Topología

Práctico N°0: Relaciones entre conjuntos. Funciones: imágenes y preimágenes.

1. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

(b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(f) $A \subseteq B \cap C \Longrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.

(g) $A \cup B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

(h) $A \subseteq B \iff B^C \subseteq B^C$.

(i) $A \setminus B = A \cap B^C$.

(j) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (Leyes de De Morgan)

2. Sea $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(e) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).

(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es sobreyectiva).

(g) $f^{-1}(C^C) = [f^{-1}(C)]^C$.

(h) Si f es inyectiva entonces $f(A^C) \subseteq [f(A)]^C$.

(i) Si f es sobreyectiva entonces $[f(A)]^C \subseteq f(A^C)$.

En todos los items donde probó alguna contención, busque ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.

3. Sea $f : X \to Y$. Probar que:

(a) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. ($\mathrm{id}_X : X \to X$ es la función identidad de X, esto es, $\mathrm{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$).

(b) f es suryectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Deducir que f es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.