Repaso: valores absolutos de $\mathbb{Q}$.

Def: un v.a. $|\ |: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

Ejemplos: (1) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (el módulo)

(2) Si p primo, $v_p(a)$ = exponente de p en la factorización de a. $\quad a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$v_p(a) = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p^n \mid a\}.$$

$$v_p: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \mathbb{Z}$$

$\downarrow$ extender

$$v_p: \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z} \qquad v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b).$$

Satisface:
- $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$
- $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$
  Además, vale $=$ si son distintos.

$$\rightsquigarrow \quad |x|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(x)} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Lema: $|x|_p$ es un valor absoluto, que cumple (ultrametrica):

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}. \ (\Rightarrow \text{des. triangular})$$

A partir de $\mathbb{Q}$ → completar con $|\ |\rightsquigarrow \mathbb{R}$ ($\{\text{sucesiones de Cauchy}\}/\sim$)

$\{a_n\}\sim\{b_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$

→ completar con $|\ |_p$

↪ $\mathbb{Q}_p$ = cuerpo de números p-ádicos.

Obs: - $\{p^n\} \xrightarrow{|\ |_p} 0 \qquad |p^n|_p = \frac{1}{p^n}$

- $\{1/p^n\}$ no está acotado $|1/p^n|_p = p^n$.

- $\mathbb{Z} \subset \{x\in\mathbb{Q} : |x|_p \le 1\}$ ⇒ acotados.

↑ bola cerrada de radio 1.

Definición: los enteros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p = \{x\in\mathbb{Q}_p : |x|_p \le 1\}$.

Obs: ① Si $\alpha\in\mathbb{Q}_p$, $|\alpha|_p \in \{0\}\cup p^{\mathbb{Z}}$, luego, $\exists N\in\mathbb{N}$

t.f. $p^N\cdot\alpha \in \mathbb{Z}_p$, pues $|p^N\alpha|_p = |p^N|_p\cdot|\alpha|_p \le 1$

$\frac{1}{p^N}\to 0$

(más aún, $|p^N\alpha|_p = 1$, si queremos).

⇒ $\boxed{\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p^{-n}\cdot\mathbb{Z}_p}$. En particular, $\mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p)$.

② $\mathbb{Z}_p$ es un anillo.

- Si $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_p$. $|\alpha|_p\le 1$, $|\beta|_p\le 1 \Rightarrow |\alpha+\beta|_p \le \max\{|\alpha|_p,|\beta|_p\}\le 1$
- Si $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_p$, $|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p|\beta|_p \le 1$ ✓
- $0, 1\in\mathbb{Z}_p$.

③ $\mathbb{Z}_p^\times = \{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p = 1 \}$ ($|a|_p \leq 1$ y $|\frac{1}{a}|_p \leq 1$)

$p\mathbb{Z}_p = \mathcal{P} = \{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p < 1 \}$ ← ideal primo y es el único ideal maximal $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_p$ es un anillo local.

si $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \in \mathbb{Q}$, $|a|_p < 1 \Rightarrow a \in \mathcal{P}$ (sino a es una unidad).

Prop: $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \to \infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Definición: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ anillos, dados $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$

$f_{m,n} : A_m \to A_n$ morfismo de anillos, compatibles

si $m \geq n \geq t$

$$A_m \xrightarrow{f_{m,n}} A_n \xrightarrow{f_{n,t}} A_t, \qquad f_{m,t}$$

$\Rightarrow \exists!$ A anillo y $f_n : A \to A_n$ morfismos de anillos "$\varprojlim A_n$" que cumple la siguiente propiedad universal:

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & g_n \swarrow & \downarrow g_{n-1} & & \\ A_n & \to & A_{n-1} & \to \cdots & \\ & f_{n,n-1} & & & \end{array}$$

dado $(B, \{g_n\})$, $g_n : B \to A_n$ compatibles con los $\{f_{m,n}\}$

$\Rightarrow \exists!$ morfismo de anillos $\psi : B \to A$ que hace todo compatible.

En nuestro caso: $\overline{a} \to \overline{a}$

$$\cdots \to \mathbb{Z}/p^3 \to \mathbb{Z}/p^2 \to \mathbb{Z}/p$$

$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{Z} : a_n \equiv a_m \ (p^n) \text{ si } m \geq n\}$

$\mathbb{Z}_p$ "completar $\mathbb{Z}$."

$\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{Z}$ de Cauchy.

Otros ejemplos: $\mathbb{Q}[x]$, $\langle x \rangle$ = primo.

$$\varprojlim \mathbb{Q}[x]/\langle x^n \rangle \cong \mathbb{Q}[[x]]$$

$\hat{}$ series de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{Q}$.

Cono: Esto nos permite dar una descripción de $\mathbb{Z}_p$ cómo conjunto:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n p^n : 0 \leq a_n < p \right\}$$

Obs: $\mathbb{Z}_p^\times = \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$

$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/p^n : p \nmid a\}$

$(\ldots, a_2, a_1) \cdot (\ldots, b_2, b_1) = (\ldots, 1, 1)$

Si $a_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $a_m \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $a_n \equiv a_m \ (p^n)$ ($m \geq n$)

$$\Rightarrow \boxed{a_n^{-1} \equiv a_m^{-1} \ (p^n)}$$

Ejercicio (alumno curioso): $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}/p-1 \times \mathbb{Z}_p$

D/(cono): $\{a_n\}_n \subset \mathbb{Z}$ de Cauchy,

$$|a_n - a_m|_p \leq 1/p \text{ si } n, m \geq N_0.$$

$$\Rightarrow a_n \equiv a_m \ (p) \text{ si } n, m \geq N_0.$$

b_0 = un rep. de la clase, $b_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ (resto)

Dado $1/p^2$, $\exists\, b_1$ t.q. $a_n \equiv b_0 + b_1 \cdot p \ (p^2)$ si $n \geq N_1$.

con $b_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ ...

equivalentes.

$\{a_n\} \sim \{b_0, (b_0 + pb_1), (b_0 + pb_1 + p^2 b_2), \dots\}$ $\in \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0$ / $1/p^{N_0} < \varepsilon$, $a_n \equiv \sum_{i=0}^{N_0} b_i p^i \ (p^{N_0+1})$ si $n \geq N_1$

$\Rightarrow \left| a_n - \sum b_i p^i \right| < 1/p^{N_0} < \varepsilon$

Formalmente, lo escribimos $\sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$.

Obs: • $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p^{-n} \mathbb{Z}_p \Rightarrow \mathbb{Q}_p = \{ \sum_{i=-n_0}^{\infty} b_i p^i, \ n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$

• $\mathbb{Z}_p^{\times} = \{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i : b_0 \neq 0 \}$. (pensar como construir el inverso).

Prop: $\mathbb{Z}_p$ es compacto.

D/ Como $\mathbb{Q}_p$ es un espacio métrico, compacto $\Leftrightarrow$ cerrado y totalmente acotado.

↳ $\forall \varepsilon > 0$, el espacio se cubre con finitas bolas de radio ε.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0$ / $\frac{1}{p^{N_0}} < \varepsilon$, luego basta mirar bolas de

radio $1/p^{N_0} \hookrightarrow v_p(a-b) \geq N_0 \hookrightarrow a \equiv b \,(p^{N_0})$

$\mathbb{Z}/p^{N_0}$ es finito, $\{b_1, \dots, b_{p^{N_0}}\}$ representantes en $\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=1}^{p^{N_0}} B(b_i, 1/p^{N_0}).$$

$\to \mathbb{Z}/p^3 \to \mathbb{Z}/p^2 \to \mathbb{Z}/p$ — a_1 — p-puntos

$a \in \mathbb{Z}_p$: $\bar{a} = a_i$ en $\mathbb{Z}/p$ (π)

$|a - a_i|_p \leq 1/p$

Dado $a \in \mathbb{Z}_p$, $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $a_i \in \mathbb{Z}/p^i$, $a_n \equiv a_m \,(p^n)$ si $m > n$

$\Rightarrow a_{N_0} \equiv b_i \,(p^{N_0})$

$\hat{}$ son representantes de $\mathbb{Z}/p^{N_0}$.

$\Rightarrow a_n \equiv b_i \,(p^n) \quad \forall \; 1 \leq n \leq N_0$ por $\in \mathbb{Z}_p$

$\Rightarrow p^{N_0} \mid (a - b_i)$, o sea $(a - b_i) = p^{N_0} \cdot \beta$

$\Rightarrow |a - b_i|_p = |p^{N_0}|_p \cdot |\beta|_p \leq 1/p^{N_0} < \varepsilon.$

$\Rightarrow a \in B(b_i, p^{-N_0})$ ☑

Obs: usamos varias veces $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$

$a \to \{a\}_{n \in \mathbb{N}}$ (sucesión constante).

Lema de Hensel: dado $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ y $a \in \mathbb{Z}_p$ t.q.

1. $f(a) \equiv 0 \,(p)$

2. $f'(\alpha) \not\equiv 0 \ (p)$ $\qquad \beta = (a_i)_i, \ a_1 = \alpha.$

Entonces $\exists! \ \beta \in \mathbb{Z}_p$ t.q. $f(\beta) = 0$ y $\beta \equiv \alpha \ (p)$.

Demo: basta construir $\beta_i \in \mathbb{Z}/p^i$ t.q. 1. $f(\beta_i) \equiv 0 \ (p^i)$

y 2. $\beta_{i+1} \equiv \beta_i \ (p^i)$. $\forall i \in \mathbb{N}$.

Construimos β_i inductivamente:

- $\beta_1 = \alpha$.
- supongamos construido $\beta_i \to \beta_{i+1}$.

Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$

$\beta_{i+1} = \beta_i + p^i \cdot t$, ¿ $t = ?$

2 vale.

1. $f(\beta_{i+1}) = f(\beta_i) + f'(\beta_i) p^i \cdot t + \underbrace{f''(\beta_i) p^{2i} t^2 + \cdots}_{\text{"}0\text{" } (p^{i+1})}$

$0 \equiv f(\beta_{i+1}) \equiv f(\beta_i) + f'(\beta_i) p^i \cdot t \quad (p^{i+1})$

$\Rightarrow$ tomo $t = \dfrac{-f(\beta_i)}{p^i \cdot f'(\beta_i)} \ (p)$ única que hace que valga 1. ☐

Ejemplo: $\exists \alpha \in \mathbb{Z}_5$ t.q. $\alpha^2 = -1$.

Pues $\underbrace{x^2 + 1}_{f(x)} \equiv (x+2)(x-2) \ (5)$

$\rightsquigarrow$ $d=2$ raíz de $f(x)$ módulo 5 y $f'(2)=4 \not\equiv 0 \ (5)$

$\Rightarrow$ Hensel, $\exists\, \beta \in \mathbb{Z}_5$, $\beta \equiv 2 \ (5)$, $f(\beta)=\beta^2+1=0$.

Comentario: la hipótesis $f'(d) \not\equiv 0 \ (p)$ se puede relajar, si comenzamos con una solución módulo p^r, r grande.

$|\,|_1, |\,|_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

Def: dos valores absolutos se dicen equivalentes si

$\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}$ t.q. $|\,|_1 = |\,|_2^c$

Obs: 1. esto es una relación de equivalencia.

2. Al definir un v.a., pedimos que valga la desigualdad triangular ($|x+y| \leq |x| + |y|$). Para pasar a equivalencias debemos reformular esta definición, por:

(iii)' $|1+x| \leq C \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$ con $|x| \leq 1$.

(desigualdad triangular $\hookrightarrow$ $c=2$).

Teo (Ostrowski): todo valor absoluto de $\mathbb{Q}$ no trivial es equivalente a:
- $|\,|$ usual (del módulo)
- $|\,|_p$, p primo.

Def: el valor absoluto trivial es $|x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$

Obs: si dos valores absolutos son equivalentes, las topologías inducidas coinciden.

Lema: el valor absoluto usual y los v.a. $|\,|_p$ son todos no equivalentes.

D/ Usual vs p-ádico: $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}_p$ es acotado ($B_{\leq}(0,1)$)

pero con $|\,|$ no lo es. (Si $|q : p| = 1$, $|q| = q$, $|q|_p = 1$)

$|\,|_p$ vs $|\,|_q$: $|q|_p = 1$, $|q|_q = \frac{1}{q}$. ($p^N \xrightarrow{|\,|_p} 0$, $\downarrow |\,|_q$ son unidades)

Def: un valor absoluto se dice noArquimedeano si cumple

$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Un valor absoluto se dice Arquimedeano si no es no-Arquimedeano.