Topología

Práctico N°9: Homotopía. Grupo fundamental. Cubrimientos.

1. Sean X e Y espacios topológicos y sean p y q puntos de Y. Probar que las funciones constantes $f(x) = p$ y $g(x) = q$ son homotópicas si y sólo si p y q están en una misma componente arcoconexa de Y.

2. (a) Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ continuas tales que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Definimos

$$\gamma_1.\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases} \qquad \gamma_1 \odot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(\frac{t}{t_1}) & 0 \le t \le t_1 \\ \gamma_2(\frac{t}{1-t_1} - \frac{t_1}{1-t_1}) & t_1 \le t \le 1, \end{cases}$$

donde $0 < t_1 < 1$. Probar que $\gamma_1.\gamma_2(t) \simeq \gamma_1 \odot \gamma_2(t)$.

(b) Sean $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ continua y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ una partición de $[0,1]$. Consideramos $\sigma_k = \sigma_{|[t_{k-1},t_k]}$, $\lambda_k : [0,1] \longrightarrow [t_{k-1}, t_k]$ el homeomorfismo canónico dado por $\lambda_k(t) = (t_k - t_{k-1})t + t_{k-1}$, y $\widetilde{\sigma}_k : [0,1] \longrightarrow X$, $\widetilde{\sigma}_k = \sigma_k \circ \lambda_k$. Probar que $\sigma \simeq \widetilde{\sigma}_1.\widetilde{\sigma}_2 \ldots \widetilde{\sigma}_k$.

3. (a) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Mostrar que dos caminos con los mismos extremos son homotópicos.

(b) Sea X el *peine infinito*: $X = \big(\{0\} \cup \{1/n \ : n \in \mathbb{N}\}\big) \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$. Probar que X es contráctil.

4. Sean Y, $\widetilde{Y}$ espacios topológicos contráctiles e $y_0 \in Y$.

(a) Probar que $id : Y \longrightarrow Y$ es homotópica a $c : Y \longrightarrow Y$, $c(y) = y_0$ para todo $y \in Y$.

(b) Probar que Y es conexo por arcos.

(c) Probar que Y e $\widetilde{Y}$ son homotópicamente equivalentes.

5. Sean $p_0 \in S^n$, Y un espacio topológico y $f : S^n \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es homotópica a una constante.

(b) Existe $\widetilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow Y$ continua tal que $\widetilde{f}_{|S^n} = f$.

Sugerencia: $(a) \Rightarrow (b)$ Si $F(x,t)$ es la homotopía entre f y $c(x) = y_0$, entonces

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} y_0 & 0 \le \|x\| \le \frac{1}{2} \\ F(\frac{x}{\|x\|}, 2 - \|x\|) & \frac{1}{2} \le \|x\| \le 1, \end{cases} \qquad \text{extiende a } f.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Si $\widetilde{f}$ es una extensión de f entonces $F(x,t) = \widetilde{f}((1-t)x + tp_0)$ es una homotopía con una constante.

6. (a) ¿Es $S^2 \times S^3$ homeomorfo a $S^1 \times S^4$?

(b) Sea $n > 2$. Probar que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

7. (a) Sean e la identidad de un grupo topológico G y α, β curvas cerradas en G tales que $\alpha(0) = \alpha(1) = e = \beta(0) = \beta(1)$. Definimos $\alpha * \beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$ (producto en G). Probar que $\alpha * \beta \simeq \alpha.\beta$.

(b) Deducir que $\Pi_1(G, e)$ es abeliano.

Sugerencia: $F(t,s) = \alpha(t).\beta(ts)$ define una homotopía entre $\alpha.\beta$ y $\alpha * \beta$. Análogamente $G(t,s) = \alpha(ts)\beta(t)$ define una homotopía entre $\beta\alpha$ y $\alpha * \beta$.

8. Sea $A \subset X$ y sea $r : X \to A$ una retracción (es decir, $r(a) = a$ para cada $a \in A$). Dado $a_0 \in A$, probar que $r_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$ es suryectiva.

9. Sea X un espacio topológico N_2, regular, arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente arco-conexo. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es numerable, para cada $x_0 \in X$.
Sugerencia: Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento por abiertos arco-conexos A tales que $\iota_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ es trivial, para todo $a \in A$. Probar que existe un cubrimiento numerable $\mathcal{B}$ tal que para cada par de elementos $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \cap B' \neq \emptyset$, se tiene $B \cup B' \in \mathcal{A}$.
Para cada abierto $B \in \mathcal{B}$, elegimos un punto $x_B \in B$, y para cada par de abiertos $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \cap B' \neq \emptyset$, elegimos $\alpha_{B,B'}$ un camino en $B \cup B'$ de x_B a $x_{B'}$.
Probar que cada lazo en x_0 se escribe como un producto de caminos $\alpha_{B,B'}$, y deducir la numerabilidad del grupo fundamental a partir de este hecho.

10. Hallar el cubrimiento universal de $\mathbb{R}P^n$; a partir de dicho cubrimiento, calcular $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

11. Probar el *Teorema de Borsuk-Ulam*: Para toda función continua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

12. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento.
(a) Probar que, si X es conexo, entonces $p^{-1}(x)$ tiene el mismo cardinal para todo $x \in X$.
(b) Si $\widetilde{X}$ es compacto y Hausdorff, probar que $p^{-1}(x)$ es finito para todo $x \in X$.

13. Sean G un grupo topológico conexo y localmente arco-conexo, e su unidad, $m : G \times G \to G$ la multiplicación, $I : G \to G$ tal que $I(g) = g^{-1}$.
Sea $p : \widetilde{G} \to G$ un cubrimiento, donde $\widetilde{G}$ es conexo, y $\widetilde{e} \in p^{-1}(e)$. Probar que existe una única estructura de grupo topológico en $\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{e}$ es su unidad y p es morfismo de grupos. Para ello, probar las siguientes afirmaciones:
(a) Mostrar que existen funciones $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G}$ e $\widetilde{I} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, únicas tales que

$$\widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}, \qquad \widetilde{I}(\widetilde{e}) = \widetilde{e}, \qquad p \circ \widetilde{m} = m \circ (p \times p), \qquad p \circ \widetilde{I} = I \circ p.$$

(b) Probar que las funciones $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dadas por $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{g}, \widetilde{e})$ y $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{g})$ coinciden con la función identidad de $\widetilde{G}$ (utilizar la unicidad de levantamientos).
(c) Probar que las funciones $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dadas por $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{g}, \widetilde{I}(\widetilde{g}))$ y $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{I}(\widetilde{g}), \widetilde{g})$ coinciden con la función constante $\widetilde{e}$.
(d) Prueben que las siguientes funciones $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ coinciden:

$$(g, h, k) \mapsto \widetilde{m}(g, \widetilde{m}(h, k)), \qquad (g, h, k) \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{m}(g, h), k).$$

14. Sean G, $\widetilde{G}$ grupos topológicos, donde $\widetilde{G}$ es arco-conexo, y $p : \widetilde{G} \to G$ un cubrimiento, que es morfismo de grupos. Probar que existe un isomorfismo natural $p^{-1}(e) \sim \pi_1(G)/\pi_1(\widetilde{G})$, donde identificamos $\pi_1(\widetilde{G}) \simeq p_*(\pi_1(\widetilde{G}))$.