Topología

Práctico N°2: Axiomas de separación y numerabilidad. Conexidad y arco-conexidad.

1. (a) Probar que (X, τ_{x_0}) es conexo.
(b) Probar que $\mathbb{R}$ con la topología de los intervalos semiabiertos $(a, b]$ no es conexo.

2. Probar que no existe ninguna función continua y suryectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$.

3. Sea $n \geq 2$. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | \text{ todas sus coordenadas son racionales}\},$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | \text{ todas sus coordenadas son irracionales}\}.$$

Probar que $\mathbb{R}^n - A_1$ es conexo pero A_2 no lo es.

4. (a) **Teorema de los valores intermedios:** Sean $f : X \to \mathbb{R}$ continua, $A \subseteq X$ conexo y $x, y \in A$ tales que $f(x) < f(y)$. Probar que para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c < f(y)$, existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$.
(b) Sea $g : S^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que existe $x \in S^n$ tal que

$$g(x) = g(-x).$$

(c) Sea $h : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Probar que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

5. Probar que $O(n)$ no es conexo.

6. Sea $Y \subseteq M_n(\mathbb{R})$ un subconjunto conexo y sean $A, B \in Y$ tales que $\det(A) > 0$ y $\det(B) < 0$. Probar que existe $C \in Y$ con $\det(C) = 0$.

7. Dos subconjuntos A, B de un espacio topológico se dicen *separados* si satisfacen que

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico, con la siguiente propiedad: si $A, B \in \mathcal{A}$, existe una sucesión finita $A_0, A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tales que $A_0 = A$, $A_n = B$ y A_j, A_{j+1} no son separados, para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Probar que $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ es un conjunto conexo.

8. Sea X espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto conexo. Pruebe que si Z es un subconjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ entonces Z es conexo. En particular, la clausura de un conexo es un subconjunto conexo.

9. Probar que los siguientes espacios, con las topologías usuales, no son homeomorfos dos a dos:

$$(0, 1); \qquad [0, 1); \qquad [0, 1]; \qquad \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

10. Sean $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1]$, $B = (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \times [0, 1]$ y $C = B \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ con las topologías relativas de la usual de $\mathbb{R}^2$.
(a) Dar las componentes conexas de A, B y C.
(b) Determinar si A, B y C son localmente conexos o arco-conexos.
(c) ¿Existe $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ continua tal que $f|_X = \text{id}$, para $X = A, B$ o C?

11. Probar que un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas.
Por otro lado, dar un ejemplo de que esto no vale para conjuntos cerrados.

12. Probar que si B es un subconjunto no vacío, abierto, cerrado y conexo de un espacio topológico X, entonces B es una componente conexa de X.

13. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Si C es un subespacio conexo de X tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap A^c \neq \emptyset$, entonces $C \cap \mathrm{Fr(A)} \neq \emptyset$.
¿Por qué la terna $X = \mathbb{R}^3$, $A = \{(x, y, 0) : \ x^{+}y^2 \leq 1\}$ y $C = \{(0, 0, z) : \ |z| \leq 1\}$ no es un contraejemplo del resultado anterior?

14. Verdadero o Falso.
(a) El producto de espacios conexos es conexo.
(b) El producto de espacios arco-conexos es arco-conexo.
(c) La clausura de un arco-conexo es necesariamente arco-conexa.
(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ es arcoconexo en $\mathbb{R}^2$.

15. Sean X e Y espacios topológicos y supongamos que Y es T_2. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas. Probar que:
(a) $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
(b) Si f y g coinciden en un denso, entonces son iguales.

16. Dar ejemplos de un espacio topológico que no es T_0 y un espacio topológico que es T_0 pero no T_1. Muestre que un espacio T_1 finito es discreto.

17. ¿Existe una distancia d en $\mathbb{R}$ tal que la topología definida por d es la de los complementos finitos?

18. Sea $f : X \to Y$ continua suryectiva, X normal. Probar que Y es normal.

19. ¿Es todo espacio N_1 también N_2?
¿Es todo espacio N_2 separable?

20. Demostrar que la topología τ_1 del Ejercicio 9 del Práctico 1 es N_1 y separable pero no N_2.