Repaso: definimos una relación de equivalencia entre valores absolutos, $|\ |_1 \sim |\ |_2$ si $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$ t.q. $|\ |_1 = |\ |_2^c$.

Obs: cuidado con desigualdad triangular.

Obs?: $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ cuerpo, todas las cuentas valen.

Teo (Ostrowski): si $|\ |$ es un v.a. no trivial en $\mathbb{Q}$

entonces $|\ | \sim \cdot |\ |_p$ algún p primo

$\cdot |\ |_\infty$ usual

Vimos: estos son no-equivalentes

Def: $|\ |$ se dice no-arquimedeano si $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

$|\ |$ se dice arquimedeano si no es no-arquimedeano.

Lema: $|\ |$ es no-arquimedeano $\Rightarrow |n| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

D/ $\Rightarrow$) Inducción: $|1 + \overbrace{\cdots + 1}^{1}| \leq \max\{|1|, \overbrace{|1 + \cdots + 1|}^{\leq 1 \text{ H.I.}}\}$

basta ver $\Leftarrow$

$\Leftarrow$) Si $x \in \mathbb{Q}$ / $|x| \leq 1$, p.v.q. $|1+x| \leq 1$.

$x, y \in \mathbb{Q}$, $|x| = \max\{|x|, |y|\}$, $|x+y| = |x| \cdot |1 + \frac{y}{x}| \leq |x|$ ($|\ | \leq 1$)

Supongamos $|x| \leq 1$. $|(1+x)^n| = |(1+x)^n| = |\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i| \leq$

$|x|\le 1 \Rightarrow |x|^i \le 1$, por hip. $\left|\binom{n}{i}\right| \le 1$

$$\le \sum_{i=0}^{n} \left|\binom{n}{i}\right| |x|^i \le n+1.$$

$$\Rightarrow |1+x| = \sqrt[n]{|(1+x)^n|} \le \sqrt[n]{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \square$$

Demo (Ostrowski): Sea $|\ |$ un v.a. no trivial.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$. Podemos escribir m en base n, es decir, $m = a_0 + a_1 n + \cdots + a_r n^r$, $0 \le a_i < n$, $n > 1$.

$$r \le \log_n m = \frac{\ln(m)}{\ln(n)}$$

$$|a_i| = |1 + \cdots + 1| \le a_i |1| = a_i < n.$$

Sea $N = \max\{1, |n|\}$

$$|m| \le \sum_{i=0}^{r} |a_i| \cdot |n|^i \le \sum_{i=0}^{r} a_i N^r \le (1+r) n \cdot N^r$$

$$\le \left(1 + \frac{\ln(m)}{\ln(n)}\right) \cdot n \cdot N^{\frac{\ln(m)}{\ln(n)}}$$

Como en la demo anterior, $m \rightsquigarrow m^k$, $\sqrt[k]{|m^k|}$

$$|m| = |m^k|^{1/k} \le \left(1 + k\frac{\ln(m)}{\ln(n)}\right)^{1/k} \cdot n^{1/k} \cdot N^{\frac{\ln(m)}{\ln(n)}}$$

$k \to \infty$ (el primer factor $\to 1$, el segundo $\to 1$)

$$\lim_{k\to\infty} (1 + k \cdot a)^{1/k} \rightsquigarrow \log: \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+ka)}{k} \overset{L'H.}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{1+k\alpha}}{1} = 0 \Rightarrow e^0 = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{|m| \leq N^{\frac{\ln(m)}{\ln(n)}}}$$

1º caso: Si $|n| > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_{>1}$, $N = |n| \Rightarrow$

$$|m| \leq |n|^{\frac{\ln(m)}{\ln(n)}} \Rightarrow |m|^{\frac{1}{\ln(m)}} \leq |n|^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

Por simetría, cambiando m y n $|m| = |n|^{\frac{\ln(m)}{\ln(n)}}$

Fijado n id $\boxed{|n|_\infty = |n|^\rho}$, $|m|_\infty = |n|_\infty$

usual

$$m = n^d, \quad |n(m) = d\,|n(n) \Rightarrow d = \frac{|n(m)}{|n(n)}$$

$$\Rightarrow \boxed{|m|_\infty = |n|_\infty^{\frac{|n(m)}{|n(n)}} = |n|^{\rho \cdot \frac{|n(m)}{|n(n)}}} =$$

$$= \left(|n|^{\frac{|n(m)}{|n(n)}}\right)^\rho = \boxed{|m|^\rho} \quad \forall m \in \mathbb{N}_{>1}$$

$$\Rightarrow |\ |_\sim |\ |_\infty .$$

2º caso: $\exists\, n \in \mathbb{N}_{>1}$ t.f. $|n| \leq 1$.

$N = 1 \Rightarrow |m| \leq 1 \ \forall m \in \mathbb{Z}$, o sea $|\ |$ es no-

arquimediano. (Lema).

Sean: $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq 1\}$ anillo.

$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{O} : |x| < 1\}$ ← ideal de $\mathcal{O}$

$\mathcal{O}^\times = \{x \in \mathcal{O} : |x| = 1\}$ ← unidades de $\mathcal{O}$

$\mathcal{P} \neq \{0\}$, pues $|\ |$ es no-trivial.

$\mathcal{O}$ es un anillo local, pues si $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}$ propio,

$\exists\ x \in \mathfrak{f}$, $x \neq 0$, $|x| < 1$ (sino es una unidad)

$\Rightarrow x \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathfrak{f} \subset \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ único ideal maximal de $\mathcal{O}$.

$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ideal $(\mathbb{Z} \subset \mathcal{O})$, $\mathcal{P}$ maximal $\Rightarrow$ primo $\Rightarrow$

$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}$ primo y no nulo $\Rightarrow \mathcal{P} \cap \mathbb{Z} = (p)$, p primo.

Luego, si $n \in \mathbb{Z}$, $p \nmid n$, $|n| = 1$ $(p \mid n,\ n \notin \mathcal{P})$

$|p| = c < 1 \Rightarrow |p| = \left(\frac{1}{p}\right)^{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, $|\ | = |\ |_p^{\gamma}$

si $m \in \mathbb{Z}$, $m = n \cdot p^r$, $p \nmid n$

$$|m| = |n \cdot p^r| = |n| \cdot |p|^r = |p|^r = |p|_p^{\gamma \cdot r} = |p^r|_p^{\gamma} = |n \cdot p^r|_p^{\gamma}$$

$$|m|_p^{\gamma}$$

$\Rightarrow |\ | \sim |\ |_p$ ∎

La normalización elegida es tal que vale la llamada

fórmula del producto: si $x \in \mathbb{Q}$,

$$\prod_{p \text{ primo}} |x|_p \cdot |x|_\infty = 1$$

Demo: como todos es multiplicativo, basta verificarlo para

- -1 ✓
- q primo. $\quad |q|_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq q \\ 1/q & \text{si } p = q \end{cases}$

$$|q|_\infty = q$$

$$\Rightarrow \prod_p |q|_p \cdot |q|_\infty = \frac{1}{q} \cdot q = 1.$$

Prop: dados $|\ |_1$ y $|\ |_2$ v.a., $|\ |_1$ no trivial, son equivalentes:

(i) $|\ |_1$ y $|\ |_2$ inducen la misma topología.
(ii) $|x|_1 < 1 \Rightarrow |x|_2 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.
(iii) $|\ |_1$ y $|\ |_2$ son equivalentes.

Demo: (i) $\Rightarrow$ (iii) $\quad \{x \in \mathbb{Q} : |x|_1 < 1\} = \{x \in \mathbb{Q} : x^n \xrightarrow{|\ |_1} 0\}$

$a_n = x^n$ sucesión.

$|x^n|_1 = |x|_1^n \to 0 \iff |x|_1 < 1$.

Si ambas topologías coinciden, $x^n \xrightarrow{|\ |_2} 0 \iff$

$|x|_2 < 1$ ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $|\ |$ es no trivial, $\exists\, y \in \mathbb{C}$: $|y|_1 > 1$.

Sea $a = \dfrac{\ln |y|_2}{\ln |y|_1}$ $\quad \left(\left|\frac{1}{y}\right|_1 < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{y}\right|_2 < 1 \Rightarrow |y|_2 > 1 \right)$

Luego $\boxed{|y|_2 = |y|_1^a}$. Si $x \in \mathbb{C}^\times$, $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q.

$|x|_1 = |y|_1^b$ $\quad$ (c^x biyectiva si $c \neq 1$)

Basta ver que $\boxed{|x|_2 = |y|_2^b}$, luego $|x|_2 = |y|_2^b = |y|_1^{ab}$

$\|x\|_1^a$

Sea $m/n \in \mathbb{Q}$ mayor que b. Luego, $|x|_1 = |y|_1^b < |y|_1^{m/n}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{x^n}{y^m}\right|_1 < 1 \overset{\text{hip.}}{\Rightarrow} \left|\dfrac{x^n}{y^m}\right|_2 < 1 \Rightarrow |x|_2 < |y|_2^{m/n}$

$\forall\, m/n$ mayor que $b \Rightarrow |x|_2 \leq |y|_2^b$

Haciendo una cuenta similar con $m/n \in \mathbb{Q}$ menor que b

obtenemos $|x|_2 \geq |y|_2^b \Rightarrow |x|_2 = |y|_2^b$ y $|\ |_2 = |\ |_1^a$

$\Rightarrow$ son equivalentes.

(iii) $\Rightarrow$ (i) es claro.

Caso general

Sea $K/\mathbb{Q}$ finita (cuerpo de números), la teoría funda-

no igual. Valores absolutos:

- Si $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ideal primo, $v_{\mathfrak{p}} : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$
$\alpha \longrightarrow v_{\mathfrak{p}}((\alpha))$
↑
ideal fraccionario.

Definimos el valor absoluto asociado a $\mathfrak{p}$ cómo:

$$|\alpha|_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(\alpha)} = \left(1/N(\mathfrak{p})\right)^{v_{\mathfrak{p}}(\alpha)}$$

Es un v.a. no-arquimedeano.

- Para los v.a. arquimedeanos, recordemos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) = \{\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+1}}, \dots, \overline{\sigma_{r+s}}\}$$
con imagen no en $\mathbb{R}$

$[K : \mathbb{Q}] = r + 2s$. Definimos:

$$|\alpha|_\sigma = \begin{cases} |\sigma(\alpha)|_\infty & \text{si } \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) \\ |\sigma(\alpha)|_{\mathbb{C}}^2 & \text{si } \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) \text{ con imagen no en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hay $r+s$ v.a. arquimedeanos.

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$ $\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$

$$|a + bx|_{\sigma_1} = |a + b\sqrt{3}|, \quad a, b \in \mathbb{Q}, \quad \sigma_1(a + bx) = a + b\sqrt{3}$$

$|a+bx|_{\sigma_2} = |a-b\sqrt{3}|$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $\sigma_2(a+bx) = a-b\sqrt{3}$

Por ejemplo, $|1+x|_{\sigma_1} = |1+\sqrt{3}| > 2$
$|1+x|_{\sigma_2} = |1-\sqrt{3}| < 1$
; son distintos.

Teo (Ostrowski): si $|\ |$ es un v.a. no trivial en $K \Rightarrow$ es equivalente a uno de los definidos arriba (y a uno sólo).

Dado un v.a. en K, podemos completar con respecto a él. ¿Cómo se ve la completación?

- Si P es primo, K_P = completación con respecto a $|\ |_P$, K_P es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, pues $\mathbb{Q} \subset K$, $K = \mathbb{Q}[x]/p(x)$, $[K:\mathbb{Q}] < \infty$. Si restringimos $|\ |_P$ a $\mathbb{Q}$, da un v.a. no-arquimediano en $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $|\ |_P \sim |\ |_p$, p primo (ejercicio: $(p) = P \cap \mathbb{Z}$).

Al completar K con $|\ |_P$, contiene la completación de $\mathbb{Q}$ con $|\ |_p$. Además, $K_P \subset \mathbb{Q}_p[\bar{x}]$, y $[\mathbb{Q}_p[\bar{x}]:\mathbb{Q}_p]$ finita.

Más aún, $[K_{\mathfrak{P}}:\mathbb{Q}_p] = e(\mathfrak{P}|p)\cdot f(\mathfrak{P}|p)$; si $K/\mathbb{Q}$ es Galois, $K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p$ es Galois, y $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p) \simeq D(\mathfrak{P}|p)$.

Vimos: $|D(\mathfrak{P}|p)| = e(\mathfrak{P}|p)\, f(\mathfrak{P}|p)$.

D/ $K_{\mathfrak{P}}$ es una completación de $K \Rightarrow K$ es denso en $K_{\mathfrak{P}}$. Si $\sigma : K \to K$, lo queremos extender a $K_{\mathfrak{P}}$, necesitamos que sea "continuo" (con respecto a la métrica). En particular, $x \in K$, $|x|_{\mathfrak{P}} < 1 \iff x \in \mathfrak{P}$

$$x^n \xrightarrow{|\,|_{\mathfrak{P}}} 0 \Rightarrow \sigma(x^n) \xrightarrow{|\,|_{\mathfrak{P}}} 0 \iff |\sigma(x)|_{\mathfrak{P}} < 1 \iff \sigma(x) \in \mathfrak{P}$$

$\Rightarrow \sigma(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P} \Rightarrow \sigma \in D(\mathfrak{P}|p)$.

Luego, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p)$, $\sigma|_K \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$

y $\sigma(\mathfrak{P}|\subset \mathfrak{P} \Rightarrow \sigma|_K \in D(\mathfrak{P}|p)$. $\left(\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p) \to D(\mathfrak{P}|p),\ \sigma \to \sigma|_K\right)$ morfismo de grupos.

(ejercicio: ver que $\sigma(K) \subset K$).

Recíprocamente, dado $\sigma \in D(\mathfrak{P}|p)$, $|\sigma(x)|_{\mathfrak{P}} = |x|_{\mathfrak{P}}$

(σ biyectiva) pues $\underset{x \in K^\times}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}}(\sigma(x)) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(x)$

$$x = \prod_{\mathfrak{q}} \mathfrak{q}^{a_{\mathfrak{q}}}, \quad \sigma(x) = \prod_{\mathfrak{q}} \sigma(\mathfrak{q})^{a_{\mathfrak{q}}}$$

$a_{\mathfrak{P}} = v_{\mathfrak{P}}(x)$, $\sigma(\mathfrak{P}|=\mathfrak{P}$ en la factorización de $\sigma(x)$, el exp. de $\mathfrak{P}$ no cambia.

Luego σ es continua para $|\ |_{\mathfrak{P}} \Rightarrow$ lo podemos extender (de forma continua) a $K_{\mathfrak{P}}$. Como σ fija $\mathbb{Q}$, $\tilde{\sigma}$ fija $\mathbb{Q}_p \Rightarrow \tilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p)$. ∎