Topología

Práctico N°1: Espacios métricos. Espacios topológicos. Subespacios.

1. Considerar en $\mathbb{R}^n$ la métrica euclideana. Probar que
- $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^3$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}^c$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\mathrm{graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x)\}}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $C[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$. Probar que

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

es una métrica en $C[a, b]$. ¿Vale la misma afirmación si continuidad se reemplaza por integrabilidad?

3. Si (X, d) es un espacio métrico y $x_0 \in X$, muestre que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea, dada por $f(x) = d(x, x_0)$ es continua.

4. (a) Sea (E, d) un espacio métrico y sea $\emptyset \neq A \subseteq E$. Probar que $(A, d|_{A\times A})$ es un espacio métrico.

(b) Sea d la métrica euclídea en $\mathbb{R}$.

(i) $[0, 1)$ es abierto en $[0, 2]$ con la métrica restringida.

(ii) Estudiar los abiertos de $(\mathbb{Z}, d|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$.

5. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $A \subseteq X$, no vacío, y cada $x \in X$ definimos $d(x, A) = \mathrm{inf\{d(x, y) : \ y \in A\}}$. Probar que la función $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea, definida por $\delta(x) = d(x, A)$ es continua.

6. En $X = C([0, 1])$ consideremos las métricas

$$d_1(f, g) = \text{máx}\{|f(t) - g(t)| : \ t \in [0, 1]\},$$

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$

(a) Analizar la continuidad de $\mathrm{id : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)}$ y de $\mathrm{id : (X, d_2) \longrightarrow (X, d_1)}$.

(b) Analizar la continuidad de las funciones $f \mapsto f(1)$ y $f \mapsto \int_0^1 f(t)\, dt$ para ambas métricas en X.

7. Hallar todas las topologías en $\{a, b\}$ y en $\{a, b, c\}$.

8. Probar que las siguientes son topologías en el conjunto X.

(a) $\tau = \{A \subseteq X : \ A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

(b) $\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : \ x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$, con $x_0 \in X$.

(c) $\tau_{-x_0} = \{A \subseteq X : \ x_0 \notin A\} \cup \{X\}$, con $x_0 \in X$.

9. (a) Probar que las siguientes son topologías en $\mathbb{R}$.
- $\tau_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ \text{para cada } x \in A\ \exists b \in \mathbb{R} \text{ con } [x, b) \subseteq A\}$.
- $\tau_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ \text{para cada } x \in A\ \exists b \in \mathbb{R} \text{ con } (b, x] \subseteq A\}$.
- $\tau_3 = \{(a, +\infty) : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

- $\tau_4 = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(b) Si en τ_3 y en τ_4 cambiamos la condición "$a \in \mathbb{R}$" por "$a \in \mathbb{Q}$", ¿siguen siendo τ_3 y τ_4 topologías en $\mathbb{R}$?
(c) Verificar que $\{[a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base de τ_1. Mostrar que los elementos de esta base son abiertos y cerrados.

10. Sea $E_n = \{k \in \mathbb{N} : \ k \geq n\}$ y sea $\tau = \{E_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.
(a) Probar que τ es una topología en $\mathbb{N}$.
(b) Para $A = \{3, 4, 19\}$ dar A° y $\overline{A}$.
(c) Determinar los conjuntos cerrados en $(\mathbb{N}, \tau)$.
(d) Determinar los conjuntos densos en $(\mathbb{N}, \tau)$.

11. Probar que la proyección $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $p(x, y) = x$, es continua y abierta, pero no es cerrada.

12. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual y sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \frac{1}{2^n} \text{ con } n \in \mathbb{N}, y \in [0, 1]\}$ y $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
(a) ¿Es A abierto o cerrado?
(b) Dar $\overline{A}$ y $\mathrm{Fr}(A)$.
(c) Dar $\overline{B}$.

13. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología τ_2 del Ejercicio 9.
(a) Probar que $\{(a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base se τ_2.
(b) Sean $A = [1, 2]$, $B = \{0\}$, $C = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ y $D = [0, \infty)$. Dar A°, $\overline{B}$, $\mathrm{Fr}(A \cup B)$, D°, $\mathrm{Fr}(D)$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ y C°.
(c) Probar que si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $A - A'$ es numerable.

14. Sean A, B, A_i, $i \in \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ un conjunto arbitrario) subconjuntos de un espacio topológico X. Decidir si las siguientes igualdades son válidas. En caso que no lo sean, decidir si alguna de las inclusiones $\subset$ o $\supset$ vale.
(a) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$.
(b) $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i}$.
(c) $\overline{A} - \overline{B} = \overline{A - B}$.

15. Sea $X = F_1 \cup F_2$ con F_1 y F_2 cerrados en X. Sean $f_i : F_i \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f_1|_{F_1 \cap F_2} = f_2|_{F_1 \cap F_2}$. Probar que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = f_i(x)$, si $x \in F_i$, es continua.

16. Sean $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ y $[0, 2\pi)$ con las topologías relativas de las usuales de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ respectivamente. Probar que la función $f : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$, definida por $f(t) = (\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t}))$ es biyectiva y continua, pero no es abierta ni cerrada y por lo tanto no es un homeomorfismo.