Topología

Práctico N°4: Espacios métricos completos. Topología producto.

1. Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si para toda sucesión encajada $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ de subconjuntos cerrados de X tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, la intersección de todos los A_n es no vacía.

2. Completación de espacios métricos. Sea X un espacio métrico. Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en X tales que $\mathrm{d}(x_n, y_n) \to 0$ entonces decimos que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son *equivalentes* y lo denotamos $\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

(a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de X.

La clase de equivalencia de $\{x_n\}$ se denotará $[\{x_n\}]$. Sea Y el conjunto de clases de equivalencia $[\{x_n\}]$ de sucesiones de Cauchy $\{x_n\}$ en X. Definimos

$$\mathrm{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim \mathrm{d}(x_n, y_n), \qquad [\{x_n\}], [\{y_n\}] \in Y.$$

(b) Mostrar que d está bien definida y es una métrica en Y.
(c) Demostrar que la función $f : X \longrightarrow Y$ dada por $x \mapsto [\{x\}]$ es un homeomorfismo isométrico (es decir, que preserva la distancia) sobre un subespacio denso de Y.
(d) Probar que Y es completo. Se llama la *completación* de X.
(e) Sean Z un espacio completo y $g : X \longrightarrow Z$ una isometría. Mostrar que existe una única factorización $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ de g, tal que h una isometría. Más aún, probar que si $g(X)$ es denso en Z entonces h es suryectiva.

3. Sea I un conjunto de índices. Escribimos $I = J \cup K$, donde J, K son no vacíos y disjuntos. Sean X_i, Y_i espacios topológicos.
(a) Probar que $\prod_{i\in I} X_i \simeq \left(\prod_{j\in J} X_j\right) \times \left(\prod_{k\in K} X_k\right)$.
(b) Si $X_i \simeq Y_i$ para todo $i \in I$, probar que $\prod_{i\in I} X_i \simeq \prod_{i\in I} Y_i$.

4. Probar que las proyecciones de un espacio producto $\prod_{i\in I} X_i$ sobre cualquiera de sus espacios coordenados son funciones abiertas.

5. Sean X_i, $i \in I$, espacios topológicos, y para cada $i \in I$, sea A_i un subconjunto de X_i.
(a) Probar que, si I es finito, $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ = \prod_{i\in I} A_i^\circ$.
(b) Probar que lo anterior puede no ser cierto si I es infinito.
(c) Estudiar las relaciones entre $\overline{\prod_{i\in I} A_i}$ y $\prod_{i\in I} \overline{A}_i$.

6. Sean X_1, X_2 dos espacios topológicos, y A_1, A_2 subconjuntos de X_1, X_2, respectivamente. Probar que

$$\mathrm{Fr}(A_1 \times A_2) = \left(\mathrm{Fr}(A_1) \times \overline{A}_2\right) \cup \left(\overline{A}_1 \times \mathrm{Fr}(A_2)\right).$$

7. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que la topología de X es la menos fina que hace que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sea continua.

8. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \times Y \to Z$ una función. Para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, definimos las funciones

$$f_x : Y \to Z,\ f_y : X \longrightarrow Z, \qquad f_x(y') := f(x, y'),\ f_y(x') := f(x', y).$$

(a) Probar que, si f es continua, entonces las funciones f_x y f_y son continuas, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$.
(b) Mostrar que la recíproca no vale.

9. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Probar que:
(a) $\prod_{i\in I} X_i$ es T_2 si y sólo si X_i es T_2 para todo i.
(b) Si $\prod_{i\in I} X_i$ es separable, entonces cada X_i es separable.
(c) Si I es numerable, entonces vale la recíproca de a).
(d) $\prod_{i\in I} X_i$ es N_1 (respectivamente, N_2) si y sólo si cada X_i es N_1 (respectivamente N_2) y todos, salvo una cantidad numerable, son indiscretos.
(e) $\prod_{i\in I} X_i$ es conexo por curvas si y solo si cada X_i es conexo por curvas.

10. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $a \in X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Probar que el conjunto de elementos de X que difieren de a en un número finito de coordenadas es denso en X.

11. Sea X un espacio topológico.
(a) Probar que la aplicación diagonal $D : X \longrightarrow X \times X$, $D(x) = (x, x)$, es continua.
(b) Probar que $D(X)$ es cerrado en $X \times X$ si y sólo si X es T_2.

12. Sean X, Y dos espacios topológicos, y A, B subconjuntos compactos de X e Y, respectivamente. Probar que si W es un entorno de $A\times B$ en $X \times Y$, entonces existen U y V abiertos en X e Y respectivamente tales que $A \times B \subset U \times V \subset W$.

13. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Probar que:
(a) Si Y es T_2 y f es continua, probar que el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$.
(b) Recíprocamente, probar que, si X es T_2, Y compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

14. Sea $I = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y sean X_i, con $i \in I$, espacios topológicos. Probar que:
(a) $\prod_{i\in I} X_i \simeq (\prod_{j\in I_1} X_j) \times (\prod_{j\in I_2} X_j)$.
(b) Si $X_i \simeq Y_i$ para todo i, entonces $\prod_{i\in I} X_i \simeq \prod_{i\in I} Y_i$.

15. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Una $f : X \times Y \longrightarrow Z$ se dice *continua respecto de* x si para todo $y \in Y$ la función $f_y : X \longrightarrow Z$ definida por $f_y(x) = f(x, y)$ es continua. La definición de continua respecto de y es análoga. Probar que si f es continua, entonces f es continua respecto de x y es continua respecto de y. Dar un ejemplo que muestre que la recíproca no vale.

16. Sea $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ con la topología producto de la usual de $\mathbb{R}$.
(a) Considerar $f \equiv 1$ y dar algunos entornos sub-básicos de f.
(b) Si $g = \cos(\pi x)$, dar 3 entornos de f que contengan a g y 3 entornos de f que no contengan a g.
(c) Mostrar que para todo entorno de f y para todo $N > 0$ hay una h en dicho entorno y un $x \in [0, 1]$ tal que $h(x) \geq N$.
(d) Mostrar que para todo entorno de f y para todo $N > 0$ hay una h en dicho entorno tal que $\int_0^1 h(x) \geq N$.

17. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas
(a) El producto de espacios conexos es conexo.
(b) El producto de espacios arco-conexos es arco-conexo.