Sobre la clasificación de las álgebras de Hopf

Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina

Córdoba, 20 de septiembre de 2007

Nicolás Andruskiewitsch

Universidad de Córdoba, Argentina.

Plan.

i) Presentación del problema general de clasificación de álgebras de Hopf.

ii) Presentación del resultado principal en

On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras. 43 pp. N. A. y H.-J. Schneider, `http://arxiv.org/abs/math/0502157`.
Aceptado en Annals of Mathematics.

iii) Discusión de resultados recientes y perspectivas.

i) Presentación del problema:

¿Qué se quiere hacer? ¿Por qué?

I. Definición.

II. Motivaciones.

III. Problemas de clasificación de diversas clases de grupos.

IV. Esquema general del programa de clasificación.

$\mathbb{C}$ cuerpo alg. cerrado car. 0

I. Definición. (H, m, Δ), **Álgebra de Hopf:**

- (H, m) alg. con unidad 1,
- $\Delta : H \to H \otimes H$ morfismo de álgebras (coproducto),
- Δ coasociativa con counidad ε,
- existe $\mathcal{S} : H \to H$ "antípoda" tal que

  $m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}_H = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta$.

Ejemplos

- G grupo, $\mathbb{C}G$ = álgebra de grupo = espacio vectorial de base e_g $(g \in G)$ y producto $e_g e_h = e_{gh}$

Resulta un álgebra de Hopf con coproducto $\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g$ y antípoda $\mathcal{S}(e_g) = e_g^{-1}$

- $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $U(\mathfrak{g})$ = álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$

Resulta un álgebra de Hopf con coproducto $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y antípoda $\mathcal{S}(x) = -x$, $x \in \mathfrak{g}$

$X \subset \mathbb{C}^n$ variedad algebraica afín $\equiv$ ceros comunes de polinomios $f_1, \ldots, f_s$

$X \leftrightsquigarrow \mathcal{O}(X) =$ álgebra de funciones regulares (polinomiales) en X

$f : X \to Y$ morfismo de var. algebraicas afines
$\leftrightsquigarrow f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ morfismo de álgebras

categoría de variedades algebraicas afines
$\leftrightsquigarrow$categoría de $\mathbb{C}$-álgebras **conmutativas** finitamente generadas, sin nilpotentes

Grupos algebraicos afines $\leftrightsquigarrow$ $\mathbb{C}$-álgebras de Hopf **conmutativas** finitamente generadas

¿? $\leftrightsquigarrow$ $\mathbb{C}$-álgebras de Hopf **no necesariamente conmutativas**

II. Motivaciones.

Las álgebras de Hopf no conmutativas tienen aplicaciones en y conexiones con:

- Topología de baja dimensión (teoría de nudos).
- Teoría de subfactores en álgebra de operadores.
- Teoría conforme de campos (física teórica).

Estas aplicaciones tienen en común la ecuación de Yang-Baxter (o de trenzas).

Es crucial el descubrimiento de ejemplos centrales en en los 80's:

$\mathfrak{g}$ álgebra Lie simple, q parámetro complejo $\neq 0$

grupos cuánticos $U_q(\mathfrak{g})$ (Drinfeld, Jimbo y otros)

grupos cuánticos finitos $u_q(\mathfrak{g})$, q raíz de 1, orden N (Lusztig)

Teoría de representaciones de $u_q(\mathfrak{g})$ aparece en la correspondencia "geométrica" de Langlands

III. Problemas de clasificación de diversas clases de grupos.

Teorema (Killing - Cartan).

Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de:

- Grupos de Lie semisimples complejos (conexos y simplemente conexos)

- Álgebras de Lie semisimples complejas

- Diagramas de Dynkin ($\equiv$ matrices de Cartan)

Diagramas de Dynkin clásicos.

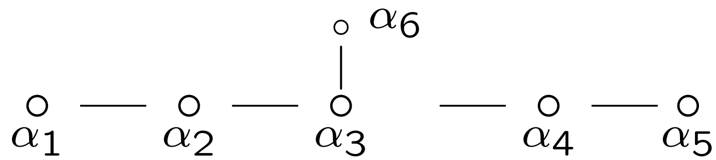
$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & — & \circ & — & \cdots & — & \circ & — & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (A_\ell)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & — & \circ & — & \cdots & — & \circ & \Rightarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (B_\ell)$$

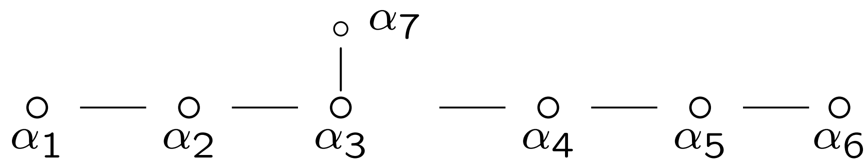
$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & — & \circ & — & \cdots & — & \circ & \Leftarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (C_\ell)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \circ & \alpha_{\ell-1} & \\ & & & & & & | & & \\ \circ & — & \circ & — & \cdots & — & \circ & — & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-2} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (D_\ell)$$

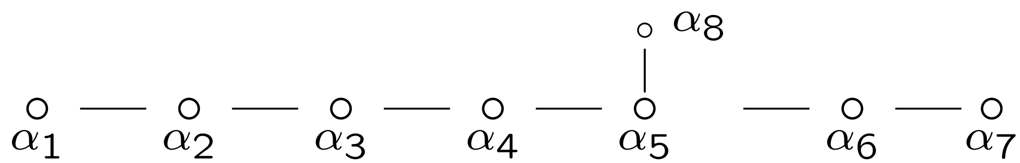
Diagramas de Dynkin excepcionales.



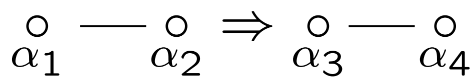
(E_6)



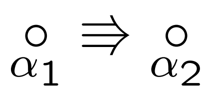
(E_7)



(E_8)



(F_4)



(G_2)

Otras apariciones de los diagramas de Dynkin.

- Clasificación de grupos finitos simples
- Singularidades
- Polihedros regulares
- Teoría de representaciones de álgebras (asociativas) de dimensión finita
- Clasificación de álgebras de Hopf

IV. Esquema general del programa de clasificación.

Algunos invariantes de un álgebra de Hopf H.

$G(H) := \{x \in H - 0 : \Delta(x) = x \otimes x\}$.
$=$ elementos de *tipo grupo*.

$H_0 := \sum C$, C subcoálgebra simple de H

$=$ máxima subcoálgebra cosemisimple de H

$=:$*corradical* de H.

$\mathbb{C}G(H) \subseteq H_0$; H es *punteada no cosemisimple*
$=$ *"punteada"* si $\mathbb{C}G(H) = H_0 \neq H$.

Problema. Clasificar álgs. de Hopf dim. finita
Enoque: posición relativa del corradical.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{semisimples} & & \\
\text{Álgs. de Hopf dim. finita} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & \boxed{H_0 \text{ subálg. Hopf}} & \\
 & \text{no semisimples} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \text{Otras} &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \boxed{\begin{array}{c} G(H) \\ \text{abeliano} \end{array}} \\
 & \begin{array}{c} H_0 = \mathbb{C}G(H) \\ \text{(punteada)} \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \begin{array}{c} G(H) \quad \text{no} \\ \text{abeliano} \end{array} \\
\begin{array}{c} H_0 \quad \text{subálg.} \\ \text{de Hopf} \end{array} \arrow[uur] \arrow[dr] & & \\
 & \text{otras} &
\end{tikzcd}
$$

ii) Presentación del resultado principal:

¿Qué se obtuvo?

Se clasificaron las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita y grupo abeliano, bajo la hipótesis de que los primos que dividen al orden del grupo son mayores a 7.

Resulta que son "variaciones" de los grupos cuánticos de Drinfeld, Jimbo, Lusztig.

$\mathfrak{g}$ álgebra Lie simple, matriz de Cartan $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq\theta}$; q raíz de 1, orden N

grupo cuántico finito $u_q(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\langle k_1, \dots, k_\theta, e_1, \dots, e_\theta, f_1, \dots, f_\theta\rangle$ relaciones:

$$
\begin{aligned}
&k_ik_j = k_jk_i, \quad k_i^N = 1,\\
&k_ie_jk_i^{-1} = q^{d_ia_{ij}}e_j, \quad k_if_jk_i^{-1} = q^{-d_ia_{ij}}f_j,\\
&\mathrm{ad}_c(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0, \quad i \neq j\\
&\mathrm{ad}_c(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0, \quad i \neq j\\
&e_if_j - q^{-d_ia_{ij}}f_je_i = \delta_{ij}(1-k_i^2), i < j, i \nsim j\\
&e_\alpha^N = 0, \quad f_\alpha^N = 0,\\
&\Delta(g) = g\otimes g, \Delta(x_i) = g_i\otimes x_i + x_i\otimes 1.
\end{aligned}
$$

$u_q(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf punteada de dim. $N^{\dim\mathfrak{g}}$. Aquí $\mathrm{ad}_c(x_i)(x_j) = x_ix_j - q_{ij}x_jx_i$.

$$\begin{tikzcd} & & \text{parámetro vinculante } \lambda \\ \Gamma \text{ grupo abeliano finito} \arrow[r] & \text{dato de Cartan} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \text{parámetro } \mu \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ álgebra Hopf dim. finita

Γ grupo abeliano finito

Dato de Cartan $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Gamma, (g_i)_{1\le i\le\theta}, (\chi_i)_{1\le i\le\theta}, (a_{ij})_{1\le i,j\le\theta})$

$g_i \in \Gamma$, $\chi_i \in \widehat{\Gamma}$, $1 \le i \le \theta$; $q_{ij} = \chi_j(g_i)$, $1 \le i, j \le \theta$.

$(a_{ij})_{1\le i,j\le\theta}$ matriz de Cartan tal que

$$q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}, \; q_{ii} \neq 1.$$

$\Phi =$ sistema de raíces $(a_{ij})_{1\le i,j\le\theta}$

$\alpha_1, \dots, \alpha_\theta$ raíces simples
$\mathcal{X} = \Big\{$ comp. conexas diagrama de Dynkin $\Phi\Big\}$
$i \sim j \iff \alpha_i, \alpha_j \in J$, $J \in \mathcal{X}$

El parámetro $\lambda = (\lambda_{ij})_{1\leq i<j\leq\theta,\, i\not\sim j}$ es una familia en $\{0,1\}$ t. q.

si $g_i g_j = 1$ o $\chi_i\chi_j \neq \varepsilon$, $\implies \lambda_{ij} = 0$.

El parámetro $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+}$ es una familia en $\mathbb{C}$ tal que

$\alpha \in \Phi_J^+, J \in \mathcal{X}$, si $\begin{cases} g_\alpha^{N_J} & = 1 \\ \chi_\alpha^{N_J} & \neq \varepsilon \end{cases}$, $\implies \mu_\alpha = 0$.

$\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+} \rightsquigarrow u_\alpha(\mu) \in k[\Gamma]$

Ejemplo:

$u_{\alpha_i}(\mu) = \mu_{\alpha_i}(1 - g_i^{N_i})$

álgebra de Hopf $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu) = \mathbb{C}\langle \Gamma, x_1, \dots, x_\theta \rangle$ con relaciones:

(*Acción de Γ*)	$g x_i g^{-1} = \chi_i(g) x_i,$
(*Serre*)	$\mathrm{ad}_c(x_i)^{1-a_{ij}}(x_j) = 0,$ $i \neq j, i \sim j$
(*Vínculo*)	$\mathrm{ad}_c(x_i)(x_j) = \lambda_{ij}(1 - g_i g_j),$ $i < j, i \not\sim j$
(*Potencias vect. raíz*)	$x_\alpha^{N_J} = u_\alpha(\mu),$

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \Delta(x_i) = g_i \otimes x_i + x_i \otimes 1.$$

Aquí, $\mathrm{ad}_c(x_i)(x_j) = x_i x_j - q_{ij} x_j x_i$.

Teorema de clasificación. N. A. and H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. Math., to appear.

(1) $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ es un álgebra de Hopf punteada

$\dim u(\mathcal{D}, \lambda, \mu) = \prod_{J\in\mathcal{X}} N_J^{|\Phi_J^+|}|\Gamma|$, $G(u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)) \simeq \Gamma$.

(2) Sea H un álgebra de Hopf punteada de dim $< \infty$, $\Gamma = G(H)$.

Supongamos que los divisores primos de $|\Gamma|$ son > 7

$\implies \exists \mathcal{D}, \lambda, \mu$: $H \cong u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$.

(3) $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu) \cong u(\mathcal{D}', \lambda', \mu') \implies \dots .$

Método de demostración. N. A. and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf Algebras*, MSRI Publications **43** (2002), 1-68, Cambridge Univ. Press.

Paso esencial:

(V, c) espacio vectorial trenzado: $c \in GL(V \otimes V)$

$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)$

$\rightsquigarrow \mathfrak{B}(V) = \oplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}^n(V)$ (álgebra de Nichols)

En nuestro caso, H álg. Hopf punteada dim $H < \infty$, $\Gamma = G(H)$.
$\rightsquigarrow V \in {}^{\Gamma}_{\Gamma}\mathcal{YD}$ tal que dim $\mathfrak{B}(V) < \infty$!

${}^{\Gamma}_{\Gamma}\mathcal{YD}$ = módulos de Yetter-Drinfeld sobre Γ

Γ grupo abeliano finito $\Rightarrow$ $V \in {}^{\Gamma}_{\Gamma}\mathcal{YD}$ espacio vectorial trenzado de tipo diagonal.

$\exists$ base $v_1, \dots, v_\theta$, $(q_{ij})_{1\le i,j\le\theta}$ in $\mathbb{C}^\times$:

$$c(v_i \otimes v_j) = q_{ij} v_j \otimes v_i, \quad \forall i, j$$

Teorema. $1 \neq q_{ii}$ raíces de 1. $\Rightarrow$ $\dim \mathfrak{B}(V) < \infty$ clasificados.

N. A. & H.-J. Schneider, *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154** (2000), 1-45.

I. Heckenberger, *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*, Invent. Math. **164**, 175–188 (2006).

I. Heckenberger, *Classification of arithmetic root systems*, `http://arxiv.org/abs/math.QA/0605795`.

iii) Discusión de resultados recientes y perspectivas.

• Caso diagonal "no Cartan".

• Resultado análogo para álgebras de Hopf punteadas de crecimiento polinomial.

N. A. & H.-J. Schneider, *A characterization of quantum groups*. J. Reine Angew. Math. **577**, 81–104 (2004).

N. A. & I. Angiono, *On Nichols algebras with generic braiding*. In "Modules and Comodules", Proceedings of the Porto Conference. `arxiv:math/070392`.

- Γ no abeliano

Sólo se conoce un puñado de ejemplos de dim. $< \infty$

$V \in {}_{\Gamma}^{\Gamma}\mathcal{YD}$ tal que $\exists W \subset V$, W trenzado, $\dim \mathfrak{B}(W) = \infty \implies \dim \mathfrak{B}(V) = \infty$

N. A. & S. Zhang. *On finite-dimensional pointed Hopf algebras associated to some conjugacy classes in S_n.* Proc. A. M. S. **135** (2007), 2723-2731.

N. A. & F. Fantino. *On pointed Hopf algebras associated to unmixed conjugacy classes in S_n.* J. Math. Phys. **48**, 033502 (2007). *On pointed Hopf algebras associated with alternating and dihedral groups.* Aceptado en Rev. UMA, `arxiv:math/0702559`.

N. A., F. Fantino & S. Zhang, *en preparación.*

- $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\theta \in {}^{\Gamma}_{\Gamma}\mathcal{YD}$

$\mathfrak{B}(V)$ en función de $\mathfrak{B}(V_i)$???

N. A. , I. Heckenberger & H.-J. Schneider, *The Weyl groupoid of a semisimple Yetter-Drinfeld module.* En preparación.

- Clasificación de álgs. de Hopf punteadas sobre

- $\Gamma = \mathbb{A}_5$

- $\Gamma = \mathbb{S}_3$

- $\Gamma = \mathbb{S}_4$