Topología

Práctico N°6: Grupos topológicos.

1. Probar que todo grupo topológico es regular.

2. Sean G, H grupos topológicos y $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que f es continua (respectivamente, abierta) si y sólo si f es continua (respectivamente, abierta) en e.

3. Sean $f : G \to H$ un morfismo de grupos topológicos y $K = \ker f$.
(a) Probar que K es un subgrupo normal cerrado de G.
(b) Probar que, si f es suryectivo y G es compacto, entonces H es isomorfo a G/K.

4. Sean G un grupo topológico compacto y U un entorno de e. Probar que existe un entorno V de e tal que $gVg^{-1} = V$ para todo $g \in G$.
Encontrar un grupo no compacto donde lo anterior no vale.
Ayuda: Mirar a $G \subset M(2, \mathbb{R})$ el subgrupo de matrices triangulares superiores de determinante 1.

5. Sean G un grupo topológico con unidad e y $C(G)$ la componente conexa de e. Probar que $C(G)$ es un subgrupo normal cerrado. Probar además que para todo $g \in G$ la componente conexa de g es $gC(G) = C(G)g$.

6. Sea G un grupo conexo, U un entorno de e. Probar que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$.

7. Sea H un subgrupo cerrado de G tal que H y G/H son conexos. Probar que G es conexo.

8. Sea G un grupo topológico, $A, B \subseteq G$ dos subconjuntos. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
(a) Si A y B son conexos, entonces AB es conexo.
(b) Si A y B son compactos, entonces AB es compacto.
(c) Si A es compacto y B es cerrado, entonces AB es cerrado.
(d) Si A y B son cerrados, entonces AB es cerrado.

9. (a) Probar que la acción caónica de $SO(n+1)$ sobre S^n induce una acción de $SO(n+1)$ sobre $\mathbb{R}P^n$ (visto como cociente de S^n).
(b) Sea $\Phi : O(n) \to GL(n+1, \mathbb{R})$, $\Phi(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$. Probar que Φ es un morfismo de grupos topológicos inyectivo, y que $\Phi(O(n))$ es un subgrupo de $SO(n+1)$.
(c) Identificamos a $O(n)$ como subgrupo de $SO(n+1)$ vía Φ. Probar que $O(n)$ es el subgrupo de isotropía de $[(1, 0, \dots, 0)]$; deducir que $\mathbb{R}P^n \simeq SO(n+1)/O(n)$.

10. Probar que $SL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z > 0\}$. Probar además que el grupo de isotropía de i es $SO(2)$, y por lo tanto $\mathcal{U} \simeq SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.