Idèles

Objetivo: entender $(\mathbb{A}_K, \cdot)$ como grupo abeliano.

Como conjunto, $\mathbb{A}_K^* = \{(\alpha_v)_v : \exists (\beta_v)_v \in \mathbb{A}_K$ con

$$(\alpha_v 1_v) \cdot (\beta_v)_v = (1_v)_v\}$$

$$\Rightarrow (\alpha_v \cdot \beta_v)_v \Rightarrow \alpha_v \cdot \beta_v = 1 \ \forall v.$$

(1º) α_v es no nulo en todo lugar v. Con esto, $\beta_v = \frac{1}{\alpha_v}$

(2º) $(\beta_v)_v \in \mathbb{A}_K$, o sea $\forall v \in S$ salvo finitos,

$\beta_v \in \mathcal{O}_v$ $(\text{si } v \notin S_\infty) \Leftrightarrow |\beta_v|_v \leq 1$ (*)

Recordar: S = cjto de "lugares" de K : $\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \text{ primo}\} \cup$

$\cup \ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$

$\quad \| \quad \uparrow$ la mitad de los complejos. El cjto tiene $r+s$ cosas.

S_∞

(*) $(\alpha_v)_v \in \mathbb{A}_K$ implica que $\forall v \in S \setminus S_\infty$, salvo finitos

$$|\alpha_v|_v \leq 1$$

De las condiciones en rojo, sacamos que $(\alpha_v)_v = 1$

$\forall v \in S \setminus S_\infty$ salvo finitos $\qquad \alpha_v \in \mathcal{O}_v^\times$

Luego como conjunto, $\mathbb{A}_K^* = \bigcup_{S \supset S_\infty \text{ finito}} \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v \in S} K_v^\times$

Cómo hicimos con los adèles, este conjunto es un producto restringido, con lo cual tiene naturalmente una topología como producto restringido, a saber: base de la top. alrededor de 1.

$U \subset \mathbb{A}_K^\times$ es abierto $\Leftrightarrow \exists\, S \supset S_\infty$, S finito t.q.

$$U = \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v \in S} B(1, \varepsilon)$$

ε chico para que $0 \notin B(\cdot)$

Def: el grupo de idèles es el conjunto $\mathbb{A}_K^\times$ con esta topología (asociada al producto restringido).

Lema: la topología de los idèles es estrictamente más fina que la topología subespacio.

Demo: Si U es abierto alrededor de 1 en la base para la topología subespacio $\Rightarrow$ lo es para la top. restringida.

$$U = \left(\prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \times \prod_{v \in S} B(1, \varepsilon) \right) \cap \mathbb{A}_K^\times$$

τ supongamos $\varepsilon < 1$.

U_1

$$\prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v \in S} B(1, \varepsilon) \leftarrow \text{elto abierto en } \mathbb{I}_K.$$

Veamos que es estrictamente más fina.

$1 \in V = \prod_{v \notin S_\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v \in S_\infty} B(1, 1/2)$ abierto en $\mathbb{I}_K$

Si V es abierto en la top. subespacio, $\exists\, U \subset \mathbb{A}_K$ abierto de la base alrededor de 1 con $U \cap \mathbb{A}_K^\times \subset V$.

Los elts de la base son: $\prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \times \prod_{v \in S} B(1, \delta) = U$

para algún S y algún δ. Pero si $p \in S$, $d_p \in K_p$

con $v_p(d_p) = 1$, $(1, \dots, \underset{\text{lugar } p}{d_p}, 1 \dots, 1) \overset{(d_v)}{\in} U \cap \mathbb{A}_K^\times$

$\left(K = \mathbb{Q},\ 2 \notin S \quad (\underset{p=?}{2}, 1, \dots, 1, __) \in \mathbb{Z}_2 \times \prod_{\substack{p \notin S \\ p \neq 2}} \mathbb{Z}_p \times \prod_{p \in S} B(1, \delta)\right)$

Luego $(d_v)_v \in U \cap \mathbb{A}_K^\times$ y no están en V. ∎

Obs: $\mathbb{I}_K$ es localmente compacto. Basta verlo en el 1,

$$U = \prod_{v \notin S_\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v \in S_\infty} B(1, 1/2)$$

es abierto, y su clausura es $\underbrace{\prod_{v \notin S_\infty} \mathcal{O}_v^\times \times \prod_{v \in S_\infty} \overline{B(1, 1/2)}}_{\text{compacto por Tychonov.}}$

Ejercicio: probar que $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot)$ es compacto. $B(1, \bar{p}^1)$

Sugerencia: basta ver cerrado y totalmente acotado.

↳ $\mathbb{Z}_p^\times / \{\alpha \in \mathbb{Z}_p : \alpha \equiv 1 (p^1)\}$ es

finito.

Cómo con los adèles,

$$\psi : K^\times \longrightarrow \mathbb{I}_K \qquad \text{morfismo de grupos.}$$
$$x \to (x, \dots, x, \dots)$$

Obs: $\alpha \in K^\times$, $v_\mathfrak{p}(\alpha) = 1$ $\forall \mathfrak{p}$ salvo finitos. (o sea $|\alpha|_\mathfrak{p} = 1$ $\forall \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ primo salvo finitos).

Ejercicio: $\psi(K^\times) \subset \mathbb{I}_K$ es discreto. (fórmula del producto: $\prod_{v \in S} |\alpha|_v = 1$ si $\alpha \in K^\times$).

Existe una función natural

$$Id : \mathbb{I}_K \to \mathcal{F} = \{\text{ideales fraccionarios de } K\}$$
$$(\alpha_v)_v \to \prod_{\substack{\mathfrak{p} \text{ primo} \\ (v \notin S_\infty)}} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})}$$

Bien definido pues $v_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p}) = 0$ $\forall \mathfrak{p}$ primo salvo finitos.

Además, Id es un morfismo de grupos sobreyectivo, pues dado $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ primo,

$$(\alpha_v)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq \mathfrak{p} \\ \alpha_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2 & \text{si } v = \mathfrak{p} \end{cases}$$

$$Id((d_v)_v) = \mathfrak{P}^1, \quad \mathcal{F} = \langle \mathfrak{P} : \mathfrak{P} \text{ primo} \rangle.$$

$$W_v(Id) = \prod_{v \in S} U_v^\times \times \prod_{v \in S_\infty} K_v^\times = \mathbb{I}_K^{S_\infty}$$

Luego $\quad \mathcal{F} \simeq \mathbb{I}_K / \mathbb{I}_K^{S_\infty}$

Obs: $(d_v)_v \in \mathbb{I}_K$, $Id((d_v)_v)$ es un ideal principal $\iff (d_v)_v \in K^\times \cdot \mathbb{I}_K^{S_\infty}$ ($"K^\times = \psi(K^\times)"$)

$(\Leftarrow)$ Si $\alpha \in K^\times$, $(\alpha) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{v_\mathfrak{P}(\alpha)} = Id(\psi(\alpha))$

$(\Rightarrow)$ Si $Id((d_v)_v) = (\beta) \Rightarrow v_\mathfrak{P}(d_\mathfrak{P}) = v_\mathfrak{P}(\beta)$ $\forall \mathfrak{P} \in S \setminus S_\infty$

$$\Rightarrow (d_v)_v = (\beta)_v \cdot \underbrace{\left(\frac{d_v}{\beta}\right)_v}_{\in \mathbb{I}_K^{S_\infty}}$$

Por el Tercer teo de isomorfismos,

$$Cl(K) = \mathcal{F}/(d) \overset{Id}{\simeq} \mathbb{I}_K / K^\times \cdot \mathbb{I}_K^{S_\infty}$$

El grupo $\mathbb{I}_K$ tiene una función volumen dada por

$$|\ |\ : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

$$|(d_v)_v| = \prod_v |d_v|_v$$

Como $|d_v|_v = 1$ $\forall v \in S$ salvo finitos, la función tiene sentido. Además, $|\ |$ es un morfismo de grupos. ($\mathbb{R}_{>0}$ es un grupo con el producto; $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ no es conexo, $\mathbb{R}_{>0}$ es la componente conexa de 1).

Llamemos $\mathbb{I}_K^1$ a su núcleo. La función volumen da una sección:

$$1 \to \mathbb{I}_K^1 \to \mathbb{I}_K \xrightarrow{|\ |} \mathbb{R}_{>0} \to 1$$

Afirmo: $|\ |$ es sobreyectiva y admite una sección.

Luego, $\mathbb{I}_K \simeq \mathbb{I}_K^1 \times \mathbb{R}_{>0}$

Obs: la fórmula del producto implica que $K^\times \subset \mathbb{I}_K^1$.

Veamos la afirmación: si $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{R}) \neq \emptyset$

o sea $\exists\, v_0 \in S_\infty$ t.q. $K_v = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} r & & \longrightarrow & & |r| \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{I}_K & \xrightarrow{|\ |} & \mathbb{R} \end{array}$$ listo.

$$r \to d_v = \begin{cases} 1 & v \neq v_0 \\ r & \text{si } v = v_0 \end{cases}$$

Sino, $v_0 \in S_\infty$, $K_v = \mathbb{C}$

$r \longrightarrow |\sqrt{r}|^2 = r$

$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{I}_K \xrightarrow{|\ |} \mathbb{R}_{>0}$ ✓

$r \to (d_v)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq v_0 \\ \sqrt{r} & \text{si } v = v_0 \end{cases}$ ∎

Por la observación, $\mathbb{I}_K/K^\times \simeq \mathbb{I}_K^1/K^\times \times \mathbb{R}_{>0}$

($\mathbb{I}_K/K^\times$: no es compacto. $\mathbb{I}_K^1/K^\times$: no es compacto. $\mathbb{R}_{>0}$: no es compacto.)

Teo: $\mathbb{I}_K^1/K^\times$ es un grupo compacto.

Corolario: $Cl(K)$ es finito.

Demo: $Cl(K) \overset{Id}{\simeq} \mathbb{I}_K/K^\times \cdot \mathbb{I}_K^{S_\infty}$

Por definición de la topología, $\mathbb{I}_K^{S_\infty}$ es abierto.

$\Rightarrow K^\times \cdot \mathbb{I}_K^{S_\infty}$ es abierto. $\Rightarrow \bar{1}$ en el cociente (con la topología cociente) es abierto. $\Rightarrow \mathbb{I}_K/K^\times \mathbb{I}_K^{S_\infty}$ adquiere la topología discreta.

Si vemos que también es compacto, ganamos.

$\mathbb{I}_K \overset{(=)}{} \mathbb{I}_K^1 \cdot \mathbb{I}_K^{S_\infty} = \mathbb{I}_K^1 \cdot K^\times \cdot \mathbb{I}_K^{S_\infty}$

$$I_K / K^\times \cdot I_K^{S_\infty} \simeq I_K^1 / (I_K^1 \cap K^\times \cdot I_K^{S_\infty})$$

3º Teo de iso: $I_K^1 \twoheadrightarrow I_K / K^\times \cdot I_K^{S_\infty} \Rightarrow I_K^1 / I_K^1 \cap K^\times \cdot I_K^{S_\infty} \simeq I_K / K^\times \cdot I_K^{S_\infty}$

$K^\times \subset I_K^1 \Rightarrow K^\times \subset I_K^1 \cap K^\times \cdot I_K^{S_\infty}$

$$I_K^1 / K^\times \twoheadrightarrow I_K^1 / (I_K^1 \cap K^\times \cdot I_K^{S_\infty}) = I_K / K^\times \cdot I_K^{S_\infty}$$

$I_K^1 / K^\times$ es compacto (Teo)

$I_K^1 / (I_K^1 \cap K^\times \cdot I_K^{S_\infty})$ es compacto. ∎

Obs: existen objetos llamados grupos de clases de rayos, la finitud de ellos es automática con este tipo de demostración.

Idea de demostración del Teorema

Teo 2: (Minkowski-Chevalley-Weil): $\exists S > 0$ tal que si $(\eta_v)_v \in I_K$ con $|\eta| > S \Rightarrow \exists\, x \in K^\times$ con $|x|_v \leq |\eta_v|_v$ $\forall\, v \in S$.

La demostración del Teo 2 sigue las "ideas" de Minkowski, para ello precisamos entender el volúmen

cómo una integral. Precisamos "medidas" en

G_p, $\mathbb{I}_K$ se sean compatibles con la acción
↑ cpto
del grpo (medidas de Haar). $\mu(V) = \mu(a.V)$
↑ trasladado.

Ejemplo: en $\mathbb{R}$, dx (medida usual) es invariante por traslación. ($x \to x+r$)

· en $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, una medida de Haar es $\frac{dx}{x}$

($x \to x.t$, $t \in \mathbb{R}^\times$)

En grpos localmente compactos siempre existe una medida de Haar invariante a izquierda/derecha (cuidado: no tienen por qué coincidir) y es única salvo constantes. Valen resultados tipo Fubini (con esto sale la demo de M-C-W).

Teo 2 ⇒ Teo.

Lema: $\mathbb{I}_K^1 \subset \mathbb{I}_K$, $\mathbb{I}_K^1 \subset \mathbb{A}_K$.

(1º) $\mathbb{I}_K^1 \subset \mathbb{A}_K$ es cerrado.

(2°) La topología de $\mathbb{I}_K^1$ que hereda de $\mathbb{I}_K$ coincide con la topología que hereda de $\mathbb{A}_K$.

Demostremos el Teorema: $\mathbb{I}_K^1/K^\times$ es compacto.

Sea $\eta \in \mathbb{I}_K$ t.q. $|\eta| > \delta$ ← del Teo de M-C-W. Sea

$M \subset \mathbb{A}_K$, $M = \prod_{v \notin S_\infty} \mathcal{O}_v \times \prod_{v \in S_\infty} \{x \in K_v : |x|_v \leq 1\}$

compacto. $\tilde{M} = \eta . M$, $\tilde{M}$ es compacto.

Sea $\beta \in \mathbb{I}_K^1$, luego $|\eta\beta^{-1}| = |\eta| > \delta$

Por Teo (M-C-W), $\exists\, x \in K^\times$ t.q.

$$|x|_v \leq |\eta_v \beta_v^{-1}|_v \quad \forall v$$

$\Rightarrow \beta \in x^{-1}.\tilde{M}$ ($x\beta \in \tilde{M} = \eta . M \iff x\beta\eta^{-1} \in M \iff |x\beta\eta^{-1}|_v \leq 1 \ \forall v$)

$\Rightarrow \beta \in K^\times . \tilde{M} \Rightarrow \beta \in K^\times . (\tilde{M} \cap \mathbb{I}_K^1)$

$\tilde{M}$ cpcto en $\mathbb{A}_K$; $\tilde{M} \cap \mathbb{I}_K^1$ compacto en $\mathbb{A}_K \cap \mathbb{I}_K^1$

por el lema es compacto en $\mathbb{I}_K^1$.

cpcto $\to \tilde{M} \cap \mathbb{I}_K^1 \to \mathbb{I}_K^1/K^\times$ ← cpcto.

∎