Topología

Práctico N°5: Topología cociente.

1. Sean $I = [-1,1]$, $X = I/_{\sim_1}$, $Y = I/_{\sim_2}$, donde $\sim_1$ está dada por la partición $\{\frac{1}{2}, 1\}$, $\{x\}$, $x \neq \frac{1}{2}, 1$, y $\sim_2$ está dada por la partición $\{\frac{1}{2}, 1\}$, $\{-\frac{1}{2}, -1\}$, $\{x\}$, $x \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1$. Probar que X no es homeomorfo a Y.

2. En $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definimos $x \sim y$ si y sólo si $\|x\| = \|y\|$.
(a) Probar que la proyección canónica $p : X \to X/\sim$ es abierta y cerrada.
(b) Probar que $X/\sim \simeq \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

3. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\sim$ la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Probar que la relación de equivalencia no es cerrada y que la topología cociente en $\mathbb{R}/\sim$ es la indiscreta.

4. Sea $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,0) \in X : x \in \mathbb{R}\}$ y $\sim$ la relación de equivalencia asociada a la partición de X formada por A y los subconjuntos $\{(x,y)\}$ tales que $y \neq 0$.
(a) Probar que la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ es cerrada pero no abierta.
(b) Hallar una familia de entornos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la clase de equivalencia de A en $X/\sim$ tales que $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{A\}$.
(c) Probar que $X/\sim$ no es N_1, y decidir si es T_2.
(d) Probar que para cada entero no negativo m la sucesión $\{(m, \frac{1}{n+1}) | n \in \mathbb{N}\}$ converge en el espacio cociente. Por otro lado, probar que si $\{N_n\}$ es una subsucesión de $\mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{(n, \frac{1}{N_n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ no converge a A.

5. Consideramos en $[0,1]$ la partición cuyas clases de equivalencia son $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ si $x \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sea $\theta : [0,1] \to [0,1]/\sim$ la correspondiente aplicación cociente.
(a) Probar que θ es abierta pero no cerrada.
(b) Probar que X no es T_2. ¿$G(\sim)$ es cerrado en $[0,1] \times [0,1]$?
(c) Decidir si $[0,1]/\sim$ es N_1, localmente conexo.

6. Sea $X = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, 1, -1\}$ y $\sim$ la relación de equivalencia en X asociada a la partición cuyos elementos son $\mathbb{Z} - \{0\}$, $\{0\}$ y los conjuntos de la forma $\{x, \frac{1}{x}\}$, para cada x tal que $0 < |x| < 1$.
(a) Probar que la proyección canónica no es abierta ni cerrada.
(b) Probar que $G(\sim)$ es cerrado pero que el espacio cociente $X/\sim$ no es T_2.

7. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X, y sea $p : X \longrightarrow X/\sim$ la proyección al cociente. Dado B un subconjunto de X llamamos *saturado de* B al conjunto $p^{-1}(p(B))$. Decimos que B es *saturado* si $B = p^{-1}(p(B))$.
(a) Probar que A es abierto en $X/\sim$ (resp. cerrado) si y sólo si $A = p(B)$ para algún B abierto (resp. cerrado) y saturado en X.
(b) Probar que p es abierta (resp. cerrada) si y sólo si los saturados de conjuntos abiertos (resp. cerrado) son abiertos (resp. cerrado).

8. Sean $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $\sim_i$ relaciones de equivalencia abiertas en X_i. Definimos en el espacio producto la relación de equivalencia $(x_i) \sim (y_i)$ si y sólo si $x_i \sim_i y_i$ para todo $i \in I$. Probar que $\left(\prod_i X_i\right)/\sim$ es homeomorfo a $\prod_i \left(X_i/_{\sim_i}\right)$.

9. Probar que el toro n-dimensional es homeomorfo a $(S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) Si X es un espacio T_2 entonces $X/\sim$ es T_2.
b) Si $X/\sim$ es un espacio T_2 entonces X es T_2.
c) Si $X/\sim$ es conexo entonces X es conexo.

11. Si A es un subconjunto de X y $\sim$ es una relación de equivalencia de X tal que toda clase de equivalencia corta a A, entonces la inclusión de A en X induce un homeomorfismo de $A/\sim$ en $X/\sim$ si el saturado en X de todo abierto (cerrado) de A es abierto (cerrado) en X.

12. Sea X un espacio topológico, y $\sim$ una relación de equivalencia en X.
(a) Probar que si X es localmente conexo entonces $X/\sim$ es localmente conexo.
(b) Supongamos que la clase de equivalencia de cada punto es un conexo de X y que el cociente $X/\sim$ es conexo. Probar que X es conexo.

13. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un espacio topológico X tal que la proyección $p : X \to X/\sim$ es cerrada y las clases de equivalencias son compactas. Probar que si X es T_2 (respectivamente, N_2) entonces $X/\sim$ es T_2 (respectivamente, N_2).

14. (a) En S^n, $n \geq 2$, consideramos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x = \pm y$. Probar que $S^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.
(b) En $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ se identifican los puntos antipodales del borde de S^{n-1} (es decir, identificamos x con $-x$, para cada x tal que $|x| = 1$). Probar que $B^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.
(c) Sea M es la cinta de Möbius y $\theta : I^2 \longrightarrow M$ la aplicación canónica. Probar que $\theta(I \times \{0\} \cup I \times \{1\})$ es homeomorfo a S^1.
(d) Probar que el proyectivo complejo n-dimensional, $\mathbb{C}P^n$ es homeomorfo al cociente de S^{2n+1} por la relación de equivalencia: $x \sim y$ sii existe $\lambda \in S^1$ tal que $x = \lambda y$ (aquí estamos identificando $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$).

15. En un espacio topológico X se definen el *cono* de X y la *suspensión* de X respectivamente por

$$CX := (X \times [0,1])/_{\sim_1}, \qquad SX := (X \times [-1,1])/_{\sim_2},$$

donde $\sim_1$ es la relación de equivalencia que identifica $(x,1)$ con $(x',1)$ y $\sim_2$ identifica $(x,1)$ con $(x',1)$ y $(x,-1)$ con $(x',-1)$ para todo par de puntos $x, x' \in X$.
Probar que SS^n es homeomorfo a S^{n+1} y CS^n es homeomorfo a D^{n+1}.

16. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. Probar que:
(a) f induce una función continua $\widetilde{f} : P\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$;
(b) más aún, $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo de $P\mathbb{R}^2$ con su imagen.

Espacios cocientes - Ejercicios adicionales.

17. (a) Probar que los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$ son compactos.
(b) Probar que $\mathrm{O}(n)$ no es conexo.

18. Identificamos a $\mathrm{SO}(n-1)$ con el siguiente subgrupo de $\mathrm{SO}(n)$:

$$\mathrm{SO}(n-1) = \{A \in \mathrm{SO}(n) | Ae_1 = e_1\}, \qquad \text{donde } e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

Definimos en $\mathrm{SO}(n)$ la relación de equivalencia $A \simeq B$ si y sólo si $B^{-1}A \in \mathrm{SO}(n-1)$, y denotamos el espacio cociente por $\mathrm{SO}(n)/SO(n-1)$. Probar que:
(a) $\mathrm{SO}(n)/SO(n-1)$ es homeomorfo a S^{n-1}.
(b) $\mathrm{SO}(n)$ es conexo.
(c) $\mathrm{O}(n)$ tiene dos componentes conexas.

19. Probar que el grupo $\mathrm{U}(n)$ es isomorfo a $S^1 \times \mathrm{SU}(n)$. En particular $\mathrm{U}(n)$ es conexo.