Topología

Práctico N°7: Espacios localmente compactos. Espacios paracompactos.

1. Probar que la imagen de un espacio localmente compacto por una función continua y abierta es localmente compacta. Mostrar que ésto deja de cumplirse si la función no es abierta.

2. Sea X un espacio compacto y T_2, A un subconjunto compacto de X. Definimos en X la relación de equivalencia dada por: $x \sim y$ sii $x = y$ o $x, y \in A$ (es decir, A es una clase de equivalencia, todas las demás constan de un punto). Probar que $X/\sim$ es un espacio compacto y T_2 isomorfo a la compactificación de $X - A$.

3. (a) Probar que $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es (homeomorfo a) la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$.
(b) Probar que S^n es (homeomorfo a) la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$.

4. Sean X, Y espacios localmente compactos y T_2 y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Recordemos que f es propia si y sólo si la extensión de f a la función $f^+ : X^+ \longrightarrow Y^+$, con $f^+(\infty_X) = \infty_Y$, es continua.
Encontrar un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ (no propia) que no pueda extenderse a $f^+ : X^+ \longrightarrow Y^+$ como antes de modo continuo.

5. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Probar que todo subconjunto cerrado $C \subseteq X$ también es locamente compacto.

6. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un espacio topológico X tal que la proyección $p : X \longrightarrow X/\sim$ es cerrada y las clases de equivalencia son compactas. Probar que:
(a) Si X es regular, entonces $X/\sim$ es regular.
(b) Si X es localmente compacto, entonces $X/\sim$ es localmente compacto.

7. Probar que un subconjunto L es localmente cerrado si y sólo si L es abierto en $\overline{L}$.

8. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.
(a) Si $f : X \to Y$ es continua y $L \subset Y$ es un subconjunto localmente cerrado, entonces $f^{-1}(L)$ también lo es.
(b) Si $f : X \to Y$ es continua y $L \subset X$ es un subconjunto localmente cerrado, entonces $f(L)$ también lo es.
(c) Si L_1, L_2 son localmente cerrados en X, entonces $L_1 \cap L_2$ también lo es.
(d) Sean $L_1 \subseteq L_2$ dos subconjuntos de X. Si L_1 es localmente cerrado en L_2 y L_2 es localmente cerrado en X, entonces L_1 es localmente cerrado en X.

9. Probar que $\mathbb{R}^n$ es para compacto.

10. Sea X un espacio regular tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, donde cada K_n es un subespacio compacto de X. Probar que X es paracompacto.

11. El producto de dos espacios paracompactos no necesariamente es paracompacto. En efecto, sea $\mathbb{R}_\ell$ el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología que tiene como base los intervalos semiabiertos $[a, b)$, $a < b$. Probar que $\mathbb{R}_\ell$ es paracompacto, pero que $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ no es normal (y por lo tanto no puede ser paracompacto).

12. Si X es una unión finita de subespacios cerrados paracompactos, probar que X es paracompacto.

13. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(a) Si X tiene la topología discreta, entonces X es paracompacto.

(b) Si $f : X \to Y$ es continua y X es paracompacto, entonces $f(X)$ también lo es.

(c) Si X es paracompacto e Y es compacto, entonces $X \times Y$ es paracompacto.