Repaso: $K/\mathbb{Q}$ finita, queremos entender los v.a. de K.

- (no-arquimedeanos): $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$ primo, $v_{\mathfrak{P}}: K^\times \to \mathbb{Z}$

$\alpha \in K$, (α) ideal fraccionario, $(\alpha) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(\alpha)}$

$$|\alpha|_{\mathfrak{P}} = (N\mathfrak{P})^{-v_{\mathfrak{P}}(\alpha)}$$

- (Arquimedeanos): $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) \setminus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R})$$

$$\| \quad \{\tau_1, \dots, \tau_s, \bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_s\}$$

$[K:\mathbb{Q}] = r + 2s$. · Dado σ, $|\alpha|_\sigma = |\sigma(\alpha)|_{\mathbb{R}}$

· Dado τ, $|\alpha|_\tau = |\tau(\alpha)|_{\mathbb{C}}^2$

Con cada uno de estos v.a. podemos completar al cuerpo K.

- si $\mathfrak{P}$ primo, $K_{\mathfrak{P}}$ = completación respecto a $|\ |_{\mathfrak{P}}$

entonces $K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p$ finita de grado $e(\mathfrak{P}|p) \cdot f(\mathfrak{P}|p)$, más aún, si $K/\mathbb{Q}$ es Galois, $K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p$ lo es y $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p)$ $\cong$ $D(\mathfrak{P}|p)$

(el isomorfismo $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}|\mathbb{Q}_p) \to D(\mathfrak{P}|p)$)
$\sigma \longrightarrow \sigma|_K$

$$\begin{array}{ccc} K & \overset{\text{denso}}{\hookrightarrow} & K_{\mathfrak{P}} \\ | & & | \\ \mathbb{Q} & \hookrightarrow & \mathbb{Q}_p \end{array}$$

$\sigma|_K$ tiene sentido y fija $\mathfrak{P}$.

Para la inversa, $K \subset K_{\mathfrak{P}}$ es denso.

si $\sigma \in D(\mathfrak{P}|p)$, preserva el v.a. $\Rightarrow$ extendemos por continuidad. ($\alpha \in \mathfrak{P}$, $|\alpha^n|_{\mathfrak{P}} \to 0$

$\Downarrow$

($\sigma(\alpha) \in \mathfrak{P} \subset (\sigma(\alpha))_{\mathfrak{P}} < 1$) $\subset (\sigma(\alpha))_{\mathfrak{P}}^n = (\sigma(\alpha^n))_{\mathfrak{P}} \to 0$

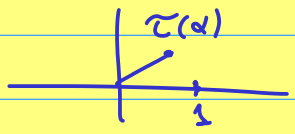
- si $|\ |_{\mathfrak{P}}$ Arquimedeano, $K_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) \\ \mathbb{C} & \text{sino} \end{cases}$

Obs: K es denso en $K_{\mathfrak{P}}$, pues en el caso real, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R} = K_{\mathfrak{P}}$

Mientras que en el caso complejo, $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$, y no en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R})$, $\exists \alpha \in K$ t.q. $\tau(\alpha) \notin \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\langle 1, \tau(\alpha) \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \tau(K) \subset \mathbb{C}$

$\uparrow$ denso.



Teo (Ostrowski) todo valor absoluto no trivial de K es equivalente a uno de estos, y estos no son equivalentes entre sí. ($\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$ / $|\ |_1 = |\ |_2^c$)

$S_\infty = \{ \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) \text{ como antes} \}$ hay $r+1$ elts.

<u>Ejercicio</u>: vale la fórmula del producto: $\prod_{\wp} |x|_\wp \cdot \prod_{v \in S_\infty} |x|_v = 1$

$\forall\, x \in K^\times \quad \left((x),\ N((x)) = |N_{K/\mathbb{Q}}(x)| \right)$

<u>Obs</u>: al definir un v.a. de K, por ejemplo $\wp_1$ | $\wp_1$ lo normalizamos como lo hicimos en $\mathbb{Q}$. Pero, $\mathbb{Q} \subset K$ con lo cual, $|\ |_\wp$ en $\mathbb{Q}$ ($\wp | p$) y otro $|\ |_{\wp'}$ en K nos gustaría (a veces) que sean compatibles, o sea $|\ |_\wp|_{\mathbb{Q}} = |\ |_p$. Esto da otra manera de normalizar al valor absoluto asociado al primo $\wp$.

<u>Ejemplo</u>: Supongamos $K/\mathbb{Q}$ cuadrático. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo tal que $p.\mathcal{O}_K$ es primo (p es inerte en K).

- $|p|_{\wp \mathcal{O}_K} = N(p.\mathcal{O}_K)^{-v_{p\mathcal{O}_K}(p)} = \frac{1}{p^2}$ $\quad \mathcal{O}_K/\wp \quad |2$
- $|p|_p = 1/p$ $\quad 2/p$

No coinciden. Si p se parte, $p.\mathcal{O}_K = \wp_1 . \wp_2$

- $|p|_{\wp_1} = N(\wp_1)^{-v_{\wp_1}(p)} = p^{-1} = 1/p$
- $|p|_p = 1/p$

Si queremos que $|\ |_p$ extienda a $|\ |_p$, usamos el

valor absoluto normalizado: $p \subset \mathcal{O}_k$

$$|\alpha|_p \overset{(*)}{=} |N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(\alpha)|_p^{\frac{1}{e(\mathfrak{p}|p)\cdot f(\mathfrak{p}|p)} = \frac{1}{[K_p:\mathbb{Q}_p]}}$$

En el ejemplo: si p inerte, $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, $[K_p:\mathbb{Q}_p]=2$

$$|N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(\alpha)|_p^{\frac{1}{[K_p:\mathbb{Q}_p]}} = |\alpha^2|_p^{1/2} = |\alpha|_p.$$

Si p se parte, $K_p = \mathbb{Q}_p$, $[K_p:\mathbb{Q}_p]=1 \Rightarrow |\alpha|_p = |\alpha|_p$.

Ejercicio: (1) ver que con $(*)$, $|\ |_p|_{\mathbb{Q}_p} = |\ |_p$

(2) Probar que $|\ |_p$ $(*)$ cumple la fórmula del producto.

Adèles

Dado $K/\mathbb{Q}$ finito, queremos construir un objeto que codifique todas las completaciones de K. Elección naive

$$\prod_p' K_p \times \prod_{v \in S_\infty} K_v \qquad (K_v = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$$

El problema de esta elección es que es demasiado grande (desde un punto de vista topológico). No es loc. compacto. (Recordar: K_p sí son loc. compactos, $\mathcal{O}_p = \{x : |x|_p \leq 1\}$ es

compacta, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son loc. compactos).

Vamos a definir los adèles como un producto restringido de $K_\wp$ con respecto a $\mathcal{O}_\wp$.

Dado S de lugares ($\text{lugares} = \{\wp \subset \mathcal{O}_K \text{ primo}\} \cup S_\infty$) tal que S es finito y $S_\infty \subset S$, definimos

$$\mathbb{A}_K^S = \prod_{\wp \notin S} \mathcal{O}_\wp \times \prod_{\nu \in S} K_\nu$$

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$, $S = \{\infty, 2\}$

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2 \times \prod_{p \neq 2} \mathbb{Z}_p.$$

Def: el conjunto de adèles es:

$$\bigcup_{\substack{S \supset S_\infty \\ S \text{ finito}}} \mathbb{A}_K^S \subset \prod_{\wp} K_\wp \times \prod_{\nu \in S_\infty} K_\nu$$

O sea, un adèle es una tira $\{x_\nu\}_{\nu \text{ lugares}}$ tal que $x_\wp \in \mathcal{O}_\wp$ (entero) para todo $\wp$ primo salvo finitos. ($\Leftrightarrow |x_\wp|_\wp \leq 1$)

Propiedades: 1. $\mathbb{A}_K$ es un anillo conmutativo. (pues $\mathcal{O}_\wp$ es un anillo). Escribir los detalles.

2. $\mathbb{A}_K$ es un espacio topológico con la topología:

Entornos de $\vec{0}$ son: $\prod_{p \notin S} \mathcal{O}_p \times \prod_{v \in S} B(0, \varepsilon)$

Con esta topología, $\mathbb{A}_K$ son loc. compactos (por Ty chonov).

3. Tenemos un morfismo natural de anillos:

$$\psi : K \longrightarrow \mathbb{A}_K \qquad (K \subset K_v)$$
$$x \longrightarrow (x, x, \dots, x, \dots)$$

Está bien definido pues si $x \in K$, $x \in \mathcal{O}_p$ $\forall p$ salvo finitos.

4. $(\mathbb{A}_K, +)$ es un espacio topológico.

Prop: $K \subset \mathbb{A}_K$ es discreto.

D/ Basta verlo en $x=0$ de K (por ser un gpo topológico). Queremos construir $U \subset \mathbb{A}_K$ abierto t.q.

$$U \cap K = \{\vec{0}\}$$

$$U = \prod_{p} \mathcal{O}_p \times \prod_{v \in S_\infty} B(0, 1/2) \quad \text{abierto.}$$

Afirmo: $U \cap K = \{\vec{0}\}$.

Si $x \in K$, $x \neq 0$, por la fórmula del producto,

$$\prod_{\wp} |x|_\wp \cdot \prod_{v \in S_\infty} |x|_v = 1$$

Si $x \in K \cap U$, $x \neq 0$, $\cdot |x|_\wp \leq 1 \ \forall \wp$

$$\cdot |x|_v < 1/2$$

$$\Rightarrow \prod_{\wp} |x|_\wp \cdot \prod_{v \in S_\infty} |x|_v \neq 1 \qquad (\#S_\infty \geq 1)$$

lo que contradice la fórmula del producto. ∎

Prop: $\overline{A_K}^{S_\infty} + K = \mathbb{A}_K$

Demo: Supongamos $K = \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}_p \overset{vs}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}_p$

Recordar que si $a \in \mathbb{Z}_p$, $a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n$, $0 \leq a_n < p$

Si $a \in \mathbb{Q}_p$, $\exists N$ / $p^N \cdot a \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow p^N a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n \Rightarrow$

$$a = \sum_{n \geq -N}^{+\infty} a_n p^n = \underbrace{\sum_{n=-N}^{-1} a_n p^n}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n p^n}_{\in \mathbb{Z}_p}$$

Luego dado $a \in \mathbb{Q}_p$, $\exists x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Z}_p$ t.q. $a = x + y$

con $x \in \mathbb{Z}[1/p]$. (K general, reemplazar p por

$\pi \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^2$, o sea $v_{\mathcal{P}}(\pi) = 1$, $a_n \in \mathcal{O}_K$ representantes de $\mathcal{O}_K/\mathcal{P}$)

Si: $(\alpha_v)_v \in A_K$, $T = \{p : \alpha_p \notin \mathbb{Z}_p\}$ finito.

Si $p \in T$, $\alpha_p = x_p + y_p$, donde $x_p \in \mathcal{O}$ ($\uparrow \mathbb{Z}[1/p]$), $y_p \in \mathbb{Z}_p$

Luego $x = \sum_{p \in T} x_p \in \mathcal{O}$ ($\in \mathbb{Z}[\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_r}]$, $\{p_1, \dots, p_r\} = T$)

- $|\alpha - x|_q \leq \max\{|\alpha|_q, \underbrace{|x|_q}_{\leq 1}\} \leq 1$ $\forall q \notin T \Rightarrow \alpha - x \in \mathbb{Z}_q$.

- Si $p \in T$, $|\alpha - x|_p = |(\alpha - x_p) - \sum_{\substack{q \in T \\ q \neq p}} x_q|_p \leq$

($y_p \in \mathbb{Z}_p$)

$$\leq \max\{\underbrace{|\alpha - x_p|_p}_{\leq 1}, \underbrace{|\sum_{\substack{q \in T \\ q \neq p}} x_q|_p}_{\leq 1}\} \leq 1$$

$\Rightarrow \alpha - x \in \mathbb{Z}_p$ $\forall p \in T$

$\Rightarrow \alpha - x \in \mathbb{A}_{\mathcal{O}}^{S_\infty} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{A}_{\mathcal{O}}^{S_\infty} + \mathcal{O}$ ■

Teo $\mathbb{A}_K/K$ es compacto.

Demo: recordar que si llamamos $R_\infty = \prod_{\sigma} K_\sigma \cong \mathbb{R}^{r+1}$ ($\mathbb{R}$-e.v. de dim $r+2$)

$$\gamma : K \xrightarrow{\pi} R_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) \mapsto (x_1, \dots, x_r, \mathrm{Re}(x_{r+1}), \mathrm{Im}(x_{r+1}), \dots)$$

$x \to (\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x), \tau_1(x), \dots, \tau_s(x))$

Vimos $\lambda(\mathcal{O}_K) \subset \mathbb{R}^n$ es un retículo. En particular,

$\mathbb{R}^n / \lambda(\mathcal{O}_K)$ es compacto. $\lambda(\mathcal{O}_K) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}}$

Π un dominio fundamental $= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : 0 \le a_i < 1 \right\}$

Luego $\boxed{\lambda(\mathcal{O}_K) + \underbrace{\Pi}_{\text{compacto}} = \mathbb{R}^n.}$

$$\mathbb{R}_\infty = \prod_{v \in S_\infty} K_v$$

Sea $D = \underbrace{\prod_{\sigma} \mathcal{O}_\beta}_{\text{compacto (Tychonov)}} \times \widetilde{\Pi}$, $\widetilde{\Pi} + \lambda(\mathcal{O}_K) = \mathbb{R}_\infty$ en los lugares del infinito.

$$D + K = (\underbrace{D + \mathcal{O}_K}_{\mathbb{A}_K^{S_\infty}}) + K = \mathbb{A}_K^{S_\infty} + K \overset{\text{Prop}}{=} \mathbb{A}_K \quad \square$$

$\mathbb{A}_K^{S_\infty}$, pues vale en los lugares del infinito, y sumar $\mathcal{O}_K$ a $\mathcal{O}_\beta$ es una biyección.