Topología

Práctico N°3: Sucesiones y Redes. Compacidad.

1. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos.
(a) Encontrar los límites de las siguientes sucesiones:

$$x_n = n, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad\qquad y_n = 1 \text{ para } n \text{ impar}, \ y_n = n \text{ para } n \text{ impar}.$$

(b) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:
Toda sucesión convergente tiene límite único o infinitos límites.

2. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$ y consideremos la topología

$$\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : \ x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Describir las sucesiones convergentes en (X, τ_{x_0}). ¿Existen sucesiones que convergen a más de un punto?

3. Consideremos el espacio $(\mathbb{N}, \tau)$, donde $\tau = \{\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n\} : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$.
(a) Dar varias sucesiones que converjan a 1.
(b) ¿Cuáles son todas las sucesiones que convergen a 1?
(c) ¿Cuáles son las sucesiones convergentes?

4. Sea X un espacio topológico N_1 y $A \subseteq X$. Probar que:
(a) X es T_2 si y sólo si toda sucesión en X converge a lo sumo a un punto.
(b) $x \in X$ es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión en $A - \{x\}$ que converge a x.
(c) $x \in X$ es un punto de acumulación de una sucesión si y sólo si existe una subsucesión que converge a x.

5. Subsucesiones y subredes.
(a) Probar que las subredes de sucesiones no son necesariamente subsucesiones.
(b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de rango finito. Probar que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión constante.
(c) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio topológico N_1. que posee tiene una subred convergente. Probar que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

6. Sea X un espacio topoógico. Decimos que $A \subset X$ es un *retracto de* X si existe una función continua $r : X \longrightarrow A$ tal que la restricción de r a A es la identidad de A. Probar que si A es un retracto de X entonces A es cerrado en X.

7. Probar que toda función polinómica $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cerrada.

8. Sea X un espacio topológico.
a) Probar que la unión finita de conjuntos compactos en X es un compacto.
b) Probar que la intersección de dos compactos puede no ser compacta.
c) Asumimos ahora que X es Hausdorff. Probar que la intersección de una familia arbitraria de compactos es compacta.

9. Probar las siguientes afirmaciones:
(a) Todo subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.
(b) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y X es compacto, entonces f tiene máximo y mínimo en X.

(c) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, X es compacto y $f > 0$, entonces existe un $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$, para todo $x \in X$.

10. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $A, B \subseteq X$ no vacíos, definimos

$$d(x, A) = \inf\{\mathrm{d(x,y) : \ y \in A}\} \qquad d(A, B) = \inf\{\mathrm{d(x,y) : \ x \in A, y \in B}\}.$$

Probar que:

(a) $\overline{A} = \{x \in X : \ d(x, A) = 0\}$.
(b) La función $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(x) = d(x, A)$ es continua.
(c) Si $K \subseteq X$ es compacto y $x_0 \in X$, existe $y_0 \in Y$ tal que $d(x_0, K) = d(x_0, y_0)$.
(d) Si K_1 y K_2 son 2 subconjuntos compactos de X, entonces existen $x_0 \in K_1$ e $y_0 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_0, y_0)$.
(e) Mostrar que el inciso anterior es falso si K_1 o K_2 no son compactos.

11. Una función $f : (X, d) \to (X', d')$ es *uniformente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Probar que si X es compacto y f continua, entonces f es uniformente continua.

12. Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Probar que f es cerrada. En particular, probar que si f es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.
Mostrar que la condición de compacidad de X es necesaria.

13. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ una isometría. Probar que f es una biyección. ¿Qué pasa si X no es compacto?

14. Sean $X = [0, 1]$ y $D = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$. Considerar en X la topología τ que tiene por base a los abiertos del subespacio $(0, 1]$ de $\mathbb{R}$ y a los conjuntos $I_a = \{x \in X : \ x < a \text{ y } x \notin D\}$ con $0 < a < 1$. Probar que (X, τ) es T_2 y no es compacto.

15. Sea $X := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} | \, x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Dados $x, y \in X$, definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Probar que

a) d es una distancia en X.
b) Si $B(0, 1) = \{x \in X | \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < 1\}$ entonces $\overline{B(0, 1)}$ no es compacto.
c) (X, d) es un espacio métrico completo (toda sucesión de Cauchy converge).

16. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto y T_2. Entonces no existe ninguna topología τ' menos fina que τ tal que (X, τ') sea T_2.
(b) Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto y T_2. Entonces no existe ninguna topología τ' más fina que τ tal que (X, τ') sea compacto.
(c) La clausura de un compacto es compacta.
(d) Sea X un espacio T_2 e Y un subespacio localmente compacto y denso. Entonces Y es abierto.