Repaso: ¿qué tán lejos está $\mathcal{O}_K$ de ser DFU $\Leftrightarrow$ DIP?

$$Cl(K) = \{\text{ideales no nulos}\}/\sim$$

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \text{ t.f. } \alpha\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{b}.$$

Teo: $Cl(K)$ es un grupo abeliano finito.

Demostrar que dado $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ no nulo, $\exists\, \alpha \in \mathfrak{a}$ con

$$|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \lambda \cdot N(\mathfrak{a})$$

(λ sólo depende de K.)

Luego, $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ no nulo, $\exists\, \mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}, |N(\mathfrak{b})| \leq \lambda$

Objetivo: optimizar λ.

Teo (Minkowski): Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ retículo, $E \subset \mathbb{R}^n$ cjto simétrico respecto a $\vec{0}$, convexo y medible t.f.

$$\mathrm{vol}(E) > 2^n \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/L)$$

Entonces E contiene un punto no nulo de L. Si E es compacto, podemos reemplazar $>$ por $\geq$.

Cor: E como antes, compacto, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.f.

$$f(tx) = t^n f(x) \quad \text{pe cumple } E \subset \{x : f(x) \leq 1\}$$

Entonces dado $L \subset \mathbb{R}^n$ retículo, existe $v \in L, v \neq 0$ t.f.

$$|f(X)| \leq \frac{2^r}{\text{vol}(E)} \cdot \text{vol}(\mathbb{R}^n/L)$$

Aplicación: K cuerpo de números, $K/\mathbb{Q}$ finito de grado d. $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \dots \sigma_d\} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r, \tau_1, \bar{\tau}_1, \dots \tau_s, \bar{\tau}_s\}$

$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) = \{\sigma_1, \dots \sigma_r\}$

Si $\tau : K \to \mathbb{C}$, y fija $\mathbb{Q}$, $\overline{\tau}(a) = \overline{\tau(a)}$ (conjugación compleja)

$\overline{\tau} \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$

Además, $\tau = \overline{\tau} \iff \text{Im}(\tau) \subset \mathbb{R}$

Obs: Si $K = \mathbb{Q}[X]/p(X)$ irreducible, $r = \#\{\text{raíces reales de } p(X)\}$

$2s = \#\{\text{raíces complejas}\}$

dar $\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$ basta definir $\tau(X) \in \{\text{cjto de raíces}\}$ ☺

Luego $d = r + 2s$ (mantendremos esta notación). Definimos

$$\psi : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$a \to (\sigma_1(a), \dots \sigma_r(a), \text{Re}(\tau_1(a)), \text{Im}(\tau_1(a)), \text{Re}(\tau_2(a)), \text{Im}(\tau_2(a)), \dots)$$

Con esta definición, ψ es un h.l. de $\mathbb{Q}$-e.v., con lo cual, $\psi(\mathcal{O}_K)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo de rango d. ¿Será un retículo? Sí (o sea si el generado sobre $\mathbb{R}$ por $\psi(\mathcal{O}_K) = \mathbb{R}^d$)

$\mathcal{O}_K = \langle v_1, \dots v_d \rangle_{\mathbb{Z}}$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) & \sigma_1(v_2) & \cdots & \tau_1(v_d) \\ \sigma_2(v_1) & \sigma_2(v_2) & & \\ \vdots & & & \\ \sigma_r(v_1) & & & \\ \operatorname{Re}(\tau_1(v_1)) & & & \\ \operatorname{Im}(\tau_1(v_1)) & & & \\ \vdots & & & \\ \operatorname{Im}(\tau_s(v_1)) & \operatorname{Im}(\tau_s(v_2)) & \cdots & \operatorname{Im}(\tau_s(v_d)) \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{r+1} - i\cdot F_{r+2}]{F_{r+1} + i\cdot F_{r+2}}$$

τ $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{(-2i)^s} \det \begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ \sigma_r(v_1) & & \\ \tau_1(v_1) & & \\ \overline{\tau}_1(v_1) & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{|\operatorname{disc}(O_K)|}}{(-2i)^s} \neq 0.$$

Además, $\operatorname{vol}(\tau(O_K)) = \operatorname{vol}(\text{dominio fund.}) = |\mathbb{R}^n / \tau(O_K)|$

$$= \left|\det\left(\quad\right)\right| = \frac{1}{2^s}\sqrt{|\operatorname{disc}(O_K)|}.$$

Si $\mathfrak{a} \subset O_K$, $\tau(\mathfrak{a}) \subset \tau(O_K)$ es un retículo, y

$$\operatorname{vol}(\tau(\mathfrak{a})) = \underbrace{|O_K/\mathfrak{a}|}_{N(\mathfrak{a})} \cdot \operatorname{vol}(\tau(O_K)) = \frac{N(\mathfrak{a})}{2^s}\cdot\sqrt{|\operatorname{Disc}(\mathfrak{a})|}$$

Teo: todo ideal $\mathfrak{a} \subset O_K$ no nulo, contiene $d \in \mathfrak{a}$, $d \neq 0$

con $$|N_m(d)| \leq \underbrace{\frac{d!}{d^d}\left(\frac{4}{\pi}\right)^s \cdot \sqrt{|\operatorname{disc}(O_K)|}}_{\lambda \text{ constante de Minkowski.}} N(\mathfrak{a})$$

Demo: $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_d) = x_1 \cdots x_r (x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2) \cdots (x_{d-1}^2 + x_d^2)$

Luego si $f \circ \gamma(d) = N_{K/\mathbb{Q}}(d)$, $f(t\vec{x}) = t^d f(\vec{x})$.

Sólo resta definir el conjunto E (y aplicar el Coro.)

$$E_{r,s} = \{\vec{x} : |x_1| + \cdots + |x_r| + 2(\sqrt{x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2} + \cdots + \sqrt{x_{d-1}^2 + x_d^2}) \leq d\}$$

$$\uparrow \sum |\sigma_i(x)|$$

- $E_{r,s}$ simétrico respecto a $\vec{0}$.
- $E_{r,s}$ convexo. (escribirlo)
- $E_{r,s}$ es compacto y medible.

Obs: $E_{r,s} \subseteq \{\vec{x} : f(\vec{x}) \leq 1\}$.

Dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$, promedio $\rightsquigarrow$ $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ ← aritmético

$\hookrightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ ← geométrico

Desigualdad geométrica-aritmética: $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$

La aplicamos a: $(|x_1|, \ldots, |x_r|, 2\sqrt{x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2}, \ldots, 2\sqrt{x_{d-1}^2 + x_d^2})$

- Media geométrica: $(f(\vec{x}))^{1/d}$
- Media aritmética: $|x_1| + \cdots + |x_r| + 2(\sqrt{x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2} + \cdots) \leq d$

Estamos en las hipótesis del corolario. Falta calcular $\mathrm{Vol}(E_{r,s}(d)) = ?$

$$E_{r,s}(d) = \{\vec{x} : |x_1| + \cdots \leq d\} \quad d \in \mathbb{R}_{>0}.$$

$\vec{x} \to \frac{\vec{x}}{d}$, $E_{r,s}(d) \longrightarrow E_{r,s}(1)$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Vol}(E_{r,1}(d)) = \underbrace{\mathrm{Vol}(E_{r,1}(1))}\cdot d^d$$

Suponhamos $r \geq 1$,

$$\mathrm{Vol}(E_{r,1}(1)) = \int_{-1}^{1} \mathrm{Vol}(E_{r-1,1}(1-|x|))\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-|x|)^{d-1}\,\mathrm{Vol}(E_{r-1,1}(1))\,dx$$

$$= 2\,\mathrm{Vol}(E_{r-1,1}(1)) \cdot \int_0^1 (1-x)^{d-1}\,dx = \frac{2}{d}\,\mathrm{Vol}(E_{r-1,1}(1))$$

$$\int_0^1 (1-x)^{d-1}\,dx = -\frac{(1-x)^d}{d}\Big|_0^1 = \frac{1}{d}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Vol}(E_{r,1}(1)) = \frac{2^r}{d(d-1)\cdots(d-r+1)}\,\mathrm{Vol}(E_{0,1}(1))$$

$$\frac{2^r}{(2s+1)!!} \qquad \frac{1}{2} - r = \frac{1-2r}{2}$$

$$\mathrm{Vol}(E_{0,1}(1)) = \mathrm{Vol}\left(\left\{(x_1,\dots,x_{2s}) : \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\cdots+\sqrt{x_{2s-1}^2+x_{2s}^2} \leq 1/2\right\}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} r\,\mathrm{Vol}(E_{0,s-1}(1-2r))\,dr\,d\theta =$$

$$= \mathrm{Vol}(E_{0,s-1}(1)) \int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^{1/2} r\cdot(1-2r)^{2s-2}\,dr}\,d\theta \quad (*)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{1/2}(1-2r)^{2s-1}\,dr + \frac{1}{2}\int_0^{1/2}(1-2r)^{2s-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{(1-2r)^{2s}}{2s(-2)}\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-2r)(1-2r)^{2s-1}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{(1-2r)^{2s-1}}{(2s-1)(-2)}\Big|_0^{1/2} = \frac{-1}{(2s)4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2s-1)2} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2s}+\frac{1}{2s-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2s - (2s-1)}{2s(2s-1)} \right) = \frac{1}{4(2s)(2s-1)}$$

(*) $\mathrm{Vol}(E_{0,s-1}(1))\, 2 \left(\frac{\pi}{4}\right)^s \frac{1}{(2s)(2s-1)}$.

$\rightsquigarrow = \underbrace{\mathrm{Vol}(E_{0,0}(1))}_{\text{"1 (abuso de notación, pues } \mathrm{Vol}(E_{0,1}(1)) \text{ es la integral)."}} 2^s \left(\frac{\pi}{4}\right)^s \frac{1}{(2s)!}$

$\rightsquigarrow \mathrm{Vol}(E_{r,s}(1)) = \frac{2^{r+s}}{d!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^s$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Vol}(E_{r,s}(d)) = \frac{d^d}{d!} 2^r \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^s}$

Metiéndolo en el corolario, $\exists\, d \in \mathcal{Q}$, $d \neq 0$ t.q.

$$|N_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}(d)| = |f(d)| \leq \frac{2^d}{\mathrm{Vol}(E)} \cdot \mathrm{Vol}(\mathcal{T}(\mathcal{Q})) = \frac{2^d}{2^{r+s}} \frac{d!}{d^d} \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \cdot \frac{N(\mathcal{Q})}{2^s} \sqrt{|\mathrm{disc}(\mathcal{Q}_K)|} = \underbrace{\frac{d!}{d^d} \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \sqrt{|D_K|}\, N(\mathcal{Q})}_{\lambda}$$

Obs: la cuenta anterior muestra que toda clase de ideales contiene un elemento cuya norma está acotada por λ. Por otro lado, $\|\mathcal{Q}\| \geq 1$

$$1 \leq \|\mathcal{Q}\| \leq \lambda \rightsquigarrow \sqrt{|\mathrm{disc}(\mathcal{Q}_K)|} \geq \frac{d^d}{d!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^s \geq \frac{2^{d-1}}{2^{2s}} \cdot \pi > 1$$

Ejercicio: $\frac{d^d}{d!} \geq 2^{d-1}$ $\forall d \in \mathbb{N}$.

Luego $|\mathrm{disc}(\mathcal{O}_K)| > 1 \Rightarrow \exists\, p$ primo t.q. $p \mid \mathrm{disc}(\mathcal{O}_K)$

o sea: ¡toda extensión $K/\mathbb{Q}$ ramifica en al menos un primo!

Ejemplos: (1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}[i]$, $|\mathrm{disc}(K)| = 4$

$$\lambda = \frac{2!}{4}\left(\frac{4}{\pi}\right)^1 \cdot 2 = \frac{4}{\pi} < 2 \Rightarrow Cl(K) = \{\mathcal{O}_K\}$$

$h_K = \#Cl(\mathcal{O}_K) = 1$.

(2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $|\mathrm{disc}(\mathcal{O}_K)| = 8$,

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \cdot 2\sqrt{2} \approx 1{,}8 < 2 \Rightarrow h_K = 1.$$

(3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $|\mathrm{disc}(K)| = 3 \rightsquigarrow h_K = 1$.

(4) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ $|\mathrm{disc}(\mathcal{O}_K)| = 20$, $\lambda = \frac{2}{\pi} \cdot 2\sqrt{5} \approx 2{,}84 < 3$

$\rightsquigarrow$ basta mirar ideales de norma 1 y 2.

$Cl(\mathcal{O}_K) \simeq \mathbb{Z}/2$

$$2 \cdot \mathcal{O}_K = \underbrace{\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle^2}_{\text{norma}=2} \Rightarrow h_K = 2.$$

, no es principal.

(5) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ $|\mathrm{disc}(K)| = 5$

$$\lambda = \frac{2!}{4}\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathcal{O}_K)|} = \frac{\sqrt{5}}{2} < 2 \Rightarrow h_K = 1.$$

(6) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $|\mathrm{disc}(K)| = 12$, $\lambda = \sqrt{3} < 2 \rightsquigarrow h_K = 1$.

⑦ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$, $|disc(K)| = 60$, $\lambda = \sqrt{15} \approx 3.8 < 4$

$\mathfrak{a}$ / $N(\mathfrak{a}) \in \{1, 2, 3\}$ ($\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$)

$2\mathcal{O}_K = \langle 2, 1+\sqrt{15} \rangle^2$ (no es principal), P_2

$3.\mathcal{O}_K = \langle 3, \sqrt{15} \rangle^2$, P_3 $\rightsquigarrow$ $h_K \leq 3$

$Nm(-3+\sqrt{15}) = 9 - 15 = -6 = N(P_2.P_3)$

$\Rightarrow$ $(-3+\sqrt{15}) = P_2.P_3$ $\Rightarrow$ $[P_2] = [P_3]^{-1} = [P_3]$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}\ell(\mathcal{O}_K) = \mathbb{Z}/2$, $h_K = 2$.

⑧ $K = \mathbb{Q}(\xi_5)$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\xi_5]$, $disc(\mathcal{O}_K) = 5^3$

$r = 0$, $s = 2$ $\rightsquigarrow$ $\lambda = \frac{4!}{4^4}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sqrt{5^3} \approx 1.69$, $q_K = 1$.