)$ del fibrado de línea en la variedad G/B definido por λ; el cociente irreducible de $W(\lambda)$ es la representación irreducible correspondiente a λ.

Chevalley dedica los siete capítulos finales del Seminario a una laboriosa prueba de la unicidad del sistema de raíces asociado a G.

La *existencia* del grupo algebraico semisimple G asociado a un sistema de raíces no es tratada en este texto, sino que Chevalley refiere a su artículo en Tohoku que ya comentamos.

Claude Chevalley

11 de Febrero de 1909 en Johannesberg, Transvaal, Sudáfrica
28 de Junio de 1984 en Paris, Francia

V. Álgebras de Hopf.

La noción de álgebra de Hopf (conmutativa) parece natural desde el punto de vista de la dualidad álgebra conmutativa-geometría algebraica (afín).

Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado.

Recordemos que $X \subset \Bbbk^n$ variedad algebraica afín $\equiv$ ceros comunes de polinomios $f_1, \dots, f_s$.

Gracias al teorema de los ceros de Hilbert, se tiene

$X \leftrightsquigarrow \mathcal{O}(X) =$ álgebra de funciones polinomiales en X.

$f : X \to Y$ morfismo de variedades algebraicas afines
$\leftrightsquigarrow f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ morfismo de álgebras.

Categoría de variedades algebraicas afines
$\leftrightsquigarrow$categoría de $\mathbb{k}$-álgebras **conmutativas** finitamente generadas, sin nilpotentes.

Geometría	**Álgebra**
Espacios	Funciones
Variedad algebraica afín X	álgebra $\mathcal{O}(X)$
$f : X \to Y$ morfismo de variedades algebraicas afines	$f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ morfismo de álgebras
$X \times Y$	$\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y)$
G grupo algebraico afín $\cdot : G \times G \to G$ producto $e \in G$ unidad $\iota : G \to G$ inversión	$H = \mathcal{O}(G)$ álgebra de Hopf *conmutativa* $\Delta : H \to H \otimes H$ coproducto $\varepsilon : H \to \mathbb{C}$ counidad $\mathcal{S} : H \to H$ antípoda

Grupos algebraicos afines $\leftrightsquigarrow$ $\Bbbk$-álgebras de Hopf **conmutativas** finitamente generadas, sin nilpotentes.

I. Definición. (H, m, Δ), **Álgebra de Hopf:**

- (H, m) alg. con unidad 1,
- $\Delta : H \to H \otimes H$ morfismo de álgebras (coproducto),
- Δ coasociativa con counidad ε,
- existe $\mathcal{S} : H \to H$ "antípoda" tal que $m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}_H = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta$.

Se dice coconmutativa si $\tau\Delta = \Delta$, donde $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$.

Ejemplos

- G grupo, $\Bbbk G$ = álgebra de grupo = espacio vectorial de base e_g $(g \in G)$ y producto $e_g e_h = e_{gh}$

Resulta un álgebra de Hopf con coproducto $\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g$ y antípoda $\mathcal{S}(e_g) = e_g^{-1}$

- $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $U(\mathfrak{g})$ = álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$

Resulta un álgebra de Hopf con coproducto $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y antípoda $\mathcal{S}(x) = -x$, $x \in \mathfrak{g}$

La expresión ‘algèbre de Hopf’, aparece por primera vez en un artículo de Borel en [Annals 53] sobre la cohomología de los grupos de Lie compactos:

... *la structure d’une algèbre de Hopf (c’est dire vérifiant les conditions de Hopf)...*

Por otro lado, Borel no habla de álgebras de Hopf– ni de álgebras de funciones en un grupo algebraico– en su paper de 1956 discutido previamente.

Jean Dieudonné define la noción de *hiperálgebra* en 1954. Su interés era la estructura del álgebra de distribuciones con soporte en la identidad de un grupo 'de Lie' en característica positiva. Se sabe que el objeto análogo en característica 0 es el álgebra envolvente de la correspondiente álgebra de Lie. Dieudonné buscaba una noción que permitiera establecer el diccionario en característica positiva: es la de hiperálgebra. En lenguaje actual, la definición de hiperálgebra es la de 'biálgebra coconmutativa'.

En la primera mitad de la década de los 60, la estructura de las álgebras de Hopf conmutativas o coconmutativas es estudiada por Cartier, Gabriel (en el contexto de SGA), Kostant y Milnor-Moore; la relación con los grupos algebraicos está claramente presente. Se obtienen los siguientes teoremas sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado de característica 0:

Un álgebra de Hopf conmutativa es el álgebra de funciones polinomiales en un grupo pro-algebraico.

Un álgebra de Hopf coconmutativa es el producto semidirecto de un álgebra de grupo por un álgebra envolvente de un álgebra de Lie.

A partir de 1965, se inicia el estudio de álgebras de Hopf *generales*, esto es, ni conmutativas, ni coconmutativas, por Sweedler (alumno de Kostant), Heyneman, Larson; y en la década del 70, Taft, Radford, Nichols.

Independientemente, el matemático soviético G. I. Kac y sus discípulos desarrollan en Kiev la teoría de C^*-álgebras de Hopf de dimensión finita– hoy conocidas como álgebras de Kac.

Ambas escuelas establecen independientemente algunos resultados básicos, a menudo similares. El objetivo no es ya una reinterpretación de resultados de teoría de Lie.

Lentamente emergen algunos ejemplos de álgebras de Hopf ‘genuinas’, ni conmutativas, ni coconmutativas. G. I. Kac en 1968, e independientemente Takeuchi en 1981, descubren cómo construir un álgebra de Hopf semisimple a partir de una factorización exacta de un grupo finito G: esto es, dos subgrupos F, H tales que $G = FH$, $F \cap H = e$.

En la búsqueda de ejemplos de álgebras de Hopf con antípoda de orden mayor a 2, Taft introduce en 1971 un álgebra de Hopf de dimensión N^2, a partir de un parámetro q que es una raíz de la unidad de orden 1. Es el primer ejemplo de grupo cuántico.

VI. Grupos cuánticos.

El descubrimiento por Drinfeld y Jimbo de los grupos cuánticos en 1983 representa un vuelco en el desarrollo de las álgebras de Hopf– como también en el de otras áreas.

El origen de los grupos cuánticos está en trabajos de la escuela de Fadeev, en Leningrado, sobre el método de scattering inverso. Motivados por ciertas consideraciones en esa dirección, Kulish y Reshetikhin definen en 1980 un álgebra $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ que es una deformación a un parámetro del álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Casi inmediatamente, Sklyanin realiza la observación clave: el álgebra $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ admite una estructura de álgebra de Hopf, ni conmutativa ni coconmutativa.

Poco después, Drinfeld y Jimbo definen independientemente, para cada álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$, un álgebra que es una deformación a un parámetro del álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$ y admite una estructura de álgebra de Hopf, ni conmutativa ni coconmutativa.

Ambas definiciones son esencialmente equivalentes, si bien para Drinfeld $U_\hbar(\mathfrak{g})$ es un álgebra sobre el anillo de series formales, mientras que para Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ que depende de un parámetro q.

Drinfeld acuña la expresión ‘grupos cuánticos’ y ofrece explicaciones y aplicaciones de los mismos en un justamente famoso artículo presentado en el ICM de Berkeley en 1986 (leído por Cartier ya que no fue autorizado a salir de la Unión Soviética).

En primer lugar, interpreta con precisión a $U_\hbar(\mathfrak{g})$ como una deformación formal– en el sentido de Lichnerowicz y su escuela– del álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$. Esto lo lleva a las nociones de ‘grupo de Lie-Poisson’ y su versión infinitesimal ‘biálgebra de Lie’, en el espíritu del diccionario de Lie.

En esta dirección, Drinfeld había clasificado en colaboración con Belavin todas las posibles estructuras de ‘biálgebra de Lie cuasitriangular’ en un álgebra de Lie simple compleja (1982).

Otra contribución fundamental es la construcción de soluciones de la *ecuación cuántica de Yang-Baxter*, a partir de las representaciones de dimensión finita de $U_\hbar(\mathfrak{g})$. Es funcional a su método la noción del *doble de Drinfeld*, una construcción que resultó de gran importancia en diversas aplicaciones.

Es imposible resumir todas las ideas contenidas en el artículo de Drinfeld, ni mucho menos esbozar la historia de todas las investigaciones motivadas por las mismas. Baste mencionar la construcción de ciertas álgebras de Hopf de dimensión finita $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$ por Lusztig (1988), las cuales han sido estudiadas intensamente en relación con diversos problemas.

Finalmente, el decubrimiento de los grupos cuánticos ha significado un impulso decisivo a la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita (o aún de 'crecimento' finito). Bajo ciertas hipótesis adecuadas, los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo, o los de Lusztig, o variaciones de los mismos, son todos los ejemplos de álgebras de Hopf.