Topología

Práctico N°8: Particiones de la unidad. Lema y Teorema de Urysohn.

1. Sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una partición de la unidad de X.

(a) Probar que para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$ existe un entorno V de X y un subconjunto finito E de A tal que $\sum_{\alpha\in A-E} f_\alpha(y) < \epsilon$ para todo $y \in V$.

(b) Sea $B \subseteq A$. Probar que las funciones $F_B, G_B : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F_B(x) = \sum_{\alpha\in B} f_\alpha(x), \qquad G_B(x) = \sup_{\alpha\in B} f_\alpha(x), \qquad x \in X,$$

son continuas.

2. Sea X un espacio normal conexo con más de un punto. Probar que X no es numerable.

3. Sea X un espacio topológico. Probar que X es normal si y sólo si para todo par de cerrados disjuntos A y B de X existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f_{|A} = 0$ y $f_{|B} = 1$.

4. Probar que un producto numerable de espacios métricos es metrizable. Para ello:

(a) Sea (Y, d) un espacio métrico. Probar que la función $\overline{d} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por $\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ es una métrica en Y tal que las topologías asociadas a (Y, d) y $(Y, \overline{d})$ coinciden.

(b) Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ espacios métricos cuyas métricas están acotadas por 1 y $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Probar que

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}, \qquad x = (x_n), y = (y_n) \in X,$$

es una métrica de X.

(c) Sean $x = (x_n) \in X$, $\epsilon > 0$. Probar que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$x \in B_{\epsilon/2}(x_1) \times \ldots B_{\epsilon/2}(x_m) \times X_{m+1} \times \cdots \subseteq B_\epsilon(x)$$

(d) Dado U entorno abierto de $x \in X$ para la topología producto, probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U$.

(e) Concluir que la topología asociada a (X, d) y la topología producto coinciden. Utilizar (a) para resolver el caso general (métricas no necesariamente acotadas).

5. Sea X un espacio T_2 compacto. Probar que X es metrizable si y sólo si es N_2. Deducir que todo espacio T_2, N_2 y localmente compacto es metrizable.