Teoría Algebraica de Números -Primera entrega

2do. Cuatrimestre 2020

(1) Sean K, L cuerpos. Recordar que si $K \subset L$ entonces L tiene una estructura de K-espacio vectorial, y denotamos por $[L : K]$ a la dimensión de L como K-espacio vectorial. Probar que si $K \subset L \subset M$ son cuerpos, y $[M : K]$ es finita, entonces $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$.

(2) Sea K un cuerpo y L_1, L_2 extensiones finitas de K. Supongamos que L_1 y L_2 son extensiones de Galois de K.
   (a) Probar que entonces $L_1 \cdot L_2$ es una extensión de Galois de K.
   (b) Por el ítem anterior tenemos una función
   $$\psi : \mathrm{Gal}(L_1 \cdot L_2/K) \to \mathrm{Gal}(L_1/K) \times \mathrm{Gal}(L_2/K),$$
   dada por $\psi(\sigma) = (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2})$ (restringir el morfismo a cada cuerpo). Probar que ψ es un morfismo inyectivo.
   (c) Sean F, L dos extensiones finitas de K ambas contenidas en un cuerpo M tales que F/K es Galois. Probar que $F \cdot L/L$ es Galois y además
   $$\mathrm{Gal}(F \cdot L/L) \simeq \mathrm{Gal}(F/F \cap L),$$
   por la función restricción. Deducir que $[F \cdot L : L] = [F : F \cap L]$.
   (d) Probar que $[L_1 \cdot L_2 : K] = \frac{[L_1:K][L_2:K]}{[L_1 \cap L_2:K]}$.
   (e) Deducir que la función del segundo ítem es suryectiva si y sólo si $L_1 \cap L_2 = K$.

(3) Usar el ítem anterior para encontrar una extensión de $\mathbb{Q}$ con grupo de Galois: $\mathbb{Z}/6$, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ y $S_3 \times \mathbb{Z}/2$.

(4) Hallar una base de $\mathcal{O}_K$ para $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

(5) Un retículo en $\mathbb{R}^n$ en un $\mathbb{Z}$-módulo $L \subset \mathbb{R}^n$ libre de rango n.
   (a) Sean $L_1 \subset L_2$ retículo de $\mathbb{R}^n$. Probar que L_2/L_1 es finito, y su cardinal coincide con $|\det(C_{L_1,L_2})|$, donde C_{L_1,L_2} es la matriz de cambio de base de L_1 a L_2.
   (b) Utilizar el resultado anterior para probar que si K es un cuerpo de números (extensión finita de $\mathbb{Q}$), y $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros, entonces para todo $\alpha \in \mathcal{O}_K$ no nulo, $\mathcal{N}(\alpha \cdot \mathcal{O}_K) := |\mathcal{O}_K/\alpha \cdot \mathcal{O}_K| = |\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|$.